

$$I_O \frac{d\omega_1}{dt} = \sum M_O.$$



Рисунок 3. Схема сил, действующих на начальное звено.

Реакция  $\bar{R}_{10}$  в кинематической паре  $O$  находится из уравнения движения центра масс звена 1.

Таким образом, в силовом исследовании механизмов, наравне с традиционным методом кинетостатики, основанным на принципе Даламбера, можно эффективно использовать общие теоремы динамики.

#### Литература

1. Филонов, И.П. Теория механизмов, машин и манипуляторов / И.П. Филонов, П.П. Анципорович, В.К. Акулич. – Минск: Дизайн ПРО, 1998. – 656 с.
2. Теория механизмов и механика машин / К. В. Фролов [и др.]; под редакцией К. В. Фролова. – 5-е изд. – М.: Высшая школа, 2005. – 496 с.

### **Кинематика планетарно-кривошипных механизмов зубчатого зацепления**

Студент гр. 10604121 Ксенжик Д.

Научный руководитель – доцент Протасеня О. Н.,  
Белорусский национальный технический университет  
Минск, Республика Беларусь

В планетарно-кривошипных зубчатых механизмах с эвольвентным зацеплением в контакте находятся до 2/3 числа зубьев сателлита, что позволяет без поломок длительное время выдерживать большие ударные и пиковые нагрузки. Принцип работы зацепления и отработанная технология изготовления гарантируют 20000 часов непрерывной работы при постоянной

нагрузке с вероятностью безотказной работы 90%. При односменной работе с постоянной нагрузкой расчетная долговечность - 15 лет. Два сателлита, расположенных оппозитно, полностью уравнивают инерционные нагрузки. Многопарность зацепления обеспечивает плавность хода, отсутствие вибраций и уровень шума в пределах 65...70 дБ. К недостаткам данных механизмов можно отнести высокие требования к точности изготовления всех звеньев, что приводит к усложнению технологических процессов и, соответственно, повышению себестоимости передачи.

На рис. 1 представлен планетарно-кривошипный механизм с эвольвентным зацеплением.

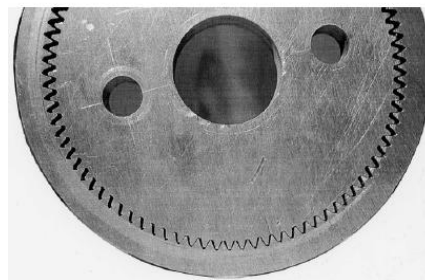


Рисунок 1. Планетарно-кривошипный зубчатый механизм:

Планетарно-кривошипные зубчатые механизмы с эвольвентным зацеплением применяют в различных отраслях промышленности, там, где требуется обеспечить максимальный вращающий момент при минимальных габаритах и массе привода, высокую надёжность и долговечность. Типичным является использование их в машиностроении, химическом машиностроении, судостроении, пищевой и лесной промышленности, горнодобывающей и деревообрабатывающей промышленности, на кирпичных и керамических заводах, металлургических комбинатах и в разнообразном технологическом транспорте.

Кинематика планетарно-кривошипных механизмов основана на кинематической теории классических планетарных механизмов [1].

Передаточное отношение  $i_{пл}$  трехзвенного планетарного механизма с однозвенцовым сателлитом (рис. 2) зависит от статуса основного звена **водила**  $-h$  (остановленное, ведущее или ведомое) и заключается в определении функции  $i_{пл} = f(i^h)$ .

