

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ДВУХСЛОЙНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ, ОПЛАВЛЯЕМОЙ ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА. Ч.1

*Белорусская государственная политехническая академия,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
Минск, Беларусь,
Слупский педагогический институт
Слупск, Польша*

Введение

Работа (ч.1. и ч.2) посвящена описанию моделирования оплавления двухслойной композитной плиты движущимся источником тепла, например, в случае плазменного оплавления плит, панелей и т.п. для создания защитно-декоративной отделки [1].

Отметим, что ранее были получены результаты для одномерных моделей [2, 3], осесимметричных тел [4, 5]. Наиболее полные результаты по моделям нагрева пластин изложены в [6 – 11]. В этих работах применялись методы интегральных преобразований и разностные методы численного решения задач.

В настоящей работе используется метод функциональных уравнений [12 – 14] для построения температурных полей. При решении стационарной задачи использован метод конформных отображений [15]. Предыдущие работы касались в основном бесконечных областей, например, полуплоскость, полоса, клин. Данное обстоятельство не всегда позволяет учитывать краевые эффекты.

В данной работе (ч.1 и ч.2) краевая задача решена для конечных областей, что позволило в дальнейшем получить температурные напряжения на границе плиты.

Рассмотрим в трехмерном пространстве R^3 область $D = \{(x, y, z) \in R^3, x_0 < x < 0, y_0 < y < 0, z_1 < z < z_3\}$ прямоугольной плиты с верхним оплавливаемым слоем (рис. 1).

Пусть область D заполнена теплопроводным кусочно-однородным изотропным материалом. Пусть плоскость $z = z_2$ ($z_2 = 0$) разделяет однородные материалы с различными коэффициентами теплопроводности λ_2 и λ_3 с одним коэффициентом температуропроводности a .

Предположим, что на каждой грани плиты задана температура. Контакт между средами предполагаем идеальным. Теплообмен в системе осуществляется только путем теплопроводности. Приведем математическую модель задачи нахождения распределения температуры в двухслойной плите, оплавленной, например плазмой.

Краевое условие: $u_k = 0$

Требуются найти функции $u_k(x, y, z, t)$ ($k = 2, 3$), удовлетворяющие уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \Delta u_k \quad (1)$$

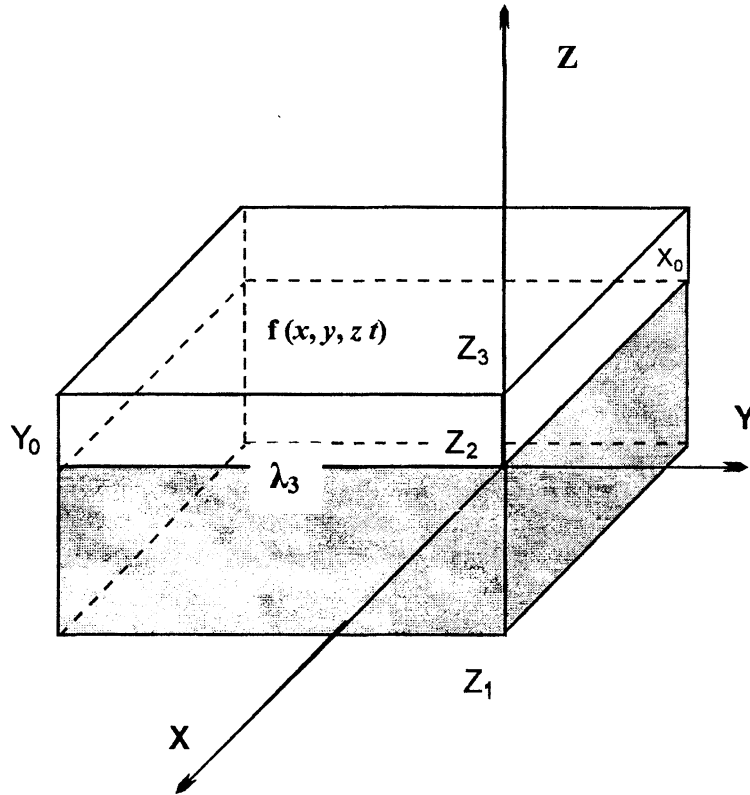


Рис. 1 – Прямоугольная плита с верхним оплавливаемым слоем

в областях $D_2 = \{(x, y, z) \in R^3, x_0 < x < 0, y_0 < y < 0, z_1 < z < z_2\}$ и $D_3 = \{(x, y, z) \in R^3, x_0 < x < 0, y_0 < y < 0, z_2 < z < z_3\}$ соответственно, по условиям сопряжения

