

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра
«Теоретическая механика и механика материалов»

Л.Е. Реут

**СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.
РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ**

Учебно-методическое пособие
для студентов машиностроительных специальностей

Электронное учебное издание

Реут Л.Е.

Сложное сопротивление. Расчеты на прочность: учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей (электронное учебное издание) / Л.Е. Реут. – Минск: БНТУ, 2023. – 163 с.

Рецензенты:

доктор технических наук, доцент, главный научный сотрудник лаборатории композиционных порошковых материалов Института порошковой металлургии им. академика О.В. Романа *В.М. Горохов*;

доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Технология машиностроения» Белорусского национального технического университета *О.Г. Девойно*

Электронное учебное издание представляет собой пособие по дисциплине «Механика материалов» и рассматривает важный раздел курса, посвященный изучению деформационного поведения и расчетам на прочность деталей машин и механизмов, работающих в условиях сложного сопротивления. В пособии представлен теоретический аспект темы, а также предложен набор практических инженерных задач с решениями, анализом, пояснениями и методическими рекомендациями.

Учебное пособие предназначено для студентов всех технических специальностей дневной и заочной форм обучения высших технических учебных заведений, а также для преподавателей при подготовке к лекционным и практическим занятиям.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	5
1. Общая методика определения напряжений и расчетов на прочность при сложном сопротивлении	5
2. Косой и пространственный изгиб	10
3. Изгиб с растяжением (сжатием)	23
4. Внецентренное растяжение (сжатие)	25
5. Кручение с изгибом	34
6. Кручение с растяжением (сжатием)	37
7. Общий случай пространственного нагружения	38
8. Кручение и сдвиг. Расчет цилиндрических винтовых пружин	39
ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	56
1. Косой и пространственный изгиб. Расчеты на прочность	56
2. Внецентренное растяжение (сжатие)	94
3. Кручение с изгибом стержней круглого сечения. Расчет валов зубчатых и ременных передач	112
4. Другие случаи сложного сопротивления. Расчет пространственного стержня	132
5. Расчет цилиндрических винтовых пружин	147
Литература	163

ВВЕДЕНИЕ

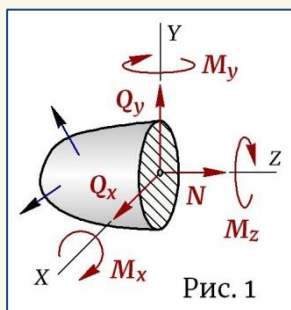
Большинство деталей машин и механизмов, а также элементов строительных конструкций, часто в условиях эксплуатации подвергаются нагрузкам, действующим одновременно в различных направлениях и плоскостях и создающим самые разнообразные сочетания простейших деформаций – растяжения, сжатия, сдвига, изгиба и кручения. Состояние элемента, работающего в условиях комбинации нескольких деформаций, называется **СЛОЖНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ**. Оно может возникать при нагружении детали силами, приложенными в различных его точках, а также в элементах, имеющих ломанную или искривленную ось. В этом случае в сечениях возникают два и более внутренних усилия, определяющих вид деформации, ее направление и величину. Так, валы редукторов, трансмиссионные валы, лопатки вращающихся деталей подвергаются кручению и изгибу; стержни ферм испытывают растяжение (сжатие) и изгиб, а шнеки буровых установок – сжатие и кручение; в заклепочных и шпоночных соединениях одновременно происходит срез и смятие; в затянутых болтах возникает растяжение от силы затяжки и кручение от момента трения и т.д.

Методика расчетов при сложном сопротивлении основана на использовании формул, полученных для простейших деформаций, но алгоритм решения зависит от возникающего сочетания деформаций и вида напряженного состояния, создаваемого данной комбинацией. При линейном напряженном состоянии в основе расчета лежит принцип независимости действия сил, позволяющий определять расчетные напряжения путем алгебраического суммирования напряжений от каждой деформации в отдельности, хотя для некоторых комбинаций, как например, при сжатии и одновременном действии изгибающих моментов (продольно-поперечный изгиб) принцип независимости действия сил применять нельзя и здесь требуются другие методы и подходы. При сложном нагружении, когда возникает плоское напряженное состояние, расчет выполняется с использованием одной из теорий прочности, соответствующей механическому поведению материала. В самом общем случае нагружения в сечении могут возникать шесть внутренних усилий, каждое из которых связано со своей деформацией, однако комбинация всех шести деформаций на практике встречается редко и чаще всего приходится иметь дело с простыми комбинациями нагружений. К тому же некоторыми входящими в комбинацию деформациями с достаточной для практических расчетов точностью можно пренебречь, что значительно упрощает решение инженерной задачи и позволяет ее выполнять по указанным выше методикам.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Общая методика определения напряжений и расчетов на прочность при сложном сопротивлении

Исследование прочности элементов конструкций, работающих в условиях силового нагружения, всегда начинается с определения внутренних сил, возникающих в поперечных сечениях и определяющих вид деформации, которой подвергается элемент. Внутренние усилия определяются **МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ** и в общем случае пространственного нагружения таких усилий возникает шесть (рис. 1):



N – продольная сила, связана в зависимости от направления с деформацией **РАСТЯЖЕНИЕ** или **СЖАТИЕ**; Q_x, Q_y – поперечные силы, связаны с деформацией **СДВИГ**; M_x, M_y – изгибающие моменты создают **ИЗГИБ** элемента относительно соответствующих осей; M_z – крутящий момент, связан с деформацией **КРУЧЕНИЕ**.

