

Кинематика планетарно-волновых механизмов зубчатого зацепления

Студенты гр. 10309120 Шатило Д., Бобрик Д.
Научный руководитель – доцент Протасеня О. Н.,
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Волновым называется зубчатый или фрикционный механизм, предназначенный для передачи и преобразования движения (обычно вращательного), в котором движение преобразуется за счет волновой деформации венца гибкого колеса специальным генератором волн (рис. 1). Изобретатель волновой передачи – американский инженер У. Массер (1959).



Рисунок 1. Планетарно-волновой зубчатый механизм

Волновые механизмы можно рассматривать как одну из разновидностей многопоточных планетарных механизмов, так как они обладают многозонным, а в случае зубчатого механизма, и многопарным контактом выходного звена с гибким колесом. Податливость зубчатого венца обеспечивает достаточно равномерное распределение нагрузки по зубьям, находящимся в зоне зацепления. При номинальных нагрузках процент зубьев находящихся в зацеплении составляет 15-25% от общего их числа. Поэтому в волновых передачах применяется мелко модульное зацепление, а числа зубьев колес лежат в пределах от 100 до 600. Зона зацепления в волновой

зубчатой передаче совпадает с вершиной волны деформации. По числу зон или волн передачи делятся на одноволновые, двухволновые и так далее. Распределение передаваемых усилий по нескольким зонам уменьшает нагрузку на элементы пар и позволяет существенно уменьшать габаритные размеры и массу механизмов. Многозонный и многопарный контакт звеньев существенно увеличивает жесткость механизма, уменьшает мертвый ход и кинематическую погрешность механизма. Поэтому волновые механизмы обладают высокой кинематической точностью и, несмотря на наличие гибкого элемента, достаточно высокой жесткостью.

Волновые передачи применяются в различных отраслях техники: в приводах грузоподъемных машин, конвейеров, различных станков, в авиационной и космической технике, в точных приборах, исполнительных механизмах систем с дистанционным и автоматическим управлением. Герметические волновые передачи передают вращение в герметизированные полости с химической агрессивной и радиоактивной средой, в полости с высоким давлением и глубоким вакуумом. Например, в американской космической ракете «Кентавр» (60-е гг. 20 в.) герметическая волновая передача использовалась в механизме вентиля системы жидкого кислорода, что исключило утечку кислорода и повысило взрыво- и пожаробезопасность топливной системы.

На рис.2. представлен планетарно-кривошипный механизм компании *Simaco*, который в силу своих конструктивных особенностей может быть отнесен как к механизмам с цевочным зацеплением так и к волновым механизмам. К основным техническим особенностям и преимуществам данного планетарно-кривошипного механизма относятся: высокое передаточное число (6-60), высокий крутящий момент на выходном валу, высокая жесткость звеньев, компактность, высокий КПД (до 0.98), высокая надежность и срок службы (до 15 лет).



Рисунок 2. Планетарно-кривошипный механизм компании *Simaco*
(циклоидальный или волновой редуктор)

Кинематика планетарно-кривошипных механизмов основана на кинематической теории классических планетарных механизмов [1].

Передаточное отношение $i_{пл}$ трехзвенного планетарного механизма с однозвенным сателлитом (рис. 3) зависит от статуса основного звена *водила* $-h$ (остановленное, ведущее или ведомое) и заключается в определении функции $i_{пл} = f(i^h)$.