$$u_2(x, y, z_2, t) = u_3(x, y, z_2, t) \\ \lambda_2 \frac{\partial u_2(x, y, z_2, t)}{\partial z} = \lambda_3 \frac{\partial u_3(x, y, z_2, t)}{\partial z}, \quad (2)$$

$$x_0 < x < 0, y_0 < y < 0$$

На краях плиты заданы следующие краевые условия:

$$u_k(x, y, z, t)|_{\partial D} = f(x, y, z, t), \quad t > 0 \quad (3)$$

Начальные условия для простоты изложения возьмем нулевым:

$$u_k(x, y, z, 0) = 0, \quad (x, y, z) \in D \quad (4)$$

Полагаем, что функция $f(x, y, z, t)$ непрерывна на ∂D и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, которые будут выписаны ниже.

Плоские стационарные задачи, аналогичные задаче (1 – 4), рассмотрены в статьях [16, 17]. Одномерная нестационарная задача изложена в статье [18].

Схема решения задачи (1 – 4) повторяет рассмотрение схемы статьи [18].

Решение задачи.

Будем считать, что функция $f(x, y, z, t) = 0$ на всех гранях, кроме верхней, где функция $f(x, y, z, t)$ моделирует воздействие движущегося точечного источника.

Рассмотрим сначала краевое условие на нижней грани

$$u_2(x, y, z_1, t) = 0$$

Предположим, что функция $u_2(x, y, z_1, t)$ известна. Построим функцию $u_1(x, y, z, t)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности (1) при $0 < x < x_0$, $y_0 < y < 0$, $z < z_1$, такую, что

$$2 \frac{\partial u_1}{\partial z}(x, y, z_1, t) = \frac{\partial u_2}{\partial z}(x, y, z_1, t). \quad (5)$$

Краевая задача (5) с нулевыми начальными условиями имеет решение, удовлетворяющее условию $u_1(x, y, -\infty, t) = 0$ [19].

Введем вспомогательную функцию

$$v_1(x, y, z, t) = \begin{cases} u_1(x, y, z, t), & z < z_1, \quad 0 < x < x_0, \\ u_2(x, y, z, t) + u_1(x, y, 2z_1 - z, t), & z_1 < z < z_2, \quad y_0 < y < 0. \end{cases}$$

Функция $v_1(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (1) в области определения. Это следует из лемм 1, 3 статьи [17] и соотношений

$$v_1^+(x, y, z_1, t) = v_1^-(x, y, z_1, t); \quad \frac{\partial v_1^+}{\partial z}(x, y, z_1, t) = \frac{\partial v_1^-}{\partial z}(x, y, z_1, t),$$

проверенных непосредственно по определению функции $v_1(x, y, z, t)$.

Здесь, например,

$$v_1^+(x, y, z_1, t) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_1 \\ z < z_1}} v_1(x, y, z, t).$$

Найдем предельные значения функции $v_1(x, y, z, t)$ при $z = z_2$:

$$v_1(x, y, z_2, t) = u_2(x, y, z_2, t) + u_1(x, y, 2z_1 - z_2, t).$$

Пользуясь первым равенством (2), перепишем последнее равенство в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2\lambda_2} v_1(x, y, z_2, t) + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2\lambda_2} v_1(x, y, 2z_1 - z_2, t) = \\ & = u_3(x, y, z_2, t) - \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2\lambda_2} u_1(x, y, 2z_1 - z_2, t) - \\ & - \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2\lambda_2} u_1(x, y, 2z_1 - (2z_2 - z_2), t). \end{aligned}$$

Исходя из последнего соотношения, введем функцию

$$v_2(x, y, z, t) = \begin{cases} \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2\lambda_2} v_1(x, y, z, t) + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2\lambda_2} u_1(x, y, 2z_1 - (2z_2 - z), t), & z < z_2, \\ u_3(x, y, z, t) - \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2\lambda_2} u_1(x, y, (2z_1 - z), t) - \\ - \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2\lambda_2} v_1(x, y, (2z_2 - z), t) & x_0 < x < 0, \quad y_0 < y < 0, \quad z_2 < z < z_3 \end{cases}$$

удовлетворяющую уравнению теплопроводности в области определения.

Доказательство этого факта проводится так же, как и для функции $v_1(x, y, z, t)$, аналогично статье [18].

