УДК 539.3:531.2.001:621.81

Т.М. Мартыненко

БЕЗИЗГИБНЫЕ ФОРМЫ ТОНКОСТЕННЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК С МОНЖЕВОЙ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Командно – инженерный институт МЧС Республики Беларусь
Минск, Беларусь

В настоящей работе рассматривается задача выбора такой геометрической формы тонкостенных упругих оболочек, в которых заданная внешняя нагрузка вызывает только безмоментное напряженно-деформированное состояние (НДС) (т.е. не изменяет кривизны срединной поверхности, а вызывает только растягивающие усилия). Эта задача решается в рамках теории Кирхгофа – Лява.

Оболочечные конструкции (оболочки) имеют широкое применение в качестве куполов, перекрытий и т.д. Поэтому их расчёт на прочность представляет актуальную задачу современной механики деформированного тела. Ввиду математической сложности этой задачи, она часто упрощается путём введения ряда гипотез (пологость оболочки, расчёт и проектирование оболочки на заданную нагрузку по безмоментной теории с наложением краевого эффекта и т.д.).

В настоящей работе рассматривается задача выбора такой геометрической формы тонкостенных упругих оболочек, в которых заданная внешняя нагрузка вызывает только безмоментное напряженно-деформированное состояние (НДС) (т.е. не изменяет кривизны срединной поверхности, а вызывает только растягивающие усилия). Эта задача решается в рамках теории Кирхгофа – Лява.

Основные уравнения запишем в предположении, что срединная поверхность записывается уравнениями [1]-[3]:

$$\vec{r}(\alpha,\beta)=\vec{r}_0(x_0(\beta),y_0(\beta))+\eta(\alpha)\vec{n}+\varsigma(\alpha)\vec{b}\quad . \tag{1}$$

Здесь $\vec{r}_0=\vec{r}_0(\beta)$ - векторное уравнение начальной параллели, $\vec{n}$, $\vec{b}$ - её нормаль и бинормаль, $\eta=\eta(\alpha)$, $\varsigma=\varsigma(\alpha)$ - параметрические уравнения меридиана.

уравнения равновесия:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(T_1B)+\frac{\partial}{\partial\beta}(SA)-\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2+ABq_1=0,\ \frac{\partial}{\partial\beta}(T_2A)+\frac{\partial}{\partial\alpha}(SB)+\frac{\partial B}{\partial\alpha}S+ABq_2=0,$$

$$\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}=q_n; \tag{2}$$

уравнения совместности деформаций:

$$-\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon_2B)+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varepsilon_1+A\frac{\partial\gamma_{12}}{\partial\beta}=0,\ \frac{R_2}{R_1}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\gamma_{12}-A\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\alpha}(\gamma_{12}B)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(F(\alpha)\gamma_{12}+\frac{\partial\gamma_{12}}{\partial\alpha})=0; \tag{3}$$

закон Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{Eh}(T_1 - \mu T_2)\,;\ \varepsilon_2 = \frac{1}{Eh}(T_2 - \mu T_1)\,;\ \gamma_{12} = \frac{2\cdot(1+\mu)}{Eh}S\ . \tag{4}$$

Здесь:

$$A = \sqrt{\eta'^2(\alpha) + \varsigma'^2(\alpha)} \equiv A(\alpha)\,,\ B = \sqrt{x_0'^2(\beta) + y_0'^2(\beta)}\cdot(1-\eta(\alpha)\cdot k(\beta)) \equiv B(\alpha,\beta)\,,$$

$$R_1 = \frac{A^3}{\left|\varsigma''_{\alpha\alpha}\eta'_\alpha - \varsigma'_\alpha\eta''_{\alpha\alpha}\right|},\ R_2 = -\frac{A\cdot(1-\eta(\alpha)\cdot k(\beta))}{\varsigma'(\alpha)\cdot k(\beta)}\,,\ F(\alpha) = \frac{A}{R_1}\cdot\frac{\eta'(\alpha)}{\varsigma'(\alpha)} = \frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}, \tag{5}$$

где k - кривизна начальной параллели.

Из третьего уравнения системы (3) вытекает следующее равенство

$$\frac{\partial\gamma_{12}}{\partial\alpha} + F(\alpha)\cdot\gamma_{12} = f(\alpha)\,, \tag{6}$$

где $f(\alpha)$ - произвольная функция, $F(\alpha)$ - определена формулой (5).