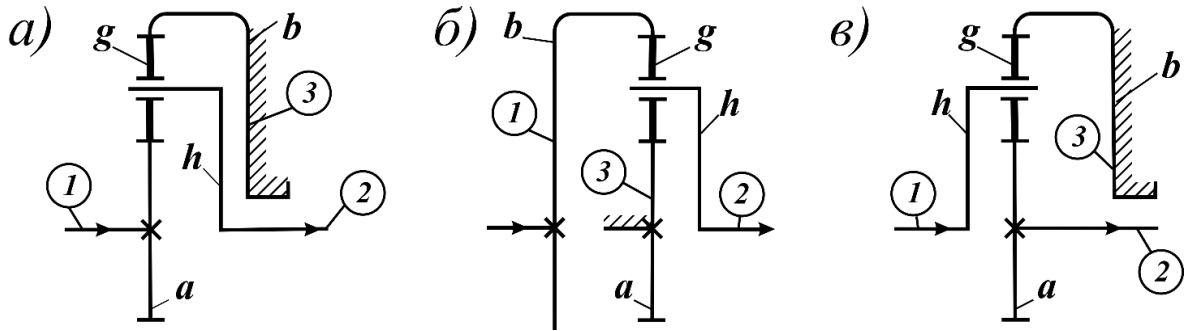


Рисунок 2. Схемы планетарных механизмов с одновенцовыми сателлитами: а) с ведущим солнечным колесом  $a$ , б) с ведущим эпициклическим колесом  $b$ , в) с ведущим водилом  $h$

Для раскрытия функции составим *матрицу расчетных формул* для трехзвенных планетарных механизмов с одновенцовыми сателлитами:

$$i_{\text{III}} = f \ i^h = i_{12}^3 = \begin{cases} i_{12}^h = \pm z_2/z_1 ; \\ i_{1h}^3 = 1 - i_{13}^h = 1 - \pm z_3/z_1 ; \\ i_{h2}^3 = \frac{1}{i_{2h}^3} = \frac{1}{1 - i_{23}^h} = \frac{1}{1 - \pm z_3/z_2} . \end{cases} \quad (1)$$

Для трехзвенных планетарных механизмов с двухвенцовыми сателлитами (рис. 3) передаточное отношение определяется на основе матрицы расчетных формул (1) с учетом двухвенцового сателлитного блока.

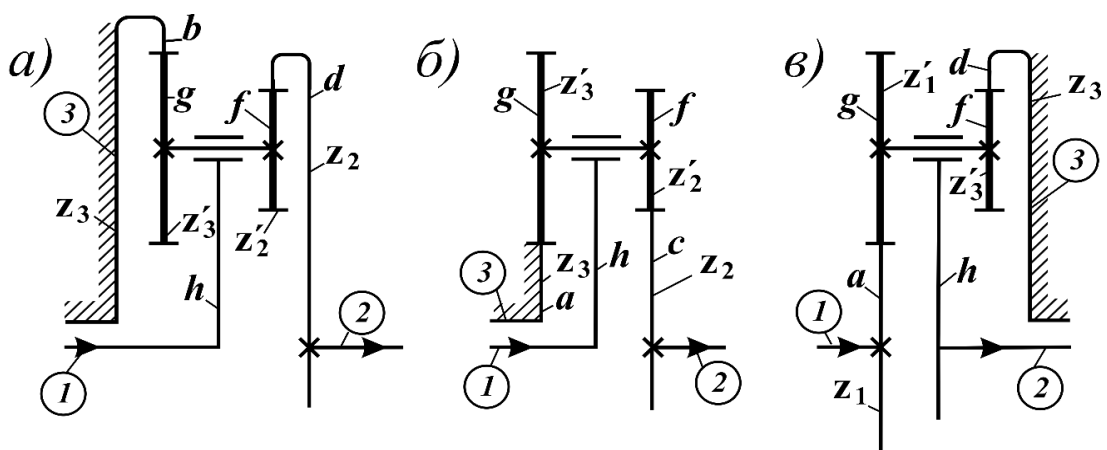


Рисунок 3. Схемы трехзвенных планетарных механизмов с двухвенцовыми сателлитами: а) внутреннего, б) наружного, в) смешанного зацепления

$$i_{пл} = f \quad i^h = i_{12}^3 = \begin{cases} i_{12}^h = \left( \pm \frac{z_2 \cdot z_1'}{z_2' \cdot z_1} \right); \\ i_{1h}^3 = 1 - i_{13}^h = 1 - \left( \pm \frac{z_3 \cdot z_1'}{z_3' \cdot z_1} \right); \\ i_{h2}^3 = \frac{1}{i_{2h}^3} = \frac{1}{1 - i_{23}^h} = \frac{1}{1 - \left( \pm \frac{z_3 \cdot z_2'}{z_3' \cdot z_2} \right)}. \end{cases} \quad (2)$$

В (1,2) приняты обозначения: индексы 1, 2, 3 – ведущее, ведомое, остановленное звенья;  $z_1', z_2', z_3'$  – числа зубьев сателлитов, находящихся непосредственно в зацеплении с центральными колесами  $z_1, z_2, z_3$ .