Найдем предельные значения функции $v_2(x, y, z, t)$ при $z = z_3$:

$$v_2(x, y, z_3, t) = u_3(x, y, z_3, t) - \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2\lambda_2} u_1(x, y, (2z_1 - z_3), t) - \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2\lambda_2} v_1(x, y, (2z_2 - z_3), t) \quad (6)$$

Представим функцию $u_3(x, y, z_3, t) = f(x, y, z_3, t)$ в виде

$$f(x, y, z, t) = f^+(x, y, z_3, t) - f^-(x, y, z_3, t),$$

где $f^\pm(x, y, z_3, t)$ – потенциалы двойного слоя по верхней грани области D . Предположим, что все функции, входящие в равенство (6), известны.

Введем функцию $u_4(x, y, z, t)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности при $x_0 < x < 0, y_0 < y < 0, z > z_3$, такую, что

$$2 \frac{\partial u_4}{\partial z}(x, y, z_3, t) = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ v_2(x, y, z, t) + \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2\lambda_2} u_1(x, y, 2z_1 - z, t) + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2\lambda_2} v_1(x, y, 2z_2 - z, t) \right\} \Big|_{z=z_3}.$$

Последняя краевая задача с нулевым начальным условием имеет решение, удовлетворяющее условию $u_4(x, y, +\infty, t) = 0$ [19].

Введем функцию

$$v_3(x, y, z, t) = \begin{cases} u_4(x, y, z, t) - \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2\lambda_2} u_1(x, y, (2z_1 - z), t) - \\ - \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2\lambda_2} v_1(x, y, (2z_2 - z), t) - f^-(x, y, z, t), & z > z_3, \\ v_2(x, y, z, t) + u_4(x, y, (2z_3 - z), t) - f^+(x, y, z, t), & z < z_3, \end{cases} \quad \begin{matrix} x_0 < x < 0, \\ y_0 < y < 0, \end{matrix}$$

удовлетворяющую уравнению теплопроводности в области определения.

Функция $v_3(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности при $x_0 < x < 0, y_0 < y < 0, -\infty < z < +\infty, t > 0$, исчезает при $z \rightarrow \pm\infty$, удовлетворяет нулевым начальным и граничным условиям. Следовательно, $v_3(x, y, z, t) \equiv 0$.

Из определения функций $v_{1,2,3}(x, y, z, t)$ следуют соотношения

$$u_4(x, y, z, t) - \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2\lambda_2} u_1(x, y, (2z_1 - z), t) - \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2\lambda_2} u_1(x, y, (2z_2 - z), t) = \quad (7)$$

$$= f^-(x, y, z, t), \quad z > \max(z_3, (2z_2 - z_1)) \\ \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2\lambda_2} u_1(x, y, z, t) + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2\lambda_2} u_1(x, y, z + 2(z_1 - z_2), t) + \quad (8)$$

$$+ u_4(x, y, (2z_3 - z), t) = f^+(x, y, z, t), \quad z < z_1.$$

Из равенства (7) найдем функцию $u_4(x, y, 2z_3 - z, t)$ и подставим ее в соотношение (8)

$$\begin{aligned}
u_4(x, y, (2z_3 - z), t) &= \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2\lambda_2} u_1(x, y, 2z_1 - (2z_3 - z), t) + \\
&+ \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2\lambda_2} u_1(x, y, 2z_2 - (2z_3 - z), t) + f^-(x, y, (2z_3 - z), t), \\
&z < 2z_3 - \max(z_3, (2z_2 - z_1)), \\
u_1(x, y, z, t) &+ \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} u_1(x, y, z + 2(z_1 - z_2), t) + \\
&+ u_1(x, y, z + 2(z_1 - z_2), t) + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} u_1(x, y, z + 2(z_2 - z_3), t) = (9) \\
&= \frac{2\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3} \left[f^+(x, y, z, t) - f^-(x, y, (2z_3 - z), t) \right] \\
&z < z_0 := \min(z_1, 2z_3 - \max(z_3, (2z_2 - z_1))).
\end{aligned}$$

Равенство (9) представляет собой линейное функциональное уравнение со сдвигом в область в классе функций, удовлетворяющих уравнению теплопроводности (1).

Если функция

$$g(x, y, z, t) := \frac{2\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3} \left[f^+(x, y, z, t) - f^-(x, y, (2z_3 - z), t) \right], \quad z < z_0$$

удовлетворяет условию

$$|g(x, y, z, t)| \leq \frac{c}{|z|^{1+\alpha}} \quad \text{при } z \rightarrow -\infty$$

равномерно по x, y, t , где $c > 0$ и $\alpha > 0$, то к функциональному уравнению (9) применим метод итераций [14]. В работе [20] аналогичное функциональное уравнение решено методом преобразования Фурье через интегральное представление неизвестной функции.

