БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 539.3

ПРОНКЕВИЧ
Сергей Александрович

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ, КОЛЕБАНИЙ И КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Минск, 2015

Работа выполнена в Белорусском национальном техническом университете

Научный руководитель	**Чигарев Анатолий Власович,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Белорусского национального технического университета
Официальные оппоненты:	**Старовойтов Эдуард Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой строительной механики УО «Белорусский государственный университет транспорта»; **Ботогова Марина Георгиевна,** доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры био- и наномеханики Белорусского государственного университета
Оппонирующая организация	УО «Брестский государственный технический университет»

Защита состоится 13 февраля 2015 в 16^{00} часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.05.07 при Белорусском национальном техническом университете по адресу: 220013, г. Минск, пр. Независимости, 65, корпус 1, ауд. 202, тел. ученого секретаря (+375297) 292-24-04.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского национального технического университета.

Автореферат разослан 12 января 2015 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций,
канд. физ.-мат. наук Ширвель П.И.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации обусловлена тем, что двумерное напряженно – деформированное состояние реализуется во многих конструкциях, находящих применение в различных областях машиностроения, строительства, приборостроения. Развитию методов моделирования и расчета двумерных задач в контактной механике, в теории упругой устойчивости, в теории колебаний посвящено громадное число публикаций, в которых рассматриваются различные подходы, начиная от методов экспериментальной механики и кончая методами функционального анализа, топологии, теории групп. В последние годы важную роль в решении этих задач играют численные методы, основанные на методе конечных элементов и системах CAD/FEM, позволяющих получить информацию о характере напряженно-деформируемого состояния в двумерной упругой области с достаточно сложной геометрией и различными граничными условиями. Однако разработка аналитических методов решения контактных задач и задач нахождения спектра собственных значений и собственных функций остается актуальной. Сочетание аналитических и численных методов позволяет решать задачи, получать оценки погрешности между решениями, полученными разными авторами или экспериментальными данными. Реализация принципа взаимодополняемости численного и аналитического анализа позволяет не только продвинуться в решении поставленных задач, но и прогнозировать конкретный вид решений для двумерных областей сложной формы и нерегулярных граничных условий.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами Тема диссертации соответствует п. 12.1. «Физические и математические методы и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, новых технологий, экономики и социальных наук» Перечня приоритетных направлений фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 годы, утвержденного Постановлением Совета Министров Республики Беларусь 19.04.2010 № 585. Работа выполнялась в рамках НИР ГБ №1911-218 «Моделирование и расчет напряженно-деформированного состояния в неоднородных средах применительно к решению задач мехатроники, биомеханики, наномеханики».

Цель и задачи исследования Цель работы – использование методов численного и аналитического анализа для решения двумерных задач устойчивости, колебаний и контактного взаимодействия деформируемых тел в случае различных граничных условий, вариациях геометрических форм упругих областей, контактных площадок.

Для достижения поставленной цели требовалось решить следующие задачи:

- исследовать влияние нерегулярности граничных условий на характер распределения деформаций в круглой пластине;
- исследовать влияние перфорирования прямоугольных пластин на величину критической нагрузки;
- оценить влияние малых нерегулярностей в геометрии, неоднородности в граничных условиях, нелинейности среды на спектр собственных частот;
- исследовать влияние предельного перехода непрерывного негладкого деформирования вписанного и описанного многоугольников в круг, оценить погрешность приближения собственных функций и спектра многоугольных областей круговыми;
- построить численно-аналитическое решение задачи о внутреннем контакте двух цилиндрических тел.

Научная новизна заключается в новом методе численно-аналитического решения уравнения Прандтля для задачи о внутреннем контакте двух цилиндрических тел; в новом методе определения формы деформирования круглой пластины за счет перемещения и изгиба ее контура; в полученных численных оценках влияния различного вида перфорирования на значения критической нагрузки для прямоугольных пластин с соотношением сторон 1:1, 1:2, 1:3; в полученных численных оценках влияния величины различных видов неоднородностей на частоты собственных колебаний круглой пластины.

Положения, выносимые на защиту

1. Численно-аналитическое решение уравнения Прандтля для задачи И. Я. Штаермана о внутреннем контакте двух цилиндрических тел. Предложенное численно-аналитическое решение позволяет находить давление в области контакта и имеет преимущество в скорости решения перед методом И. Векуа и методом конечных элементов.

2. Влияние величины задаваемых изгибов и перемещений контура круглой пластины на форму ее деформирования.

3. Влияние диаметра и расположения перфорации на значения критической нагрузки для прямоугольной пластины с соотношением сторон 1:1, 1:2, 1:3.

4. Численные оценки влияния величины неоднородности (расположение и величина сосредоточенной массы, расположение и диаметр перфорации, нелинейности геометрии, неоднородности граничных условий) на спектр и формы собственных колебаний круглой пластины.