Для зацепления  $a-g-b$  дифференциального и планетарного механизмов справедливы следующие равенства взаимозависимости частот вращения звеньев:

$$\left. \begin{aligned} n_a &= i_{ab}^h \cdot n_b + i_{ah}^b \cdot n_h; & n_g &= i_{gb}^h \cdot n_b + i_{gh}^b \cdot n_h; \\ n_b &= i_{ba}^h \cdot n_a + i_{bh}^a \cdot n_h; & n_g &= i_{ga}^h \cdot n_a + i_{gh}^a \cdot n_h; \\ n_h &= i_{ha}^b \cdot n_a + i_{hb}^a \cdot n_b; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Относительная частота вращения сателлитов планетарных механизмов с учетом наличия остановленных звеньев определяется по формуле:

$$n_g - n_h = \begin{cases} n_h \left( \frac{z_a}{z_g} \right), & \text{при } n_a = 0; \\ -n_h \left( \frac{z_b}{z_g} \right), & \text{при } n_b = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Передаточное отношение планетарно-кривошипного механизма (рис.4) при неподвижном эпициклическом колесе  $b$  и ведущем водиле  $h$  (кривошип или эксцентрик), что характерно для большинства случаев применения данных механизмов, с учетом формул (1) принимает вид:

$$i_{12}^3 = i_{hg}^b = \frac{1}{i_{gh}^b} = \frac{1}{1 - i_{gb}^h} = \frac{1}{1 - \frac{z_b}{z_g}} = \frac{1}{\frac{z_g - z_b}{z_g}} = \frac{z_g}{z_g - z_b} = -\frac{z_g}{z_b - z_g};$$

$$i_{12}^3 = i_{hg}^b = -\frac{z_g}{z_b - z_g}, \quad (5)$$

где:  $z_b, z_g$  – числа зубьев эпициклического колеса  $b$  и сателлита  $g$ .

При неподвижном сателлите  $g$ :

$$i_{12}^3 = i_{hb}^g = \frac{1}{i_{bh}^g} = \frac{1}{1 - i_{bg}^h} = \frac{1}{1 - \frac{z_g}{z_b}} = \frac{1}{\frac{z_b - z_g}{z_b}} = \frac{z_b}{z_b - z_g};$$

$$i_{12}^3 = i_{hb}^g = \frac{z_b}{z_b - z_g}. \quad (6)$$

**Пример 1.** Выполнить кинематический расчет (рис. 4) планетарно-кривошипного механизма с одновенцовым сателлитом.

Сателлит  $g$  связан с выходным валом  $2$  двойной шарнирной муфтой с передаточным отношением, равным  $+1$  (угловая скорость сателлита  $g$  равна угловой скорости выходного вала  $2$ ).

