

кинематических параметров в цилиндрических координатах. Теоретическая и прикладная механика: Сб. науч. Трудов. Под ред. И.П. Филонова. – Мн.:УП «технопринт», 2002. – 252 с; 10. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.:Наука, 1986. – с. 448; 11. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах : Учеб. пособие для вузов. Т.1. Статика и кинематика. – М.: Наука, 1990. – с. 672.

УДК 624.075

В.М. Овсянко

УДАР ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА О ЖЕСТКОЕ ОСНОВАНИЕ

*журнал "Будаўніцтва. Стrojительство. Construction."
г. Минск, Беларусь*

1. В механике деформируемого твёрдого тела имеется ряд объектов, при расчёте которых необходимо учитывать не только упругие свойства материала, но и его вязкость. Существует много реологических моделей, определяющих свойства тех или иных материалов. Наиболее простыми из них являются модели Фойгта и Максвелла. В данной работе рассматривается ударное взаимодействие вязкоупругого тела, характеризуемого одной из указанных моделей, с жёстким основанием с использованием нового направления в моделировании объектов строительной механики и прикладной теории упругости, разработанного автором [1-3].

При анализе несущих строительных конструкций, в том числе и ряда объектов, построенных в Белоруссии и рассчитанных автором на основе его разработок, в своё время использовались специализированные электромоделирующие установки. Их работа осуществляется на основе аналогии между уравнениями, характеризующими объект моделирования, и уравнениями электрического тока, определяющими, в частности, схемы-аналоги конечных элементов, на которые расчленяется исследуемая конструкция [4]. В работе [5] расчёт сложной конструктивно нелинейной системы предлагается производить в два этапа: с помощью электронных моделей находится единственная рабочая расчётная схема сооружения, соответствующая заданной нагрузке, а для более точного определения внутренних усилий и деформаций в системе применяется электронная цифровая вычислительная машина, выполняющая расчёт по найденной на первом этапе рабочей расчётной схеме с использованием программы для расчёта стержневой или континуальной системы.

В настоящее время созданы многочисленные пакеты программ для расчёта электронных цепей, которые позволяют анализировать сложные электронные схемы, в том числе и содержащие различные нелинейные элементы. Широкие возможности этих пакетов привели автора к новому нестандартному направлению в моделировании деформируемых объектов. Его сущность состоит в следующем: для исследуемого объекта моделирования синтезируется электронная схема-аналог, анализируемая далее не на специализированной электромоделирующей установке, а с помощью пакета программ для расчёта электронных цепей. Подобный подход позволил произвести расчёт ряда сложных нелинейных систем [1-3], анализ которых на специализированной установке выполнить трудно ввиду сложности реализации различных нелинейных зависимостей.

2. Разработанное направление в моделировании может использоваться при решении сложных задач статики, динамики и устойчивости стержневых и континуальных систем. Его применение рассмотрим на примере динамической системы, указанной в заголовке статьи.

Сначала исследуем случай, когда упавшее на жёсткое основание тело с массой m определяется моделью Фойгта (рис. 1,а). Здесь упругий элемент (пружина) характеризуется коэффициентом жёсткости c , а вязкий (его моделирует поршень внутри цилиндра с вязкой жидкостью) – коэффициентом вязкости η . Начальная скорость падения массы равна v_0 . Исследуем, как изменяется сила удара $P(t)$ такого вязкоупругого тела во времени t . Перемещение центра тяжести массы обозначим через y . Положительное направление перемещения показано на рис. 1,а. На массу действует сила инерции массы $J_m = -m\ddot{y}$, сила упругости $S = cy$ и сила сопротивления $R = \eta\dot{y}$. Записывая уравнение динамического равновесия, получим:

$$-(-m\ddot{y}) + \eta\dot{y} + cy = 0. \quad (1)$$

Искомая сила удара

$$P(t) = cy + \eta\dot{y} = -m\ddot{y}. \quad (2)$$

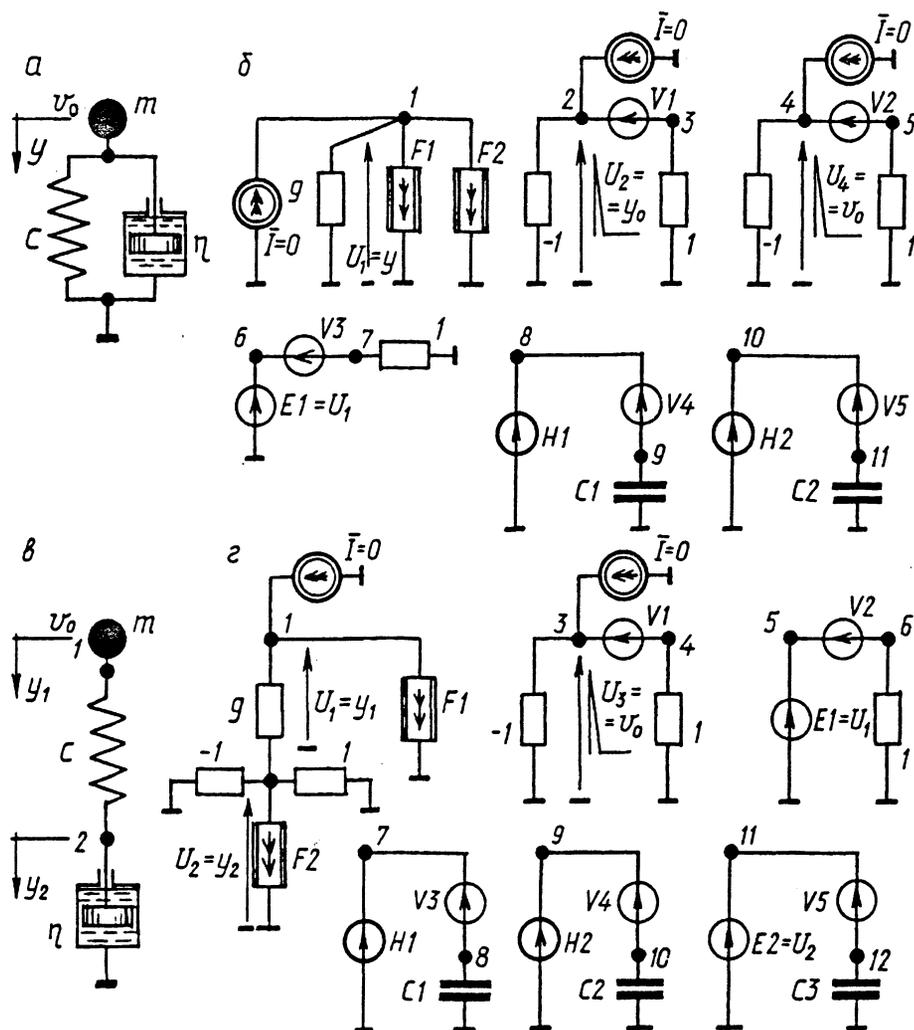


Рис. 1

Для моделирования динамического процесса (1) синтезируем электронную цепь. Рассмотрим следующие исходные данные (взяты из работы [6]): $m=20 \text{ кН}\cdot\text{с}^2/\text{м}$; $v_0 = 2,15 \text{ м/с}$; $c = 4\cdot 10^4 \text{ кН/м}$; $\eta = 0,25\cdot 10^3 \text{ кН}\cdot\text{с/м}$.

Уравнение (1) описывает колебания любой упругой линейной системы с одной степенью свободы с учётом затухания, поэтому при синтезе электронной модели учтём, что в качестве начальных условий может быть задана не только начальная скорость v_0 , как это необходимо для системы на рис.1,а, но и начальное перемещение y_0 . Для удобства моделирования выражение (1) разделим на c :

$$\frac{m}{c} \ddot{y} + \frac{\eta}{c} \dot{y} + y = 0. \quad (3)$$

При синтезе электрической модели системы на рис. 1,а пружина обычно моделируется резистором с проводимостью g , а вязкий элемент – конденсатором. Непосредственное соединение этих элементов не позволяет получить точную модель уравнения (1). Рассмотрим способ, позволяющий точно обрабатывать функцию конденсатора, т.е. преобразовывать скорость изменения напряжения на его обкладках в ток, пропорциональный второму слагаемому в уравнениях (1) и (3).