Личный вклад соискателя

Представленные в работе результаты получены автором лично. Научный руководитель, д. ф. – м. н., проф. Чигарев А.В. принимал участие в постановке задач и анализе полученных результатов. Разработка численно-аналитических методов решения задачи о контакте согласованных поверхностей и изгиба пластин при неравномерных граничных условиях, изложенных в работе, выполнена совместно с д. ф.-м. н., проф. И.Н. Мелешко. Другим соавторам принадлежат результаты, не вошедшие в работу.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты работы прошли апробацию на следующих международных и республиканских конференциях и семинарах:

XLIII Республиканский научно-методический семинар «Применение методов компьютерной механики в инженерии, науке, образовании» (Минск, 5–6 февраля 2013).

V Белорусский конгресс по теоретической и прикладной механике «Механика-2011», (Минск, 26–28 октября 2011 года).

XLIII Республиканский научно-методический семинар «Применение методов компьютерной механики в инженерии, науке, образовании» (Минск, 7–8 февраля 2011).

VI Международный симпозиум по трибофатике (Минск, 25 октября–1 ноября 2010 г).

Международная научно-техническая конференция «Инновации в машиностроении» (Минск, 26–29 октября 2010 г).

Опубликование результатов диссертации По теме диссертации опубликовано 10 статей, из них 5 в научных журналах, рекомендованных для публикации ВАК (общим объемом 1,25 авторских листа), 3 статьи в сборниках материалов и тезисах докладов научных конференций и семинаров, 2 статьи в других научных изданиях.

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав основного текста с краткими выводами, заключения, списка использованных источников и приложения. Общий объем диссертации составляет 117 страниц, включая 41 рисунок, 6 таблиц, библиографию из 164 наименований и приложения на 2 страницах.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Как известно, постановка и решение задачи упругой устойчивости стержня впервые была дана Эйлером. Дальнейшие исследования для двумерных и трехмерных задач привели к созданию теории ветвления решений, имеющей общезначимые результаты в прикладных и теоретических аспектах. Хронологически следующая граничная задача, относящаяся к теме диссертации, это задача Герца, которая положила начало развитию контактной механики, трибологии и другим дисциплинам, важным с точки зрения теории и практики. Релеем были доказаны теоремы о влиянии на спектр и формы собственных колебаний жесткостных, инерционных, геометрических, вязких свойств связей. Гильбертом была сформулирована задача о влиянии геометрии колеблющейся области на распределение собственных частот и колебаний этой области, а Вейлем было установлено, что изометричные области имеют одинаковые спектры частот и собственных колебаний. В дальнейшем этой проблемой занимались многие исследователи, трудами которых сформировалась область науки, называемая спектральной теорией операторов (Данфорд, Шварц). В рамках аналитических подходов к решению этих задач разработаны методы приближенного вычисления наименьшего собственного значения и собственной функции с помощью метода Ритца. Однако вопросы нахождения частот и гармоник более высоких порядков для областей с формами сложнее, чем круг и прямоугольник с неоднородными граничными условиями оставались недостаточно исследованными. Доказан ряд теорем о влиянии варьирования геометрии области на спектр и собственные колебания, разработана классификация задач, составлены таблицы, однако полного решения проблемы пока не получено.

Важным вопросом в теоретическом и практическом аспектах является переход при варьировании области к вырожденным случаям, характеризуемым слиянием частот и появлением двух и более независимых мод для одной и той же кратной частоты. Большое количество исследований посвящено изучению влияния не только формы области, но и связей (граничных условий), а также других параметров задачи на характер статической потери устойчивости, а также колебаний и спектр собственных частот. Известно, что влияние неоднородности и нелинейности может приводить к переходу детерминированных колебаний в хаотические.

Первая глава посвящена обзору и формулировке основных граничных задач, аналитическим методам определения частот и форм собственных колебаний пластин, определению критических нагрузок и форм потери устойчивости пластин, а также двумерным контактным задачам теории упругости.

Для плоского деформированного состояния граничные задачи и методы их решения формулируются в классической форме.

Рассмотрены контактные задачи для плоской задачи теории упругости и теории пластин в случае малой области контакта (модель Герца) и в случае контакта согласованных цилиндрических поверхностей (задача И.Я. Штаермана).

Во второй главе развиваются аналитические и численные методы решения контактных задач и задач статической устойчивости для двумерных тел.

В первом разделе приведено сравнение решения контакта цилиндра и цилиндрической полости на основе теории Герца, с решением, полученным на основе метода конечных элементов. Приведены выражения, описывающие величину области контакта, сближения тел δ и максимального давления p_0.

Во втором разделе рассмотрено влияние области контакта соприкасающихся поверхностей на решение. Рассмотрена задача И.Я. Штаермана о внутреннем контакте цилиндра и цилиндрической полости (рисунок 1), когда линейный размер области контакта соизмерим с радиусами тел.

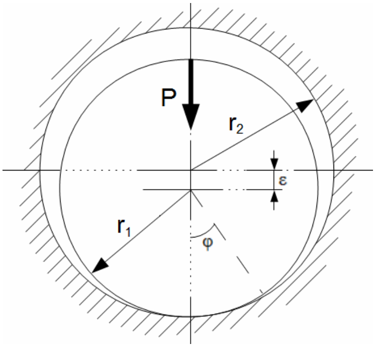


Рисунок 1. – Контакт двух цилиндрических тел с почти равными радиусами

В этом случае в области контакта выполняется соотношение:

$u_{1r} + u_{2r} = \alpha\cos\varphi - \varepsilon(1-\cos\varphi)$, где u_1 и u_2 – нормальные упругие перемещения точек цилиндра и полости, α – сближение тел при сжатии. Сближение тел *α* зависит от величины внешней нагрузки и механических свойств соприкасающихся поверхностей.