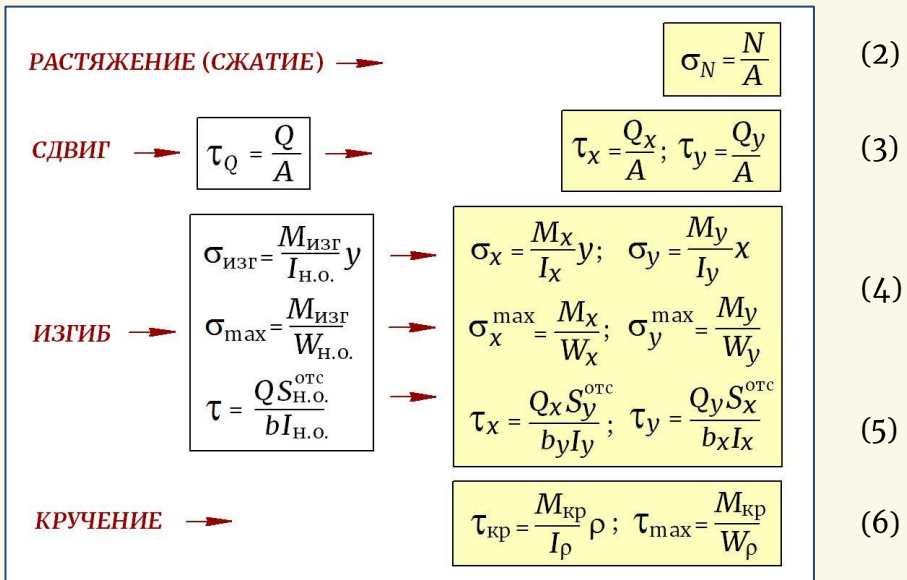
Для установления наличия в сечении указанных внутренних сил и определения их численного значения для отсеченной части составляются уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\rightarrow Q_x & \sum M_x = 0 &\rightarrow M_x \\ \sum Y = 0 &\rightarrow Q_y & \sum M_y = 0 &\rightarrow M_y \\ \sum Z = 0 &\rightarrow N & \sum M_z = 0 &\rightarrow M_z \end{aligned} \quad (1)$$

Если в сечении действует только одно внутреннее усилие, а остальные равны нулю, значит, возникает простейшая деформация и таких деформаций четыре: РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ), СДВИГ (в одном направлении), ИЗГИБ (в одной плоскости) и КРУЧЕНИЕ.

*Если в сечении действуют два и более внутренних усилия, возникает комбинация простейших деформаций и такой вид нагружения называется **СЛОЖНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ**.*

Чтобы подойти к вопросу исследования прочности элементов при сложном сопротивлении, необходимо вспомнить, какие возникают напряжения и как они определяются при простейших деформациях, автоматически указывая значения напряжений в пространственной системе координат $X - Y - Z$:



Таким образом, на основании формул (2)-(6) очевидной является взаимосвязь между деформациями, которые испытывает элемент, и напряжениями, соответствующими этим деформациям:

$$\boxed{\sigma} = f(N, M_x, M_y); \quad \boxed{\tau} = f(Q_x, Q_y, M_{кр}), \quad (7)$$

т.е. *нормальные напряжения* в точках сечения являются следствием РАСТЯЖЕНИЯ (СЖАТИЯ) и ИЗГИБА в одной или двух плоскостях, а *касательные напряжения* возникают при СДВИГЕ и КРУЧЕНИИ.

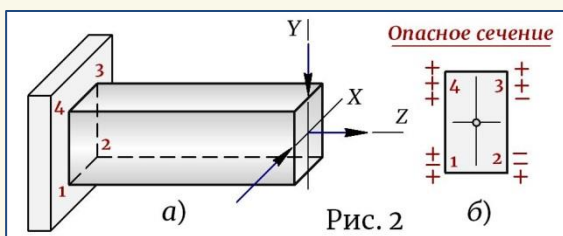
Метод расчета деталей при сложном сопротивлении зависит от вида напряженного состояния, которое возникает в точках нагруженного тела. В случае одноосного напряженного состояния решение выполняется на основании принципа независимости действия сил, что позволяет использовать расчетные формулы, относящиеся к простым деформациям. В более сложных случаях нагружения решение на сложное сопротивление требуют других подходов и методов, отличающихся от решения задач для простейших деформаций, хотя и здесь в основе расчетов также лежат формулы (2)-(6), но приведенные в своем сочетании к другим расчетным формулам, соответствующим заданной комбинации деформаций.

Исходя из зависимостей (7) и с учетом формул (2)-(6), рассмотрим общую методику определения напряжений для различных комбинаций деформаций, которым может подвергаться элемент:

① **Комбинация деформаций, при которой в точках сечения возникают нормальные напряжения "σ"**, что согласно соотношениям (7) соответствует сочетанию РАСТЯЖЕНИЯ (СЖАТИЯ) и ИЗГИБА в одной или двух плоскостях (рис. 2, а). При этом в случае поперечного изгиба поперечными силами Q_x, Q_y и связанными с ними касательными напряжениями (5), как правило, пренебрегают и в расчетах на прочность во внимание принимаются только нормальные напряжения. И тогда в точках нагруженного тела возникает одноосное напряженное состояние, что позволяет использовать принцип независимости действия сил и определять напряжения на основании формул (2,4) как алгебраическую сумму напряжений от каждой деформации в отдельности:

$$[\sigma] = \pm \sigma_N \pm \sigma_{M_x} \pm \sigma_{M_y} = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x \quad (8)$$

где знак перед слагаемыми соответствует действию данного внутреннего усилия на рассматриваемую точку. Если в точке от продольной силы и изгибающих моментов возникает растяжение, перед соответствующим слагаемым ставится знак «плюс», если сжатие — «минус». И тогда **расчетное напряжение** получают как суммарный результат напряжений с учетом знака слагаемых.



