

Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности. – М., Высш. шк., 1985. – 480 с. 9. Рапопорт Д.А., Буданин О.Н. Расчет нестационарного температурного поля в многослойной плите с неоднородностями при нагреве подвижным источником // Инженерно-физический журнал. – 1980. Т. 38, № 1, - С. 163-164. 10. Коляно Ю.М., Горбачев В.А. Нагрев двухступенчатой пластинки движущимся источником тепла // Инженерно-физический журнал, 1984. – Т. 42, № 1. – С. 129-134. 11. Лисицын С.Г., Пашацкий Н.В., Черников С.А. Расчет температурного поля в плите, оплавленной движущимся источником // Инженерно-физический журнал. – 1985. – 10 с. Рук. деп. в ВИНТИ 01.03.85, № 3551 – 85 Деп. 12. Митюшев В.В. Некоторые математические задачи теории теплопроводности, I Рук. деп. в ВИНТИ 03.11.87, № 7709 – В 87. 13. Митюшев В.В. Некоторые математические задачи теории теплопроводности. Рук. деп. в ВИНТИ 07.08.89, № 5348 – В 89. 14. Митюшев В.В. Некоторые математические задачи теории теплопроводности. Рук. деп. в ВИНТИ 17.07.90, № 3995 – В 90. 15. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М., Наука, 1973, - 736 с. 16. Митюшев В.В. Решение задачи действительного сопряжения (задачи Маркушевича) для кольца в одном частном случае // Изв. вузов. Матем. – 1986, № 3, - С. 67-69. 17. Никитина В.Н. Краевые задачи геотермического профилирования зон земной коры и литосферы различной проницаемости // ДАН СССР, - 1988, - Т. 298, № 1, С. 58-63. 18. Митюшев В.В. Уравнение теплопроводности и волновое уравнение на графах // Дифференц. уравнения, - 1988, Т. 24, № 9, - С.1591 – 1599. 19. Положий Г.П. Уравнения математической физики. – М., 1964. – 559 с. 20. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. К., Наук. думка, 1981, 584 с. 21. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. шк. – 1983. – 160 с. 22. Спарвочник по специальным функциям под ред. Абрамовица М., М.: Наука, 1979. – 832 с.

УДК 533.9:679.3

Э.Д. Подлозный, В.В. Митюшев

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ДВУХСЛОЙНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ, ОПЛАВЛЯЕМОЙ ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА, Ч.2

*Белорусская государственная политехническая академия,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
Минск, Беларусь;
Слупский педагогический институт
Слупск, Польша*

Обзор ряда работ по моделированию нагрева тел и методов решения задач приведен в ч.1. Здесь дополнительно отметим, что для решения ряда двухмерных и трехмерных задач нестационарной теплопроводности был применен впервые метод парных интегральных уравнений [1], а также метод прямого интегрирования уравнений и его видоизменения [2 – 5].

1. Теплообмен по закону Ньютона

Рассмотрим распределение температур в оплавленном слое в случае теплообмена по закону Ньютона.

Краевое условие

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0,$$

где $u(x, y) = u(z)$, $(z = x + iy)$ – приведенная температура, $h = \alpha / \lambda$, α – коэффициент теплообмена (теплоотдачи), λ – коэффициент теплопроводности.

В терминах комплексных потенциалов задача примет вид [6].

Найти функцию $\varphi(z)$, аналитическую в верхней полуплоскости и непрерывную в $Im z \geq 0$, по краевому условию

$$h \operatorname{Re} \varphi_0'(t) - \operatorname{Im} \varphi_0'(t) = 0, \quad t \in R \quad (1)$$

где $\varphi_0(z) = \varphi(z) + Q \ln \frac{z - ia}{z + ia}$, $\varphi(z) = \operatorname{Re} \varphi_0(z)$,

Q – мощность источника, находящегося в точке $z = ia$ (рис. 1).

Краевое условие (1) следует из формулы

$$\varphi_0'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

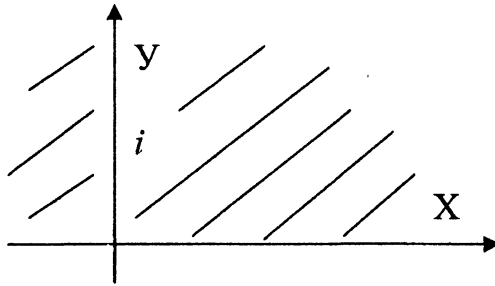


Рис. 1 – Положение источника Q в точке z .