Задача, в итоге, сводится к решению интегро-дифференциального уравнения Прандтля:

$$H\frac{p(x)}{(1+x^2)} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p'(x)}{t-x}dt = f(x),\ -1 < x < 1\,,$$

описывающего искомое давление *p(x)*, возникающее при контакте согласованных поверхностей под действием нагрузки *P* (*H* – константа, зависящая от свойств соприкасающихся поверхностей, *f(x)* – функция, зависящая от нагрузки *P*).

Решение представляется в виде ряда по собственным функциям:

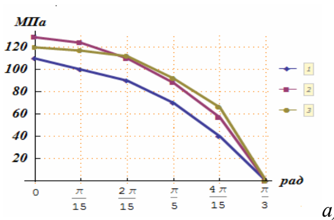
$$p(x) = \sqrt{1-x^2}\sum_{-n}^{n} A_k(x)u_k\ ,$$

где

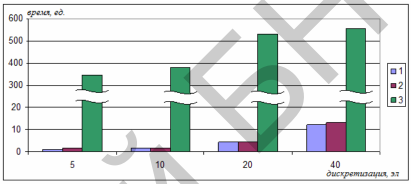
$$A_k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\left(x_k+\frac{h}{2}\right)H\left(x, x_k+\frac{h}{2}\right) - \left(x_k-\frac{h}{2}-x\right)H\left(x, x_k-\frac{h}{2}\right)\right] +$$
$$+\frac{1}{\pi}\left[\arcsin\left(x_k+\frac{h}{2}\right) - \arcsin\left(x_k-\frac{h}{2}\right)\right]$$

$H\left(x, x_k \pm \frac{h}{2}\right)$ – выражения, зависящие от механических свойств контактирующих поверхностей.

Изложенным методом проведен расчет контактного давления *p(x)* и угла контакта φ. На рисунке 2,*а)* показано контактное давление для частного случая сжатия стального цилиндра и стального охватывающего тела силой *P*. На рисунке 2,*б)* показано время расчета в зависимости от дискретизации полосы контакта.



а)



б)

1 – конечно-элементное решение, полученное в системе ANSYS;
2 – решение, предложенное И. Векуа;
3 – рассмотренное в работе решение

1 – конечно-элементное решение, полученное в системе ANSYS;
2 – решение, предложенное И. Векуа;
3 – рассмотренное в работе решение

Рисунок 2. – Сравнение контактного давления (*а*) и угла контакта (*б*) в согласованных поверхностях, полученное на основе теории И.Я. Штаермана и методом конечных элементов

Предложенный метод работает в среднем на 10% быстрее, метода И. Векуа, приведенного И.Я. Штаерманом, и значительно быстрее (более чем в 2 раза), чем метод конечных элементов, реализованный в системе ANSYS.

В третьем разделе исследовано влияние неравномерности граничных условий на распределение деформаций в круглой пластине. Как известно, изгиб круглой пластины единичного радиуса, без поперечной нагрузки, описывается бигармоническим уравнением вида:

$$\Delta\Delta W = 0 \text{ , где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

С учетом неравномерности кинематических граничных условий:

$$W(r,\varphi)\,|_{r=1} = g(\varphi),\ \frac{\partial W}{\partial r} = l(\varphi),\ -\pi \le \varphi \le \pi$$

аналитическое выражение для изгиба пластины представляется в виде логарифмического ряда:

$$W(r,\varphi)=\sum_{-n}^{n}A_k(r,\varphi)g(\varphi_k)-\frac{1-r^2}{2}\left[\sum_{-n}^{n}A_k(r,\varphi)l(\varphi_k)-\sum_{-n}^{n}B_k(r,\varphi)g'(\varphi_k)\right]$$

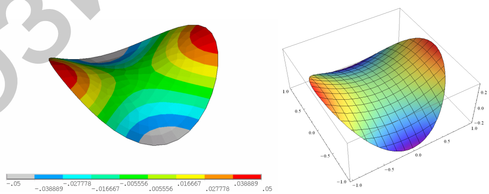
где

$$A_k(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\left[h+2\,\mathrm{Im}\left(\ln\left(1-ze^{-i\left(\varphi_k+\frac{h}{2}\right)}\right)-\ln\left(1-ze^{-i\left(\varphi_k-\frac{h}{2}\right)}\right)\right)\right],$$

$$B_k(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\ln\left(1-ze^{-i\left(\varphi_k-\frac{h}{2}\right)}\right)-\ln\left(1-ze^{-i\left(\varphi_k+\frac{h}{2}\right)}\right)\right]$$

Произведено сравнение полученных аналитических результатов с конечно-элементным моделированием в системе ANSYS. На рисунке 3 представлено сравнение изгиба круглой пластины под действием кинематических граничных условий, полученное в системе конечно-элементного моделирования ANSYS и численно – аналитическим методом, изложенным выше.

