

$$\Delta_1(\lambda) = \frac{a_1}{2a}\lambda + \frac{a_3}{2a}\lambda^3.$$

Тогда в качестве частных решений Y_i можно взять функции

$$Y_1(t) = Y_0(\lambda_1, t), \quad Y_2(t) = \operatorname{Re} Y_0(\lambda_2, t), \quad Y_3(t) = \operatorname{Im} Y_0(\lambda_2, t),$$

где λ_1 — действительный корень уравнения (14), а λ_2 — один из его комплексных корней.

Заметим, что ряд (13) сходится абсолютно и его можно дифференцировать необходимое число раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., Наука, 1981.

УДК 621.88.024

А.В. Кузьмин

МОДЕЛИРОВАНИЕ И НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЛН

*Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь*

Наиболее удобно анализировать процессы образования и перемещения поперечных механических волн на гибкой нерастяжимой нити. Последний признак — нерастяжимость — говорит о способности нити сопротивляться только растягивающим силам. Из всего многообразия форм волн самой простой является треугольная или близкая к ней форма (например, трапециевидная).

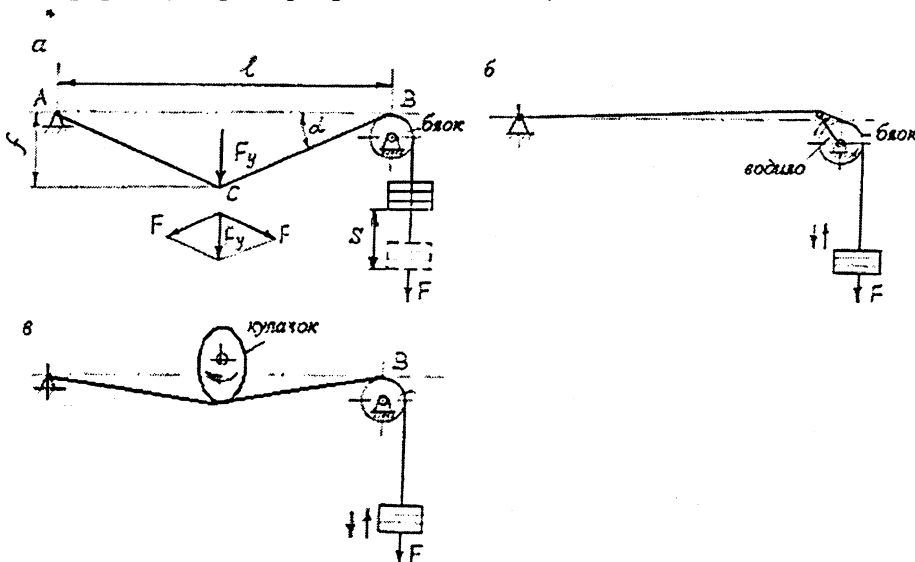


Рис. 1. Схема устройства с нитью

На схеме рис.1, а показана базовая модель устройства с гибкой нерастяжимой нитью. Базовой эта модель может считаться потому, что она наиболее проста по принципу действия, а основанные на ней устройства широко распространены в технике. Это и подвесные канатные дороги с движущимися грузовыми или пассажирскими кабинами и тележками, это и полиспастные системы в грузоподъемных машинах, это и различные волновые механизмы на гибких связях и другие виды одиночных поперечных волн. В рассматриваемой модели один конец нити неподвижно закреплен в точке A , а другой переброшен через направляющий блок и к нему подвешен груз весом F . Направляющий блок свободно вращается на своей оси. Посередине пролета длиной l с помощью некоего толкателя- генератора волны (например стержня с закругленным концом или стержня с роликом на конце) к нити приложена сила F_y , под действием которой нить получает прогиб $y=f$. Вместо груза к свободному концу нити может быть присоединена пружина растяжения, другой конец которой должен быть закреплен неподвижно. При изменении прогиба нити блок будет вращаться против часовой стрелки независимо от того, в какую сторону направлен прогиб: вверх или вниз. Это связано с тем, что разница между длиной наклонных участков нити (отрезков AC и BC) и базового участка AB (который остается постоянным) будет всегда положительной.