Электронная модель, анализ которой далее выполняется на обычной ПЭВМ, показана на рис. 1,б. Она содержит собственно модель уравнения (3) с узлом 1 и ряд подсхем. Резистор с проводимостью g эквивалентен жёсткости c (уравнение (1)) и $R = 1$ (размерность электрических параметров - стандартная) при моделировании уравнения (3). $F1$ и $F2$ – управляемые источники тока, управляемые токами, – эквивалентны первому и второму слагаемым в уравнении (3). Напряжение U_1 , обрабатываемое в узле 1, эквивалентно перемещению центра тяжести массы. В схемах с узлами 2 и 4 задаются начальные условия - начальное перемещение массы y_0 и начальная скорость v_0 в виде кратковременных импульсов с помощью специальной директивы в программе для анализа электронной цепи. Схема с узлом 6 содержит источник напряжения $E1$, управляемый напряжением U_1 ($E1 = U_1$). В схемах с узлами 10 и 8 через измерительные источники напряжения $V5$ и $V4$ протекают токи, равные по величине управляемым источникам тока $F1$ и $F2$. Для их обработки используются управляемые источники напряжения $H1$ и $H2$, управляемые токами:

$$\begin{aligned} H1 &= I(V1)\cdot 1 + I(V3)\cdot 1; C1 = \eta/c = 0,00625; \\ H2 &= I(V2)\cdot 1 + I(V4)\cdot c/\eta; C2 = m/c = 0,0005; \end{aligned} \quad (4)$$

В выражениях (4) ток $I(V1)$, протекающий через измерительный источник напряжения $V1$ моделирует начальное перемещение y_0 , а $I(V3)$ – перемещение y центра тяжести массы. Ток $I(V2)$ аналогичен начальной скорости v_0 , а $I(V4)$ соответствует второму слагаемому в выражении (3). Таким образом, источник напряжения $H1$ в любой момент времени моделирует перемещение y центра тяжести массы с учётом начального перемещения y_0 , а ток $I(V4) = F2$, т.е. равен току, аналогичному второму слагаемому уравнения (3). Источник напряжения $H2$ эквивалентен скорости колебания в любой момент времени с учётом начальной скорости v_0 . Тогда ток $I(V5) = F1$ соответствует первому слагаемому выражения (3).

При исследовании удара вязкоупругого тела схема с узлом 2 не нужна, так как в качестве начального условия при $t = 0$ задаётся только начальная скорость v_0 .

Результат численного эксперимента, выполненного на ПЭВМ путём временного анализа синтезированной электронной модели, для исходных данных, приведенных выше, показан на рис. 2. Все кривые, характеризующие временные процессы, с помощью графического постпроцессора выводятся на печать. Здесь приведены два графика на интервале времени от 0 до 0,2 с. Кривая 1 соответствует выражению (2) (все её ординаты необходимо умножить на $4\cdot 10^2 \text{ кН}$). Она характеризует изменение силы

удара во времени. Приблизительно через 1 с процесс колебаний почти полностью затухает. Кривая 2 моделирует вертикальное перемещение y центра тяжести массы. На рис. 2 её ординаты показаны увеличенными в 100 раз, поэтому $y = U_1/100$ (м). При анализе графиков, приведенных на рис. 2, следует исходить из предпосылки, что после удара вязкоупругое тело “прилипает” к жёсткому основанию, поэтому сила удара характеризуется и положительными и отрицательными ординатами. Вторая предпосылка: при соударении при $t = 0$ центр тяжести массы находится на некотором расстоянии от жёсткого основания (например, на 0,05 м), поэтому масса может совершать затухающие колебания.

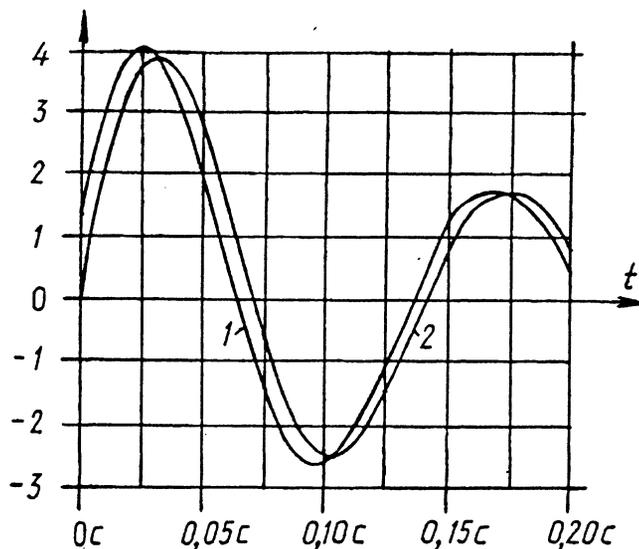


Рис. 2

Очевидно, наибольший интерес представляет участок кривой 1 на интервале времени от 0 до 0,065 с (при котором сила удара стала равной нулю). Модель Фойгта характеризуется тем, что в начальный момент времени при $t = 0$ существует сила взаимодействия вязкоупругого тела и жёсткого основания. Особенно это свойство проявляется при $\eta = 4 \cdot 10^3$ кН·с/м, когда кривая силы удара имеет только нисходящую ветвь в отличие от кривой 1 для $\eta = 0,25 \cdot 10^3$ кН·с/м, имеющей и восходящую и нисходящие ветви. Во втором случае в два раза уменьшается время, за которое сила удара становится равной нулю, что подтверждено численным экспериментом.

