

резания и скорости, производительность будет ниже. Это доказывает график на рисунке 3.

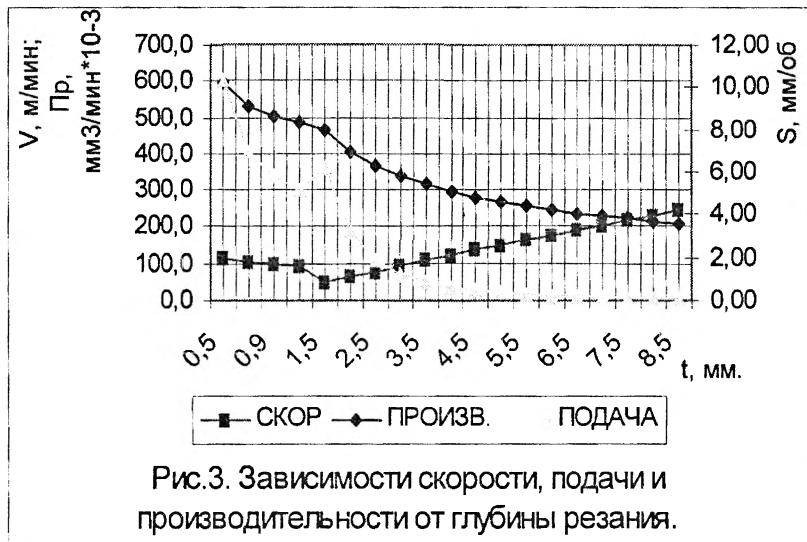


Рис.3. Зависимости скорости, подачи и производительности от глубины резания.

**Литература.** 1. Барбашов Ф.А., Стойкостные зависимости при резании металлов, М., 1958г. 2. Зорев Н.Н. Креймер Г.С., Высокопроизводительная обработка стали твёрдосплавными резцами при прерывистом резании, М., Машгиз, 1961г. 3. Мещеряков С.С., Саромотина Т.Г., Скоростное и силовое точение сталей повышенной прочности М., Оборонгиз, 1957г. 4. Ящерицын П.И. Еременко М.Л. Фельдштейн Е.Э. Теория резания. Физические и тепловые процессы в технологических системах: Учеб. Для вузов/ Мн.: Выш. Шк., 1990. – 512

УДК 621.01:621.08

С.В. Кухта, М.Л. Хейфец, В.В. Яскевич

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕРМОФОРМОВКИ ПОЛИМЕРНЫХ ИЗДЕЛИЙ СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

*Полоцкий государственный университет  
Новополоцк, Беларусь*

Основной целью моделирования процесса термоформовки является обеспечение рационального выбора параметров формообразования, получение достаточно точной геометрии и физико-механических характеристик полимерного изделия на всех этапах процесса, для повышения качества изделий и уменьшения материальных затрат и т.п. Моделирование процесса термоформовки для полимерных сложнопрофильных изделий проводят методом конечных элементов (МКЭ). Алгоритм МКЭ при моделировании формообразования, в общем случае, состоит из следующих этапов:

1. Разбиение заданной области на конечные элементы (начальная уравновешенная конфигурация) в вычисляемый момент времени  $t$ .
2. Определение аппроксимирующих функций конечных элементов (аппроксимирующие функции выражаются через неизвестный вектор узловых значений и функции формы конечных элементов). Когда для всех элементов области используется аппрок-

аппроксимирующая функция одного и того же вида, тогда задача сводится к определению аппроксимирующей функции типичного элемента области. Для моделирования термоформовки в качестве аппроксимирующей функции элементов обычно выбирают перемещения.

3. Составление ансамбля конечных элементов, т. е. объединение аппроксимирующих функций элементов в общую модель искомой непрерывной функции. Определение функции формы. Определение матрицы масс, жесткости элементов. Составление уравнения для отдельного элемента на основе метода баланса работ. Дискретизация этого уравнения и объединение элементов по узловым точкам.

4. Выбор модели поведения материала. Расчет внутренних силовых и геометрических факторов по выбранным моделям.

5. Определение вектора узловых значений искомой непрерывной функции в определенный момент времени. Решение системы уравнений относительно неизвестного вектора узловых значений. Определение соответствующих перемещений элемента и пересчет координат.