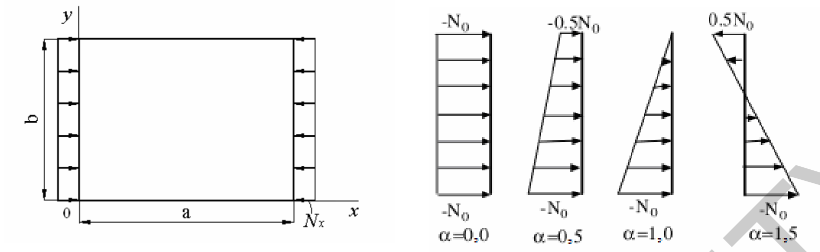
Оценка расхождения результатов вычисления прогибов по аналитическим формулам и численно дает погрешность около 5%.



а) *б)*

Рисунок 3. – Сравнение изгиба пластины, полученного на основе метода конечных элементов (*а*) и на основе предложенного логарифмического ряда (*б*)

В четвертом разделе рассматривается устойчивость прямоугольной пластины, с линейно изменяющейся нагрузкой по торцам пластины (рисунок 4).



а) *б)*

Рисунок 4. – Схема нагружения задачи потери устойчивости прямоугольной пластины, нагруженной переменными силами (*а*); варианты изменения нагрузки N_x (*б*)

Дифференциальное уравнение выпучивания пластины при исследовании устойчивости имеет вид:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left(N_x(y)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right). \qquad (1)$$

При свободном опирании кромок граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x = 0, a \;\; W = 0; \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \\ y = 0, b \; W = 0; \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Решение (1) в случае сжатия постоянной нагрузкой $N_x(y)=const$ представляется в форме двойного тригонометрического ряда (3), каждый член которого удовлетворяет граничным условиям (2):

$$W = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \qquad (3)$$

В случае, когда сжимающая нагрузка $N_x(y) \neq const$ наиболее простым способом нахождения решения является численное решение для конкретной функции $N_x(y)$.

Рассмотрена эталонная задача – сжатие прямоугольной пластины равномерно распределенной нагрузкой (4) при граничных условиях (2). Характер нагрузки зависит от коэффициента распределения α.

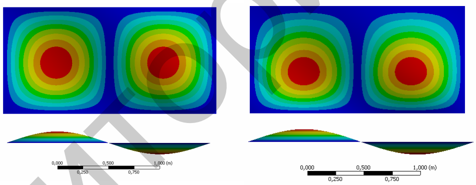
$$N_x(y) = -N_0\left(1 - \frac{\alpha}{b}y\right). \qquad (4)$$

В этом случае решение ищется в следующем виде:

$$W(x,y) = Y(y)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right),$$

где $Y(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ и коэффициенты c_n определяются из граничных условий.

На рисунке 5 показаны формы потери устойчивости прямоугольной пластины длиной *a*, шириной *b* и толщиной *t* при $a/b = 2$, опертой по контуру.

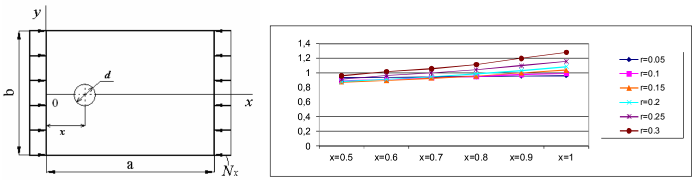


а) *б)*

Рисунок 5. – Формы потери устойчивости прямоугольной пластины в случае *α=0* (*а*), *α=1* (*б*)

В *пятом разделе* рассматривается решение задач устойчивости для перфорированных пластин. Рассмотрено влияние несовершенств типа одиночного отверстия и различного вида перфораций на величину критической нагрузки (рисунок 6,*а*).

В первом подразделе рассмотрено влияние одиночного отверстия на величину критической нагрузки. В зависимости от диаметра и положения отверстия наблюдается либо уменьшение, либо увеличение критической нагрузки по сравнению с пластиной без отверстия. На рисунке 6,б) показан график изменения отношения критической нагрузки прямоугольной пластины с отверстием в зависимости от диаметра и положения отверстия к критической нагрузке пластины без отверстия.



а) *б)*

Рисунок 6. – Расчетная схема пластины с отверстием (*а*); график изменения отношения критической нагрузки в зависимости от диаметра и положения отверстия к критической нагрузке пластины без отверстия (*б*)

Увеличение критической нагрузки наблюдается в случае, когда отверстие смещается к узловой линии между волнами потери устойчивости и зависит от его диаметра. Эффект увеличения критической нагрузки для пластины с отверстием отмечен также другими авторами.

Во втором подразделе рассмотрены прямоугольные пластины с соотношением сторон *a/b = 1,2,3* и с различными вариантами расположения и размера перфораций (рисунок 7).

***а*) «прямой» порядок отверстий** ***б*) «шахматный» порядок отверстий**

Рисунок 7. – Варианты расположения перфораций в квадратной пластине

Получены зависимости значения критической нагрузки и формы потери устойчивости от расположения и диаметра отверстий. Показано, что формы потери устойчивости для перфорированных пластин совпадают с формами потери устойчивости для пластин без отверстий; критическая нагрузка перфорированной пластины уменьшается при увеличении отношения диаметра отверстия к ширине пластины *(d/b)*; зависимость изменения критической нагрузки от диаметра отверстия является практически линейной; порядок расположение отверстий мало влияет на величину критической нагрузки (особенно при малом отношении диаметра к ширине пластины ($d/b<0,1$)).