$$n_{\text{вх}} = n_h = 1000 \text{ мин}^{-1}; \quad z_g = 40; \quad z_b = 42.$$

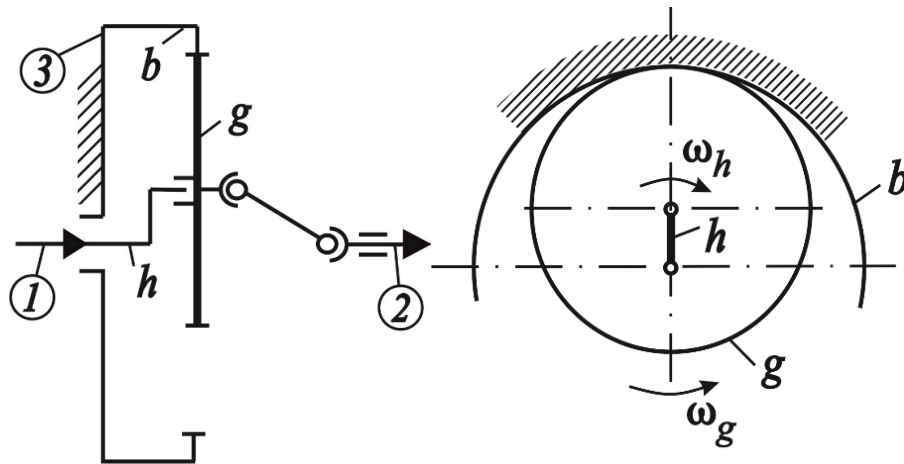


Рисунок 4. Схема планетарно-кривошипного механизма эвольвентного зацепления с одним одновенцовым сателлитом

**Расчет.** Индексами 1, 2, 3 указываем ведущее, ведомое и остановленное звенья, обозначаем зубчатые колеса  $b, g, h$ .

1. Передаточное отношение:

$$i_{12}^3 = i_{hg}^b = -\frac{z_g}{z_b - z_g} = -\frac{40}{42 - 40} = -20.$$

2. Частота вращения ведомого звена:

$$n_{\text{ВЫХ}} = n_g = n_h \cdot i_{gh}^b = \frac{n_h}{i_{hg}^b} = \frac{1000}{-20} = -50 \text{ мин}^{-1}.$$

3. Относительная частота вращения сателлита:

$$n_g - n_h = -n_h \frac{z_b}{z_g} = -1000 \frac{42}{40} = -1050 \text{ мин}^{-1}.$$

**Пример 2.** Выполнить кинематический расчет (рис.5) планетарно-кривошипного механизма эвольвентного зацепления с одним двухвенцовым сателлитом.

$$n_{\text{ВХ}} = 2000 \text{ мин}^{-1}; \quad z_b = 42; \quad z_d = 35; \quad z_g = 40; \quad z_f = 33.$$

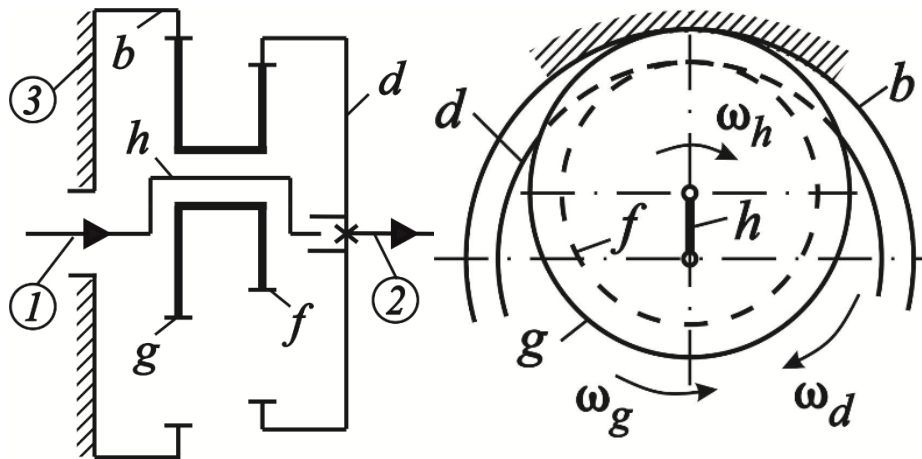


Рисунок 5. Схема планетарно-кривошипного механизма эвольвентного зацепления с одним двухвенцовым сателлитом

**Расчет.** Индексами 1, 2, 3 указываем ведущее, ведомое и остановленное звенья, обозначаем зубчатые колеса  $b, h, d, g, f$ .