Если блок насажен на рабочий вал, то он может быть использован в качестве приводного устройства.

Очевидно, что в обеих ветвях нити, то есть на участках AC и BC натяжение будет примерно равным F , если не учитывать потери в направляющем блоке на трение в его подшипниках и на преодоление жесткости нити. Например, для каната эти потери могут быть учтены величиной КПД блока $\eta = F_{нб} / F_{сб}$, где $F_{нб}$ – натяжение набегающей ветви, $F_{сб}$ – натяжение сбегающей ветви нити, $\eta = 0,97 - 0,98$ для стальных канатов. Исходя из этого, получим следующее соотношение для параллелограмма сил (угол между силами F равен $180^\circ - 2\alpha$):

$$F_y = 2F \sin \alpha.$$

Построим график $f(x) = F_y / F = 2 \sin \alpha$, то есть график относительной нагрузки (или график при единичной силе F). При этом будем иметь ввиду, что реальные значения угла α должны быть несколько меньше 90° , поскольку при данной схеме ветви нити никогда не будут параллельными.

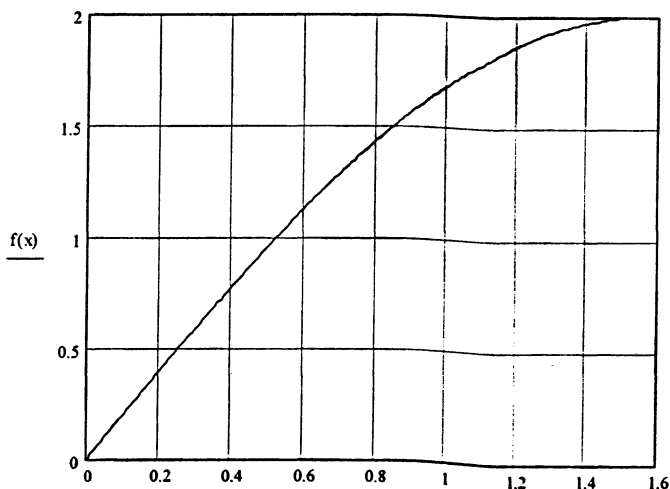


Рис. 2. График функции $f(x)=f(\alpha)$, (где $x=\alpha$)

На графике рис. 2 углы α на оси абсцисс, соответствующие прогибам f , отложены в радианах. Чтобы определить соответствующую силу F_y , нужно ординату на графике умножить на величину силы F . Мы видим, что с увеличением прогиба нити функция $f(\alpha)$ стремится к значению, равному двум. Это означает, что в этом случае для удержания на весу груза весом F в середине пролета нити нужно приложить силу F_y , в два раза большую, чем вес груза F . То есть, мы получим полиспаст для выигрыша в скорости в два раза и, соответственно, - проигрыша в силе. Практически это будет выглядеть так: если в точке приложения силы F_y , поместить блок и через него передавать нагрузку на нить, то при диаметре блока, примерно равном длине пролета нити l , ветви ее будут параллельны друг другу и такое устройство превратится в полиспаст для выигрыша в скорости. Заметим здесь, что для небольших значений углов α (меньших 0,5 радиан) сила F_y будет меньше силы F , то есть мы будем иметь выигрыш в силе.

Если в точке C подвесить подвижный блок с крюком, а правый (свободный) конец нити освободить от груза и прикладывать к нему силу, то при больших прогибах нити получим устройство в виде полиспаста для выигрыша в силе примерно в два раза (мы говорим “примерно” потому, что точное значение выигрыша в силе будет равно двум только при параллельных ветвях прогнутой нити, то есть, когда диаметр блока будет принят равным пролету нити). Таким образом, в этом случае фактически мы будем иметь дело с типичной полиспастной системой с кратностью, равной двум. Напомним, что кратность показывает, какой выигрыш в силе или скорости мы имеем. Для одинарного полиспаста (как в нашем случае) кратность равна числу ветвей каната, на которых висит груз.

