Н.П. Жмакин, А.С. Калиниченко,
Ю.А. Лосюк, А.В. Никитин

К ОЦЕНКЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООТДАЧИ ОТ РАСПЛАВА К КОРКЕ ПРИ ЛИТЬЕ НАМОРАЖИВАНИЕМ

Интенсивность теплового воздействия расплава на намораживаемую корку характеризуется коэффициентом теплоотдачи от жидкого металла к корке α_c. В настоящее время не существует общепринятой методики его определения, а имеющиеся данные носят частный характер.

В качестве первого приближения для оценки α_c при литье намораживанием на вращающийся кристаллизатор [1] можно получить простую формулу, исходя из следующих рассуждений.

Рассмотрим задачу нахождения температурного поля полубесконечного тела (расплав) с начальной температурой $T_{зал}$ при условии, что на плоскости $x = 0$ поддерживается постоянная температура $T_{кр}$. Решение этой задачи приводится в [2]:

$$T(x,t) = (T_{зал} - T_{кр}) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + T_{кр}, \quad (1)$$

где t – время, сек; a – коэффициент температуропроводности, $м^2/сек$;

Тепловой поток в точке $x = 0$ можно представить следующим способом:

$$q = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = \alpha_c (T_{зал} - T_{кр}), \quad (2)$$

где λ – коэффициент теплопроводности расплава, вт/м.к.

Подставив (1) в (2), после преобразований получим $\alpha_c = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi \cdot at}}$. Интегрирование этого выражения от $t = 0$ до $t = t_н$ ($t_н$ – время намораживания) дает среднее значение α_c за это время:

$$\alpha_{c\,ср} = \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi \cdot a t_н}} = \frac{2\sqrt{Pe}}{H\sqrt{\pi}} \quad (3)$$

или

$$Nu_{cp} = 2\sqrt{\frac{Pe}{\mathcal{F}}}, \qquad (4)$$

где $t_н = \frac{H}{W}$, $Pe = \frac{WH}{a}$, $Nu = \frac{\alpha_c H}{\lambda}$; W – скорость литья, м/сек; H – высота ванны расплава, м.

Заметим, что скорость входит в формулы не как гидродинамический фактор, а только как технологический параметр литья. Сравнение расчетов по формуле (4) с экспериментальными данными дает расхождение в 5%. Отметим также, что принятая математическая модель нестационарной теплопроводности в нашем случае аппроксимирует установившееся распределение температуры в ванне как по ее глубине, так и по высоте.

Очевидно, что оценочная формула (4) не учитывает влияния гидродинамики расплава и тем более процесса кристаллизации на теплообмен. С целью учета этих факторов при теплообмене между жидким металлом и коркой рассмотрим обтекание пластины расплавом, который на этой пластине кристаллизуется. Будем рассматривать случай, когда температурный и гидродинамический пограничные слои сформируются и течение можно будет считать установившимся. Предположим также, что рост намораживаемой корки не оказывает существенного влияния на профили скоростей и температуры в соответствующих пограничных слоях.

Запишем уравнения движения и энергии для пограничного слоя в виде:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \delta > x > 0; \qquad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \qquad (6)$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \qquad (7)$$

Граничные условия на фронте кристаллизации, где $y = 0$, будут:

$$u = 0, \quad v = \frac{d\xi}{dy}\left(\frac{\rho_т}{\rho_ж} - 1\right); \quad T = T_{кр}; \qquad (8)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \rho r \frac{d\xi}{dy} + q(x,t), \tag{9}$$

где u и v – скорости соответственно в направлении осей X и У, м/сек; r – теплота кристаллизации, дж/кг; T – температура невозмущенного потока, $^{\circ}K$; $\rho_т$, $\rho_ж$ – соответственно плотности корки и расплава, кг/м^3; ξ – толщина намораживаемой корки, м; $q(x,t)$ – удельный тепловой поток от границы раздела фаз вглубь корки, вт/м^2 сек.

В граничных условиях к задаче (5) – (7) есть величина v, которая через производную $\frac{d\xi}{dy}$ зависит от распределения температуры в пограничном слое. Поэтому будем решать задачу методом последовательных приближений. Пусть $v' = 0$ при $y = 0$, а распределение скоростей и температур представлено полиномами [3]. Тогда

$$u = w\,(2\eta - 2\eta^3 + \eta^4), \quad \eta = \frac{y}{\delta}; \tag{10}$$

$$T_\infty - T = (T_\infty - T_{кр})(1 - 2\eta_т + 2\eta_т^3 - \eta_т^4), \quad \eta_т = \frac{y}{\delta_т},$$

где δ, $\delta_т$ – толщины динамического и теплового пограничных слоев, м. Приближенное решение для толщины пограничного динамического слоя в случае аппроксимации (10) имеет вид:

$$\delta = 5{,}83 \sqrt{\frac{\nu x}{w}}. \tag{11}$$

Тогда, воспользовавшись приближенным соотношением $\delta_т/\delta = Pr^{-1/3}$, а также аппроксимацией (11), получим:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{2}{\delta_т} (T_\infty - T_{кр}) = \frac{2\Delta T_{пер}\, Pr^{1/3}}{5{,}83 \sqrt{\frac{\nu x}{w}}}, \quad \Delta T_{пер} = T_\infty - T_{кр}$$

и

$$0 = \frac{1}{\rho r} \left[\frac{2\, T_{пер}\, Pr^{1/3}}{5{,}83 \sqrt{\frac{\nu x}{w}}} - q(x,t) \right] \left(\frac{\rho_т}{\rho_ж} - 1 \right). \tag{12}$$

Опишем поле скоростей новой аппроксимацией:

$$u = w(a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4), \qquad (1$$

а коэффициенты определим из граничных условий:

$$y=0, \quad u=0, \quad v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$y=\delta, \quad u=w, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = 0.$$

После преобразований получим:

$$a=-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+\frac{v\delta}{12\nu}\right)}; \quad b=-\frac{1}{\left(\frac{1}{6}+\frac{\nu}{v\delta}\right)}; \quad c=\frac{b+\frac{2v\delta}{\nu}}{\left(1+\frac{v\delta}{b\nu}\right)}; \quad d=-\left(\frac{3}{1+\frac{v\delta}{6\nu}}+\frac{\frac{5}{6\nu}}{v\delta}\right.$$

Далее по формуле

$$\delta = \left(\frac{2f'(0)}{\int_0^1 f(1-f)\,d\eta}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{\nu x}{w}},$$

где f – аппроксимация (10), найдем толщину пограничного динамического слоя. И, наконец, используя соотношение $\delta_T/\delta = Pr^{-1/3}$ и аппроксимацию (11), определим коэффициент теплоотдачи от расплава к корке при наличии кристаллизации:

$$\alpha_c = \frac{2\lambda\, Pr^{1/3}}{\frac{2f'(0)}{\int_0^1 f(1-f)\,d\eta}\sqrt{\frac{\nu x}{w}}}$$

Литература

1. Вейник А.И. Кокиль. Минск, 1972. 2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., 1967. 3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., 1974.