

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА.

*Брестский государственный технический университет
Брест, Беларусь*

Как известно, при создании элементов механизмов, машин первостепенным требованием является снижение их материалоемкости при одновременном обеспечении прочностных и жесткостных характеристик.

Для решения такой проблемы важным обстоятельством является создание эффективных методов исследования НДС (напряженно-деформированного состояния) элементов, которые в реальных условиях подвергаются воздействию механических усилий и температурных полей. Часто рассматриваемые элементы представляют собой тела вращения.

Материалы, используемые для создания конструктивных элементов имеют определенную неоднородность, которую можно разделить на микронеоднородность (дефекты и неправильность кристаллической решетки, молекулярная структура полимеров и т.д.) и макронеоднородность (параметры, определяющие свойства среды, зависят от координат и осреднены по области, которая является большой в сравнении с размерами структуры элементов тел).

С позиции инженерной практики интерес представляет исследование НДС тел с макронеоднородностью (упругие тела с непрерывной неоднородностью).

Неоднородность упругих свойств возникает в процессах формирования тел (процессы отливки), при различных технологических процессах (различные виды обработки тел), эксплуатации конструктивных элементов на практике (воздействие температуры, радиации и т.д.). В зависимости упругих параметров среды (параметры Ламе) от координат различают три типа неоднородности тел: непрерывная, кусочная и случайная.

При действии на тела высоких температур изменение температуры T приводит к существенному изменению модуля Юнга $E = E(T)$, коэффициента линейного расширения $\alpha = \alpha(T)$ при постоянном коэффициенте Пуассона ν [1].

В работе [2] показано, что максимальные напряжения в нагретой толстостенной трубе с учетом изменения модуля Юнга от температуры \sim на 40% меньше чем при постоянном модуле. Поэтому постановка и реализация такого рода задач актуальна и имеет практическую ценность.

Для исследования НДС в осесимметричных телах с непрерывной неоднородностью необходимо поставить краевую задачу теории упругости (термоупругости) и разработать эффективный метод ее реализации.

Аналитическое решение такого рода задач практически невозможно в связи со сложной геометрией области тел и граничных условий поэтому в настоящее время применение нашли различные численные методы.

Наиболее распространенным численным методом решения краевых задач является метод конечных элементов (МКЭ). Однако он не свободен от недостатков.

Для решения поставленной задачи используем метод потенциала с помощью которого дифференциальные уравнения сводится к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода и который имеет некоторые преимущества по сравнению с МКЭ [3].

Согласно [2] краевая осесимметричная задача неоднородной термоупругости сводится к решению дифференциальных уравнений в частных производных: уравнения равновесия

$$\Delta u - \frac{u}{\rho^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_0^r \alpha(T) dT \right) = - \frac{2(1+\nu)}{E^2} \frac{dE}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \sigma_{\rho\rho} + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{\rho z} \right); \quad (1)$$

$$\Delta w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_0^r \alpha(T) dT \right) = - \frac{2(1+\nu)}{E^2} \frac{dE}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{\rho z} + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{zz} \right),$$

где u, w – перемещения, ρ, z, ϑ – цилиндрические координаты $e = \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z}$,

и граничных условий

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{3\nu}{1-2\nu} e \right) n_\rho + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) n_z = \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_0^r \alpha(T) dT, \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) n_\rho + \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{3\nu}{1-2\nu} e \right) n_z = \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_0^r \alpha(T) dT,$$

где n_ρ, n_z – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности тела, а также уравнений теплопроводности

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial T^*}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T^*}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} = 0,$$

где $T^* = \int_0^r \lambda(T) dT$, $\lambda(T) = \lambda_0(1 - kT)$ – коэффициент теплопроводности, k – эмпирический коэффициент.

Используя метод возмущений [2] краевая задача (1), (2) сводится к решению осесимметричной краевой задачи стационарной термоупругости однородного тела (нулевое приближение) и последовательности краевых задач теории упругости (последующие приближения).

