

pov, F. T. Yusupova // Technika. Technology. Engineering. – 2020. – Vol. 15, № 1. – P. 34–37.

3. Avazov, B. K. Transformer oil cleaning technology / B. K. Avazov, T. Q. Karimberdi // Academic research in educational sciences: proceedings of 3.TSTU conf. 1, Tashkent, 21–22 April 2022. – Tashkent, 2022. – P. 199–202.

4. Yusupov, D. T. Regression model of the dependence of the technical failure of traction transformers on air humidity / D. T. Yusupov, O. M. Kutbidinov // Innovative technologies in water, communal services and water transport [Electronic resource]: materials of the II republican scientific and technical conference, 28–29 April 2022 / editorial board: S. V. Kharitonchik [and others]. – Minsk: BNTU, 2022. – P. 442–446.

5. Steklov, A. S. Neuro-fuzzy model for diagnosing the technical condition of a synchronous generator / A. S. Steklov, D. S. Podkovyryn // Chief Power Engineer. – 2015. – № 11–12. – P. 55–60.

6. Steklov, A. S. Neuro-fuzzy model for diagnosing the technical condition of a synchronous generator / A. S. Steklov, D. S. Podkovyryn // Chief Power Engineer. – 2015. – № 11–12. – P. 34–42.

УДК 534.521

Движение тела в вязкой среде при учете присоединенной массы

Кириленко А. И., Листопад А. И.
Белорусская государственная академия авиации
Минск, Республика Беларусь

Рассматриваются характеристики движения сферического тела в вязкой среде. Предполагается, что плотность тела больше плотности среды и тело в ней падает, не изменяя своей формы. Изучается влияние присоединенной массы, которая вводится по Буссинеску. Показано, что теоретическая установившаяся скорость падения при бесконечном времени падения одинакова как в случае с присоединенной массой, так и без нее. При проведении экспериментов предлагается считать в качестве установившейся скорости величину несколько меньшую теоретической. Обсуждается влияние этой величины на время установления скорости и на расстояние, которое пролетает частица за это время. Сравниваются эти характеристики при учете присоединенной массы и без нее. Влияние стенок сосуда, в который налита жидкость, на характер движения тела учитывается через поправки по Хантеру. Приводятся результаты расчетов применительно к реальным экспериментам.

Поведение микроскопических твердых частиц в жидкости важно, как минимум, в двух практически важных аспектах. Прежде всего это актуально для многочисленных технологических процессов, таких, как седиментация, коагуляция и подобных. Кроме того, субмиллиметровые частицы используются как маркеры (декорирующие частицы) при изучении движения жидкостей и газов. Сами по себе они не влияют на движение сплошной среды, но дают возможность наблюдать это движение оптическими методами при размере частиц меньше длины волны. В аэродинамических трубах используется задымление для визуализации обтекания поверхностей потоком воздуха. На этом основаны методы контроля, такие как ультрамикроскопия, метод темного поля, метод фазового контраста. Казалось бы, в этой области трудно ожидать новинок. Тем не менее, по мере расширения фронта работ с мелкими твердыми частицами проявляются странные явления. Обнаружено, что частицы с размерами порядка 10 мкм прилипают снизу к поверхности воды и не тонут. Таким образом, появляются основания считать, что поверхностное натяжение играет здесь далеко не первостепенную роль. Вероятнее всего, что здесь преобладают силы молекулярного взаимодействия между микрочастицей и молекулами в поверхностном слое воды. Но тогда расстояния между взаимодействующими молекулами должны быть порядка размеров самих молекул, а значит эффект должен сильно зависеть от состояния поверхности как жидкости, так и твердой частицы. При движении тел такие эффекты ранее не учитывались. Простейшим примером появлением межмолекулярного взаимодействия является эффект присоединенной массы. Мы здесь остановимся на влиянии присоединенной массы на движение частицы в среде. При движении тела в среде на поверхности тела возникает пограничный слой среды, сильно сжатой силами молекулярного взаимодействия. Хотя этот слой чрезвычайно тонок, его влияние на движение тел велико, в частности, он отвечает за вихреобразование за телом и появление дополнительных сил сопротивления [1].

Цель нашей работы – выяснить роль присоединенной массы при падении тел в жидкости. Речь идет о классическом методе определения вязкости жидкости – методе падающего шарика. Присоединенную массу к шарикку будем рассчитывать по методу Буссинеска, а присоединенную массу к стенкам сосуда – через поправки по Хантеру [2].

Формула Буссинеска для силы сопротивления при движении шарика с учетом присоединенной массы имеет вид

$$F = -6\pi\eta r v(t) - \frac{2}{3}\pi\rho_{\text{ж}}r^3 \frac{dv}{dt}, \quad (1)$$

где r – радиус шарика; η – коэффициент кинематической вязкости жидкости; $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости.