3. Вязкоупругое тело, реологической моделью которого является среда Максвелла (рис. 1,в), определяется двумя динамическими уравнениями равновесия, записываемыми для узлов 1 и 2 аналогично уравнению (1):

$$m \ddot{y}_1 + c(y_1 - y_2) = 0; \quad \eta \dot{y}_2 + c(y_2 - y_1) = 0. \quad (5)$$

Исходные данные для m , v_0 , c – те же, что и для модели Фойгта, $\eta = 4 \cdot 10^3$ кН·с/м. При моделировании уравнения (5) целесообразно разделить на c . Интересующая нас сила удара $P(t) = \eta \dot{y}_2$.

Электронная модель уравнений (5) показана на рис. 1,г. Резистор с проводимостью g эквивалентен, как и для схемы на рис. 1,б, коэффициенту жёсткости c с учётом деления выражения (5) на c $R=1$. В схеме с узлом 3 задаётся начальная скорость v_0 . Начальное перемещение y_0 отсутствует. Тогда управляемые источники напряжения $H1$ и $H2$ равны:

$$\begin{aligned} H1 &= I(V2) \cdot 1; \quad C1 = 1; \\ H2 &= I(V1) \cdot 1 + I(V3) \cdot 1; \quad C2 = m/c = 0,00051. \end{aligned} \quad (6)$$

В выражениях (6) управляющие токи имеют тот же смысл, что и при моделировании выражений (4). Напряжение, обрабатываемое источником $H2$, эквивалентно первой производной \dot{y}_1 . Тогда ток $I(V4) = \frac{m}{c} \ddot{y}_1 = F1$. Для отработки первого слагаемого во втором уравнении (6) используется схема с узлом 11. Здесь $C3 = \eta/c = 0,1$. Ток $I(V5) = \frac{\eta}{c} \dot{y}_2 = F2$.

Результат численного эксперимента для модели Максвелла приведен на рис. 3, где кривая 1 показывает изменение во времени силы удара (в кН), кривые 2 и 3 – перемещения (в метрах) узлов 1 и 2 модели (рис. 1,в). Ординаты кривой 1 необходимо умножить на 100, а кривых 2 и 3 разделить на 400. Через одну секунду колебания практически прекращаются.

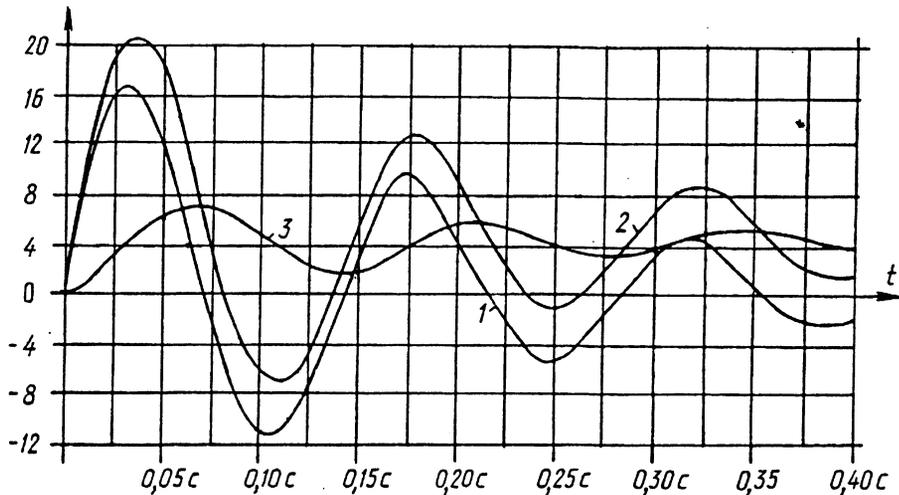


Рис. 3

Для $\eta = 0,25 \cdot 10^3$ кН·с/м кривая $P(t)$ асимптотически стремится к базисной оси, не пересекая её.

4. При выборе той или иной реологической модели вязкоупругого тела для получения достоверных результатов необходимо, конечно, руководствоваться характеристиками c и η и их соотношениями (6), что видно из численных экспериментов, приведенных выше.