стационарным слагаемым ставится знак «плюс», если сжатие — «минус». И тогда **расчетное напряжение** получают как суммарный результат напряжений с учетом знака слагаемых.

При любом случае нагружения — и при простейшей деформации, и при сложном сопротивлении — оценку прочности элемента производят по опасному сечению и наиболее нагруженной точке в этом сечении. В представленном примере опасным является сечение в заделке, и если от растяжения напряжения во всех точках одинаковы и положительны, то от изгиба в точках опасного сечения возникают напряжения разных знаков, что указано соответствующими значками (+) и (-) на рис. 2, б. Наиболее нагруженной в опасном сечении является точка 4, где все три напряжения $\sigma_N, \sigma_{M_x}, \sigma_{M_y}$ имеют одно направление, и **условие прочности** для данной комбинации деформаций на основании формул (2,4) имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad (9)$$

② Комбинация деформаций, при которой в точках сечения возникают касательные напряжения " τ ", что согласно соотношениям (7) соответствует сочетанию СДВИГА в одном или двух направлениях (в том числе, СДВИГА, возникающего при поперечном изгибе) и КРУЧЕНИЯ. В этом случае суммарные касательные напряжения в произвольной точке сечения (рис. 3) определяются как геометрическая сумма напряжений от СДВИГА и КРУЧЕНИЯ:

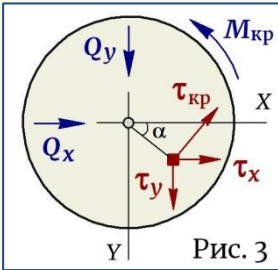


Рис. 3

$$\boxed{\tau} = \sqrt{(\tau_x + \tau_{кр} \sin \alpha)^2 + (\tau_y - \tau_{кр} \cos \alpha)^2}, \quad (10)$$

вычисляемых соответственно по формулам (3,5) и (6).

Примечание.

Напряжения τ_x и τ_y (5) при сдвиге, сопровождающем поперечный изгиб, играют второстепенную роль и ими, как правило, пренебрегают. Но это допустимо только для массивных сечений (круг, прямоугольник), где максимальное значение этих напряжений, которого они достигают на соответствующих главных осях, весьма незначительно. Однако эти напряжения имеют важное значение для тонкостенных профилей (двутавры, швеллеры), где проверка прочности по касательным напряжениям является обязательной, особенно, если элемент подвергается еще и кручению.

При выполнении расчетов на прочность наибольший интерес представляют опасные точки, в которых напряжения имеют наибольшее значение. При СДВИГЕ и КРУЧЕНИИ опасными являются точки, в которых максимальные напряжения от поперечных сил и максимальные напряжения от кручения совпадают по направлению. Для таких точек **условием прочности** является $\rightarrow \tau_{\max} \leq \boxed{\tau}$.

③ Комбинация деформаций, при которой в точках сечения возникают нормальные " σ " и касательные " τ " напряжения, что согласно (7) соответствует совокупности простейших деформаций, как например, РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ) и КРУЧЕНИЕ; КРУЧЕНИЕ и ИЗГИБ; КРУЧЕНИЕ, ИЗГИБ и РАСТЯЖЕНИЕ и другим комбинациям, приводящим к одновременному действию в точке нормальных и касательных напряжений. В этом случае при выполнении расчетов на прочность каждое из этих напряжений предварительно вычисляют по формулам (8,10), как это было рассмотрено выше для соответствующих комбинаций, а затем по расчетным значениям $\boxed{\sigma}$ и $\boxed{\tau}$ определяют *главные нормальные*

напряжения, которые, как следует из теории напряженного состояния, имеют в точке наибольшее значение. А далее для оценки прочности элемента применяют одну из классических теорий прочности, построенных на главных напряжениях.

Рассмотрим данную методику расчета на примере элемента, подвергаемого действию системы сил, приводящих к возникновению в нем одновременно всех видов деформаций — РАСТЯЖЕНИЕ, ИЗГИБ В ДВУХ ПЛОСКОСТЯХ, СДВИГ В ДВУХ НАПРАВЛЕНИЯХ И КРУЧЕНИЕ (рис. 4, а). Определим суммарное напряжение в произвольной точке нагруженного тела, для чего выделим в окрестности точки в системе координат $X-Y-Z$ бесконечно малый элемент и приложим на его гранях напряжения с указанием индекса, соответствующего направлению осей (рис. 4, б). А затем на основании теории напряженного состояния вычислим в точке *главные нормальные напряжения* и, применив III-ю и IV-ю теории прочности, определим **расчетное напряжение**, которое рассматривается как результирующее напряжение в точке и по которому будут выполняться расчеты на прочность для данного случая нагружения:

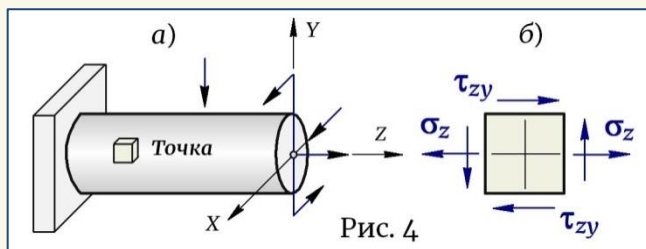


Рис. 4

★ На основании формул (8,10) вычисляем в точке от соответствующих деформаций нормальные σ и касательные τ напряжения;