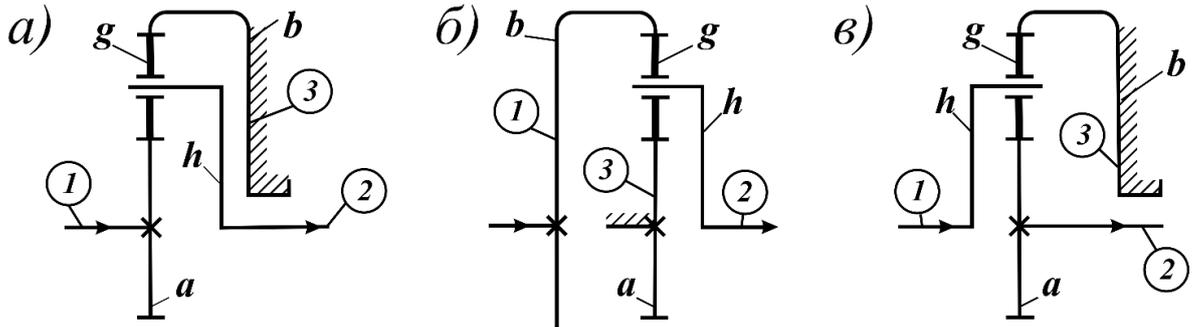


Рисунок 3. Схемы планетарных механизмов с однозвенными сателлитами: а) с ведущим солнечным колесом a , б) с ведущим эпициклическим колесом b , в) с ведущим водилом h

Для раскрытия функции составим *матрицу расчетных формул* для трехзвенных планетарных механизмов с однозвенными сателлитами:

$$i_{пл} = f \ i^h = i_{12}^3 = \begin{cases} i_{12}^h = \pm z_2/z_1 ; \\ i_{1h}^3 = 1 - i_{13}^h = 1 - \pm z_3/z_1 ; \\ i_{h2}^3 = \frac{1}{i_{2h}^3} = \frac{1}{1 - i_{23}^h} = \frac{1}{1 - \pm z_3/z_2} . \end{cases} \quad (1)$$

Для трехзвенных планетарных механизмов с двухзвенными сателлитами (рис. 4) передаточное отношение определяется на основе матрицы расчетных формул (1) с учетом двухзвенного сателлитного блока.

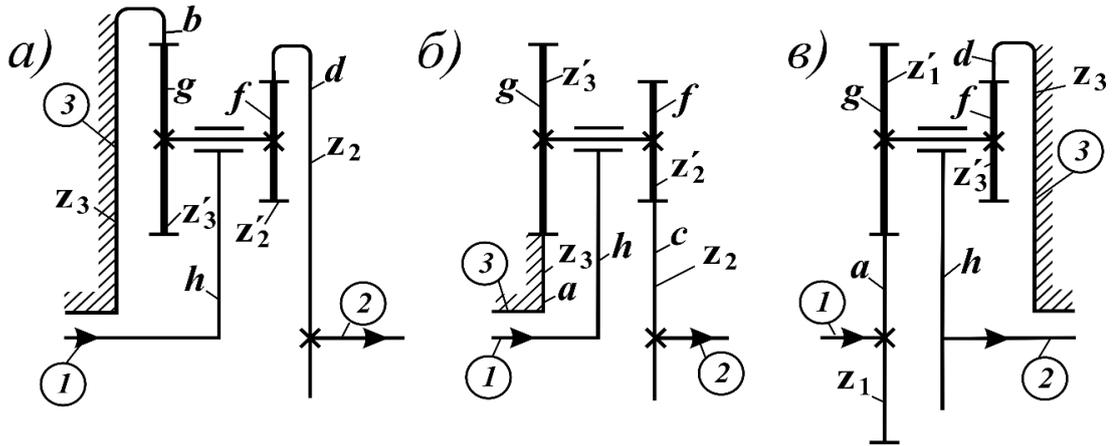


Рисунок 4. Схемы трехзвенных планетарных механизмов с двухзвенцовыми сателлитами: а) внутреннего, б) наружного, в) смешанного зацепления

$$i_{пл} = f \cdot i^h = i_{12}^3 = \begin{cases} i_{12}^h = \left(\pm \frac{z_2 \cdot z_1'}{z_2 \cdot z_1} \right); \\ i_{1h}^3 = 1 - i_{13}^h = 1 - \left(\pm \frac{z_3 \cdot z_1'}{z_3 \cdot z_1} \right); \\ i_{h2}^3 = \frac{1}{i_{2h}^3} = \frac{1}{1 - i_{23}^h} = \frac{1}{1 - \left(\pm \frac{z_3 \cdot z_2'}{z_3 \cdot z_2} \right)}. \end{cases} \quad (2)$$

В (1;2) приняты обозначения: индексы 1, 2, 3 – ведущее, ведомое, остановленное звенья; z_1', z_2', z_3' – числа зубьев сателлитов, находящихся непосредственно в зацеплении с центральными колесами z_1, z_2, z_3 .

