

## КВАЗИСТАТИЧЕСКИЙ СТАЦИОНАРНЫЙ РОСТ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНЫ

© 2014 В.А. Нифагин<sup>1</sup> М.А. Гундина<sup>2</sup>

Для оценки локальных механических характеристик в окрестности вершины трещины при плоской деформации для упругопластического материала на этапе квазистатического роста формулируется краевая задача с определяющими соотношениями теории течения с упрочнением в производных тензорах напряжений и деформаций по параметру нагружения. Полные решения получены методом асимптотических разложений. Исследуется перераспределение полей напряжений и деформаций в пластической области при срагивании трещины в границах промежуточной структуры. Найден вид пластических зон с учетом разгрузки при эволюции процесса разрушения материала. Также получены прямые оценки погрешностей и диаметры сходимости при отбрасывании остатков ряда.

**Ключевые слова:** докритический рост трещины, упругопластический материал, НДС, метод асимптотических разложений, теория течения, плоская деформация, пластическая зона, область разгрузки.

### Введение

Существует обширный класс упругопластических материалов с трещинами, для которых процесс разрушения сопровождается рядом специфических особенностей. В окрестности вершины трещины в таких материалах возникают пластические зоны, границы которых имеют сложные очертания и форму [1]. Кроме того, известны экспериментальные данные о наличии участка устойчивого (медленного) роста трещины при монотонном нагружении, а также при повторяющихся (циклических) нагрузках [2; 3]. Что касается особенностей первого типа, то здесь наметились два пути учета пластических свойств материала. Один из них заключается в решении упругопластической задачи для упрочняющегося тела с трещиной, где в ходе решения, помимо определения возникающих полей напряжений и деформаций, определяется и граница, отделяющая упругую и пластическую зоны [4]. Этот путь связан со значительными математическими трудностями из-за необходимости формулировки краевой задачи в рамках инкрементальных теорий пластичности, учитывающих тот факт, что отображение пластической зоны на плоскость напряжений не является вырожденным и требуется отыскание соответствующих представлений решения, определенных в упругой и пластических зонах,

<sup>1</sup>Нифагин Владимир Александрович (VladNifagin@bsu.by), кафедра информационных технологий Белорусского государственного университета, 220064, Республика Беларусь, г. Минск, ул. Курчатова, 5.

<sup>2</sup>Гундина Мария Анатольевна (maryanatolevna@mail.ru), кафедра инженерной математики Белорусского национального технического университета, 220013, Республика Беларусь, г. Минск, пр. Независимости, 65.

с последующей их склейкой по линии разделения областей активного нагружения и разгрузки. Для учета особенностей второго типа требуется рассмотрение различных режимов распространения трещины, таких как квазистатический или динамический нестационарный и стационарный рост.

В то же время нахождение точных или приближенных решений в задачах о концентраторах напряжений типа трещин осложнено из-за сингулярности полей напряжений и деформаций в особой точке границы и нелинейности разрешающих уравнений. Разработка и развитие асимптотических методов, занимающих промежуточное положение между точными аналитическими подходами, применяемыми в задачах линейной механики разрушения [5], и прямыми численными методами в нелинейных задачах [6] является актуальной задачей.

Одним из вариантов метода асимптотических разложений, применяемых в задачах для упругопластических упрочняющихся сред, является метод, связанный с отысканием сверхтонкой структуры — главного члена асимптотики напряжений и деформаций [7]. Последний позволяет получить оценки локальных характеристик напряженного состояния для бесконечно малой окрестности конца трещины, но не отвечает на вопрос о таковых на конечных (хотя, возможно, и малых) расстояниях и возникающей в этих ситуациях погрешности. Изучение асимптотик уровней промежуточной структуры представляет существенный интерес для совместного их использования с критериями разрушения, и построения эффективных алгоритмов анализа полных решений с учетом разгрузки в случае упругопластических сред с упрочнением. В работе для построения приближенных решений в напряжениях применялся метод асимптотических разложений, когда в окрестности особой точки — вершины трещины, рассматривались полные ряды напряжений и деформаций, включающие наряду с главной правильной частью [8]. Точность решений характеризуется прямыми оценками погрешностей напряжений и деформаций для конечных приращений длины трещины при учете последующих членов ряда. Указанная методика позволяет, в частности, определить геометрию пластических зон.

Определение полей напряжений и деформаций около подвижных трещиноподобных дефектов в упругопластических телах является важной составной частью задачи оценки прочности элементов конструкций. Из эксперимента известно, что трещина остается неподвижной при достаточно малых значениях монотонно изменяющегося параметра нагружения (например, для значений коэффициента интенсивности напряжений  $K \leq K_c$  — вязкости разрушения при квазихрупком разрушении). Указанный этап может содержать режим докритического роста, когда НДС, характерное для малой окрестности вершины фиксированного разреза, реализуется и при плавном подрастании трещины на достаточно большом удалении от особой точки и имеет смысл некоторой промежуточной асимптотики полного упругопластического решения [9; 10].