Интегрируя уравнение (6), получим:

$$\gamma_{12} = (\varphi(\beta) + \phi(\alpha))\exp(-\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(t)dt)\,. \tag{7}$$

Из формул (4) и (7) имеем:

$$S = \frac{Eh}{2\cdot(1+\mu)}\cdot(\varphi(\beta) + \phi(\alpha))\exp(-\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(t)dt)\,, \tag{8}$$

где:

$$\phi(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)\exp(\int_{\alpha_0}^{\xi} F(t)dt)d\xi\,,\ \varphi(\beta) = \frac{2\cdot(1+\mu)}{Eh_0}\cdot S(\alpha_0,\beta)\,,$$

$S(\alpha_0,\beta)$ - граничное значение S на начальной параллели.

Поэтому будем считать S известной функцией.

Из формул (2) считая E, μ, h - постоянными, имеем:

$$\frac{\partial T_1}{\partial\alpha} = \frac{1}{B}(\frac{\partial B}{\partial\alpha}(T_2 - T_1) - \frac{\partial}{\partial\beta}(SA) - ABq_1)\,,\ \frac{\partial T_2}{\partial\beta} = -\frac{1}{A}(\frac{\partial B}{\partial\alpha}S + \frac{\partial}{\partial\alpha}(SB) + ABq_2)\,. \tag{5}$$

Из (3) - (5) имеем:

$$\frac{\partial T_1}{\partial\beta} = \frac{1}{A}((2+\mu)B\frac{\partial S}{\partial\alpha} + 2\frac{\partial B}{\partial\alpha}S + 2\cdot(1+\mu)\frac{R_2}{R_1}\frac{\partial B}{\partial\alpha}S - \mu ABq_2)\,,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial\alpha} = \frac{1}{B}((T_1 - T_2)\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}(2+\mu)(AS) - \mu ABq_1)\ . \tag{6}$$

Для однозначной разрешимости этой системы нужно удовлетворить [4] условиям:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial T_i}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial T_i}{\partial\beta}\quad(i=1,2).$$

С учётом полученных ранее формул (5) – (6) имеем:

$i=1$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}(T_2-T_1)-\frac{\partial}{\partial\beta}(SA)-ABq_1\right)\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\left((2+\mu)B\frac{\partial S}{\partial\alpha}+2\frac{\partial B}{\partial\alpha}S+2\cdot(1+\mu)\frac{R_2}{R_1}\frac{\partial B}{\partial\alpha}S-\mu ABq_2\right)\right)$$

$i=2$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\left((T_1-T_2)\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}(2+\mu)(AS)-\mu ABq_1\right)\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-\frac{1}{A}\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}S+\frac{\partial}{\partial\alpha}(SB)+ABq_2\right)\right).\quad(7)$$

Складывая эти равенства, получим:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\left((1+\mu)A\frac{\partial S}{\partial\alpha}-(1+\mu)ABq_1\right)\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\left((1+\mu)B\frac{\partial S}{\partial\alpha}+2\cdot(1+\mu)\frac{R_2}{R_1}\frac{\partial B}{\partial\alpha}S-(1+\mu)ABq_2\right)\right).$$

Это равенство представляет условие разрешимости в начале статьи задачи, поэтому что оно учитывает внешние и внутренние параметры q_1, q_2, q_n, A, B, R_1, R_2, μ. Оно может быть использовано при решении прямой задачи теории монжевых оболочек, когда заданы q_1, q_2, q_n, A, B, R_1, R_2, μ, а подлежат определению T_1 и T_2. В этом случае разрешающие уравнения состоят из третьего уравнения равновесия и одного из двух уравнений системы (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В.Л., Механика тонкостенных конструкций, М., Машиностроение.-1977г.; 2. Савула Я.Г., Флешман Н.П., Об одном решении класса оболочек канонических форм, Весник Львовского университета, Львов, Висша школа, 1974г.; 3. Савула Я.Г., Представление срединной поверхности оболочки разными поверхностями, Прикладная механика, Киев, Наукова Думка, 1984г., т.20 №12, с70 – 75.; 4. Лопатинский Я.Б., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Киев – Донецк, Висша школа, 1976г.

УДК 621.922. 546

А.А. Лысов, А.С. Аршиков

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ХАРАКТЕРА РАЗРУШЕНИЯ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ АЛМАЗНО-МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОМПОЗИЦИЙ

Полоцкий государственный университет
Новополоцк, Беларусь

На работоспособность алмазных инструментов существенное влияние оказывают физико-химические параметры связки, качество и морфология исходного алмазного сырья. Алмазно-металлические инструментальные композиции, как правило, включают