1. Передаточное отношение:

$$i_{12}^3 = i_{hd}^b = \frac{1}{i_{dh}^b} = \frac{1}{1 - i_{db}^h} = \frac{1}{1 - \left( \frac{z_b \cdot z_f}{z_g \cdot z_d} \right)} = \frac{1}{1 - \frac{42 \cdot 33}{40 \cdot 35}} = 100.$$

2. Частота вращения ведомого звена:

$$n_{\text{ВЫХ}} = n_d = n_h \cdot i_{dh}^b = \frac{n_h}{i_{hd}^b} = \frac{2000}{100} = 20 \text{ мин}^{-1}.$$

3. Относительная частота вращения сателлита:

$$n_g - n_h = n_f - n_h = -n_h \frac{z_b}{z_g} = -2000 \frac{42}{40} = -2100 \text{ мин}^{-1}.$$

**Пример 3.** Выполнить кинематический расчет (рис.6) двухступенчатого планетарно-кривошипного механизма с **неподвижным** общим водилом (**планетарно-шатунный механизм**).

Вращающий момент через входной вал **1** передается на солнечное колесо **a** трехзвенного планетарного механизма (первая ступень редуцирования) и далее на сателлиты **g** и жестко связанные с ними параллельные кривошипы **h'**, являющиеся ведущим звеном сателлита **f** планетарно-кривошипного механизма (вторая ступень редуцирования). Сателлит **f** и параллельные кривошипы **h'**, осуществляя **поступательное круговое движение**, передают вращение на эпициклическое колесо **d** и связанный с ним выходной вал **2**.

$$n_{\text{ВХ}} = 2000 \text{ мин}^{-1}; z_a = 18; z_g = 36; z_f = 72; z_d = 75.$$

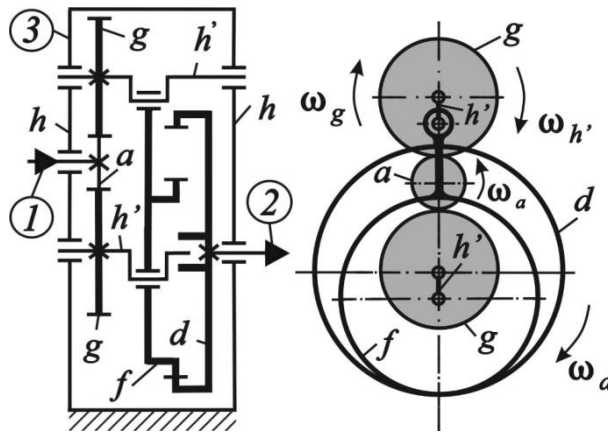


Рисунок 6. Схема двухступенчатого планетарно-кривошипного механизма эвольвентного зацепления с параллельными кривошипами  $h'$  и неподвижным общим водилом  $h$  (планетарно-шатунный механизм)

**Расчет.** Для кинематического анализа раскладываем двухступенчатый механизм на составляющие механизмы: трехзвенный планетарный (рис. 7, а) и планетарно-кривошипный (рис.7, б).

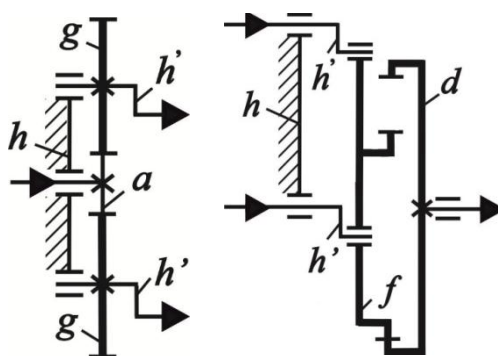


Рисунок 7. Разложение двухступенчатого планетарно-кривошипного механизма на составляющие механизмы: а) трехзвенный планетарный; б) планетарно-кривошипный

1. Передаточное отношение (определяется как произведение абсолютных передаточных отношений ступеней механизма):

$$i_{12}^3 = i_{ad}^h = i_{ah'}^h \cdot i_{h'd}^h.$$

1.1. Передаточное отношение трехзвенного планетарного механизма (рис. 7, а). Ведущее звено – солнечное колесо  $a$ ; ведомое – параллельные кривошипы  $h'$ , жестко связанные с сателлитами  $g$ ; остановленное – водило  $h$ .