Отсюда следует, что присоединенная масса равна половине массы жидкости в объеме сферической частицы.

Поправку Хантера берем в виде

$$\psi = \frac{1 - \frac{r^{2,25}}{\gamma}}{1 + 3,3 \frac{r}{h}}, \quad (2)$$

где γ – характерный размер сечения сосуда, в котором падает шарик (радиус цилиндра); h – глубина этого сосуда.

На падающий шарик действуют следующие силы: сила тяжести $mg = \rho_T \frac{4}{3} \pi r^3 g$, направленная вниз по движению, выталкивающая сила

$F_A = \rho_{\text{ж}} \frac{4}{3} \pi r^3 g$ и сила, определяемая выражением (1). Второй закон Ньютона

для движения шарика запишем в виде

$$ma = mg - F_A - F_B \text{ или}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_T + \rho_{\text{ж}}} \frac{1}{r^2} v = \frac{2\rho_T}{2\rho_T + \rho_{\text{ж}}} g,$$

$$\frac{dv}{dt} + \alpha v = k.$$

Мы имеем дифференциальное уравнение первого порядка с постоянной правой частью для нахождения зависимости скорости шарика от времени $v(t)$. Это хорошо известное уравнение, решение которого имеет вид

$$v(t) = V_0 (1 - e^{-\alpha t}), \quad (3)$$

где установившаяся скорость при $t \rightarrow \infty$ равна [3]

$$V_0 = \frac{k}{\alpha} = \frac{2g\rho_T}{9\eta} r^2. \quad (4)$$

На эксперименте обычно считают скорость установившейся спустя некоторое время после начала движения. Более строгая оценка получается, если учесть характер падения тел в среде. Вначале тело движется с большим ускорением, а спустя некоторое время t_y ускорение движения становится очень малым, настолько, что его можно считать движением с постоянной (установившейся) скоростью. Введем величину

$$\sigma = \frac{v(t)}{V_0} = 1 - \Delta\sigma.$$

Эти соотношения годятся для определения установившейся скорости, если задана одна из величин σ или $\Delta\sigma$. Через них будет определяться время установления скорости t_y и расстояние $s(t_y)$, на котором эта скорость будет достигаться.

Для этого предположим, что время такого ускоренного движения равно t_y , которое определится из равенства $v_y(t_y) = \sigma V_0$. Безусловно, $\sigma < 1$, и, начиная с момента времени t_y , мы не можем на эксперименте заметить изменений скорости падения. Величина $\Delta\sigma \ll 1$. Итак,

$$v(t_y) = V_0(1 - e^{-\alpha t_y}) = V_0 - V_0 \Delta\sigma,$$

откуда

$$t_y = -\frac{1}{\alpha} \ln \Delta\sigma. \quad (5)$$

Путь, на котором устанавливается скорость, определим, интегрируя выражение (3), получаем

$$s(t_y) = V_0 t_y + \frac{V_0}{\alpha} e^{-\alpha t_y}. \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) пригодны для анализа движения как с присоединенной массой, так и без нее. Отличия лишь в величине коэффициентов α , V_0 и t_y . Для движения без учета присоединенной массы примем обозначения с индексом 1, а с учетом ее – с индексом 2. На основе определения V_0 по-

лучаем $V_0 = V_{01} = V_{02}$. Таким образом, теоретическая установившаяся скорость одинакова как при учете присоединенной массы, так и без нее. В обоих случаях она соответствует числу Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{4gr^3}{9} \frac{\rho_T \rho_{ж}}{\eta^2} \leq 1,$$

причем случай равенства здесь следует рассматривать как предельный, при котором еще можно с большим приближением рассматривать силы сопротивления по Стоксу и Буссинеску, то есть, по сути, устанавливает верхний предел применимости метода.

Далее имеем

$$t_{y1} = -\frac{2\rho_T r^2}{9\eta} \ln \Delta\sigma, \quad t_{y2} = -\frac{2\rho_T + \rho_{ж}}{9\eta} r^2 \ln \Delta\sigma,$$

$$s_1(t_{y1}) = \left(\frac{2\rho_T r^2}{9\eta}\right)^2 g(\Delta\sigma - \ln \Delta\sigma),$$

$$s_2(t_{y2}) = \left(\frac{2\rho_T r^4}{(9\eta)^2}\right)^2 g(2\rho_T + \rho_{ж})(\Delta\sigma - \ln \Delta\sigma).$$

Практическое значение имеет разность времен достижения установившейся скорости и разность проходимых при этом путей

$$\Delta t_y = t_{y2} - t_{y1} = -\frac{\rho_{ж} r^2}{9\eta} \ln \Delta\sigma > 0,$$

$$\Delta s = s_2(t_{y2}) - s_1(t_{y1}) = \frac{2\rho_T \rho_{ж}}{(9\eta)^2} r^4 g(\Delta\sigma - \ln \Delta\sigma).$$

Как видим, плотность жидкости существенно влияет на время установления скорости падения и на путь проходимый за это время. В этом проявляется влияние присоединенной массы.