Для этого же устройства найдем теперь перемещение S нити при изменении ее прогиба f , то есть перемещение груза (путь силы F). Из условия равенства работ сил F_y и F (без учета потерь на преодоление жесткости нити и трения в блоке): $F_y f = FS$. Поскольку $F_y = 2F \sin \alpha$, то

$$S = 2f \sin \alpha, \text{ или } S_1 = S / f = 2 \sin \alpha, \quad (1)$$

то есть, естественно, мы получили такую же функцию, что и для силовых соотношений в нити, но только для перемещений груза. Из формулы (1) видно, что абсолютное перемещение прямо пропорционально прогибу нити, то есть амплитуде волны.

На рис.3 показан график (сплошная линия) функции $f(\alpha) = S_1 = 2 \sin \alpha$ в диапазоне углов от нуля до 90° . Чтобы найти абсолютное перемещение S нужно ординату на графике умножить на прогиб f нити, соответствующий углу α . На графике видно, что при α , близком к 90° перемещение нити будет в два раза больше ее прогиба. Это означает, что устройство в этом случае превращается в полиспаст для выигрыша в скорости (примерно в два раза), то есть мы получили тот же результат, который иллюстрируется предыдущим графиком для силовых соотношений в описываемом устройстве.

Несколько забегаая вперед, отметим, что похожие графики можно получить для многих устройств, перемещение ведомых звеньев которых основано на деформировании треугольного (или близкого к нему) контура их рабочих звеньев. В частности, к таким устройствам можно отнести большую группу рычажных механизмов, например кривошипно-ползунные и кулисные.

Перемещение свободного конца нити можно получить исходя из другого очевидного постулата[1]: оно должно быть равно разности длин наклонных участков нити и их проекции на исходный, недеформированный участок нити длиной l , то есть перемещение S должно быть равно

$$S = AC + BC - AB, \text{ или } S = 2 \frac{l}{2 \cos \alpha} - l = l \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) = l \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}.$$

Заменив $l = 2f / \operatorname{tg} \alpha$ получим

$$S = \frac{2f(1 - \cos \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha * \cos \alpha} = \frac{2f(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} = 2f * \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Относительное перемещение $S_1 = S / f = 2 * \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$

Как видим формулы (а) и (б) отличаются друг от друга. На графике рис. представлены кривые $S_1 = f(\alpha)$ и $S_1 = F(\alpha)$ (график $S_1 = F(\alpha)$ - пунктирная кривая), построенные соответственно по формулам (а) и (б). Значения S_1 сходятся только при углах, близких к 90° .

Заметим, что зависимости (1) и (2) получены для круговых тригонометрических функций, что не соответствует фактической геометрии устройства. При более сложных контурах волны получить зависимость типа (1) затруднительно, поэтому предпочтительнее использовать постулат, положенный в основу вывода формулы (2), то есть определять перемещение нити как разность длин контура волны и ее проекции на участок, определяемый началом и концом волны. Естественно, что в этом случае функция $F(\alpha)$ будет более сложной