Случай теплообмена по поверхности плиты с соблюдением краевого условия $\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0$ - закона Ньютона рассмотрен в 4.2. Там же приведены результаты численных расчетов – кривые распределения температур по поверхности плиты.

Литература. 1. Подлозный Э.Д., Митюшев В.В. Моделирование плазменного нагрева плоских композитов // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. Тез. докл. междунар. конф. 15-19.02.2001, Мн., БГУ.- С.125-126. 2. Горелик Г.Е., Розин С.Г. Нагрев металлов электронным лучом // Инженерно-физический журнал. 1972. Т. 23, № 5. – С.913-914. 3. Устинов И.Г. Нагрев и абляция материала при поверхностном воздействии подвижного источника тепла // Физ.-хим. обработка материалов. – 1982. - № 4. – С. 20-26. 4. Семерак М.М., Лянце А.Т. Температурное поле, обусловленное движущимся источником тепла // Инженерно-физический журнал. – 1981. Т. 40, № 3. – С. 550-551. 5. Меламед Л.Э. Нагрев массового тела круговым источником тепла с учетом теплоотдачи с поверхности // Инженерно-физический журнал. – 1981. Т. 40, № 3. – С. 524-526. 6. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М. Наука, 1964. – 487 с. 7. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М., Наука, 1984. – 368 с. 8. Карташов

Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности. – М., Высш. шк., 1985. – 480 с. 9. Рапопорт Д.А., Буданин О.Н. Расчет нестационарного температурного поля в многослойной плите с неоднородностями при нагреве подвижным источником // Инженерно-физический журнал. – 1980. Т. 38, № 1, - С. 163-164. 10. Коляно Ю.М., Горбачев В.А. Нагрев двухступенчатой пластинки движущимся источником тепла // Инженерно-физический журнал, 1984. – Т. 42, № 1. – С. 129-134. 11. Лисицын С.Г., Пашацкий Н.В., Черников С.А. Расчет температурного поля в плите, оплавленной движущимся источником // Инженерно-физический журнал. – 1985. – 10 с. Рук. деп. в ВИНТИ 01.03.85, № 3551 – 85 Деп. 12. Митюшев В.В. Некоторые математические задачи теории теплопроводности, I Рук. деп. в ВИНТИ 03.11.87, № 7709 – В 87. 13. Митюшев В.В. Некоторые математические задачи теории теплопроводности. Рук. деп. в ВИНТИ 07.08.89, № 5348 – В 89. 14. Митюшев В.В. Некоторые математические задачи теории теплопроводности. Рук. деп. в ВИНТИ 17.07.90, № 3995 – В 90. 15. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М., Наука, 1973, - 736 с. 16. Митюшев В.В. Решение задачи действительного сопряжения (задачи Маркушевича) для кольца в одном частном случае // Изв. вузов. Матем. – 1986, № 3, - С. 67-69. 17. Никитина В.Н. Краевые задачи геотермического профилирования зон земной коры и литосферы различной проницаемости // ДАН СССР, - 1988, - Т. 298, № 1, С. 58-63. 18. Митюшев В.В. Уравнение теплопроводности и волновое уравнение на графах // Дифференц. уравнения, - 1988, Т. 24, № 9, - С.1591 – 1599. 19. Положий Г.П. Уравнения математической физики. – М., 1964. – 559 с. 20. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. К., Наук. думка, 1981, 584 с. 21. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. шк. – 1983. – 160 с. 22. Спарочник по специальным функциям под ред. Абрамовица М., М.: Наука, 1979. – 832 с.

УДК 533.9:679.3

Э.Д. Подлозный, В.В. Митюшев

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ДВУХСЛОЙНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ, ОПЛАВЛЯЕМОЙ ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА, Ч.2

*Белорусская государственная политехническая академия,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
Минск, Беларусь;
Слупский педагогический институт
Слупск, Польша*

Обзор ряда работ по моделированию нагрева тел и методов решения задач приведен в ч.1. Здесь дополнительно отметим, что для решения ряда двухмерных и трехмерных задач нестационарной теплопроводности был применен впервые метод парных интегральных уравнений [1], а также метод прямого интегрирования уравнений и его видоизменения [2 – 5].

1. Теплообмен по закону Ньютона

Рассмотрим распределение температур в оплавленном слое в случае теплообмена по закону Ньютона.

Краевое условие