★ Определяем в точке *главные нормальные напряжения*. При заданной комбинации деформаций точка находится в плоском напряженном состоянии и в ней будут возникать два главных нормальных напряжения, определяемые как:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_z + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \right], \quad (11)$$

где $\sigma_z = \sigma$; $\tau_{zy} = \tau$ — это напряжения, вычисленные ранее по формулам (8,10), а $\sigma_y = 0$. В результате выражение (11) принимает вид —

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{1}{2} \left[\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right], \text{ а главные нормальные напряжения}$$

в точке соответственно равны:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{\max} = \frac{1}{2} \left[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]; \quad \sigma_2 = 0; \\ \sigma_3 &= \sigma_{\min} = \frac{1}{2} \left[\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]; \end{aligned} \quad (12)$$

★ Подставляем значения (12) в III-ю и IV-ю теории прочности –

$$\sigma_{\max}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3; \quad \sigma_{\max}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}$$

и получаем искомое **расчетное напряжение**:

$$\sigma_{\max}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (13)$$

$$\sigma_{\max}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (14)$$

А далее, рассматривая комбинацию деформаций, при которой в точках возникают нормальные и касательные напряжения, при выполнении расчетов достаточным будет вычислить "σ" и "τ" – для простейших деформаций по формулам (2)-(6), либо для их комбинации по формулам (8,10), а затем, подставив эти значения в выражения (13) и (14), произвести для заданного элемента необходимые проверочные и проектировочные расчеты на прочность.

Рассмотрим некоторые случаи сложного сопротивления.

2. Косой и пространственный изгиб

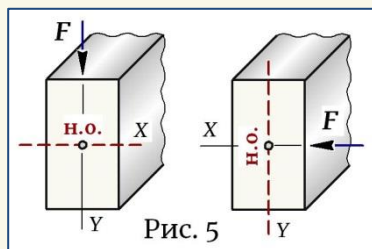
2.1. Плоский изгиб

Для понимания вопроса, что представляет собой косой и пространственный изгиб, чем эти случаи нагружения отличаются от простого изгиба и почему они относятся к сложному сопротивлению, вернемся к понятию **ПЛОСКОГО ИЗГИБА**, который рассматривается как простейшая деформация.

Необходимыми условиями *плоского изгиба* являются (рис. 5):

★ Все силы, изгибающие стержень, должны лежать в одной силовой плоскости;

★ Силовая плоскость должна совпадать с одной из главных плоскостей инерции, а значит, соответственно линия действия силы должна проходить по одной из главных центральных осей сечения (для данного сечения такими осями являются оси симметрии $X-Y$);



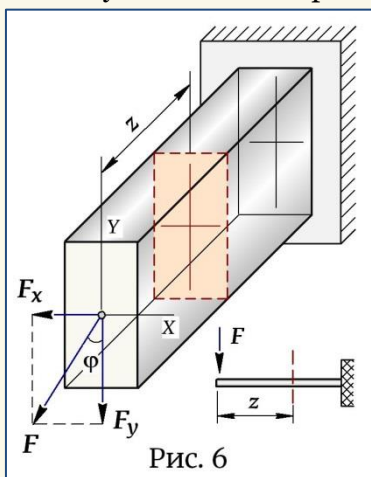
★ Нейтральная ось при *плоском изгибе* является центральной осью и совпадает с одной из главных центральных осей сечения. А так как силовая линия проходит по второй главной центральной оси, значит, при *плоском изгибе* нейтральная ось и силовая линия всегда взаимно перпендикулярны;

★ При *плоском изгибе* прогиб стержня происходит в плоскости действия силы, т.е. силовая плоскость и плоскость деформаций совпадают.

2.2. Косой изгиб

КОСЫМ ИЗГИБОМ называется такой случай нагружения, когда силы, вызывающие изгиб, лежат в одной силовой плоскости, но эта плоскость не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции, а отклонена от главных плоскостей на некоторый угол.

Рассмотрим вопрос на примере консольной балки прямоугольного сечения, нагруженной на конце консоли силой "F" (рис. 6). В заданном случае сила не проходит ни по одной из главных центральных осей сечения $X-Y$, а отклонена от оси Y на угол " φ ". Раскладываем силу по направлению главных осей и получаем две составляющие —



каждая из которых создает плоский изгиб. А это значит, что *косой изгиб*, по сути, представляет собой наложение двух плоских изгибов, возникающих одновременно в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. В этом случае в сечениях элемента будут возникать попереч-

$$\boxed{F_x} = F \sin \varphi; \quad \boxed{F_y} = F \cos \varphi, \quad (15)$$

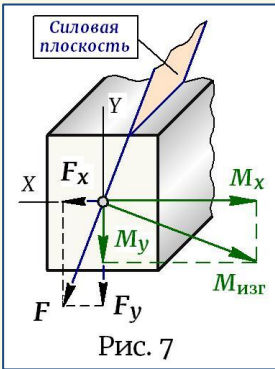
каждая из которых создает плоский изгиб. А это значит, что *косой изгиб*, по сути, представляет собой наложение двух плоских изгибов, возникающих одновременно в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. В этом случае в сечениях элемента будут возникать попереч-

ные силы и изгибающие моменты от обеих деформаций, что, согласно определению, когда в сечении действуют два и более внутренних усилия, называется **СЛОЖНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ**.