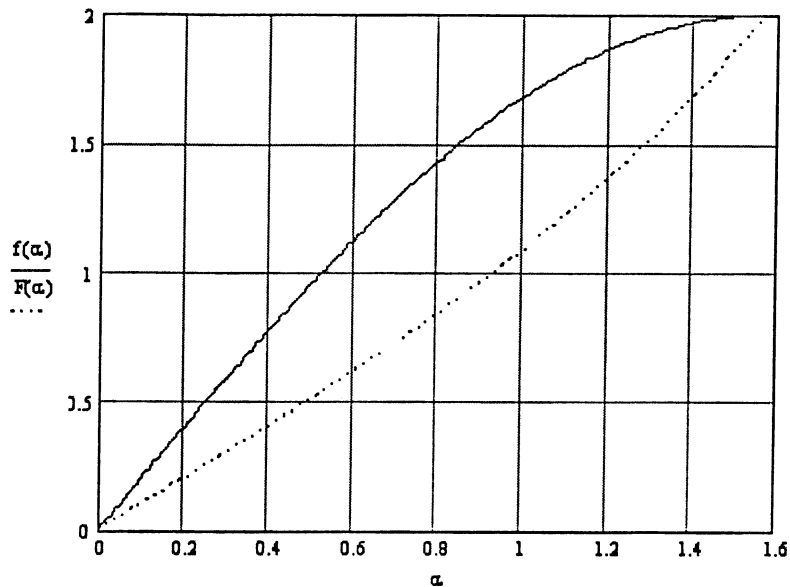


Рис. 3. Сравнение функций $f(\alpha)$ и $F(\alpha)$: сплошная линия - $f(\alpha)$, пунктирная линия - $F(\alpha)$, α - в радианах.

Функции типов (1) и (2) можно назвать кратностью волны k (по аналогии с полиспаственными системами, принимая $k = S_1$). Они определяют соотношения между силами и перемещениями ведущих и ведомых частей волнового устройства. Это означает, что можно определить, например, силу тяги на крайних участках одиночной волны как частное от деления поперечной к базе волны силы F_y на кратность k , а абсолютное перемещение конца волны найти как произведение кратности k на амплитуду волны (прогиб нити).

Функции, аналогичные (1) и (2) и определяющие кратность можно получить для любой формы волны, в частности для таких простых как трапеция, прямоугольник, полуокружность. Например, для трапециевидальной формы $k = 2 * \operatorname{tg}(\alpha / 2)$, где α - угол наклона боковых сторон трапеции к базе. Для волны прямоугольной формы кратность

есть величина постоянная и равна двум (соответствует полиспасти с подвижным блоком). Для полуокружности кратность также постоянна и равна $k=(\pi - 1)$. Для более сложных форм надо знать функцию длины дуги волны. Из курса математики известно, что длина дуги кривой

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \text{ где } f(x) - \text{функция уравнения кривой волны, } a \text{ и } b -$$

пределы интегрирования, определяющие базу волны, то есть ее начало и конец (ее координаты по оси x). Интеграл в этом выражении не всегда легко берется из-за наличия корня в нем, однако существуют приближенные формулы для вычисления L . Разница $S = L - \overline{ab}$ (где отрезок \overline{ab} - база волны) определяет перемещение свободного конца нити (груза). Поскольку почти всегда удается представить S в виде некоторой функции с прямой зависимостью от амплитуды волны $h=f$, то можно получить выражение $S_1 = S/h = k$, где $k = f(a,b)$ - кратность волны. Как правило оказывается, что кратность такой сформированной волны с постоянной амплитудой есть также величина постоянная. Например, для циклоиды $L=8r$ (r - радиус окружности, с которой разворачивается циклоида, высота циклоиды $h=2r$), $S=L-2\pi r=0,86r$, кратность $k = S_1 = S/h = 0,86r/2r = 0,43$. Для синусоиды, описывающей контур гармонической волны и имеющей амплитуду $h=r$ (r -радиус окружности), $\overline{ab} = \lambda$ ($\lambda = 2\pi \cdot r$ - длина волны), $f(x) = \sin x$, (где x -угол дуги окружности в радианах), получим $k=1,36$ (в пределах от 0 до 2π). Если при образовании волны в каком либо техническом устройстве на нити окажется n гармонических волн длиной λ каждая, то в начале пути такой волны нить сократится на величину nkr . В конце пути при ее распаде, то есть выпрямлении, конец нити при отсутствии преграды переместится на такую же величину nkr . В итоге, естественно, длина нити останется прежней, но вся она сдвинется по ходу волны на величину nkr . Соответствующая этому сдвигу часть ее массы равна $qnkr$, где q - погонная масса нити, кг/м. Таким образом, на этой модели мы фактически наблюдаем сдвиг массы при прохождении гармонической волны. То есть, в этом случае можно говорить о способности гармонической волны переносить массу (подчеркнем, что величина перенесенной массы полностью определяется в процессе волнообразования, а в конец пути движения волны переносится только его результат). Колебания сформированной в гармоническую волну нити будут бесплодными с точки зрения массопереноса: частицы волны будут просто колебаться относительно своих положений равновесия до тех пор, пока волны не распадутся. Подчеркнем еще раз: конец выпрямившейся нити переместится (если нет преграды) на величину nkr .