Далее в условиях, обеспечивающих устойчивый рост, этапы быстрого развития трещины в упругопластическом теле могут чередоваться с участками торможения и остановки или медленного распространения, что приводит к необходимости указанной постановки задачи.

## 1. Формулировка задачи

Рассмотрим стационарный режим распространения трещины, так что поля напряжений и деформаций не зависят явным образом от параметра нагружения. Случай упругопластичности отличает наличие начального этапа распространения

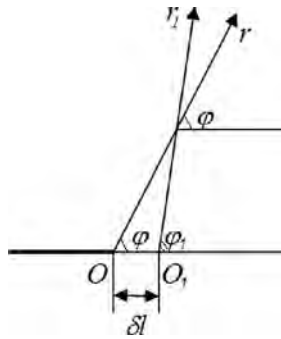


Рис. 1. Подвижная полярная система координат

трещины в условиях докритического роста. После инкубационного периода при докритических внешних нагрузках начинается медленный рост трещины. Трещина основную часть этого периода проходит со скоростью, близкой к постоянной. Это позволяет исследовать задачу в квазистатической постановке, т. е. полагать движение настолько медленным, что можно пренебречь инерционными членами в уравнениях движения.

Применим вариант асимптотического метода разложения по параметру нагружения для оценки напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины. Материал считается упрочняющимся по степенному закону, несжимаемым и плоскодеформируемым. Декартову систему координат отнесем к вершине трещины. Оси  $\xi_i$  ( $i = 1, 2$ ) расположим таким образом, что ось  $\xi_1$  ориентирована вдоль трещины в направлении ее конца.

Будем считать, что состояние вблизи вершины контролируется параметром нагружения  $K = p\sqrt{\pi l}$  (здесь  $p$  — внешнее усилие на бесконечности,  $2l$  — длина трещины), который будет интерпретироваться в качестве коэффициента интенсивности напряжений в упругой области, окружающей зону пластического деформирования. Единственным независимым параметром задачи с размерностью длины является величина  $K^2/G^2$ , где  $G$  — модуль сдвига, поэтому искомые функции задачи зависят от нагрузки только посредством безразмерных переменных

$$x_i = \xi_i G^2/K^2 \quad (i = 1, 2), \quad \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{x_2}{x_1}.$$

Совмещенная  $(O, r, \varphi)$  — подвижная полярная система координат с полюсом в конце трещины, причем  $r = \rho/2l$  — безразмерный радиус — отношение величины радиуса-вектора точки к длине трещины  $2l$ . При страгивании вершина трещины перемещается вместе с сопутствующей системой координат  $(O_1, r_1, \varphi_1)$ .

В отличие от декартовой системы координат, где ориентация площадки, на которой рассматривается изменение напряжений, остается фиксированной и координаты вектора нормали к этой площадке не изменяются при перемещении начала координат вместе с вершиной трещины, для полярной системы координат координаты нормали фиксированной площадки меняются при перемещении полюса  $O$  в точку  $O_1$ , т. е. являются функцией длины трещины (рис. 1).

Этот факт необходимо учитывать при выборе представлений напряжений и перемещений, когда произвольная функция  $f(l, r, \varphi)$  неявно зависит от длины,

а ее производная представима

$$\overset{\circ}{f}(r(l), \varphi(l)) = -\frac{\partial f}{\partial r} \cos(\varphi) + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\sin(\varphi)}{r}.$$

Под производной напряжений по длине в полярной системе координат понимается величина:

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij}(l, r, \varphi) = \lim_{\delta l \rightarrow 0} \frac{\sigma_{ij}(l + \delta l, r_1, \varphi_1) - \sigma_{ij}(l, r, \varphi)}{\delta l}, i, j = r, \varphi.$$

Рассматривается несжимаемый материал при квадратичном законе упрочнения под действием равномерно распределенной нагрузки на бесконечности – трещина нормального отрыва. Для плоского деформированного состояния в полярной системе координат среднее давление и компоненты тензоров и девиаторов напряжений и деформаций связаны:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = e_{ij}, \quad e_{rr} + e_{\varphi\varphi} = 0, \quad s_{rr} + s_{\varphi\varphi} = 0, \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}), \quad \sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}), \\ s_{rr} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}), \quad s_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}), \quad s_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}; \end{aligned}$$

все остальные компоненты равны нулю.