Напряжения

Рассмотрим на стержне сечение, расположенное на расстоянии "z" от конца консоли (рис. 6), и определим напряжение в произвольной точке заданного сечения. От действия сил F_x и F_y в сечении возникают поперечные силы и изгибающие моменты, действующие в соответствующих направлениях и плоскостях. Пренебрегая влиянием поперечных сил на прочность элемента, рассматриваем только изгибающие моменты, на основании значений (15) и рис. 6 равные:

$$M_x = F_y z = F \cos \varphi \cdot z; \quad M_y = F_x z = F \sin \varphi \cdot z. \quad (16)$$



Если момент, как это принято в теоретической механике, представить в виде вектора пары сил, перпендикулярного плоскости пары и направленного в сторону, откуда поворот пары виден происходящим против часовой стрелки, то значения (16) являются векторами соответствующих пар сил, направленными по главным осям X-Y (рис. 7). Тогда модуль полного изгибающего момента $M_{изг}$ будет равен векторной сумме моментов (16) —

$$M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{(F \cos \varphi \cdot z)^2 + (F \sin \varphi \cdot z)^2} = Fz, \quad (17)$$

а плоскость его действия будет совпадать с силовой плоскостью.

В результате выражения (16) с учетом (17) принимают вид:

$$M_x = F_y z = M_{изг} \cos \varphi; \quad M_y = F_x z = M_{изг} \sin \varphi. \quad (18)$$

Напряжения в произвольной точке сечения от действия изгибающих моментов M_x и M_y определяются на основании принципа независимости действия сил и с учетом значений (4) и (18) равны:

$$\sigma = \pm \sigma_{M_x} \pm \sigma_{M_y} = \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x = \pm \frac{M_{изг} \cos \varphi}{I_x} y \pm \frac{M_{изг} \sin \varphi}{I_y} x,$$

откуда получаем **формулу для напряжений при косом изгибе:**

$$\sigma = \pm M_{\text{изг}} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y + \frac{\sin \varphi}{I_y} x \right), \quad (19)$$

где φ – угол отклонения силовой линии от главной центральной оси (или силовой плоскости от главной плоскости инерции); I_x и I_y – моменты инерции сечения относительно главных центральных осей; x, y – координаты произвольной точки сечения, в которой определяются напряжения.

Знак (\pm) в формуле (19) для $M_{\text{изг}}$ выбирается в зависимости от того, какое действие изгибающий момент производит на точки первого квадранта сечения, и устанавливается в соответствии с принятым правилом: момент считается положительным, если создает в точках растяжение, и отрицательным – если сжатие. Для этого, рассматривая сечение, главные центральные оси следует направлять таким образом, чтобы линия действия силы располагалась в первом (положительном) квадранте (рис. 8). И тогда, в зависимости от расчетной схемы, если точки первого квадранта испытывают сжатие (рис. 8, а), перед формулой (19) ставится знак «минус», если растяжение (рис. 8, б) – «плюс»:

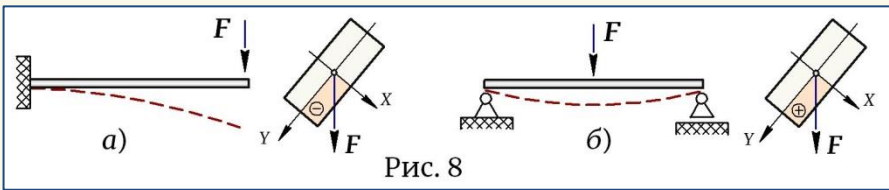


Рис. 8

Для получения верного результата при расчете напряжений следует помнить, что в соответствии с заданным направлением главных осей координаты точки x, y в формулу (19) также следует подставлять со своим знаком. И тогда, при правильно установленном знаке перед формулой, расчетный знак напряжения будет определяться только знаком координат точки, в которой вычисляются напряжения.

Формула для напряжений при *косом изгибе* (19) справедлива для любого случая нагружения стержня кривой нагрузкой.

Положение нейтральной оси

При изгибе стержня волокна на выпуклой стороне растягиваются, на вогнутой – сжимаются, но есть слой волокон, которые искривля-

ются, но длины не изменяют. Этот слой называется **нейтральным слоем**, а линия его пересечения с сечением стержня называется **нейтральной осью**. Нейтральная ось делит сечение на напряжения двух знаков, что влияет на прочность детали, и особенно, это неблагоприятно для материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Оценка прочности элементов производится по опасным точкам сечения — точкам, наиболее удаленным от нейтральной оси, поэтому в расчетах на изгиб определение положения нейтральной оси является важным и необходимым шагом.

При *плоском изгибе* положение нейтральной оси определено, о чем было сказано выше (рис. 5). Она проходит через центр тяжести сечения и перпендикулярна линии силовой плоскости. Определим положение нейтральной оси при *косом изгибе*.

Исходя из того, что на нейтральной оси напряжения равны нулю, на основании выражения (19) получаем **уравнение нейтральной оси при косом изгибе** —

$$\frac{\cos \varphi}{I_x} y_0 + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_0 = 0 \quad , \quad (20)$$

представляющее собой уравнение прямой, проходящей через начало координат, где x_0, y_0 — текущие координаты точки на этой прямой. Следовательно, при *косом изгибе нейтральная ось проходит через центр тяжести*, т.е. является центральной осью сечения.