В третьем подразделе исследуется потеря устойчивости пластины, перфорированной несимметрично, вдоль одной из сторон. В качестве сравнения использовались величины критической нагрузки для соответствующего отношения сторон, полученной для прямоугольной пластины без отверстий и перфорированных пластин в предыдущих параграфах.

Во всех рассмотренных случаях форма потери устойчивости частично перфорированной пластины практически не отличается от формы потери устойчивости полностью перфорированной пластины. Величина критической нагрузки, как и следовало ожидать, в случае частичного перфорирования выше, чем для полного перфорирования. Таким образом, несовершенства, расположенные симметрично относительно средней плоскости на разрушение бифуркации не влияют, а только незначительно меняют характер выпучивания.

Третья глава посвящена определению форм и частот собственных колебаний (модальному анализу) круглых и некруглых пластин, возможности использования различных приближений и оценки влияния формы пластины на ее спектр и собственные колебания.

В *первом разделе* рассматривается аналитическое решение о колебаниях круглой пластины, закрепленной по контуру.

На рисунке 8,*а)* представлены первые 3 формы собственных колебаний, полученных на основе аналитических формул с использованием функций Бесселя.

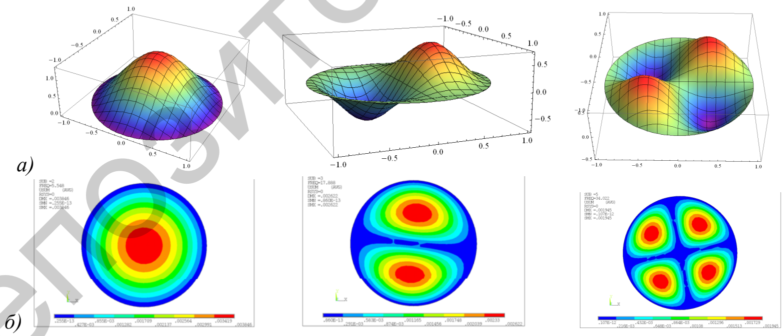
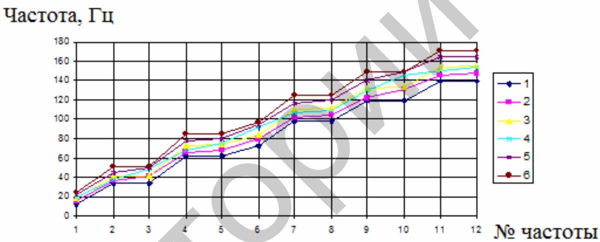


Рисунок 8. – Формы колебаний круглой пластины, опертой по контуру, полученные в системе Mathematica (*а*) и ANSYS (*б*)

Во *втором разделе* представлено численное решение задачи определения форм и частот собственных колебаний круглой пластины с помощью метода конечных элементов в системе ANSYS. Для сравнения на рисунке 8,*б)* представлены эти же формы собственных колебаний полученных в системе ANSYS. Из сравнения рисунков 8,*а)* и 8,*б)* можно видеть, что формы собственных колебаний полученные аналитическим и численным методом для первых частот совпадают. Тесты показывают возможность использовать ANSYS для исследования более сложных задач.

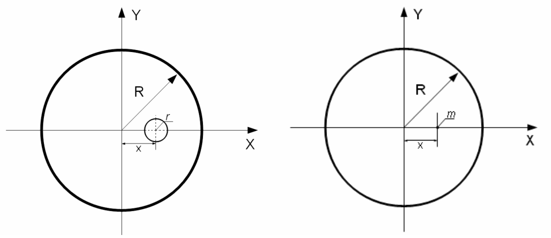
В *третьем разделе* рассматривается численное решение задачи определения частот и форм собственных колебаний круглых пластин с неоднородными граничными условиями (часть окружности закреплена, часть оперта). Полученные результаты свидетельствуют о том, что распределение спектра собственных частот при различных соотношениях для граничных условий, заданных на контуре, лежит между случаями защемления и шарнирного опирания по всему контуру. Смещение спектра частот в большую или меньшую сторону пропорционально величине той или иной заделки (рисунок 9). Таким образом, установлено влияние вида связи от односторонней неудерживающей, до двухсторонней удерживающей.



1 – шарнирное закрепление по всему контуру; 2 – защемление на контуре $0 \le \varphi \le \pi/2$, шарнирное закрепление $\pi/2 \le \varphi \le 2\pi$; 3 – защемление на контуре $0 \le \varphi \le \pi$, шарнирное закрепление $\pi \le \varphi \le 2\pi$; 4 – защемление на контуре $0 \le \varphi \le \pi/2$, $\pi \le \varphi \le 3\pi/2$, шарнирное закрепление $\pi/2 \le \varphi \le \pi$, $3\pi/2 \le \varphi \le 2\pi$; 5 – защемление на контуре $0 \le \varphi \le 3\pi/2$, шарнирное закрепление $3\pi/2 \le \varphi \le 2\pi$; 6 – защемление по всему контуру

Рисунок 9. – График изменения частот собственных колебаний в зависимости от вида граничных условий

В *четвертом разделе* рассматривается влияние неоднородности круглой пластины единичного радиуса (*R=1*) за счет внесения отверстия и точечной массы на спектр собственных частот. Исследуется влияние расположения и радиуса отверстия (*r=0,1..0,5R*) на величины и формы частот собственных колебаний (рисунок 14). Исследуется влияние расположения точечной массы и ее величины (масса варьируется от *25%* до *300%* массы пластины) на спектр собственных частот и формы колебаний.