$$i_{ah'}^h = i_{ag}^h = -\frac{z_g}{z_a} = -\frac{36}{18} = -2.$$

1.2. Передаточное отношение планетарно-кривошипного механизма (рис.7, б). Ведущее звено – кривошипы  $h'$ ; ведомое – эпициклическое колесо  $d$ ; остановленное – сателлит  $f$ , связанный с неподвижным корпусом, роль которого выполняет общее водило  $h$ . Сателлит  $f$  без вращения вокруг своей оси совершает *поступательное круговое движение* в направлении вращения кривошипов  $h'$ , заставляя вращаться в том же направлении колесо  $d$ , подобно работе волновой передачи с неподвижным гибким колесом.

$$i_{h'd}^h = i_{h'd}^f = \frac{1}{i_{dh'}^f} = \frac{1}{1 - i_{df}^{h'}} = \frac{1}{1 - \frac{z_f}{z_d}} = \frac{z_d}{z_d - z_f} = \frac{75}{75 - 72} = 25;$$

Общее передаточное отношение механизма:

$$i_{12}^3 = i_{ad}^h = i_{ah'}^h \cdot i_{h'd}^h = -2 \cdot 25 = -50.$$

2. Частота вращения выходного звена:

$$n_{\text{вых}} = n_h = n_a \cdot i_{ha}^d = \frac{n_a}{i_{ah}^d} = \frac{1000}{-50} = -20 \text{ мин}^{-1}.$$



3. Относительная частота вращения сателлитов:

$$i_{ga}^h = -\frac{z_a}{z_g} = -\frac{18}{36} = -0,5;$$

$$n_g - n_h = n_{h'} - n_h = n_{h'} = n_g = i_{ga}^h \cdot n_a = -0,5 \cdot 1000 = -500 \text{ мин}^{-1};$$

$$n_f - n_{h'} = -n_{h'} \cdot \frac{z_d}{z_f} = 500 \frac{75}{72} = 520,83 \text{ мин}^{-1}.$$

**Пример 4.** Выполнить кинематический расчет (рис. 8) двухступенчатого планетарно-кривошипного механизма эвольвентного зацепления с *подвижным* общим водилом.

Вращающий момент через входной вал 1 передается на солнечное колесо *a* трехзвенного планетарного механизма (первая ступень редуцирования) и далее на сателлиты *g* и жестко связанные с ними кривошипы *h'*, являющиеся ведущим звеном сателлита *f* планетарно-кривошипного механизма (вторая ступень редуцирования). Сателлит *f* и параллельные кривошипы *h'*, осуществляя плоскопараллельное движение, передают вращение на водило и связанный с ним выходной вал 2.

$$n_{\text{вх}} = 2000 \text{ мин}^{-1}; z_a = 18; z_g = 90; z_f = 195; z_d = 198.$$

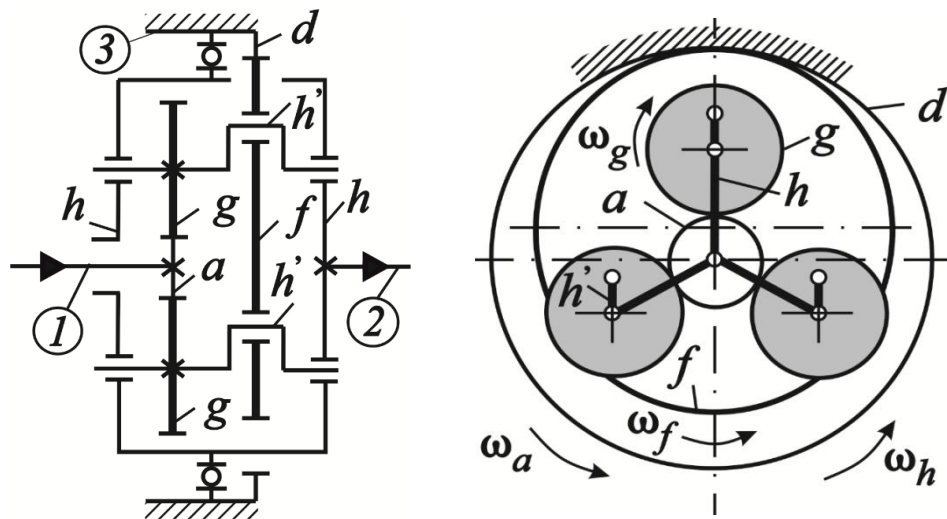


Рисунок 8. Схема двухступенчатого планетарно-кривошипного механизма эвольвентного зацепления с параллельными кривошипами *h'* и подвижным общим водилом *h*

**Расчет.** Индексами 1, 2, 3 указываем ведущее, ведомое и остановленное звенья, обозначаем зубчатые колеса *a, d, g, f, h', h*.