В уравнении прямой (20) выразим угловой коэффициент, равный тангенсу угла наклона прямой

к оси абсцисс — $k = \operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{y_0}{x_0} \right| = -\frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$, и в ре-

зультате получаем **формулу для определения положения нейтральной оси при косом изгибе** (рис. 9):

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \varphi \quad . \quad (21)$$

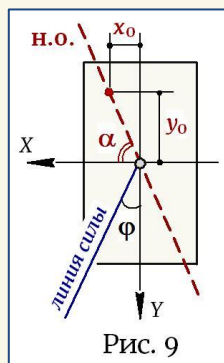


Рис. 9

Анализ формулы (21) позволяет сделать следующие **ВЫВОДЫ**:

1. Так как $I_x \neq I_y$, значит $\rightarrow \operatorname{tg} \alpha \neq \operatorname{tg} \varphi \rightarrow \boxed{\alpha \neq \varphi}$, следовательно, при *косом изгибе нейтральная ось не перпендикулярна линии силовой плоскости*, как это было при *плоском изгибе*. Эта перпендикулярность имеет место лишь в том случае, когда $I_x = I_y$, что соблюда-

ется для таких сечений, как круг, квадрат, правильный многоугольник и некоторых других. В этих сечениях все центральные оси являются главными, а поэтому, для таких стержней создать *косой изгиб* нельзя. В какой бы плоскости ни была приложена нагрузка, для элементов с таким сечением любой изгиб будет являться плоским.

2. Знак «*минус*» показывает, что углы " φ " и " α " откладываются от разноименных осей, но в одном направлении. А это значит, что *при косом изгибе линия силовой плоскости и нейтральная ось проходят через разные пары квадрантов*.

3. При *косом изгибе положение нейтральной оси не зависит от силовой нагрузки*, а зависит только от отклонения силовой плоскости от главной плоскости инерции и от формы сечения.

Расчеты на прочность

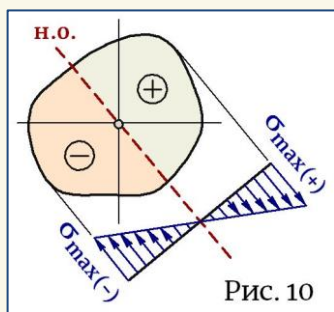
Оценка прочности при *косом изгибе* производится по опасному сечению, где действует наибольший изгибающий момент M_{\max} , и по наиболее нагруженным точкам этого сечения, которыми являются точки, максимально удаленные от нейтральной оси. И тогда на основании формулы (19) *условие прочности при косом изгибе* имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \pm M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_{\max} + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_{\max} \right) \leq [\sigma], \quad (22)$$

где x_{\max}, y_{\max} – координаты наиболее нагруженной точки сечения.

Для стержней, имеющих одинаковую прочность при растяжении и сжатии (например, из пластичных материалов) достаточно в расчетах использовать условие прочности, записанное для одной, наиболее удаленной от нейтральной оси точки. Если материал неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию (хрупкие материалы), необходимо оценку прочности элемента производить по обеим деформациям, рассматривая точки, где возникают наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения, используя для этого в правой части выражения (22) соответствующее значение допускаемых напряжений.

Эпюра распределения напряжений в сечении при *косом изгибе* представлена на рис. 10.



В симметричных сечениях с выступающими острыми углами (прямоугольник, двутавр) наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения равны по величине и действуют в противоположных угловых точках. Они не зависят от положения нейтральной оси и условие прочности (22) для таких сечений можно привести к виду:

$$\sigma_{\max} = \pm M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{W_x} + \frac{\sin \varphi}{W_y} \right) \leq [\sigma], \quad (23)$$

где $W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$; $W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}$ – моменты сопротивления сечения.

На основании уравнений (22) и (23) производятся проверочные и проектировочные расчеты, из которых последние предполагают подбор размеров сечения и подбор нагрузки, определяющей грузоподъемность детали. Для элемента с заданными размерами расчет на несущую способность не вызывает сложностей и заключается в вычислении момента M_{\max} , а затем в определении рабочей нагрузки, безопасной и допустимой для конструкции. Намного более сложным является расчет, связанный с подбором сечения.

Так, для симметричных сечений, преобразовав уравнение (23) –

$$W_x \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} \left(\cos \varphi + \frac{W_x}{W_y} \sin \varphi \right),$$

получают трансцендентное (не алгебраическое) уравнение, в котором искомый параметр находится по обе стороны от знака неравенства, а значит, не может быть выражен алгебраическим путем. Подбор размеров таких сечений производят, задаваясь соотношением W_x/W_y , а затем путем последовательных попыток (методом итераций) подбирают значения W_x и W_y , удовлетворяющие условию прочности.

В случае несимметричных сечений, не имеющих выступающих углов, при использовании условия прочности (22) также применяют метод последовательных приближений, но при каждой новой попытке подбора сечения расчет необходимо повторять — определять положение нейтральной оси и координаты наиболее удаленной от нее точки.

Деформации

Вернемся к примеру консольной балки (рис. 6) и определим величину и направление полного прогиба конца консоли.

Так как *косой изгиб* представляет собой сочетание двух плоских изгибов, то перемещения при *косом изгибе* могут определяться по тем же формулам и теми же методами, что и при *плоском изгибе*.