а) *б)*

Рисунок 10. – Схема расположения неоднородностей рассматриваемых пластин: внесенное отверстие (а), сосредоточенная масса (б)

В результате моделирования показано, что отверстие малого радиуса ($r=0,1R \div 0,3R$) не оказывает какого-либо значительного влияния на форму колебаний. При этом частота собственных колебаний снижается по сравнению с соответствующими частотами сплошной пластины. Внесение отверстий большего радиуса *($r \geq 0,4R$)* при смещении вдоль радиуса приводит к изменению форм колебаний и увеличению, начиная с четвертой, значений частот собственных колебаний.

Неоднородность, при свободных внутренних границах, не приводит к перестройке спектра и собственных колебаний. В рамках заданной погрешности картина стоячих волн не изменяется, не появляется локализация колебаний в области слабых мест (отверстий).

Внесение перфораций в зависимости от их расположения приводит как к уменьшению величин частот собственных колебаний, так и к увеличению, т.о. варьирование расположением и диаметром отверстия позволяет уменьшить материалоемкость конструктивных элементов, и внести коррективы в спектр собственных частот.

При смещении сосредоточенной массы вдоль радиуса возникают несимметричные формы колебаний, в местах расположения сосредоточенной массы наблюдается возникновение узловых линий, не свойственных колебаниям пластины без сосредоточенной массы. Рассмотренные несовершенства не приводят к разрушению бифуркаций, а только к изменению формы и положению точек бифуркации. Устойчивость собственных макроформ колебаний тела к микроизменениям, определяет живучесть конструкции к повреждениям типа отверстий, дефектов массы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В результате работы получены следующие новые результаты:

1. Получено новое численно-аналитическое решение уравнения Прандтля для задачи И. Я. Штаермана о внутреннем контакте двух цилиндрических тел. Предложенное численно-аналитическое решение нахождения контактного давления, при одинаковой дискретизации области контакта, сходится до 10% быстрее по сравнению с решением методом И. Векуа, и более 10% по сравнению с методом конечных элементов, при проведении которого требуется дискретизация не только области контакта, но и самих соприкасающихся тел [3, 4, 6, 10].

2. Влияние величины изгибов и перемещений контура круглой пластины на форму ее деформирования. Показано, что варьированием неоднородных кинематических граничных условий (изгибов и перемещений) можно добиться различных форм выпучивания круглой пластины [1, 8].

3. Влияние перфорации на значения критической нагрузки для прямоугольной пластины: соотношения диаметра отверстия и его расположение, при которых значения критической нагрузки для ослабленной одиночным отверстием прямоугольной пластины превосходят на 1-5% величину критической нагрузки пластины без отверстия. Показано, что для пластины с соотношением сторон 1:1, 1:2 и 1:3 равномерная перфорация в «прямом» или «шахматном» порядке отверстиями диаметром, составляющим до 0,15 ширины пластины, приводит к снижению критической нагрузки до 35-40% от величины критической нагрузки неперфорированной пластины [7, 9].

4. Численные оценки влияния величины неоднородности (сосредоточенной массы, перфорации, нелинейности геометрии, неоднородности граничных условий, способа конечно-элементного разбиения) на спектр и формы собственных колебаний круглой пластины: отверстия радиуса составляющего менее 25% от радиуса пластины мало влияют на форму и частоту собственных колебаний; отверстия радиуса более 25% от радиуса пластины приводят к значительному изменению форм колебаний и увеличению, начиная с четвертой, значений частот собственных колебаний; расположение сосредоточенной массы в центре пластины независимо от ее величины приводит к уменьшению амплитуды колебаний, но не изменяет форму; смещение сосредоточенной массы вдоль радиуса приводит к образованию узловых линий в области приложения сосредоточенной массы;

при различных соотношениях свободного опирания или жесткого защемления по контуру круглой пластины спектр частот собственных колебаний лежит между спектрами полностью защемленной и полностью опертой пластины; формы колебаний пластины в форме правильного многоугольника практически повторяют форму колебаний круглой пластины, при использовании для расчета частот собственных колебаний пластины в форме правильного многоугольника круглой пластины с радиусом $\rho=(4r+R)/5$, (где r и R – соответственно радиусы вписанной в многоугольник пластины и описанной вокруг него круглой пластины) погрешность составляет 3-6% [2, 5].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Выбор параметров контакта (материалы, радиусы кривизны, допустимые зазоры) сопрягающихся тел в подвижных сочленениях влияет на явления связанные с процессом трения: энергетические потери, нагрев, изнашивание. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при расчете контактного взаимодействия деталей машин и снизить материальные затраты на проектирование.