Обратимся теперь к поправке Хантера (2). Установившаяся скорость выражается через поправку Хантера и теоретическую установившуюся скорость в виде $V_H = \psi \cdot V_0$. Ясно, что и для экспериментальной установившейся скорости мы будем иметь такое же соотношение. Для расчетов принято: диаметр сечения сосуда $2\gamma = 25$ мм, глубина жидкости в сосуде $h = 300$ мм. Для расчетов данные по плотностям и вязкостям взяты из [4].

Как следует из расчетов (табл. 1–3, рис. 1–4) влияние присоединенной массы на скорость падения шарика в вязкой жидкости на начальном этапе движения более существенно, чем влияние размеров сосуда, по крайней мере при тех его параметрах, которые взяты для расчета. Теоретические установившиеся скорости в случае присоединенной массы и без нее одинаковы.

Таблица 1

Вязкости и плотности жидкостей, принятые в расчетах

Жидкость	Вязкость η , $10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$	Плотность ρ , кг/м^3	Жидкость	Вязкость η , $10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$	Плотность ρ , кг/м^3
Глицерин 20 °С	1410	1290	Глицерин –20 °С	63 900	1282
Глицерин 0 °С	5260	1285	Керосин	1,3	819
Глицерин –5 °С	12 680	1284	Вода	1,34	1000

Таблица 2

Характеристики падения тел с учетом и без учета присоединенной массы в различных средах

Падение свинцового шарика $r = 0,5$ мм в керосине при $Re = 1$			
Без учета присоединенной массы		С учетом присоединенной массы	
1	2	3	4
v , м/с	$0,43 \cdot 10^{-3}$	v , м/с	$4,2 \cdot 10^{-3}$
s_y , м	$2,2 \cdot 10^{-8}$	s_y , м	$2,07 \cdot 10^{-5}$
t_y , с	$0,12 \cdot 10^{-4}$	t_y , с	$1,4 \cdot 10^{-4}$
a	24492	a	2083
k	9,1	k	8,78
Падение полихлорвинилового шарика $r = 0,5$ мм в керосине при $Re = 1$			
v , м/с	$0,18 \cdot 10^{-4}$	v , м/с	$4,6 \cdot 10^{-3}$
s_y , м	$9,5 \cdot 10^{-10}$	s_y , м	$5,6 \cdot 10^{-8}$
t_y , с	$0,12 \cdot 10^{-4}$	t_y , с	$0,2 \cdot 10^{-4}$
a	24 492	a	14 404
k	3,58	k	66,79
Метод Перрена: $r = 0,6$ мкм при $Re = 1$			
v , м/с	$3,9 \cdot 10^{-11}$	v , м/с	$1,64 \cdot 10^{-11}$
s_y , м	8232,6	s_y , м	0,066
t_y , с	$5,66 \cdot 10^{-13}$	t_y , с	$4,09 \cdot 10^{-13}$
a	$12,5 \cdot 10^9$	A	$7,3 \cdot 10^{12}$
k	1,7	K	1,2

Падение свинцового шарика $r = 0,5$ мм в глицерине при $+20^\circ\text{C}$ и при $Re = 1$			
1	2	3	4
$v, \text{ м/с}$	$3,8 \cdot 10^{-6}$	$v, \text{ м/с}$	$3,9 \cdot 10^{-6}$
$s_y, \text{ м}$	$5,68 \cdot 10^{-13}$	$s_y, \text{ м}$	$2,2 \cdot 10^{-12}$
$t_y, \text{ с}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$t_y, \text{ с}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$
A	$2,53 \cdot 10^7$	A	$2,1 \cdot 10^6$
K	8,73	K	8,2
Падение свинцового шарика $r = 0,5$ мм в глицерине при -20°C $Re = 1$			
$v, \text{ м/с}$	$8,5 \cdot 10^{-9}$	$v, \text{ м/с}$	$7,9 \cdot 10^{-9}$
$s_y, \text{ м}$	$2,94 \cdot 10^{-18}$	$s_y, \text{ м}$	$2,4 \cdot 10^{-15}$
$t_y, \text{ с}$	$2,6 \cdot 10^{-10}$	$t_y, \text{ с}$	$3,1 \cdot 10^{-7}$
A	$1,15 \cdot 10^{10}$	A	$9,5 \cdot 10^8$
K	8,7	K	6,78