Для зацепления $a-g-b$ дифференциального и планетарного механизмов справедливы следующие равенства взаимозависимости частот вращения звеньев:

$$\left. \begin{aligned} n_a &= i_{ab}^h \cdot n_b + i_{ah}^b \cdot n_h; & n_g &= i_{gb}^h \cdot n_b + i_{gh}^b \cdot n_h; \\ n_b &= i_{ba}^h \cdot n_a + i_{bh}^a \cdot n_h; & n_g &= i_{ga}^h \cdot n_a + i_{gh}^a \cdot n_h; \\ n_h &= i_{ha}^b \cdot n_a + i_{hb}^a \cdot n_b; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Относительная частота вращения сателлитов планетарных механизмов с учетом наличия остановленных звеньев определяется по формуле:

$$n_g - n_h = \begin{cases} n_h \begin{pmatrix} z_a \\ z_g \end{pmatrix}, & \text{при } n_a = 0; \\ -n_h \begin{pmatrix} z_b \\ z_g \end{pmatrix}, & \text{при } n_b = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Планетарно-волновой зубчатый механизм представляет концептуальную конструктивную разновидность планетарно-кривошипных механизмов и по своей кинематике эквивалентен последним. Учитывая данную аналогию, определим передаточные отношения двух принципиальных схем планетарно-волновых зубчатых механизмов.

Для планетарно-волнового зубчатого механизма (рис. 5) при ведущем водиле h (генератор волн), остановленном эпициклическом колесе b (жесткое колесо $\mathcal{Ж}$) и ведомом сателлите g (гибкое колесо Γ):

$$i_{12}^3 = i_{h\Gamma}^{\mathcal{Ж}} = -\frac{z_{\Gamma}}{z_{\mathcal{Ж}} - z_{\Gamma}} = i_{hg}^b = -\frac{z_g}{z_b - z_g}, \quad (5)$$

где z_b , $z_{\mathcal{Ж}}$ – число зубьев эпициклического колеса b (жесткого колеса $\mathcal{Ж}$); z_g , z_{Γ} – число зубьев сателлита g (гибкого колеса Γ).

Для планетарно-волнового зубчатого механизма (рис. 6) при ведущем генераторе волн h , остановленном гибком колесе g и ведомом жестком колесе:

$$i_{12}^3 = i_{h\mathcal{Ж}}^{\Gamma} = \frac{z_{\mathcal{Ж}}}{z_{\mathcal{Ж}} - z_{\Gamma}} = i_{hg}^b = \frac{z_b}{z_b - z_g}. \quad (6)$$

На основе данных базовых схем возможно синтезирование различных вариаций планетарно-волновых зубчатых механизмов: трехзвенных, четырехзвенных, ступенчатых, замкнутых дифференциалов и т.д.

Условие сборки для планетарно-волнового зубчатого механизма:

$$z_b - z_g = k \cdot n_w, \quad (7)$$

где k_w – коэффициент кратности; n_w – число волн деформации (зон зацепления) [7].

Пример 1. Выполнить кинематический расчет (рис.5) зубчатого планетарно-волнового механизма ведомым гибким колесом g .
 $n_{\text{вх}} = 1000 \text{ мин}^{-1}$; $z_g = 200$; $z_b = 202$.