Представляя температуру T^* в виде функции Грина вместо (3) получаем интегральное уравнение краевой задачи теплопроводности

$$2\pi T^*(x) = \int_L \frac{dT^*}{dn_y} \rho_x dl_y \frac{4}{\sqrt{R^2}} K + \int_L T^*(y) \rho_y dl_y \frac{2}{\sqrt{R^2}} \left\{ \frac{2\rho_y}{r^2} [(\rho_y - \rho_x) n_{\rho y} + Z n_{zy}] - n_{\rho y} \right\} E + n_{\rho y} K. \quad (4)$$

Здесь x, y – параметрическая и текущая точки при интегрировании, $r^2 = \rho_x^2 + \rho_y^2 - 2\rho_x \rho_y \cos Q + Z^2$, $Z = Z_y - Z_x$; $Q = \vartheta_y - \vartheta_x$, dl_y – элемент дуги меридионального контура L ; E, K – эллиптические интегралы.

Решение системы (1) разыскиваем в виде

$$u_\rho^0 = u_\rho^u + u_\rho^T, \quad (5)$$

$$u_z^0 = u_z^u + u_z^T,$$

где u_ρ^u, u_z^u – общие решения однородных дифференциальных уравнений (1) приведены в [4], u_ρ^T, u_z^T – частные решения Гудьера, интегральное представление которых имеет вид

$$u_\rho^T = a \left\{ C \int_{L \cup S} \left\langle \frac{dT}{dn_y} (\rho_x I_4 - \rho_y I_1) - T(y) \cdot \left[n_y \left[(\rho_y^2 + \rho_x^2) I_2 - \rho_y \rho_x (I_3 + I_5) - I_1 \right] + \right. \right. \right. \right. \quad (6)$$

$$\left. \left. \left. \left. + n_{zy} [Z(\rho_y I_2 - \rho_x I_5)] \right] \right\} \rho_y - b \int_S T(y) \cdot \rho_y (\rho_x I_5 - \rho_y I_2) dS_y \right\},$$

$$u_z^T = a \left\{ C \int_{L \cup S} \left\langle \frac{dT}{dn_y} \cdot I_4 + T(y) \left[n_\rho Z(\rho_y I_5 - \rho_x I_2) + n_{zy} (Z^2 I_5 - I_4) \right] \right\} \rho_y dl_y - b \int_S T(y) \rho_y Z I_5 dS_y \right\}.$$

Здесь интегралы $I_1 - I_9$ приведены в [3], $a = \frac{(1+\nu)^2 \alpha_0}{2\pi(1-\nu)E(T)}$, $C = \frac{\gamma}{k\lambda_0}$, $b = 1 + \frac{\gamma}{k}$,

k, γ - постоянные, которые определяются экспериментально.

С помощью соотношений Дюгамеля-Неймана были построены интегральные уравнения напряжений $\sigma_{\rho\rho}^0, \sigma_{zz}^0, \sigma_{\rho z}^0, \sigma_{g g}^0$, которые соответствуют (5) (выражения $\sigma_{\rho\rho}^u, \dots, \sigma_{g g}^u$, приведены в [4], а для $\sigma_{\rho\rho}^T, \dots, \sigma_{g g}^T$, построены интегральные уравнения, которые здесь не приводятся в виду их громоздкости) и сингулярные интегральные уравнения (СИУ) краевой задачи термоупругости на нулевом приближении

$$v_\rho(x) + \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_L [v_\rho(y)(A_{\rho\rho} n_{\rho x} + A_{\rho z} n_{z x}) + v_z(y)(B_{\rho z} n_{z y})] dy = p_\rho(x) + p_\rho^T(x), \quad (7)$$

$$v_z(x) + \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_L [v_\rho(y)(A_{\rho z} n_{\rho x} + A_{z z} n_{z x}) + v_z(y)(B_{z z} n_{z x})] dy = p_z(x) + p_z^T(x),$$

где v_ρ, v_z - плотности потенциала простого слоя, $A_{\rho\rho}, \dots, B_{z z}$ - коэффициенты, полученные в [4], $p_\rho(x), p_z(x)$ - компоненты механических усилий, $p_\rho^T(x), p_z^T(x)$ - компоненты фиктивной температурной поверхностной нагрузки.