Для кинематического анализа раскладываем двухступенчатый механизм на составляющие механизмы: трехзвенный планетарный (рис.9, а) и планетарно-кривошипный (рис.9, б).

При определении общего передаточного отношения необходимо учесть, что параллельные кривошипы  $h'$  в *системе координат* планетарно-кривошипного механизма играют роль ведущего водила, а подвижное водило  $h$  является общим для составляющих механизмов.

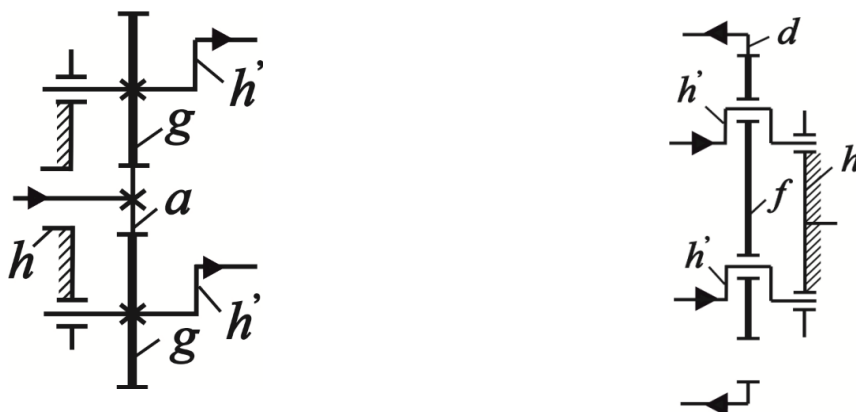


Рисунок 9. Разложение двухступенчатого планетарно-кривошипного механизма на составляющие механизмы: а) трехзвенный планетарный; б) планетарно-кривошипный

1.1. Передаточное отношение (определяется как для единого планетарного механизма с входным солнечным колесом  $a$ , выходным водилом  $h$ , остановленным эпициклическим колесом  $d$ ):

$$i_{12}^3 = i_{ah}^d = 1 - i_{ad}^h = 1 - i_{ah'}^h \cdot i_{h'd}^h .$$

1.2. Относительное передаточное отношение трехзвенного планетарного механизма при  $\omega_g = \omega_{h'}$  (рис.9, а). Ведущее звено – солнечное колесо  $a$ ; ведомое – параллельные кривошипы  $h'$ , жестко связанные с сателлитами  $g$ ; остановленное – водило  $h$ .

$$i_{ah'}^h = i_{ag}^h = -\frac{z_g}{z_a} = -\frac{90}{18} = -5.$$

1.3. Относительное передаточное отношение планетарно-кривошипного механизма при  $\omega_h = \omega_f = 0$  (рис.9, б). Ведущее звено – кривошипы  $h'$ ; ведомое – эпициклическое колесо  $d$ ; остановленное – сателлит  $f$ , связанный с неподвижным корпусом, роль которого выполняет общее водило  $h$ . Сателлит  $f$  без вращения вокруг своей оси совершает *поступательное круговое*

**движение** в направлении вращения кривошипов  $h'$ , заставляя вращаться в том же направлении колесо  $d$ , подобно работе волновой передачи с неподвижным гибким колесом.

$$i_{h'd}^h = i_{h'd}^f = \frac{1}{i_{dh'}^f} = \frac{1}{1 - i_{df}^{h'}} = \frac{1}{1 - \frac{z_f}{z_d}} = \frac{z_d}{z_d - z_f} = \frac{198}{198 - 195} = 66;$$

Общее передаточное отношение механизма:

$$i_{ah}^d = 1 - i_{ad}^h = 1 - -5 \cdot 66 = 331.$$

2. Частота вращения выходного звена:

$$n_{\text{вых}} = n_h = n_a \cdot i_{ha}^d = \frac{n_a}{i_{ah}^d} = \frac{2000}{331} = 6,04 \text{ мин}^{-1}.$$