Кроме этого, рассмотрим уравнение совместности деформаций в производных деформациях по длине

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \overset{\circ}{e}_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial^2 \overset{\circ}{e}_{rr}}{\partial \varphi^2} - r \frac{\partial \overset{\circ}{e}_{rr}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \overset{\circ}{e}_{\varphi\varphi})}{\partial r^2}$$

и, переходя в определяющих соотношениях теории течения, учитывающих наличие зоны активного нагружения и зоны разгрузки, от приращений к производным по длине трещины получим:

$$\overset{\circ}{e}_{ij} = \overset{\circ}{s}_{ij} + \mu \overset{\circ}{F}(T) s_{ij}, i, j = r, \varphi,$$

при  $\mu = \vartheta(G/M - 1)$ ,  $\vartheta = \begin{cases} 1, \delta T \geq 0 \\ 0, \delta T < 0 \end{cases}$ , где  $M$  – модуль упрочнения,

$F(T) = \frac{A_3}{2}(s_{rr}^2 + s_{\varphi\varphi}^2 + 2s_{r\varphi}^2)$ , – квадратичная функция интенсивности отнесенных касательных напряжений,  $A_3 = 2A_2$ , где  $A_2$  – постоянная материала, характеризующая нелинейность диаграммы деформирования, определяемая, например, из опыта на простое растяжение.

Краевая задача формулируется из условий свободных от усилий поверхностей трещины и условий симметрии. Тогда в производных по длине трещины имеем

$$\overset{\circ}{\sigma}_{\varphi\varphi}|_{\varphi=\pi} = 0, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{r\varphi}|_{\varphi=\pi} = 0, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{r\varphi}|_{\varphi=0} = 0, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{\varphi\varphi}|_{\varphi=0} = 0,$$

где  $\sigma_{ij}$  – безразмерные компоненты тензора напряжений, отнесенные к сдвиговому модулю  $G$ .

## 2. Численно-аналитическое решение

Введем функцию напряжений  $\Phi(r, \varphi)$  в виде полного разложения по параметру нагружения в окрестности особой точки  $\Phi(r, \varphi) = \sum_{k \geq 0} \psi_k(\varphi) r^{\lambda_k}$ , причем  $r$  и  $\varphi$  являются функциями длины трещины. Значения  $\lambda_k$  и  $\psi_k(\varphi)$  определяются в ходе решения задачи.

Тогда выражения для функции упрочнения, производных напряжений и деформаций по длине для области активного нагружения имеют следующий вид:

$$\overset{\circ}{\sigma}_{rr} = \sum_{k \geq 0} ((\psi'_k \lambda_k + \psi''_k) \sin(\varphi) - (\lambda_k - 2)(\psi_k \lambda_k + \psi'_k) \cos(\varphi)) r^{\lambda_k - 3},$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{\varphi\varphi} = \sum_{k \geq 0} (\lambda_k (\lambda_k - 1) \psi'_k \sin(\varphi) - (\lambda_k - 2) \lambda_k (\lambda_k - 1) \psi_k \cos(\varphi)) r^{\lambda_k - 3},$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{r\varphi} = \sum_{k \geq 0} ((1 - \lambda_k) \psi''_k \sin(\varphi) - (\lambda_k - 2) (1 - \lambda_k) \psi'_k \cos(\varphi)) r^{\lambda_k - 3},$$

$$F(T) = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} a_{kl} r^{\lambda_k + \lambda_l - 4}, \text{ где } a_{kl} = \frac{A_2}{2} (\psi''_k + \lambda_k (2 - \lambda_k) \psi_k) (\psi'_l + \lambda_l (2 - \lambda_l) \psi_l) + 2(1 - \lambda_k) \psi'_l (1 - \lambda_l) \psi'_l.$$

Для произвольного приближения из уравнения совместности деформаций имеем рекуррентную последовательность краевых задач о собственных значениях