$$\begin{aligned} p_\rho^T(x) &= -(\sigma_{\rho\rho}^T \cdot n_{\rho x} + \sigma_{\rho z}^T \cdot n_{z x}), \\ p_z^T(x) &= -(\sigma_{\rho z}^T \cdot n_{\rho x} + \sigma_{z z}^T \cdot n_{z x}) \end{aligned} \quad (8)$$

В результате решения (7) определялись плотности v_ρ, v_z , а затем напряжения $\sigma_{\rho\rho}^0, \dots, \sigma_{g g}^0$. Значения напряжений использовались для решения краевой задачи теории упругости на первом приближении. Здесь решение задачи теории упругости разыскиваем в виде

$$\begin{aligned} u_\rho^{(1)} &= u_\rho^u + u_\rho^N, \\ u_z^{(1)} &= u_z^u + u_z^N. \end{aligned} \quad (9)$$

Интегральные представления u_ρ^u и u_z^u известны в [4], а

$$\begin{aligned} u_\rho^N &= -\frac{(1+\nu)^2}{4\pi(1-\nu)} \int_S f(T) \left[\frac{\chi_\rho}{E(T)} C_{\rho\rho}^N + \frac{\chi_z}{E(T)} C_{\rho z}^N \right] dS_y, \\ u_z^N &= -\frac{(1+\nu)^2}{4\pi(1-\nu)} \int_S f(T) \left[\frac{\chi_\rho}{E(T)} C_{z\rho}^N + \frac{\chi_z}{E(T)} C_{z z}^N \right] dS_y, \end{aligned} \quad (10)$$

где $f(T) = \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT}$, $\chi_\rho = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \sigma_{\rho\rho}^0 + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{\rho z}^0 \right)$, $\chi_z = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \sigma_{\rho z}^0 + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{z z}^0 \right)$, $\chi_z = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \sigma_{\rho z}^0 + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{z z}^0 \right)$

$C_{\rho\rho}^N, \dots, C_{z z}^N$ - аналогичны соотношениям в работе [4].

Система СИУ такая же как и (7), но вместо p_ρ^T и p_z^T берется фиктивная нагрузка, p_ρ^N, p_z^N , интегральные выражения $\sigma_{\rho\rho}^N, \sigma_{g g}^N$ здесь приводить не будем.

$$\begin{aligned} p_\rho^N &= -\left(\sigma_{\rho\rho}^N \cdot n_{\rho x} + \sigma_{\rho z}^T \cdot n_{z x} \right) \\ p_z^N &= -\left(\sigma_{\rho z}^N \cdot n_{\rho x} + \sigma_{z z}^N \cdot n_{z x} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

На основе метода механических квадратур разработан алгоритм численного решения интегральных уравнений и составлена программа для ПЭВМ. Интегралы вычислялись с помощью квадратурных формул Гаусса и Лашенова. Реализован тестовый пример. В качестве примера решена задача о нагреве поллой сферы. Результаты числен-

ного решения сравнивались с решением в [2]. Ниже на рисунке показаны соответствующие графики напряжений.