Таблица 3

Значения установившихся скоростей падения тел в различных средах
с учетом поправок Хантера

Поправка Хантера	
Наименование эксперимента	$v, \text{ м/с}$
Падение свинцового шарика $r = 0,5$ мм в керосине $Re = 1$	$0,4 \cdot 10^{-3}$
Падение полихлорвинилового шарика $r = 0,5$ мм в керосине $Re = 1$	$0,15 \cdot 10^{-4}$
Метод Перрена $r = 0,6$ мкм $Re = 1$	$3,8 \cdot 10^{-11}$
Падение свинцового шарика $r = 0,5$ мм в глицерин $+20^\circ\text{C}$ $Re = 1$	$3,7 \cdot 10^{-6}$
Падение свинцового шарика $r = 0,5$ мм в глицерин -20°C $Re = 1$	$8,4 \cdot 10^{-9}$

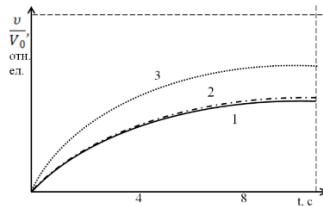


Рис. 1. Зависимость скорости падения свинцового шарика от времени с учетом поправок в керосине:
1 – расчетная кривая с учетом поправки Хантера; 2 – расчетная кривая без поправки; 3 – с учетом присоединенной массы

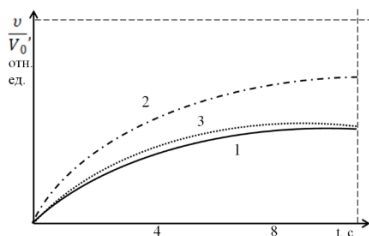


Рис. 2. Зависимость скорости падения полихлорвинилового шарика от времени с учетом поправок в керосине:
 1 – расчетная кривая с учетом поправки Хантера;
 2 – расчетная кривая

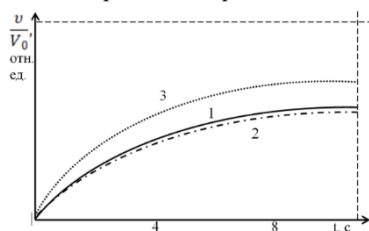


Рис. 3. Зависимость скорости падения свинцового шарика от времени с учетом поправок в глицерине при 20 °C:
 1 – расчетная кривая с учетом поправки Хантера; 2 – расчетная кривая без поправок; 3 – с учетом присоединенной массы

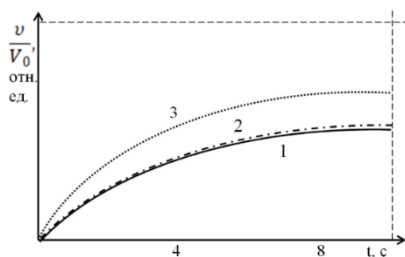


Рис. 4. Зависимость скорости падения свинцового шарика от времени с учетом поправок в глицерине при -20 °C:
 1 – расчетная кривая с учетом поправки Хантера; 2 – расчетная кривая без поправок; 3 – с учетом присоединенной массы

Таким образом, для корректного проведения эксперимента по определению вязкости жидкости методом падающего шарика необходимо, чтобы число Рейнольдса было меньше единицы, расстояние от уровня жидкости до начала уровня отсчета времени падения было больше пути $s_2(t_{y2})$, на котором устанавливается скорость, а поправка Хантера мало отличалась от единицы.

Литература

1. Патрашев, А. Н. Гидромеханика / А. Н. Патрашев. – М.: Военн.-мор. изд-во, 1953. – 719 с.

2. Hunter, R. G. Application of Stokes' law in the determination of the absolute viscosity of glass / R. G. Hunter // *Journal American. Cer. Society.* – 1994. – Vol. 17. – P. 121–127.

3. Кириленко, А. И. Моделирование движения тел в атмосфере / А. И. Кириленко, Т. Д. Кириленко, И. В. Рубанов // *Инновационные технологии в водном, коммунальном хозяйстве и водном транспорте: материалы II республ. науч.-практ. конф., Минск, 28–29 апр. 2022 г. / БНТУ; редкол.: С. В. Харитончик [и др.]. – Минск, 2022. – С. 426–430.*

4. Forsythe, W. E. *Smithsonian Physical Tables* / W. E. Forsythe. – New York: Knovel, Norwich, 2003. – P. 318.