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} (2(-(\lambda_n - 2)(1 - \lambda_n)(\psi''_n \cos(\varphi) - \psi'_n \sin(\varphi)) + (1 - \lambda_n)(\psi'''_n \sin(\varphi) + \psi''_n \cos(\varphi))) + \\ & + 2(\lambda_n - 3)(-(\lambda_n - 2)(1 - \lambda_n)(\psi''_n \cos(\varphi) - \psi'_n \sin(\varphi)) + (1 - \lambda_n)(\psi'''_n \sin(\varphi) + \psi''_n \cos(\varphi))) - \\ & - \frac{1}{2}((\psi_n^{(4)} + \lambda_n(2 - \lambda_n)\psi''_n - (\lambda_n - 2)((\psi_n^{(4)} + \lambda_n(2 - \lambda_n)\psi''_n)) \cos(\varphi) - (\psi'''_n + \lambda_n(2 - \\ & - \lambda_n)\psi'_n - (\lambda_n - 2)((\psi'''_n + \lambda_n(2 - \lambda_n)\psi'_n) \sin(\varphi) + (\psi_n^{(5)} + \lambda_n(2 - \lambda_n)\psi'''_n - \psi''_n + \lambda_n(2 - \\ & - \lambda_n)\psi'_n) \sin(\varphi) + (\psi_n^{(4)} + \lambda_n(2 - \lambda_n)\psi''_n - \psi''_n + \lambda_n(2 - \lambda_n)\psi_n) \cos(\varphi))) + \frac{1}{2}(\lambda_n - 3)(-(\lambda_n - \\ & - 2)(\psi''_n + \lambda_n(2 - \lambda_n)\psi_n) \cos(\varphi) + (\psi'''_n + \lambda_n(2 - \lambda_n)\psi'_n) \sin(\varphi)) - (\lambda_n - 3)((\lambda_n - 2)(\psi''_n + \\ & + \lambda_n(2 - \lambda_n)\psi_n) \cos(\varphi) - (\psi'''_n + \lambda_n(2 - \lambda_n)\psi'_n) \sin(\varphi)) - \frac{1}{2}(\lambda_n - 3)(\lambda_n - 4)((\lambda_n - 2)(\psi''_n + \\ & + \lambda_n(2 - \lambda_n)\psi_n) \cos(\varphi) - (\psi'''_n + \lambda_n(2 - \lambda_n)\psi'_n) \sin(\varphi))) r^{\lambda_n - 3} + \frac{\mu}{2} \sum_{k+l+m=n+1} 2(((- \\ & - (\lambda_k + \lambda_l - 4)(a'_{kl} \cos(\varphi) - a_{kl} \sin(\varphi)) + (a''_{kl} \sin(\varphi) + a'_{kl} \cos(\varphi)))(1 - \lambda_m)\psi'_m + (- \\ & - (\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) + a'_{kl} \sin(\varphi))(1 - \lambda_m)\psi''_m) + 2(\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 7)((-\lambda_k + \\ & + \lambda_l - 4)(a'_{kl} \cos(\varphi) - a_{kl} \sin(\varphi)) + (a''_{kl} \sin(\varphi) + a'_{kl} \cos(\varphi)))(1 - \lambda_m)\psi'_m + (- \\ & - (\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) + a'_{kl} \sin(\varphi))(1 - \lambda_m)\psi''_m) - \frac{1}{2}((-\lambda_k + \lambda_l - 4)(a''_{kl} \cos(\varphi) - a'_{kl} \sin(\varphi) - \\ & - a'_{kl} \sin(\varphi) - a_{kl} \cos(\varphi)) + (a'''_{kl} \sin(\varphi) + a''_{kl} \cos(\varphi) + a'_{kl} \cos(\varphi) - a'_{kl} \sin(\varphi)))(\psi''_m + \lambda_m(2 - \\ & - \lambda_m)\psi_m) + (-\lambda_k + \lambda_l - 4)(a'_{kl} \cos(\varphi) - a_{kl} \sin(\varphi)) + (a''_{kl} \sin(\varphi) + a'_{kl} \cos(\varphi))(\psi''_m + \lambda_m(2 - \\ & - \lambda_m)\psi_m) + (-\lambda_k + \lambda_l - 4)(a_{kl} \cos(\varphi) - a_{kl} \sin(\varphi)) + (a'''_{kl} \sin(\varphi) + a'_{kl} \cos(\varphi))(\psi''_m + \lambda_m(2 - \\ & - \lambda_m)\psi_m) + (-\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) + a'_{kl} \sin(\varphi))(\psi_m^{(4)} + \lambda_m(2 - \lambda_m)\psi''_m) + \frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_l + \\ & + \lambda_m - 7)((-\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) + a'_{kl} \sin(\varphi))(\psi''_m + \lambda_m(2 - \lambda_m)\psi_m) - (\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - \\ & - 7)((\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) - a'_{kl} \sin(\varphi))(\psi''_m + \lambda_m(2 - \lambda_m)\psi_m) - \frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 7)(\lambda_k + \\ & + \lambda_l + \lambda_m - 8)((\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) - a'_{kl} \sin(\varphi))(\psi''_m + \lambda_m(2 - \lambda_m)\psi_m)) r^{\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 7} = 0. \end{aligned}$$

Граничные условия примут вид:  $\psi_n|_{\varphi=\pi} = 0, \psi'_n|_{\varphi=\pi} = 0, \psi_n|_{\varphi=0} = 0, \psi'_n|_{\varphi=0} = 0, \psi''_n|_{\varphi=\pi} = 0.$