Если на ось блока, расположенного на правой опоре нити, установить водило с роликом (см. схему рис.1,б) и вращать водило по часовой стрелке, то на нити будет образовываться волна поперечной деформации с меняющимся контуром почти треугольной формы, а блок будет совершать в окружном направлении шаговые движения против часовой стрелки. Груз будет в такт этому подниматься и опускаться, совершая вынужденные гармонические колебания. Заметим, что закон движения груза будет абсолютно идентичным таковому для многих рычажных механизмов, например для ползуна кривошипно – ползунного механизма. Такие же движения будет совершать и пружина, если установить ее вместо груза. По этому принципу работает ряд волновых механизмов на гибких связях.

Шаговые движения на выходном звене можно также получить с помощью описываемого устройства, если вместо толкателя установить кулачок (рис.1,в), при этом на блоке должно быть установлено либо храповое устройство, либо обгонная

муфта (муфта свободного хода), обеспечивающие вращение блока только в одном направлении.

Заметим, что при формировании треугольного контура нити по схеме рис.1,а мы наблюдаем фактически одиночную волну, которая движется в направлении ее распространения, то есть в направлении, перпендикулярном нити. В это время и происходят те перемещения нити (или присоединенного к волне звена,- в данном случае блока и груза), которые обусловлены разницей размеров контура волны и опорной линии- базы волны (в данном случае линии *AB*). Если волна движется одновременно в перпендикулярном и продольном по отношению к нити направлении (так, как на рис.1 , б), то она также переносит в конец своего пути ту избыточную массу (или длину), которую она накопила в себе в процессе своего формирования. Непрерывно меняющийся (по размерам и форме) в процессе такого перемещения контур волны в этом случае определяет и форму кривой приращения длины, несколько отличной от описанной выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добролюбов А.И. Скольжение, качение, волна. - М: Наука.1991.- 176с.

УДК 539.3

И.А. Миклашевич

РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗОНЫ ВЛИЯНИЯ ТРЕЩИНЫ КАК МЕХАНИЗМ РАССЛОЕНИЯ КОМПОЗИТОВ

*Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь*

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие трещины отслоения является одной из ведущих причин разрушения слоистых композитных материалов [1, 2]. В то же время физический механизм образования отслоения исследован недостаточно. В определенной мере это связано с тем, что понятие иерархической природы разрушения, вовлекающей в единый процесс механизмы различных структурных уровней, введено в обиход сравнительно недавно [2, 3]. Более или менее ясны общие макроскопические закономерности развития трещины отслоения. Однако микроскопический диапазон, в котором развитие трещины нельзя считать непрерывным, а необходимо учитывать «квантованную» природу процесса разрыва связей в твердом теле [4, 5], исследован не так детально. Соответственно, мезоскопический диапазон, где можно оставаться на уровне описания механики сплошной среды и линейной теории трещин, но при необходимости учитываются процессы, которые реализуются преимущественно на микроскопическом уровне, исследован также недостаточно детально [2].

Согласно результатам линейной теории упругости напряжения в вершине трещины бесконечны. Естественно, что физически такое состояние реализовываться не может. С точки зрения математики это ведет к поиску уточненных соотношений, не имеющих особенностей в вершине трещины (отход от линейной теории упругости). Экспериментально сингулярности в вершине трещины реализуются как потеря системой устойчивости и бифуркации к новому состоянию. Такой бифуркацией в