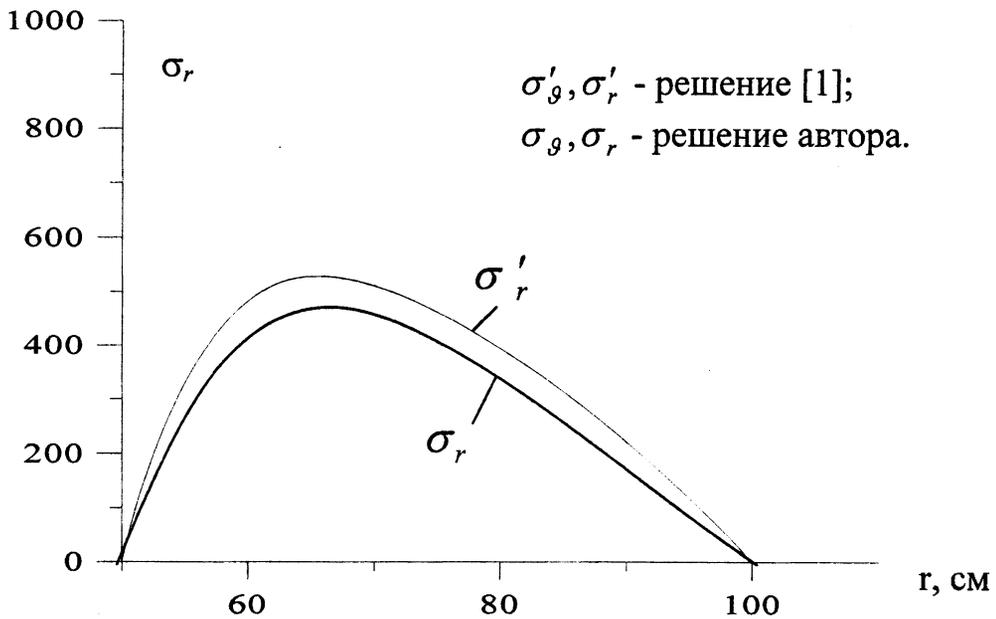


Рис. 1. Распределение радиальных напряжений.

Здесь:

$$T_a = 500^\circ\text{C}; T_b = 400^\circ\text{C}. \lambda_0 = 0,11 \frac{\text{ккал} \cdot \text{с}}{\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{град}}; \nu = 0,33; a = 0,5\text{м}; b = 1\text{м}.$$

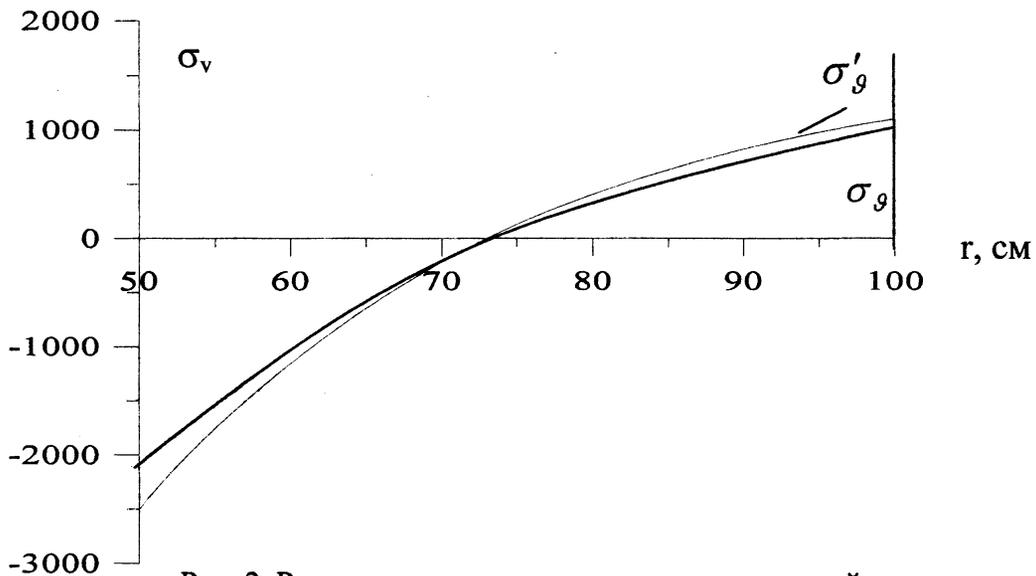


Рис. 2. Распределение тангенсиальных напряжений.

Литература. 1. Писаренко Г.С. и др. Прочность материалов при высоких температурах. Киев. «Наукова думка», 1966. 2. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М. Изд-во МГУ. 1976. 3. Копейкин Ю.Д., Хвисевич В.М. Интегральные уравнения осесимметричной краевой задачи термоупругости. – М.// Известия АН СССР. МТТ 1991. №6. – С. 52-57. 4. Копейкин Ю.Д. Калинин А.А. Прямое решение осесимметричной второй задачи теории упругости методом бигармонических потенциалов // Изд. АН БССР. Сер. физ. мат. наук. – 1977. - №3. С. 85-90.