Для начала ведется поиск значения параметра  $\lambda_0$ , соответствующего нетривиальному решению, и функции  $\psi_0$  на промежутке  $\varphi \in [0; \pi]$ . Для разрешимости последовательности указанных задач должны выполняться дополнительные условия, возникающие из-за того, что функции  $a_{klm}(\varphi)$  зависят от  $\psi_n(\varphi)$  и их производных с индексами  $\min\{k, l, m\} \leq n \leq \max\{k, l, m\}$ . В общем случае данное условие запишется в виде  $\lambda_n - 3 = \lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 7$  ( $k + l + m = n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$ ), откуда  $\lambda_n = 4n + (2n - 1)\lambda_0, (n = 1, 2, \dots)$ . Граничную задачу будем решать численно с помощью модифицированного метода пристрелки. При решении краевой задачи введем следующие обозначения:  $f_{00} = \psi_0, f_{01} = \psi'_0, f_{02} = \psi''_0, f_{03} = \psi'''_0, f_{04} = \psi_0^{(4)}$ , получим эквивалентную исходной систему дифференциальных уравнений с пятью граничными условиями.

$$f'_{00} = f_{01}, f'_{01} = f_{02}, f'_{02} = f_{03}, f'_{03} = f_{04}, f'_{04} = f(f_{00}, f_{01}, f_{02}, f_{03}, f_{04}). f_{00}|_{\varphi=\pi} = 0, f_{01}|_{\varphi=\pi} = 0, f_{00}|_{\varphi=0} = 0, f_{01}|_{\varphi=0} = 0, f_{02}|_{\varphi=\pi} = 0.$$

### 3. Анализ численных результатов

Расчеты представлены для медного сплава М1 со следующими числовыми характеристиками:  $G=0,424 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, модуль упрочнения  $M=1000$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu=0,365$ , упругопластическая постоянная материала  $A_2 = 1,3270501 \cdot 10^{-5}$ . Построенные графики соответствуют случаю, когда  $P=300$  МПа. Найденное значение параметра  $\lambda_0 = 7/4$ . При данном  $\lambda_0$  возможно непрерывное сращивание зон активного нагружения и разгрузки (рис. 4). Значение показателя  $\lambda_0$  на начальном этапе метода оценивалось численно и с помощью энергетического инварианта Черепанова — Райса.

Приведены контурные графики распределения напряжений и деформаций при  $dl=1 \cdot 10^{-7}$  в области промежуточной структуры (рис. 2, 3). Из анализа графиков заключаем, что при условии плоской деформации компонента напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}$  имеет максимальное значение в направлении предполагаемого развития трещины. Кроме этого, наблюдаются концентрация напряжений вблизи трещины и существенное уменьшение их градиента на удалении от нее в сравнении с деформационной теорией пластичности [9]. Заметим, что при увеличении внешней нагрузки происходит резкое разрастание пластической области. Область пластического деформирования, включающая зоны активного нагружения и разгрузки, представлена на рис. 4. Учет предельного условия разгрузки  $\delta T = 0$  является определяющим для отыскания границы раздела пластических и упругих зон. Область вырождается в кольцевой сектор ограниченный диаметром промежуточной структуры и критическими значениями угла, при которых происходит разгрузка. В табл. 1 приведены значения угла границы раздела зон активного нагружения и разгрузки.

Таблица 1

**Критическая величина угла для зоны разгрузки, при внешнем усилии  $P=300$  МПа**

| $r$ (м)     | $0,5 \cdot 10^{-5}$ | $0,7 \cdot 10^{-5}$ | $0,9 \cdot 10^{-5}$ | $1,1 \cdot 10^{-5}$ | $1,3 \cdot 10^{-5}$ | $1,5 \cdot 10^{-5}$ |
|-------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| $\varphi_r$ | 1,16579             | 1,13439             | 1,10614             | 1,07788             | 1,04648             | 1,01823             |

В табл. 2–4 приведены относительные величины каждого из приближений в общей асимптотике. В среднем величины составляют для  $\sigma_{rr}$  в случае трещины нормального отрыва от 3 до 9 % для первого приближения от 0,2 до 0,8 % для второго приближения. Для  $\sigma_{r\varphi}$  около от 1 до 5 % — первого и от 0,1 до 2 % — для второго приближения. Для  $\sigma_{\varphi\varphi}$  от 3 до 9 % — первого и от 0,1 до 1 % — для второго приближения.

Найден вид пластических зон с учетом разгрузки при эволюции процесса разрушения материала. Их локальная геометрия существенно зависит от выбора определяющих соотношений и режима стационарности в сравнении с деформационной теорией. В работах [10–12], предполагая, что НДС, предшествующее страгиванию трещины, достигается в условиях нагружения, близкого к лучевому, напряжения в пластической области в этот момент с учетом линейности асимптотики диаграммы материала определялись по формулам деформационной теории, что не позволяет применить данную методику к материалам с нелинейной диаграммой деформирования, когда линейный участок отсутствует. В то же время из-за непропорциональности процесса нагружения при страгивании трещины перераспределение напряжений и деформаций требует отыскания в рамках неголономных