Пластины с конструктивными особенностями (вырезы, сосредоточенные массы, перфорации, неоднородные условия закрепления по контуру) широко используются в приборостроении, машиностроении, строительстве. Полученные в работе диссертации позволяют прогнозировать поведение таких пластин при конструировании или эксплуатации.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ

Статьи в журналах, входящих в перечень научных изданий, рекомендованных ВАК

1. Мелешко, И.Н. Изгибание тонких пластин при отсутствии поперечного нагружения / И.Н. Мелешко, С.А. Пронкевич, А.В. Чигарев // Известия национальной академии наук. Серия физико-технических наук. – 2010. – № 3. – С. 51–57.
2. Мелешко, И.Н. Численное определение частот и форм собственных колебаний круглых пластин при неоднородных граничных условиях / И.Н. Мелешко, С.А. Пронкевич // Теоретическая и прикладная механика. – 2013. – № 28. – С. 148–152.
3. Моделирование нагруженности элементов вращательных кинематических пар / А.М. Авсиевич, С.А. Пронкевич, Н.О. Балышева, А.В. Хват, А.Ю. Иванов // Теоретическая и прикладная механика. – 2013. – № 28. – С. 173–177.
4. Мелешко, И.Н. Численно-аналитическое решение уравнения Прандтля для твердых тел с согласованными контактными поверхностями / И.Н. Мелешко, С.А. Пронкевич, А.В. Чигарев // Наука и техника. – 2013. – № 6. – С. 79–83.
5. Пронкевич, С. А. Численный анализ влияния неоднородности на спектр и формы собственных частот пластин / С. А. Пронкевич // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. - № 29. – С. 213–218.

Статьи в других научных изданиях

6. Авсиевич, А.М. Исследование напряженного состояния в местах силового контакта / А.М. Авсиевич, С.А. Пронкевич, Н.О. Балышева // Машиностроение. Республиканский межведомственный сборник научных трудов. – 2009. – № 24. – С.139–142.
7. Пронкевич, С.А. Потеря устойчивости прямоугольной перфорированной пластины, в зависимости от вида и размера перфораций / Аспирант и соискатель. – 2013. – № 5. – С. 121–123.

Материалы конференций

8. Чигарев, А.В. Изгибание тонких пластин с учетом кинематических граничных условий / А.В. Чигарев, И.Н. Мелешко, С.А. Пронкевич // Трибофатика = Tribo-fatigue: труды VI-го Международного симпозиума по трибофатике (ISTF 2010), 25 октября – 1 ноября 2010 г.: в 2 ч. / Редкол.: М.А. Журавков (пред.) [и др]. – Минск: БГУ, 2010. – Ч. 2. – С. 50–53.

9. Пронкевич, С.А. Численный анализ влияния перфорации на потерю устойчивости прямоугольных пластин / С.А. Пронкевич // Новые технологии и материалы, автоматизация производства: материалы. Междунар. науч.-техн. конф., Брест, 29-30 октября 2014 г. –Брест. БрГТУ, 2014. - С. 183-185.

10. Мелешко И.Н. Численно-аналитическое решение контактной задачи для тел с согласованными цилиндрическими поверхностями / И.Н. Мелешко, С.А. Пронкевич // Новые технологии и материалы, автоматизация производства. Междунар. науч.-техн. конф., Брест, 29-30 октября 2014 г. –Брест. БрГТУ, 2014. – С. 186–188.

РЭЗЮМЭ

Пранкевіч Сяргей Аляксандравіч

Мадэляванне і колькасна-аналітычнае рашэнне дзьвумерных задач устойлівасці, ваганняў і кантактнага ўзаемадзеяння

Ключавыя словы: уласныя ваганні, страта ўстойлівасці, пругкасць, пласціны, кантакт, метад канчатковых элементаў.

Мэта работы: Распрацоўка метадаў, якія дазваляюць разлічваць ўласныя ваганні, а таксама страту ўстойлівасці шматкутных пласцін пры розных умовах замацавання па контуры. Вызначэнне залежнасці частоты уласных ваганняў ад формы пласціны. Вызначэнне залежнасці формы страты ўстойлівасці і крытычнай нагрузкі ад формы пласціны. Вызначэнне выгібаў пласцін пры кінематычных межавых умовах па контуры. Распрацоўка лікава - аналітычных метадаў вызначэння выгібу пласцін.

Метады даследавання: пабудова матэматычных мадэляў з выкарыстаннем класічнай тэорыі выгібу пласцін, лікава - аналітычных метадаў, метаду канчатковых элементаў.

Атрыманыя вынікі і іх навізна:

1. Прапанавана лічбава – аналітычнае вырашенне раўнання Прандтля для задачы І.Я. Штаярмана аб унутраным кантакце дзьвух цыліндрычных цел на аснове шэрагаў. Атрыманая рашенне пазваляе знайсці ціск у вобласці кантакта і мае большую хуткасць, чым метад І. Векуа і метад канчатковых элементаў .