Разложим силу "F" на главные оси X – Y и по направлению составляющих силы найдем прогибы (рис. 11), которые для данной расчетной схемы и с учетом значений (15) определяются как:

$$f = \frac{F\ell^3}{3EI_{\text{н.о.}}} \rightarrow \begin{cases} f_x = \frac{F_x\ell^3}{3EI_y} = \frac{F \sin\varphi\ell^3}{3EI_y}; \\ f_y = \frac{F_y\ell^3}{3EI_x} = \frac{F \cos\varphi\ell^3}{3EI_x}. \end{cases} \quad (24)$$

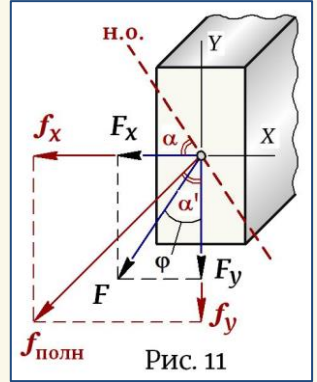


Рис. 11

Теперь на основании значений (24) вычисляем полный прогиб сечения, который равен геометрической сумме деформаций от плоских изгибов, и записываем *условие жесткости при косом изгибе*:

$$f_{\text{полн}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \leq [f]. \quad (25)$$

Направление полного прогиба определяем тригонометрически как

$$\text{tg}\alpha' = f_x / f_y \quad \text{и на основании значений (24) получаем:}$$

$$\text{tg}\alpha' = \frac{I_x}{I_y} \text{tg}\varphi. \quad (26)$$

Анализ формулы (26), устанавливающей *направление прогиба при косом изгибе*, показывает:

1. Так как $I_x \neq I_y$, значит, $\text{tg}\alpha' \neq \text{tg}\varphi \rightarrow \alpha' \neq \varphi$, следовательно, *при косом изгибе прогиб стержня происходит не по направлению действия силы, т.е. силовая плоскость и плоскость деформаций не совпадают*, как это было при *плоском изгибе*. По этой причине изгиб называется *косым изгибом*.

2. Из сравнения формул (26) и (21) видно, что $\alpha' = \alpha$, а это значит, что *при косом изгибе прогиб сечений происходит в направлении, перпендикулярном нейтральной оси*. И поскольку для стержня постоянного сечения нейтральная ось во всех сечениях занимает одинаковое положение (21), прогиб сечений происходит в одном направлении, а это значит, что *при косом изгибе изогнутая ось является*

плоской кривой, но плоскость кривизны не совпадает с плоскостью действия сил. И если при плоском изгибе перемещения происходят в силовой плоскости, независимо от ее жесткости, то при *косом изгибе* элемент «предпочитает» изгибаться в плоскости, жесткость которой на изгиб меньше. Отсюда следует, что плоскость деформаций при *косом изгибе* является *плоскостью наименьшей жесткости*.

Сравнительный анализ напряжений и деформаций, возникающих при плоском и косом изгибе показывает, что *косой изгиб* является более опасным для прочности и жесткости элемента.

Элементы, работающие на изгиб, проектируются преимущественно под вертикальную нагрузку, приложенную в *плоскости наибольшей жесткости*. Такой плоскостью является одна из главных плоскостей инерции, проходящая перпендикулярно к оси сечения с I_{\max} . В этом случае возникает плоский изгиб и максимальные напряжения равны —

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}. \text{ Если имеет место отклонение расчетной}$$

нагрузки от вертикали (рис. 6) или отклонение от вертикали положения сечения (рис. 8), возникает *косой изгиб* и максимальные напряжения в том же элементе, вызванные таким же изгибающим моментом, согласно (23) будут равны —

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \left(\cos \varphi + \frac{W_x}{W_y} \sin \varphi \right).$$

Сравнение формул показывает, что при прочих равных условиях напряжения при *косом изгибе* больше, так как множитель в скобках больше единицы. Даже при очень небольшом (на $1^\circ \dots 2^\circ$) отклонении силовой плоскости, напряжения возрастают в 1,2...1,5 раза и их увеличение будет тем больше, чем бóльшим будет отношение W_x/W_y .

Поэтому элементы, у которых моменты инерции сильно отличаются друг от друга — тонкие высокие прямоугольники, двутавры и т.п. — будут хорошо работать при плоском изгибе, т.е. изгибе в плоскости наибольшей жесткости, но при *косом изгибе* являются очень уязвимыми и мало прочными. Поэтому при разработке конструкции, когда возникает техническая сложность в обеспечении полного совпадения плоскости внешних сил и плоскости наибольшей жесткости, применение элементов с указанными сечениями следует избегать.

Однако при *косом изгибе* помимо снижения прочности еще бóльшую опасность представляет потеря жесткости.

Если в сечении принять ось X как ось с $I_X = I_{\max}$, тогда $I_X > I_Y$ и согласно формуле (26) $\rightarrow \boxed{\alpha' > \varphi}$, а это значит, что угол отклонения плоскости кривизны от плоскости наибольшей жесткости больше угла отклонения силовой плоскости, и это разница углов будет тем больше, чем больше отношение I_X/I_Y . Поэтому для узких и высоких сечений, имеющих большую величину отношения моментов инерции, даже несущественное отклонение силовой плоскости от плоскости наибольшей жесткости приведет к значительному отклонению плоскости деформаций. При этом составляющая перемещений в плоскости наибольшей жесткости практически не изменится, но составляющая прогиба в перпендикулярном направлении, не предусмотренная проектом, может быть весьма значительной. Ее появление, а также увеличение полного прогиба (25) в целом, способно привести к потере жесткости и нарушению работоспособности конструкции.