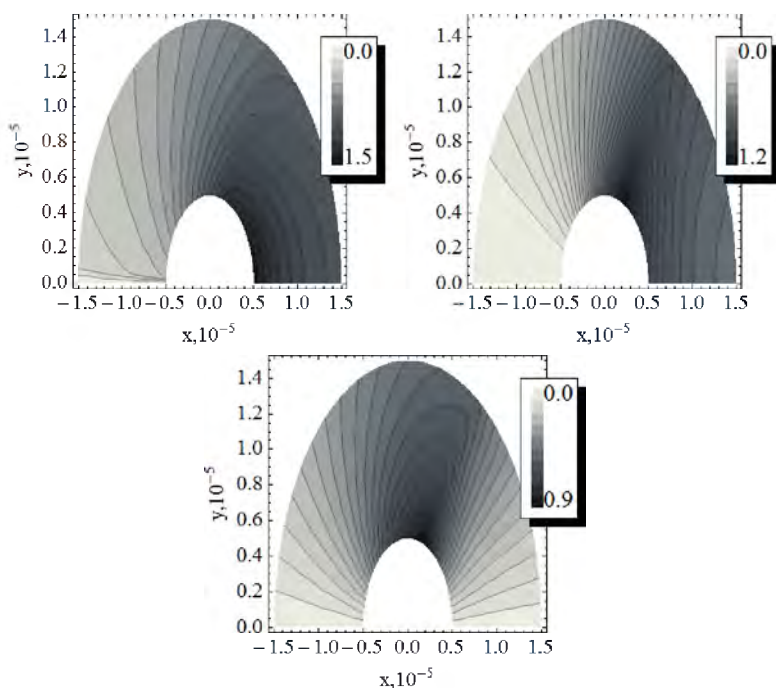


Рис. 2. Контурные графики компонент  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{r\varphi}$  в окрестности вершины трещины

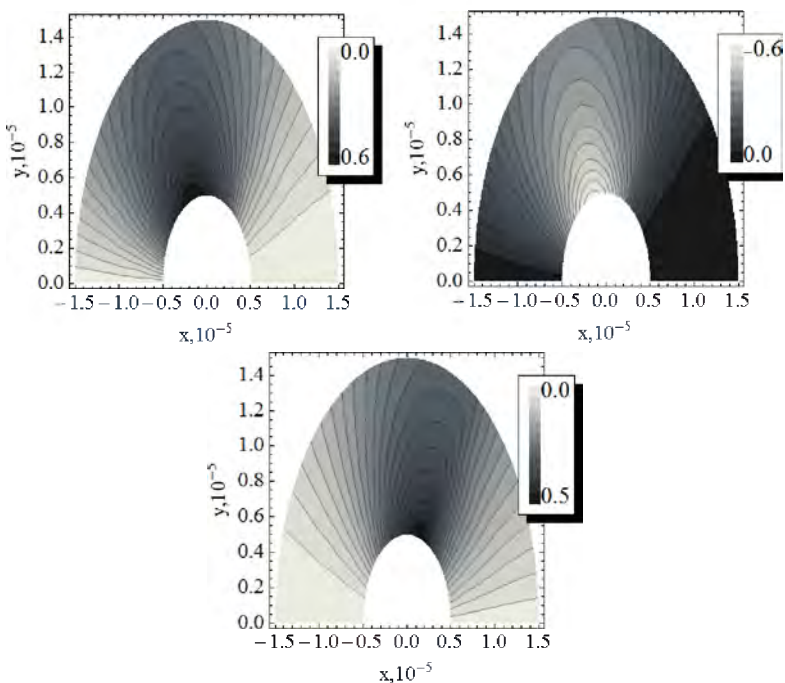


Рис. 3. Контурные графики компонент  $\epsilon_{rr}$ ,  $\epsilon_{\varphi\varphi}$ ,  $\epsilon_{r\varphi}$  в окрестности вершины трещины

Таблица 2

Прямая оценка сходимости для  $\sigma_{rr}(\varphi)$ 

| $\Gamma(\text{м})$     | $0,5 \cdot 10^{-5}$ | $0,7 \cdot 10^{-5}$ | $0,9 \cdot 10^{-5}$ | $1,1 \cdot 10^{-5}$ | $1,3 \cdot 10^{-5}$ | $1,5 \cdot 10^{-5}$ |
|------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| нулевое приближение    | 0,97301             | 0,95943             | 0,94624             | 0,93307             | 0,92004             | 0,90724             |
| первое приближение     | 0,02793             | 0,04036             | 0,05221             | 0,06371             | 0,07481             | 0,08551             |
| второе приближение     | 0,00208             | 0,00245             | 0,00315             | 0,00402             | 0,00515             | 0,00725             |
| норма трех приближений | 1,56392             | 1,3417              | 1,20707             | 1,10323             | 1,04948             | 0,98931             |

