

М.А. Журавков, А.В. Савчук

РАСЧЕТ ПРОГИБА ГИБКОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ПРИ ДВИЖЕНИИ СЛОЖНОЙ НАГРУЗКИ

*Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь*

Рассматривается задача о динамическом взаимодействии гибкой направляющей с движущейся по ней нагрузкой. Направляющая моделируется однородной горизонтально натянутой струной длины l и массой M с неподвижными концами. Считается, что контакт нагрузки с направляющей происходит в одной точке, причем горизонтальная составляющая скорости этой точки постоянна и равна v .

Пусть в момент времени $t=0$ нагрузка вступает на невозмущенную направляющую и воздействует на нее с силой $\frac{Mv^2}{l} f(t)$.

1. Зависимость прогиба направляющей от силы f .

Величина $u(x, t)$ прогиба направляющей определяется из уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \cdot \delta(x - t), a^2 = \frac{Tl}{Mv^2} \quad (1)$$

с условиями

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (2)$$

Все величины в (1), (2) безразмерные и T – натяжение струны.

При помощи интегрального синус-преобразования Фурье в конечных пределах решение задачи (1), (2) получается в виде:

$$u(x, t) = \frac{2}{a\pi} \int_0^t f(\tau) F(x, t, \tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3)$$

где

$$F(x, t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\pi\tau \sin k\pi\alpha(t - \tau) \sin k\pi x. \quad (4)$$

Используя известные ряды [1], в результате весьма громоздких вычислений выполненных для $1 < a \leq 2$, установлено, что $F(x, t, \tau)$ – кусочно-постоянная функция в трехмерной области

$$B = \{(x, t, \tau) \mid 0 \leq \tau \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Тогда прогиб направляющей из (3) выражается через значения импульса силы $f(t)$:

$$0 \leq t \leq \frac{1}{a} : u = \frac{1}{2a} \begin{cases} \varphi(z_1) - \varphi(z_2), & 0 \leq x \leq t, \\ \varphi(z_3) - \varphi(z_2), & t < x \leq at, \\ 0 & at < x \leq 1; \end{cases}$$

$$\frac{1}{a} < t \leq t_1: \quad u = \frac{1}{2a} \begin{cases} \varphi(z_1) - \varphi(z_2), & 0 \leq x \leq t, \\ \varphi(z_3) - \varphi(z_2), & t < x \leq 2 - at, \\ \varphi(z_3) - \varphi(z_2) - \varphi(z_4 - t_2) + \varphi(z_1 - t_1) & 2 - at < x \leq 1; \end{cases}$$

$$t_1 < t \leq 1: \quad u = \frac{1}{2a} \begin{cases} \varphi(z_1) - \varphi(z_2), & 0 \leq x \leq 2 - at, \\ \varphi(z_1) - \varphi(z_2) - \varphi(z_4 - t_2) + \varphi(z_1 - t_1), & 2 - at < x \leq t, \\ \varphi(z_3) - \varphi(z_2) - \varphi(z_4 - t_2) + \varphi(z_1 - t_1) & t < x \leq 1; \end{cases}$$

$$\varphi(z) = \int_0^z f(t) dt, \quad z_1 = (at + x)/(a + 1), \quad z_2 = (at - x)/(a + 1), \quad z_3 = (at - x)/(a - 1),$$

$$z_4 = (at + x)/(a - 1), \quad t_1 = 2/(a + 1), \quad t_2 = 2/(a - 1).$$

Полагая $x = t$ в формулах (5), получим прогиб $y(t) = u(t, t)$ направляющей в точке контакта с нагрузкой:

$$y(t) = \frac{1}{2a} \begin{cases} \varphi(t) - \varphi(at), & 0 \leq t \leq t_1, \\ \varphi(t) - \varphi(at) - \varphi((t-t_1)/\alpha) + \varphi(t-t_1), & t_1 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (6)$$

$$\alpha = t_1 / t_2.$$

Таким образом, если сила $f(t)$ задана, то формулы (5), (6) дают прогиб направляющей в любой ее точке. Если же $f(t)$ зависит от прогиба под нагрузкой, то равенство (6) является уравнением для нахождения этого прогиба.

2. Нахождение силы f при движении сложной нагрузки.

Пусть нагрузка состоит из точечной массы m , контактирующей с направляющей, и тела массы m_1 , связанного с массой m пружиной жесткости c . Предполагается, что тело совершает поступательное движение и что горизонтальные составляющие его скорости и скорости массы m одинаковы и равны v .

Движение тела по вертикали определяется отклонением $Y(t)$ некоторой его точки от ее положения при равновесии тела. Тогда

$$a_2 Y'' + Y - y = 0 \quad (7)$$

и

$$f(t) = -(a_0 + \frac{m_1}{M} Y''(t) + \frac{m}{M} y''(t)), \quad (8)$$

$$a_0 = gl \frac{m_1 + m}{Mv^2}, \quad a_2 = \frac{m_1 v^2}{cl^2}.$$

Воспользуемся уравнением (7), чтобы исключить из равенств (6), (8) функцию $y(t)$. Получим:

$$f(t) = -(a_0 + a_1 Y'''(t) + a_3 Y''''(t)), \quad \varphi(z) = -(a_0 z + a_1 Y'(z) + a_3 Y''(z)),$$

$$Y(t) + a_2 Y''(t) = \frac{1}{2a} (\varphi(t) - \varphi(\alpha t)), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (9)$$

$$Y(t) + a_2 Y''(t) = \frac{1}{2a} (\varphi(t) - \varphi(\alpha t) - \varphi(\frac{t-t_1}{\alpha}) + \varphi(t-t_1)), \quad t_1 \leq t \leq 1, \quad (10)$$

$$a_1 = \frac{m_1 + m}{M}, \quad a_3 = \frac{m_1 m v^2}{M c l^2}.$$

Таким образом, для определения функции $Y(t)$ получено дифференциальное уравнение (9), (10) с отклоняющимся аргументом нейтрального типа.