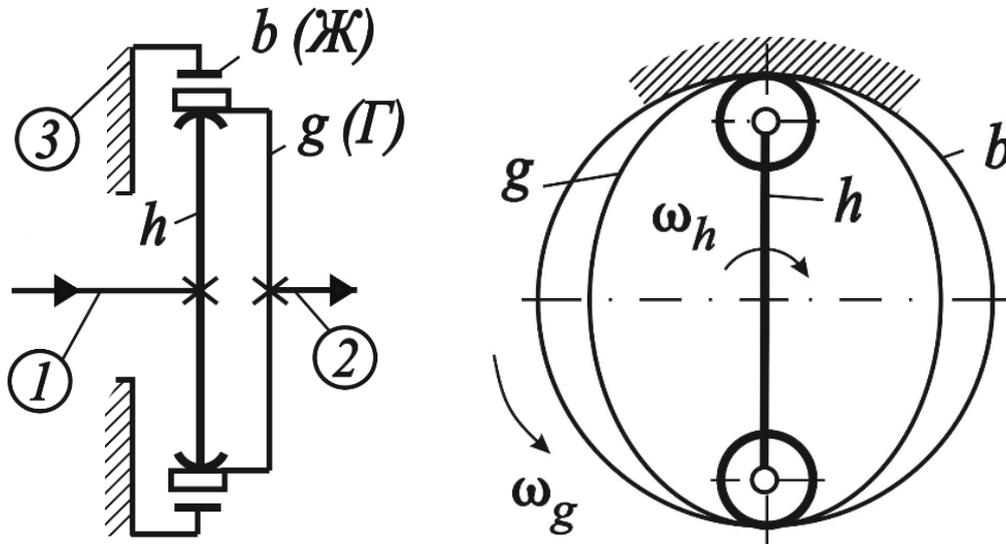


Рисунок 5. Схема зубчатого планетарно-волнового механизма с ведомым гибким колесом g

Расчет. Индексами 1, 2, 3 указываем ведущее, ведомое и остановленное звенья, обозначаем генератор h и зубчатые колеса b, g .

1. Передаточное отношение:

$$i_{12}^3 = i_{hg}^b = -\frac{z_g}{z_b - z_g} = -\frac{200}{202 - 200} = -100.$$

2. Частота вращения ведомого звена :

$$n_{\text{вых}} = n_g = n_h \cdot i_{gh}^b = \frac{n_h}{i_{hg}^b} = \frac{1000}{-100} = -10 \text{ мин}^{-1}.$$

Пример 2. Выполнить кинематический расчет (рис.6) зубчатого планетарно-волнового механизма с ведомым жестким колесом b .

$$n_{\text{вх}} = 1000 \text{ мин}^{-1}; \quad z_g = 200; \quad z_b = 202.$$

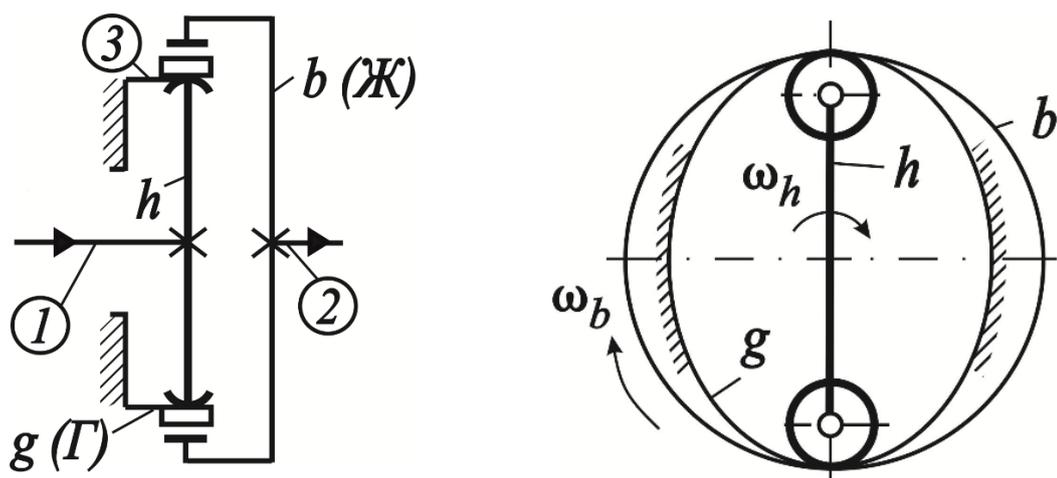


Рисунок 6. Схема зубчатого планетарно-волнового механизма с ведомым жестким колесом b

Расчет. Индексами 1, 2, 3 указываем ведущее, ведомое и остановленное звенья, обозначаем генератор h и зубчатые колеса b, g .