Перепишем равенство (1) в виде

$$h(\varphi(t) + \overline{\varphi(\bar{t})}) + i(\varphi'(t) - \overline{\varphi'(\bar{t})}) = f(t), \quad t \in R \quad (2)$$

где $f(t) = -2h \operatorname{Re} Q \ln \frac{t - ia}{t + ia} + 2 \operatorname{Im} \frac{Q}{t - ia}$.

Представим гильдеровскую функцию $f(t)$ в виде $f^+(t) - f^-(t) = f(t)$, $t \in R$ по формулам Сохоцкого

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

$$f^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad \operatorname{Im} z < 0.$$

Функция $\ln \frac{z - ia}{z + ia}$ предполагается однозначной вне разреза $[-ia, +ia]$ вдоль

мнимой оси и $\lim_{z \rightarrow +\infty} \ln \frac{z - ia}{z + ia} = 0$.

Перепишем краевое условие (2) в виде

$$h\varphi(t) + i\varphi'(t) - f^+(t) = -h\overline{\varphi(\bar{t})} + i\overline{\varphi'(\bar{t})} - f^-(t), \quad t \in R.$$

В левой части последнего равенства стоит функция, аналогичная в верхней полуплоскости, в правой – функция, аналитическая в нижней полуплоскости. По

теореме об аналитическом продолжении и теореме Лиувилля получаем, что это равенство определяет константу. Нетрудно видеть, что эта константа равна нулю.

Итак,

$$h \varphi(z) + i \varphi'(z) = f^+(z), \quad \text{Im } z \geq 0,$$

или

$$\varphi(z) + \frac{i}{h} \varphi'(z) = \frac{f^+(z)}{h}, \quad \text{Im } z \geq 0.$$

Решение последнего дифференциального уравнения имеет вид

$$\varphi(z) = \frac{1}{\mu(z)} \left(\int \frac{f^+(z)}{h} \mu(z) dz + C \right), \quad \mu(z) = \exp \left\{ \int \frac{i}{h} dz \right\} = e^{i \frac{z}{h}}.$$

$$\varphi(z) = e^{-i \frac{z}{h}} \left(\frac{1}{h} \int f^+(z) e^{i \frac{z}{h}} dz + C \right).$$

В силу условия $\varphi(\infty) = 0$ имеем $C = 0$.

Значит,

$$\varphi(z) = \frac{1}{h} e^{-i \frac{z}{h}} \int f^+(z) e^{i \frac{z}{h}} dz, \quad \text{Im } z \geq 0.$$

Распределение температуры имеет вид

$$u(z) = Q \ln \left| \frac{z - ia}{z + ia} \right| + \frac{1}{h} \text{Re} \left[e^{i \frac{z}{h}} \int f^+(z) e^{i \frac{z}{h}} dz \right], \quad \text{Im } z > 0.$$

Вычисления, проведенные в системе MATHCARD, показали, что при h , стремящихся к нулю, качественно, и при больших h количественно, распределение температуры в пластине меняется.

На рис. 2 T – температура в безразмерных единицах, $y = \text{Im } z$ – расстояние от источника, 0,11 – безразмерное расстояние от источника до края плиты.

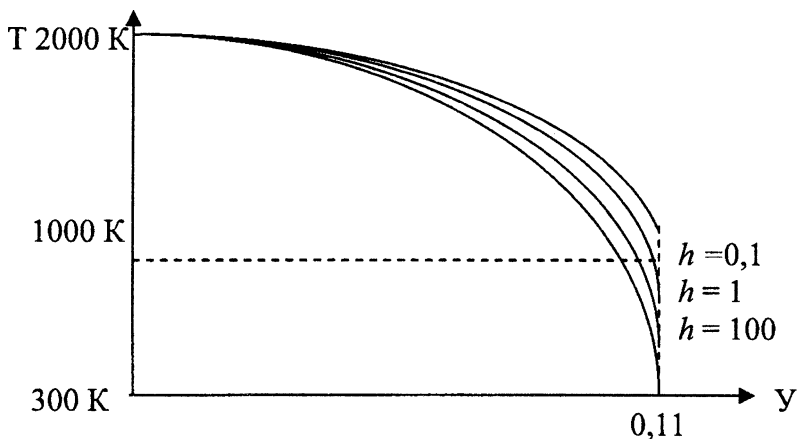


Рис. 2 – Распределение температур на расстоянии 0,11 от источника до края плиты

Таким образом, термоупругие напряжения при различных краевых условиях в любых ситуациях конструируются возле теплового пятна при медленном движении источника.