3. Относительная частота вращения сателлитов:

$$i_{ga}^h = -\frac{z_a}{z_g} = -\frac{18}{90} = -0,2;$$

$$i_{gh}^a = 1 - i_{ga}^h = 1 - \left(-\frac{z_a}{z_g}\right) = 1 + \frac{18}{90} = 1,2.$$

$$n_{h'} = n_g = i_{ga}^h \cdot n_a + i_{gh}^a \cdot n_h = -0,2 \cdot 2000 + 1,2 \cdot 6,04 = -392,8 \text{ мин}^{-1};$$

$$n_g - n_h = n_{h'} - n_h = n_a - n_h \frac{-z_a}{z_g} = 2000 - 6,04 \frac{-18}{90} = -398,8 \text{ мин}^{-1}.$$

$$n_f - n_{h'} = -n_{h'} \frac{z_d}{z_f} = 392,8 \frac{198}{195} = 398,8 \text{ мин}^{-1}.$$

### Литература

1. Планетарные передачи. Справочник/Под ред. В.Н. Кудрявцева и Ю.Н. Кирдяшева, Л.: Машиностроение, 1977, 536 с.
2. Кудрявцев В.Н. Планетарные передачи, Изд. 2-е Л., «Машиностроение», 1966, 308 с
3. Курсовое проектирование деталей машин/В. Н. Кудрявцев, Ю. А. Державец, И. И. Арефьев и др.; Под общ. ред. В. Н. Кудрявцева: Учебное пособие для студентов машиностроительных специальностей вузов.- Л.: Машиностроение, Ленингр. Отд-ние, 1984, 400 с., ил.

4. Детали машин: учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей: в 3 ч. / А.Т. Скойбеда (и др.); под общ. ред. А.Т. Скойбеды. -Минск: БНТУ, 2019.-Ч.1 :Механические передачи.-2019.-215с. ISBN 978-985-583-168-7(Ч.1).

5. Кинематическая теория планетарных механизмов / А.Т. Скойбеда. О.Н. Протасеня, А.А. Калина // Инновации в машиностроении: 100-летний опыт в науке, производстве, образовании [Электронный ресурс]: сборник материалов 18-й МНТК «Наука – образованию, производству. экономике» / БНТУ, Машиностроительный факультет; редкол.: А.А. Калина и [и др.] – минск: БНТУ, 2021

6. Детали машин: учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей: в 3 ч. / А.Т. Скойбеда (и др.); -Минск: БНТУ, 2019.-Ч.2 :Соединения деталей машин.-2022.-179с. ISBN 978-985-583-349-0(Ч.2).

7. Шанников, В. М. Планетарные редукторы с внецентроидным зацеплением [Текст] / Доц. В. М. Шанников, канд. техн. наук. - Москва ; Ленинград : [Ленингр. отд-ние] и 1-я тип. Машгиза в Л., 1948. - 172 с. : ил.; 23 см.

8. Прецессионные редуцирующие механизмы для приводных устройств различного назначения : [монография] / Громыко П.Н., Макаревич Д.М., Доконов Л.Г., Макаревич С.Д., Гончаров П.С., Трусков И.В. - Могилев : Белорусско-Российский университет, 2013. - 272 с. : ил.

### **Кинематика планетарно-кривошипных механизмов цевочного зацепления**

Студент гр. 10604221 Сироткин А.

Научный руководитель – доцент Протасеня О. Н.,  
Белорусский национальный технический университет  
Минск, Республика Беларусь

Планетарно-кривошипные механизмы с цевочным зацеплением применяют в различных отраслях промышленности, там, где требуется обеспечить максимальный вращающий момент при минимальных габаритах и массе привода, высокую надёжность и долговечность. Циклоидальные редукторы используют в конструкциях таких устройств и механизмов, как мешалки для жидких и вязких сред, центрифуги и декантеры, кирпичные прессы, глиномаяльные машины, центробежные и лопастные вентиляторы,