На основе рассмотренных схем легко синтезируется электронная схема-аналог и для реологической модели Кельвина, которая получается путём последовательного соединения модели Фойгта (параллельно соединённые пружина и поршень в цилиндре с вязкой жидкостью) и ещё одной пружины. Тогда к электронной модели, показанной на рис. 1,б, добавляется ещё один резистор, являющийся аналогом второй пружины. Если необходимо произвести исследование удара стержня, выполненного из вязкоупругого материала, о жёсткое основание, то, расчленив стержень на несколько элементов и сосредоточив массы в узлах, для каждого полученного элемента можно применять электронные модели, приведенные на рис. 1,б,г. Идея организации динамического процесса, рассмотренная в данной работе, может иметь широкое применение для любых линейных и нелинейных динамических систем. На её основе в работах [1,3] исследована динамическая устойчивость консольного стержня со следящей силой на конце, в работах [3,7] впервые выполнен анализ параметрических колебаний стержня в случае, когда следящая сила изменяется по гармоническому закону.

Разработанная методика моделирования удара вязкоупругого тела о жёсткое основание позволяет решить задачу в более сложной постановке, когда упругая характеристика тела имеет нелинейный характер зависимости усилия (в пружине) от перемещения. В этом случае вместо линейного резистора, моделирующего жёсткостную характеристику тела (пружину), устанавливается полиномиальный управляемый источник тока [3], реализующий любую нелинейную зависимость и управляемый напряжением, эквивалентным перемещению центра тяжести массы. Аналогичным образом синтезируется электронная модель стержня, состоящего из комбинации вязких и нелинейно-упругих элементов, когда такой стержень ударяется о жёсткое основание.

Легко моделируется и случай, когда на вязкоупругое тело (или стержень) после его падения с заданной начальной скоростью, если колебания ещё не прекратились, начинают действовать кратковременно прикладываемые ударные импульсы. Удар, ещё удар... Число ударов может быть любым. Реализация таких импульсов производится так, как это сделано в работе [3, с. 254] при исследовании фермы Мизеса, для которой автором обнаружена при определённых динамических воздействиях возможность превращения её в генератор стохастичности.

Идея моделирования удара на основе компьютерного анализа электронной модели исследуемой системы может быть распространена, кроме рассмотренных, и на другие интересные объекты. Одним из таких объектов является система со следящей силой [7], если эта сила будет иметь характер периодически повторяющихся ударов.

В работе [8] выполнен компьютерный анализ электронных моделей балок на упруго-вязком основании, характеризуемом одной из моделей – Максвелла, Фойгта или Кельвина, когда на балку действует определённое время импульсно приложенная сила. На основе методики, описанной в данной работе, расчёт таких балок (или аналогичных любых стержневых систем) может быть выполнен на действие различного вида ударов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянко В.М. Компьютерный анализ электронных моделей деформируемых объектов на примере одной неконсервативной системы// Известия вузов. Строительство. – Новосибирск, 1995. - № 7-8. – С;
2. Овсянко В.М. Деформируемые системы с большими перемещениями// Архитектура и строительство Беларуси. – 1994. - № 5-6. – С. 29 – 35;
3. Овсянко В.М. Следящая сила и вокруг нее: Компьютерный анализ электронных моделей деформируемых объектов. – Мн.: Польша, 1999. – 272 с;
4. Овсянко В.М. Синтез электронных моделей деформируемых объектов. – Мн.: Наука и техника, 1982. – 336 с;
5. Овсянко В.М. Выбор рабочей расчетной схемы на АВМ как основной этап расчета конструктивно нелинейной стержневой системы на ЭЦВМ// Весці акадэміі навук Беларускай ССР. Серыя фізіка-тэхнічных навук. – 1976. - № 3;
6. Еленицкий Э.Я., Файзуллин Н.И. Анализ вязкоупругих моделей при их соударении с абсолютно жесткой преградой// Расчет пространственных строительных конструкций. Задачи строительной механики упругих и упругопластических систем. Межвузовский сборник научных трудов. – Куйбышевский государственный университет. – 1983. – С. 47-53;
7. Овсянко В.М. Параметрические колебания системы со следящей силой// Пространственные конструкции в Красноярском крае. Сборник научных трудов. – Красноярск: Красноярский инженерно-строительный институт. – 1994. – С. 156-171;
8. Овсянко В.М. Реология и аналогии: расчет балок на упруго-вязком основании// Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь. Материалы VI Международного научно-методического семинара. – БГПА.- Мн.: УП «Технопринт», 2000. – С. 499-504.