6. Проверка решения на сходимость. Проверка на необходимость разбиения элемента и автоматическая генерация новой сетки (автоматический ремешинг). Проверка условия завершения процесса. Если процесс не окончен, то переход к следующему шагу итерации ( $t = t + \Delta t$ ).

При моделировании процесса термоформовки различают два основных типа конечных элементов: с мембранной аппроксимацией и толстолистовые. Для элементов с мембранной аппроксимацией допускается очень малая толщина и размеры элемента, а также не учитывается сопротивление изгибу нагретого полимера. Движение мембраны можно рассматривать в декартовой системе координат. Позиция вектора в случайной точке  $P$  на поверхности мембраны в текущем и исходном положении обозначается соответственно  $\bar{x}$  и  $\bar{X}$ . Зависимость, описывающая движение мембраны, выражается через  $\bar{x} = \bar{X} + \bar{u}$ , где  $\bar{u}$  - вектор смещения. Для толстолистовых элементов не пренебрегают сопротивлением изгибу в отличие от мембранных. Деформация и напряжение рассматриваются вследствие изменения толщины листа. Толстолистовые элементы обеспечивают большую точность модели, чем мембранные, но более сложны при реализации. Условие не сжимаемости в этих элементах не может удовлетворяться в точности, это должно быть наложено из-за численных ограничений. Основное преимущество толстолистовых элементов в том, что они позволяют спрогнозировать эффект локализации, такой как изгиб и разрыв вблизи ограничений и в углах, концентрация напряжений вблизи границ. В обоих типах используются треугольные элементы.

Типичные уравнения для конечных элементов выводятся из метода баланса работ, требующего равенства внутренних и внешних работ при пластическом деформировании. При этом возможны различные подходы.

1. Допускается, что силы инерции могут игнорироваться. Тогда принцип возможных работ для мембранных элементов записывается уравнением:

$$\int_{A_0} \bar{\sigma} : \delta \bar{\lambda} \cdot h_0 dA_0 = \int_A p \cdot \bar{n} \delta \bar{v} dA$$

где  $A$  и  $A_0$  - площади деформированной и недеформированной мембраны соответственно;  $p$  - приложенное давление вдоль нормального вектора  $\bar{n}$ , перпендикулярного поверхности деформированной мембраны;  $\bar{v}$  - вектор скорости мембраны;  $h_0$  - начальная толщина мембраны;  $\bar{\sigma}$  - тензор деформаций;  $\delta \bar{\lambda}$  - показатель деформации элемента.

Уравнения конечных элементов при равновесии получаются путем линеаризации (приведение уравнение к дискретному виду) из уравнения виртуальных работ и

объединения элементов по узловым точкам. Поскольку уравнения конечных элементов является обычно нелинейными, то их решение ищется в виде приращений перемещений узлов элемента. Затем переходят к процессу пошаговых вычислений. На основании всех известных из предыдущего расчета уравновешенных положений элементов получают аппроксимирующие решения для нового положения. Решение может быть улучшено итерациями.

Выбор формул и последующее использование МКЭ определяется по виду используемых уравнений поведения материала.

2. Метод баланса работ вместе с методом штрафов удовлетворяет квазистатическому условию и записывается уравнением:

$$\int_{\Omega} \rho \cdot \ddot{u}_i \cdot \delta \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} \nu \cdot \dot{u}_i \cdot \delta \dot{u}_i d\Omega = \int_{\Omega} \bar{f}_i \cdot \delta \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma_r} \bar{T}_i \delta u_i \cdot \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_c} P_i \cdot \delta \dot{u}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta D_{ij} d\Omega$$

где  $\delta \dot{u}_i$  – виртуальная скорость перемещения  $i$  – го элемента;  $\Omega$  – площадь области элемента;  $\Gamma_r$  – область приложенных сил;  $\Gamma_c$  – область контакта;  $\bar{f}_i$  – силы веса элемента;  $\bar{T}_i$  – приложенные силовые факторы;  $P_i$  – силы, возникающие при контакте изделия с формой;  $\sigma_{ij}$  – тензор внутренних напряжений, возникающих в материале;  $\delta D_{ij}$  – степень деформации элемента;  $\nu$ ,  $\rho$  – коэффициент упругости и плотность соответственно.