Таблица 3

Прямая оценка сходимости  $\sigma_{r\varphi}(\varphi)$ 

| $\Gamma(\text{м})$     | $0,5 \cdot 10^{-5}$ | $0,7 \cdot 10^{-5}$ | $0,9 \cdot 10^{-5}$ | $1,1 \cdot 10^{-5}$ | $1,3 \cdot 10^{-5}$ | $1,5 \cdot 10^{-5}$ |
|------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| нулевое приближение    | 1,00560             | 1,00836             | 1,01113             | 1,01386             | 1,01557             | 1,01687             |
| первое приближение     | 0,01078             | 0,01565             | 0,02092             | 0,02665             | 0,03307             | 0,03992             |
| второе приближение     | 0,00137             | 0,00377             | 0,00703             | 0,01125             | 0,01605             | 0,02139             |
| норма трех приближений | 0,91712             | 0,77306             | 0,68150             | 0,62539             | 0,58367             | 0,53933             |

Таблица 4

Прямая оценка сходимости  $\sigma_{\varphi\varphi}(\varphi)$ 

| $\Gamma(\text{м})$     | $0,5 \cdot 10^{-5}$ | $0,7 \cdot 10^{-5}$ | $0,9 \cdot 10^{-5}$ | $1,1 \cdot 10^{-5}$ | $1,3 \cdot 10^{-5}$ | $1,5 \cdot 10^{-5}$ |
|------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| нулевое приближение    | 0,97624             | 0,96287             | 0,94957             | 0,93630             | 0,92261             | 0,90884             |
| первое приближение     | 0,02531             | 0,03793             | 0,05032             | 0,06247             | 0,07462             | 0,08657             |
| второе приближение     | 0,00140             | 0,00163             | 0,00300             | 0,00470             | 0,00676             | 0,00915             |
| норма трех приближений | 1,23242             | 1,08044             | 0,97037             | 0,89334             | 0,85006             | 0,81952             |

теорий течения. Сравнительный анализ показал существенные отличия в структуре зон активного нагружения и разгрузки — уменьшение областей активного нагружения по сравнению с деформационной теорией и отсутствие областей разгрузки вблизи берегов трещины. Показатель сингулярности главного члена уменьшается, что приводит к более равномерному распределению полей напряжений в границах промежуточной структуры в окрестности вершины трещины.



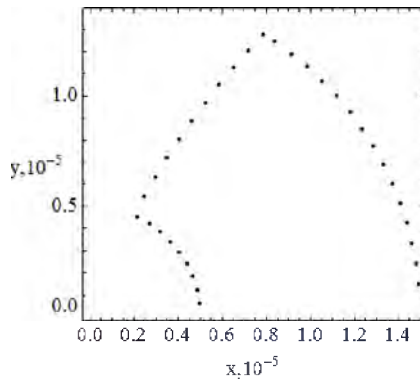


Рис. 4. Границы зоны активного нагружения в области промежуточной структуры

#### 4. Обсуждение результатов

В статье представлены некоторые аспекты нахождения НДС в условиях ослабления упругопластического тела жесткими концентраторами типа угловой точки (трещины, угловые и многоугольные вырезы), в частности, вариант метода асимптотических разложений. Решение таких задач в неполной (асимптотической) постановке содержит, как правило, некоторую степень произвола. Так, в случае линейного анализа соответствующая неопределенность относится к связи коэффициента интенсивности напряжений с геометрией тела и краевыми условиями. Аналогичное положение характерно для упругопластичности, когда главный член разложения вблизи особой точки — вершины трещины содержит наряду с неопределенным множителем заранее неизвестный показатель сингулярности, относящийся к сверхтонкой структуре. При этом для достаточно больших трещин и малых пластических зон может также рассматриваться асимптотика типа тонкой структуры. Ситуация распространяющейся трещины характеризуется увеличением неопределенности — число характерных асимптотических параметров здесь может увеличиваться до 3. Для устранения указанного произвола применяются энергетические инварианты типа  $J$ -интеграла Черепанова—Райса. Кроме того, в упругопластических задачах возникает несогласованность решений с энергетическими критериями роста трещины, поскольку поток энергии в вершину растущей трещины недостаточен для покрытия энергозатрат на образование новых поверхностей берегов.

#### Литература

- [1] George C. Sih Methods of analysis and solution of crack problems. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1973. 517 p.
- [2] Freund L.B. Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 563 p.
- [3] Ярема С.Я., Зборомирский А.И. Аналитические исследования роста усталостной трещины, произвольно ориентированной в двухосном неравномерном поле напряжений // Физ.-хим. механика материалов. 1984. № 20(6). С. 54–62.
- [4] О локальной пластической зоне вблизи конца щели (плоская деформация) / Б.А. Кудрявцев [и др.] // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 5. С. 132–138.