2. Стационарное распределение тепла от точечного источника по поверхности прямоугольной плиты.

2.1. Общие положения

Над прямоугольной плитой находится точечный источник тепла. Требуется рассчитать стационарное распределение температуры на поверхности плиты.

Для решения данной задачи составлена программа *TF 2* на языке Паскаль. Вывод результатов расчетов в графическом виде выполняется при помощи пакета *Surfer*.

Программа *TF 2* запрашивает размеры (длину и ширину) плиты в см и координаты источника тепла в пределах поверхности плиты. Затем программа разбивает длину плиты на N_x , а ширину на N_y отрезков и вычисляет значения температуры в узлах полученной сетки. Результаты расчетов записываются в текстовый файл с расширением *GRD* в формате пакета *Surfer*.

На основании полученных данных можно вывести изолинии (программа *Topo* пакета *Surfer*) и трехмерный график (программа *Surf* пакета *Surfer*) распределения температуры на поверхности плиты. Вывод графической информации на принтер выполняет программа *Plot* пакета *Surfer*.

Вызов программы *TF 2* осуществляется из командной строки *MS-DOS* командой

$$TF\ 2\ [имя_файла\ [N_x\ [N_y]]],$$

где *имя_файла* – задает имя файла, в который будут помещены результаты расчета, расширение файла *GRD*. По умолчанию результаты выводятся в файл *TF.GRD*; N_x и N_y – количество отрезков, на которые следует разбить длину и ширину плиты разбивается на 120, а ширина на 40 частей.

После запуска программа *TF 2* в диалоговом режиме запрашивает длину и ширину плиты в см:

Enter length and width (sm):

Программа работает только тогда, когда отношение ширины плиты к ее длине находится в пределах от 0,25 до 0,34. Это значит, что при длине плиты в 600 см ее ширина должна находиться в пределах от 150 до 204 см.

После задания размеров плиты программа запрашивает координаты точечного источника тепла. При этом программа показывает допустимые пределы изменения координат источника.

Enter coords of the source point:

После ввода координат источника программа рассчитывает таблицу значений температуры над поверхностью плиты и помещает ее в файл с именем *имя_файла.GRD* (по умолчанию *TR.GRD*).

Обработка результатов и вывод их в графической форме выполняется при помощи пакета *Surfer* стандартным образом.

2.2. Описание программы *TF 2*

На поверхности плиты вводим комплексные координаты. Для этого действительную ось направляем по длине вдоль нижнего края плиты, а мнимую ось проводим вверх вдоль вертикальной оси симметрии плиты. Таким образом, плита будет совпадать с прямоугольником

$$-a \leq \operatorname{Re} z \leq a, \quad 0 \leq \operatorname{Im} z \leq b,$$

где $2a$ – его длина, b – ширина плиты в см.

Преобразованием подобия с коэффициентом *Scale* отобразим плиту на прямоугольник

$$-K \leq \operatorname{Re} z \leq K, \quad 0 \leq \operatorname{Im} z \leq K',$$

где K и K' – периоды по действительной и мнимой осям соответственно функции $S_n(z, m)$ (синус эллиптический);

Порядок вычисления K и K' будет описан ниже.

Обозначим через z_0 положение источника после преобразования подобия.

Температура в точке z на поверхности плиты теперь может быть вычислена по формуле

$$T = q \operatorname{Re} \operatorname{Ln} \left| \frac{S n(z; m) - w_0}{S n(z; m) - \overline{w_0}} \right| + 300 K,$$

где $\overline{w_0}$ - комплексно сопряженное число к $w_0 = S n(z_0; m)$, а коэффициент q выделяется из условия, что температура на расстоянии 1 мм от источника должна равняться 1000 К.

Остановимся теперь на вычислении функции $S n(z; m)$ от комплексного аргумента.

Прежде всего, сведем вычисления эллиптического синуса от комплексного аргумента к вычислению $S n$ от действительного аргумента.