Линеаризуя уравнение и объединяя элементы по узлам, получают следующую систему уравнений конечных элементов:

$$M \cdot \ddot{u} + C \cdot \dot{u} = P - F$$

где  $M$ ,  $C$  – матрица масс и матрица жесткости соответственно;  $u$  – узловое перемещение;  $P$  – внешние и контактные силы;  $F$  – внутренние узловые силы.

Преобразовывая уравнение конечных элементов, получают пошаговое выражение для определения перемещений узлов в момент времени  $t + \Delta t$ ,

$$u^{t+\Delta t} = \left( \frac{M}{\Delta t^2} + \frac{C}{2\Delta t} \right)^{-1} \left( P - F + \frac{M}{\Delta t^2} (2u^t - u^{t-\Delta t}) + \frac{C}{2\Delta t} u^{t-\Delta t} \right)$$

Определение величины шага  $\Delta t$  сложная задача и не достаточно изучена, поэтому выбор шага во многом зависит от опыта расчетчика. Величины усилий  $F_i$  определяются исходя из выбранной модели поведения материала. Силы  $P$  – приложенная нагрузка в узлах и силы, возникающие в момент контакта изделия с формой.

3. Метод баланса работ допускает отсутствие сил тяжести элемента. Равенство внешних и внутренних работ записывается уравнением:

$$\int_{B_0} \delta u \cdot \rho_0 \cdot \ddot{u} dV_0 = - \int_{B_0} \delta E : S dV_0 + \int_{\delta B} \delta u \cdot T dS \quad \forall \delta u$$

где  $B_0$  и  $\delta B$  соответственно площади поверхности недеформированной и деформированной мембраны;  $\rho_0$  – плотность;  $\ddot{u}$  – вектор ускорений;  $T$  – внешняя сила давления на поверхности;  $\delta u$  – возможный вектор смещения;  $\delta E$  – тензор деформации Грина-Лагранжа;  $S$  – тензор напряжений.

После дискретизации уравнения равенства работ и объединения каждого элемента по узлам получают систему уравнений конечных элементов:

$$M \cdot \ddot{u}(t) = F^{ext}(t) - F^{int}(t)$$

где  $M$  – матрица масс;  $U(t)$  – узловой вектор смещения;  $F^{ext}(t)$ ,  $F^{int}(t)$  – внешние и внутренние силы соответственно.

Преобразовав, последнее выражение в пошаговую схему, получают уравнение:

$$U_i(t + \Delta t) = \frac{\Delta t^2}{M_{ii}^d} [F_i^{ext}(t) - F_i^{int}(t)] + 2 \cdot U_i(t) - U_i(t - \Delta t)$$

где  $M_{ii}^d$  – матрица масс, приведенная к диагональному виду;  $\Delta t$  – шаг по времени;  $F_i^{ext}(t), F_i^{int}(t)$  – внешняя и внутренняя силы, приложенные к узлу

Внутренние силы вычисляются согласно модели поведения материала.

Соответствующие величины в выражениях равенства работ, напряжения и деформации описываются вторым тензором напряжений и тензором деформаций Грина-Лагранжа.

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2} (\bar{C} - \bar{I})$$

где  $\bar{C}$  – тензор деформации Коши-Грина,  $\bar{I}$  – дельта Кронекера

Для изотропного материала зависимость растяжение-сжатие часто определяется через функцию энергии деформации  $W$ , а материал указывается как высокоэластичный, тогда напряжение задается соотношением:

$$\sigma_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}$$

где  $\lambda_i$  – степень деформирования в  $i$ -ом направлении ( $i = 1, 2, 3$ )

Энергию деформации  $W$  определяют с помощью нелинейных моделей.

Решения уравнений конечных элементов ищется в виде приращений и уточняются методом итераций Ньютона-Рафсона. Поскольку геометрия мембраны может радикально измениться, то приращение для малой нагрузки, вектор нагрузки и матрица жесткости пересчитываются в процессе процедуры итерации.

Последний подход в МКЭ получил применение при моделировании процесса формовки, так как он проще второго подхода и более точен, чем первый.

При моделировании процесса термоформовки необходимо рассмотрение реологических закономерностей поведения материала. В течение раздувки и формования заготовки, лист главным образом испытывает двусное растяжение. Следовательно, характеристики удлинения полимера играют важную роль в моделируемом процессе.