Рассмотрим сначала уравнение (10), предполагая, что уравнение (9) уже решено, т.е. получены функция $Y(t)$ и ее производные $Y'(t)$, $Y''(t)$, $Y'''(t)$ для $0 \leq t \leq t_1$.

Запишем уравнение (10) в виде:

$$Y(t) + a_2 Y''(t) - \frac{1}{2a} \varphi(t) = \frac{1}{2a} (\varphi(t-t_1) - \varphi(\alpha t) - \varphi(\frac{t-t_1}{\alpha})), \quad t \leq t \leq 1. \quad (11)$$

Легко видеть, что уравнение (11) можно решать численно как дифференциальное уравнение третьего порядка без отклонения аргумента, так как на каждом шаге вычислений правая часть уравнения будет известна из предыдущих вычислений.

Вернемся теперь к уравнению (9) и запишем его в виде:

$$\frac{a_3}{2a} (Y'''(t) - Y'''(\alpha t)) + a_2 Y''(t) + \frac{a_1}{2a} (Y'(t) - Y'(\alpha t)) + Y = \frac{a_0 (\alpha - 1)}{2a} t, \quad (12)$$

$$0 \leq t \leq t_1.$$

Легко видеть, что это уравнение допускает произвольные значения $Y'(0)$, $Y'''(0)$, а $Y''(0) = -Y(0)/a_2$. Следовательно, в качестве начальных условий для уравнения (12) должны быть заданы величины $Y(0)$, $Y'(0)$, $Y'''(0)$.

Общее решение уравнения (12) можно записать в виде

$$Y(t) = \frac{a_0}{2a} (\alpha - 1)t + \sum_{i=1}^3 A_i Y_i(t),$$

где Y_i – независимые частные решения уравнения (12) с нулевой правой частью, а A_i – произвольные постоянные, которые находятся из начальных условий.

Частное решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (12), будем искать в виде:

$$Y_0(\lambda, t) = e^{\lambda t} + \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{\alpha^i \lambda t} \quad (13)$$

где λ – корень уравнения

$$\Delta(\lambda) = \frac{a_3}{2a} \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + \frac{a_1}{2a} \lambda + 1 = 0. \quad (14)$$

Легко видеть, что $Y_0(\lambda, t)$ будет частным решением однородного уравнения если

$$c_i = c_{i-1} \frac{\Delta_1(\alpha^{i-1} \lambda)}{\Delta(\alpha^i \lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots; \quad c_0 = 1,$$

$$\Delta_1(\lambda) = \frac{a_1}{2a}\lambda + \frac{a_3}{2a}\lambda^3.$$

Тогда в качестве частных решений Y_i можно взять функции

$$Y_1(t) = Y_0(\lambda_1, t), \quad Y_2(t) = \operatorname{Re} Y_0(\lambda_2, t), \quad Y_3(t) = \operatorname{Im} Y_0(\lambda_2, t),$$

где λ_1 – действительный корень уравнения (14), а λ_2 – один из его комплексных корней.

Заметим, что ряд (13) сходится абсолютно и его можно дифференцировать необходимое число раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., Наука, 1981.

УДК 621.88.024

А.В. Кузьмин

МОДЕЛИРОВАНИЕ И НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЛН

*Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь*

Наиболее удобно анализировать процессы образования и перемещения поперечных механических волн на гибкой нерастяжимой нити. Последний признак – нерастяжимость – говорит о способности нити сопротивляться только растягивающим силам. Из всего многообразия форм волн самой простой является треугольная или близкая к ней форма (например, трапециевидная).

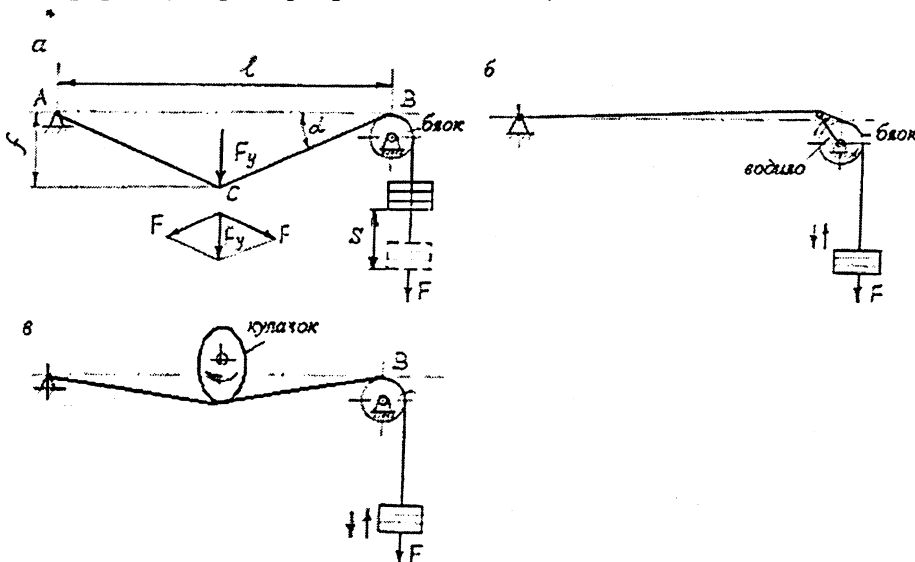


Рис. 1. Схема устройства с нитью