2. Даследаван уплыў нераўнамернасці межавых умоў на размеркаванне напружанняў і дэфармацый ў круглай пласціне, а таксама ўплыў на велічыню крытычнай нагрузкі і форму страты ўстойлівасці. Паказана, што пры нераўнамерных межавых умовах спектр выпінання змяняецца нерэгулярным чынам. Пры павелічэнні нераўнамернасці нагружения і замацавання павялічваецца адрозненне формы страты ўстойлівасці ад сіметрычнага выпадку, але не адбываецца разбурэння біфуркацыі.

3. Даследаван ўплыў перфарацыі на значэнні крытычнай нагрузкі для прамавугольнай пласціны. Паказана, што пры перфарацыі мноствам адтулін на велічыню крытычнай нагрузкі, а таксама форму страты ўстойлівасці істотны ўплыў аказвае не толькі дыяметр адтулін, але і парадак перфарацыі.

4. Атрыманы лічбавыя ацэнкі ўплыву параметраў задачы на спектр і формы ўласных ваганняў: засяроджаных мас, нелінейнасці, неаднастайнасці, спосабу канчаткова-элементнага разбіцця.

Вобласць ужывання: вынікі працы могуць быць выкарыстаны пры канструляванні ў машынабудаванні, прыборабудаванні, авиакасмічнай вобласці.

РЕЗЮМЕ

Пронкевич Сергей Александрович

Моделирование и численно-аналитическое решение двумерных задач устойчивости, колебаний и контактного взаимодействия

Ключевые слова: собственные колебания, потеря устойчивости, упругость, пластины, контакт, метод конечных элементов.

Цель работы. Использование методов численного и аналитического анализа собственных функций и собственных значений бигармонических операторов при решении задач устойчивости и колебаний в случае различных граничных условий и геометрии контакта на границе.

Методы исследования: построение математических моделей с использованием классической теории изгиба пластин, численно – аналитических методов, метода конечных элементов.

Полученные результаты и их новизна:

1. Предложено численно-аналитическое решение уравнения Прандтля для задачи И. Я. Штаермана о внутреннем контакте двух цилиндрических тел. Полученное решение позволяет находить давление в области контакта и имеет преимущество в скорости перед методом И. Векуа и методом конечных элементов.

2. Исследовано влияния неравномерности граничных условий на распределение напряжений и деформаций в круглой пластине, а также влияние на величину критической нагрузки и форму потери устойчивости. Показано, что неравномерных граничных условиях спектр выпучивания меняется нерегулярным образом.

3. Исследовано влияние перфорации на значения критической нагрузки для прямоугольной пластины. Показано, что при перфорации одиночным отверстием получены соотношения, при которых значения критической нагрузки оказывается выше, чем для сплошной пластины; при перфорации прямоугольной пластины множеством отверстий на величину критической нагрузки и форму потери устойчивости существенное влияние оказывает не только диаметр отверстий, но и порядок перфорации.

4. Получены численные оценки влияния параметров задачи (сосредоточенных масс, нелинейности, неоднородности, способа конечно – элементного разбиения) на спектр и формы собственных колебаний. Получена зависимость влияния величины сосредоточенной массы на спектр форм и частот собственных колебаний круглой пластины.

Область применения: результаты работы могут быть использованы при конструировании в машиностроении, приборостроении, авиакосмической области.

SUMMERY

Pronkevich Sergei Alexandrovich

Modeling and numerical-analytical solution of two-dimensional problems of stability, vibration and contact interaction

Key words: natural vibrations, loss of stability, elasticity, plates, contact the finite element method.

Objective: Develop methods to calculate the natural vibrations and loss of stability of polygonal plates under various conditions of consolidation along the contour. Determination of the frequency of natural oscillations of the shape of the plate. Depending on the definition of buckling and the critical load on the shape of the plate. Determination of bending of plates with the kinematics boundary conditions on the contour. The development of numerical - analytical methods for determining the bending of the plates.

Methods: the construction of mathematical models using the classical theory of bending of plates, numerically - analytical methods, finite element method.

These results and their novelty:

1. A numerical-analytical solution for the problem of Prandtl I.A. Shtaerman about the internal contact between two cylindrical bodies on the basis of the series. It is shown that for the same sample of the proposed numerical-analytical solution is more speed than using I. Vekua method and the finite element method.

2. Investigated the influence of boundary conditions on the uneven distribution of stresses and strains in a circular plate, and the impact on the critical load and buckling. It is shown that non-uniform boundary conditions buckling range varies irregularly.

3. The effect of perforation on the values of the critical load for a rectangular plate. It is shown that for single perforation opening ratio obtained in which the critical load value is higher than a continuous plate, with a rectangular perforated plate a plurality of holes on the critical loads and buckling significant influence not only the diameter of the holes, but the order of perforations.

4. Numerical evaluation of the influence of parameters of the problem (concentrated masses, nonlinearity, heterogeneity way finite - element of the partition) on the spectrum and form of natural oscillations. The dependence of the effect of the value of a concentrated mass on the spectrum of shapes and natural frequencies of a circular plate.

Scope: results can be used in the design of mechanical engineering, instrument making, airspace area.

Научное издание

ПРОНКЕВИЧ Сергей Александрович

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ, КОЛЕБАНИЙ И КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Подписано в печать 06.01.2015. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 1,39. Уч.-изд. л. 1,09. Тираж 60. Заказ 1241.
Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический
университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65.
220013, г. Минск.