1. Передаточное отношение:

$$i_{12}^3 = i_{hb}^g = \frac{z_b}{z_b - z_g} = \frac{202}{202 - 200} = 101.$$

2. Частота вращения ведомого звена :

$$n_{\text{ВЫХ}} = n_g = n_h \cdot i_{hb}^g = \frac{n_h}{i_{bh}^g} = \frac{1000}{101} = 9,9 \text{ мин}^{-1}.$$

Пример 3. Выполнить кинематический расчет зубчатой планетарно-волновой двухступенчатой передачи (рис. 7), $n_{\text{ВХ}} = 3000 \text{ мин}^{-1}$.

$$z_{g_1} = 200; \quad z_{g_2} = 198; \quad z_{b_1} = 202; \quad z_{b_2} = 200.$$

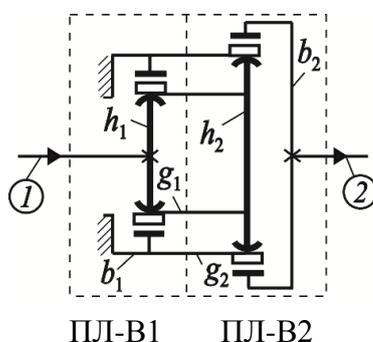


Рисунок 7. Кинематическая схема двухступенчатой планетарно-волновой зубчатой передачи

Расчет. На схеме наносим обозначения звеньев ($g_1, g_2, b_1, b_2, h_1, h_2$), индексы 1, 2; разграничиваем ступени ПЛ-В1, ПЛ-В2.

1. Передаточное отношение:

Первая ступень редуцирования:

$$i_{\text{ПЛ-В1}} = i_{h_1 g_1}^{b_1} = -\frac{z_{g_1}}{z_{b_1} - z_{g_1}} = -\frac{200}{202 - 200} = -100;$$

Вторая ступень редуцирования:

$$i_{\text{ПЛ-В2}} = i_{h_2 b_2}^{g_2} = \frac{z_{b_2}}{z_{b_2} - z_{g_2}} = \frac{200}{200 - 198} = 100;$$

Общее передаточное отношение:

$$i_{12} = i_{\text{ПЛ-В1}} \cdot i_{\text{ПЛ-В2}} = -100 \cdot 100 = -10000.$$

2. Частота вращения выходного вала:

$$n_{\text{ВЫХ}} = n_2 = n_{g_2} = \frac{n_{\text{ВХ}}}{i_{12}} = \frac{n_{h_1}}{i_{12}} = \frac{3000}{-10000} = -0,3 \text{ мин}^{-1}.$$

Пример 4. Для схемы зубчатого волнового замкнутого дифференциала планетарно-дифференциального вида (рис. 8) выполнить кинематический расчет, $n_{\text{ВХ}} = 1000 \text{ мин}^{-1}$.

$$z_{g_1} = 198; \quad z_{g_2} = 200; \quad z_{b_1} = 200; \quad z_{b_2} = 202.$$

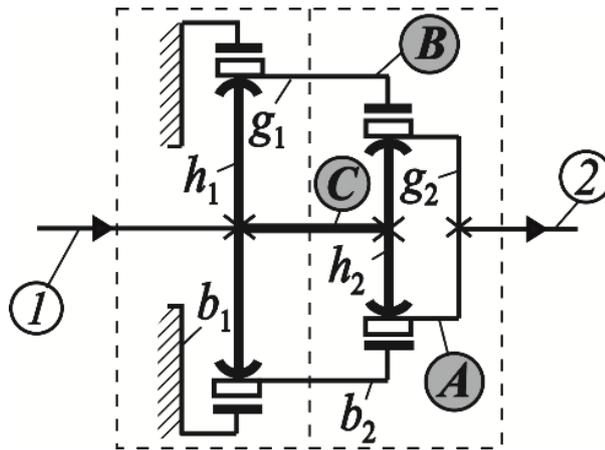


Рисунок 8. Волновой зубчатый замкнутый дифференциал планетарно-дифференциального вида

Расчет. Указываем звенья ($h_1, g_1, b_1, h_2, g_2, b_2$), индексы 1, 2, A, B, C, разграничиваем волновые планетарный (П) и дифференциальный (Д) механизмы.