Для этого используем формулу

$$S n(x + i y; m) = \frac{S n(x; m) D n(y; m_1) + i C n(x; m) D n(x; m) S n(y; m_1) C n(y; m_1)}{C n^2(y; m_1) + m S n^2(x; m) S n^2(y; m_1)},$$

где $m_1 = 1 - m$.

Для малых m ($m^2 \approx 0$) эллиптические функции $S n$, $C n$ и $D n$ можно вычислить по формулам

$$S n(x; m) = \sin x - \frac{m}{4} (x - \sin x \cos x) \cos x,$$

$$C n(x; m) = \cos x + \frac{m}{4} (x - \sin x \cos x) \sin x,$$

$$D n(x; m) = 1 - \frac{m}{2} \sin^2 x.$$

Кроме того, эллиптические функции связаны тождеством

$$m S n^2(x; m) - m = -m C n^2(x; m) = m_1 - D n^2(x; m).$$

Для вычисления эллиптических функций при больших значениях m можно использовать формулы понижения

$$S n(u; m) = \frac{(1 + \sqrt{\mu}) S n(v; \mu)}{1 + \sqrt{\mu} S n^2(v; \mu)},$$

$$C n(u; m) = \frac{C n(v; \mu) D n(v; \mu)}{1 + \sqrt{\mu} S n^2(v; \mu)},$$

$$D n(u; m) = \frac{D n^2(v; \mu) - (1 - \sqrt{\mu})}{(1 + \sqrt{\mu}) - D n^2(v; \mu)},$$

где

$$\mu = \left(\frac{1 - \sqrt{m_1}}{1 + \sqrt{m_1}} \right)^2, \quad v = \frac{u}{1 + \sqrt{\mu}}.$$

Приведем порядок определения чисел K и K' , являющихся периодами функции $S n(z; m)$ и необходимых для вычисления коэффициентов подобия $Scale$.

Прежде всего определим параметр m , который можно интерполировать по таблице [7] зависимости m от отношения K'/K . При этом следует вспомнить, $K'/K = b$

/а. Выписку из этой таблицы можно увидеть в тексте подпрограммы *Cale M* модуля *TF Var*. Зная параметр m можно определить величину периодов K и K' по формуле

$$K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m_1 \sin^2 \theta}}.$$

Приближенное значение K , с достаточной для наших целей точностью, дает формула

$$K = -\ln m (a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + a_3 m^3 + a_4 m^4 + a_5 m^5).$$

Значения коэффициентов многочлена a_0, \dots, a_5 можно найти в тексте программы *Km* модуля *TF Var*, используемого этой программой и выполняющего вычисление значений функции $Sn(z; m)$ комплексного аргумента (здесь не приводятся).

Примеры распределения температур по поверхности плиты, вычисленных и построенных с помощью программы *NF 2*, приведены на рис. 3 и 4.

Температурные напряжения, возможность образования трещины при оплавлении будут изложены в следующих работах авторов.

Литература. 1. Козлов В.П., Мандрик П.А. Системы интегральных и дифференциальных уравнений с L – параметром в задачах математической физики и методы идентификации тепловых характеристик. – Мн.: БГУ, 2000 – 555 с. 2. Вигак В.М. Метод прямого интегрирования уравнений осесимметричной задачи термоупругости в напряжениях для неограниченных областей // Прикл. механика. – 1999. – 35, № 3. – С. 49-56. 3. Ригачевский А. Розвиток методу прямого інтегрування дифференціальних рівнянь для тривимірних задач термопружності. // Міжнародна наукова конференція. Нові підходи до розв'язування дифференціальних рівнянь. 1-5.10.2001, Дрогобич, Тези доповідей, Київ, 2001, С.129. 4. Лянце Г. Застосування апарату узагальнених функцій при розв'язуванні задач теплопровідності. // Міжнародна наукова конференція. Нові підходи до розв'язування дифференціальних рівнянь. 1-5.10.2001, Дрогобич, Тези доповідей, Київ, 2001, С. 86. 5. Ігнатчук Д. Відокремлення змінних у рівняннях двовимірної задачі термопружності для прямокутної області. // Міжнародна наукова конференція. Нові підходи до розв'язування дифференціальних рівнянь. 1-5.10.2001, Дрогобич, Тези доповідей, Київ, 2001, С. 65. 6. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. шк. – 1983. – 160 с. 7. Справочник по специальным функциям под ред. Абрамовица М., М.: Наука, 1979. – 832 с.