Обычно термопластик в полу-расплавленном состоянии ведет себя как вязкий материал, для которого необходимо учитывать течение в процессе приложения нагрузки. Он также значительно эластичен и сопротивляется течению, сохраняя целостность листа. При моделировании конечными элементами поведение полимерного материала в процессе термоформовки, наиболее часто описывается нелинейной эластичной или вязко-эластической моделями.

Нелинейные эластичные модели: Mooney-Rivlin, Ogden.

В модели Mooney-Rivlin допускается, что энергия деформации  $W$  для несжимаемого материала может быть выражена полиномом с первыми двумя инвариантами  $I_1$  и  $I_2$ :

$$W = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j$$

где  $C_{ij}$  – определяемые экспериментально константы.

В модели Ogden допускается, что функция энергии деформации:

$$W = \sum_{n=1}^m \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\lambda_3$  - главные удлинения. Константы  $\mu_n$  и  $\alpha_n$  определяются подборкой экспериментальных данных растяжения и сжатия и могут быть либо отрицательными, либо не целыми величинами.  $\lambda_3$  - через остальные из условия  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=I$ .

В отличие от нелинейной эластичной модели вязко-эластичная модель не пренебрегает эффектом вязкости. Поэтому для определения напряжения при одноосном растяжении, используется выражение

$$\sigma = \int_0^t \mu(t-t') \cdot h(I_1, I_2) \cdot B(t, t') dt'$$

где  $t$  и  $t'$  - текущее и предшествующее время соответственно;  $\mu(t-t')$  - фактор релаксации или функция памяти.  $\mu(t-t') = \sum \frac{G_i}{\lambda_i} \exp(-(t-t')/\lambda_i)$ ;  $G_i$  и  $\lambda_i$  - параметры материала;  $h(I_1, I_2)$  - функция демпфирования в двух инвариантах, обычно записывается законом Вагнера:  $h(I_1, I_2) = [1 + a \cdot \sqrt{(I_1 - 3)(I_2 - 3)}]^{1/2}$ ,  $B(t, t')$  - тензор Фигнера;  $G_i(T) = G_i(T_0) \cdot \exp(-\beta(T - T_0))$ ;  $T_0$  - начальная температура и  $\beta$  параметр Аррениуса.

Для двуслойной деформации основные напряжения задаются в двух направлениях:

$$\sigma_{ii} = \int_0^t \mu(t-t') \cdot h(\varepsilon) \cdot [L_1^2(t, t') - L_2^2(t, t')] dt' + h(\varepsilon(t)) \cdot [L_1^2(t) - L_2^2(t)] \cdot \int_{-\infty}^0 \mu(t-t') dt'$$

где  $L_r(t, t')$  - степень растяжения или относительное удлинение.

$$h(\varepsilon) = [a \cdot \exp(2 \cdot \varepsilon) + (1 - a) \cdot \exp(m \cdot \varepsilon)]^{-1}$$

где  $\varepsilon(t) = \ln(L(t))$ ,  $a = \exp(-2\varepsilon_0)$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $m$  - измеренные константы данного полимера. Модель, учитывающая - вязкопластический закон течения G'Sell & Jonas для полукристаллического полимера определяет эквивалентное напряжение

$$\sigma_{eq} = K_p(T) \cdot [1 - \exp(-w \cdot \varepsilon_{eq})] \cdot \exp(h \cdot \varepsilon_{eq}^2) \cdot \dot{\varepsilon}_{eq}^m$$

где  $\varepsilon_{eq}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{eq}$  - деформация и скорость деформации соответственно,  $T$  - температура,  $K_p$ ,  $w$ ,  $h$ ,  $m$  - параметры материала, зависящие от температуры.

При контакте полимера с формой рассматриваются зависимости для нормального и тангенциального напряжений:

$$T = -\chi_p [(v - v_{tool}) \cdot n] \cdot n, \quad T_r = -\mu_f p^+ (v_r^2 + v_{r0}^2)^{-1/2} v_r$$

где  $v, v_{tool}$  - скорости полимера и относительная скорость инструмента;  $\chi_p$  - штрафной коэффициент;  $n$  - нормаль.  $p^+$  - контактное давление;  $\mu_f$  - коэффициент трения;  $v$  - скорости.

Таким образом использование представленных зависимостей и описанных процедур позволяет моделировать процесс термоформовки полимерных изделий сложной конфигурации.