1. Передаточное отношение:

$$i_{12} = \frac{i_{1-C} \cdot i_{CA}^B \cdot i_{1-B} \cdot i_{BA}^C}{i_{1-C} \cdot i_{CA}^B + i_{1-B} \cdot i_{BA}^C};$$

$$i_{CA}^B = i_{h_2 g_2}^{b_2} = -\frac{z_{g_2}}{z_{b_2} - z_{g_2}} = -\frac{200}{202 - 200} = -100;$$

$$i_{1-B} = i_{h_1 g_1}^{b_1} = -\frac{z_{g_1}}{z_{b_1} - z_{g_1}} = -\frac{198}{200 - 198} = -99;$$

$$i_{BA}^C = i_{b_2 g_2}^{h_2} = \frac{z_{g_2}}{z_{b_2}} = \frac{200}{202} = 0,99; \quad i_{1-C} = 1;$$

$$i_{12} = \frac{-100 \cdot -99 \cdot 0,99}{-100 + -99 \cdot 0,99} = -49,5.$$

2. Выходная частота вращения:

$$n_{\text{вых}} = n_2 = n_{g_2} = \frac{n_1}{i_{12}} = \frac{n_{h_1}}{i_{12}} = \frac{1000}{-49,5} = -20,2 \text{ мин}^{-1}.$$

Литература

1. Планетарные передачи. Справочник/Под ред. В.Н. Кудрявцева и Ю.Н. Кирдяшева, Л.: Машиностроение, 1977, 536 с.

2. Кудрявцев В.Н. Планетарные передачи, Изд. 2-е Л., «Машиностроение», 1966, 308 с

3. Курсовое проектирование деталей машин/В. Н. Кудрявцев, Ю. А. Державец, И. И. Арефьев и др.; Под общ. ред. В. Н. Кудрявцева: Учебное пособие для студентов машиностроительных специальностей вузов.- Л.: Машиностроение, Ленингр. Отд-ние, 1984, 400 с., ил.

4. Детали машин: учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей: в 3 ч. / А.Т. Скойбеда (и др.); под общ. ред. А.Т. Скойбеда. -Минск: БНТУ, 2019.-Ч.1 :Механические передачи.-2019.-215с. ISBN 978-985-583-168-7(Ч.1).

5. Кинематическая теория планетарных механизмов / А.Т. Скойбеда. О.Н. Протасеня, А.А. Калина // Инновации в машиностроении: 100-летний опыт в науке, производстве, образовании [Электронный ресурс]: сборник материалов 18-й МНТК «Наука – образованию, производству. экономике» /

БНТУ, Машиностроительный факультет; редкол.: А.А. Калина и [и др.] – Минск: БНТУ, 2021

6. Детали машин: учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей: в 3 ч. / А.Т. Скойбеда (и др.); -Минск: БНТУ, 2019.-Ч.2 :Соединения деталей машин.-2022.-179с. ISBN 978-985-583-349-0(Ч.2).

7.Шанников, В. М. Планетарные редукторы с внецентроидным зацеплением [Текст] / Доц. В. М. Шанников, канд. техн. наук. - Москва ; Ленинград : [Ленингр. отд-ние] и 1-я тип. Машгиза в Л., 1948. - 172 с. : ил.; 23 см.

8.Прецессионные редуцирующие механизмы для приводных устройств различного назначения : [монография] / Громыко П.Н., Макаревич Д.М., Доконов Л.Г., Макаревич С.Д., Гончаров П.С., Трусов И.В. - Могилев : Белорусско-Российский университет, 2013. - 272 с. : ил.

**Применение метода начальных параметров для
расчета статически неопределимой балки
с жёсткой заделкой**

Студент гр. 11001122 Гончарова Е. А.

Научный руководитель – к.ф.-м.н., доцент Беляцкая Л.Н.

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Балки могут выполнять функции элемента конструкции лишь в тех случаях, если они неподвижны, то есть когда их точки перемещаются только в результате деформирования. В случае действия нагрузки только в одной плоскости неподвижность обеспечивается тремя связями (опорами). Эти связи являются необходимыми. Поскольку для плоской системы сил можно составить три уравнения равновесия, то реакции необходимых связей могут быть найдены с помощью лишь одних уравнений статики. Такие балки называются статически определимыми.

Однако в балке из конструктивных соображений, для увеличения ее прочности и жесткости, может быть больше трех связей (реакций). В этом смысле некоторые связи являются лишними. Балки с лишними связями называются статически неопределимыми, поскольку реакции таких балок невозможно определить только при помощи уравнений статики. Степень