- [5] Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
- [6] Johnson C. On finite element methods for plasticity problems // *Numer. Math.* 1976. V. 26. P. 79–84.
- [7] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. М.: Физматлит, 2009. 336 с.
- [8] Нифагин В.А., Бубич М.А. Метод асимптотических разложений в теории упруго-пластических трещин // *Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук.* 2011. № 4. С. 60–66.
- [9] Слепян Л.И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1990. 296 с.
- [10] Resenfield A.R., Dai P.K., Hahn G.T. Crack extension and propagation under plane stress // *Proc. Int. Conf. of Fract.* 1965. № 1. P. 179–226.
- [11] Zhao J., Zhang X. On the process zone of quasi-static growing tensile crack with power-law elastic-plastic damage // *Int. J. of Fracture Mech.* 2001. V. 108. № 4. P. 383–395.
- [12] Куземко В.А., Русинко К.Н. Плоскопластическая деформация в малой окрестности конца трещины // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1983. № 2. С. 124–127.

## References

- [1] George C. Sih *Methods of analysis and solution of crack problems.* Leyden, Noordhoff International Publishing, 1973, 517 p. (in Russian)
- [2] Freund L.B. *Dynamic Fracture Mechanics.* Cambridge, Cambridge University Press, 1998, 563 p. (in Russian)
- [3] Yarema S., Zboromirski A. Analytical researches of fatigue crack growth, randomly oriented in a biaxial non-uniform stress field. *Fiz.-khim. mekhanika materialov [Physical and chemical mechanics of materials]*, 1984, no. 20(6), pp. 54–62. (in Russian)
- [4] Local plastic zone close to the end of a slit (plane strain). B.A. Kudryavtsev [et al.]. *Izv. Akad. nauk SSSR [Proceedings of Academy of Sciences of USSR]*, 1970, no. 5, pp. 132–138. (in Russian)
- [5] Morozov N.F. *Mathematical questions of crack theory. I.*, Nauka, 1984, 256 p. (in Russian)
- [6] Johnson C. On finite element methods for plasticity problems. *Numer. Math.*, Vol. 26, 1976, pp. 79–84.
- [7] Stepanova L.V. *Mathematical Methods of Fracture Mechanics.* M., Fizmatlit, 2009, 336 p.
- [8] Nifagin V.A., Bubich M.A. Method of asymptotic expansion in the theory of elastoplastic cracks, *Izv. Akad. nauk [Proceedings of the Academy of Sciences]*. Belarus, 2011, no. 4, pp. 60–66. (in Russian)
- [9] Slepyan L.I. *Mechanics of Cracks.* L., Sudostroenie, 1990, 296 p. (in Russian)
- [10] Resenfield A.R., Dai P.K., Hahn G.T. Crack extension and propagation under plane stress. *Proc. Int. Conf. of Fract.*, 1965, no. 1, pp. 179–226.
- [11] Zhao J., Zhang X. On the process zone of quasi-static growing tensile crack with power-law elastic-plastic damage. *Int. J. of Fracture Mech.*, 2001, Vol. 108, no. 4, pp. 383–395.
- [12] Kuzemko V.A., Rusinko K.N. Flat plastic deformation in the small vicinity of the crack tip. *Izvestia Akademii nauk USSR [Proceedings of the Academy of Sciences of USSR]*, МТТ, 1983, no. 2, pp. 124–127.

Поступила в редакцию 23/I/2014;  
в окончательном варианте — 1/VI/2014.

## QUASISTATIC STATIONARY GROWTH OF ELASTOPLASTICAL CRACK

© 2014 V.A. Nifagin<sup>3</sup> M.A. Gundina<sup>4</sup>

The boundary value problem with relations to the theory of flow with non-linear hardening in derivatives stress and strain tensors in the parameter loading is formulated to estimate local mechanical properties in the vicinity of crack tip of mode of loading for plane strain of elastic-plastic material at the stage of quasi-static growth. Complete solutions are obtained by the method of asymptotic decompositions. The redistribution of stress and strain fields in the plastic region at quasi-static growing crack for the intermediate structure is investigated. The form of plastic zones was found in the evolution of fracture process of material. We also obtained direct estimates of errors and diameters of convergence when dropping residues of series.

**Key words:** subcritical crack propagation, elastic-plastic material, stress-strain state, method of asymptotic decompositions, theory of flow, plane strain, plastic layer, discharge zone

Paper received 23/I/2014.

Paper accepted 1/VI/2014.

---

<sup>3</sup>Nifagin Vladimir Alexandrovich ([VladNifagin@bsu.by](mailto:VladNifagin@bsu.by)), the Dept. of Information Technologies, Belarusian State University, Minsk, 220064, Belarus.

<sup>4</sup>Gundina Maria Anatolievna ([maryanatolevna@mail.ru](mailto:maryanatolevna@mail.ru)), the Dept. of Engineering Mathematics, Belarusian National Technical University, Minsk, 220013, Belarus.