2.3. Пространственный и сложный изгиб

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ИЗГИБ создается внешними силами, одновременно действующими в обеих главных плоскостях инерции, но приложенными в разных сечениях. В этом случае прогиб сечений происходит в двух и более плоскостях и изогнутая ось стержня представляет собой пространственную кривую.

Рассмотрим вопрос на примере консольной балки прямоугольного сечения, нагруженной системой сил, одновременно действующих в двух главных плоскостях инерции, но приложенных в разных сечениях (рис. 12). И если при косом изгибе внутренние усилия не являются независимыми, так как вызываются одними и теми же нагрузками, действующими в единой силовой плоскости, то при *пространственном изгибе* поперечные силы и изгибающие моменты определяются разными нагрузками, они не зависят друг от друга и имеют различные законы изменения по длине балки. Пренебрегая влиянием поперечных сил, рассматриваем только изгибающие моменты M_X и M_Y . При этом

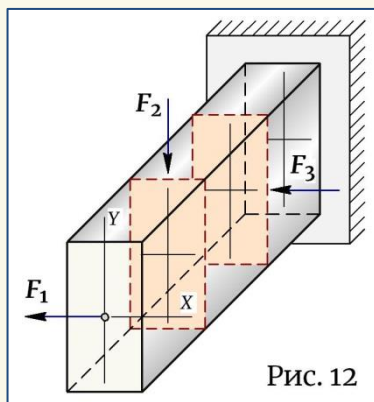


Рис. 12

необходимо понимать, что установление опасного сечения не является однозначным, так как в зависимости от схемы нагружения моменты могут достигать максимальных значений в разных сечениях, а поэтому опасным может оказаться не одно, а два сечения, и оценку прочности следует производить по двум сечениям.

Напряжения

Напряжение в произвольной точке сечения при *пространственной изгибе* определяется по принципу независимости сил —

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x, \quad (27)$$

где M_x, M_y — изгибающие моменты в сечении; I_x и I_y — моменты инерции сечения относительно главных центральных осей; x, y — координаты точки, в которой определяются напряжения. Знак перед слагаемыми устанавливается в зависимости от того, какое действие изгибающий момент оказывает на данную точку: если растяжение — перед слагаемым ставится знак «плюс», если сжатие — «минус». Координаты точки подставляются по абсолютному значению.

Примечание.

В выражении (27) оба слагаемых можно просто записать с «плюсом», но тогда использовать другое правило — знак изгибающего момента устанавливается в зависимости от того, какое действие он оказывает на точки первого квадранта сечения: если растяжение — момент положительный, если сжатие — отрицательный. Но в этом случае, поскольку теперь в сечении задано направление координатных осей, координаты точки в формулу (27) следует подставлять со своим знаком. Результат расчета по обоим правилам и полученный знак напряжений будет одинаковым.

Положение нейтральной оси

Положение нейтральной оси в сечении определяется из условия, что напряжения на нейтральном слое равны нулю. Поэтому на основании выражения (27) получаем **уравнение нейтральной оси при пространственной изгибе** —

$$\frac{M_x}{I_x} y_0 + \frac{M_y}{I_y} x_0 = 0, \quad (28)$$

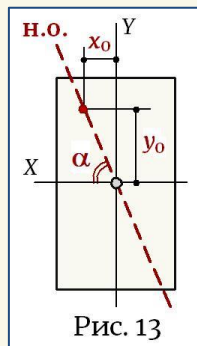
где x_0, y_0 — текущие координаты точки на этой прямой.

Уравнение (28) представляет собой уравнение прямой, проходящей через начало координат, следовательно, при пространственном изгибе *нейтральная ось проходит через центр тяжести*, т.е. является *центральной осью* (рис. 13).

Положение нейтральной оси в сечении определяется угловым коэффициентом, равным $k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_0}{x_0}$, откуда на основании уравнения (28) получаем **формулу для определения положения нейтральной оси при пространственном изгибе**:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} . \quad (29)$$

Анализ формулы (29) показывает, что так как при *пространственном изгибе* отношение изгибающих моментов в сечениях не является величиной постоянной ($M_y/M_x \neq \text{const}$), угол наклона нейтральной оси по длине стержня также не будет постоянным и будет изменяться в соответствии с изменением соотношения изгибающих моментов. А это значит, что при *пространственном изгибе* *нейтральная ось в сечениях занимает различное положение*.



Расчеты на прочность

Расчеты на прочность при *пространственном изгибе* выполняются по опасным сечениям и опасным точкам в этих сечениях – точкам, наиболее удаленным от нейтральной оси. **Условием прочности при пространственном изгибе** для элементов произвольного сечения является:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} + \frac{M_y}{I_y} x_{\max} \leq [\sigma] , \quad (30)$$

где x_{\max}, y_{\max} – координаты наиболее нагруженной точки, а для сечений с двумя осями симметрии и с выступающими острыми углами условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] . \quad (31)$$

По уравнениям (30) и (31) выполняются проверочные и проекторочные расчеты. Подбор сечений при *пространственном изгибе* является сложной задачей и производится методом подбора, как это было рассмотрено выше для косоого изгиба.

Деформации

При *пространственном изгибе* каждое сечение имеет свою величину и направление прогиба, в результате чего перемещения происходят в разных плоскостях и изогнутая ось стержня принимает форму пространственной кривой. Единого уравнения, описывающего ее форму не существует, поэтому расчеты на жесткость производятся для конкретного сечения (или сечений) и, чтобы определить величину и направление полного прогиба, здесь так же, как и при косом изгибе, определяются перемещения f_x и f_y в направлении главных осей инерции, а затем полный прогиб сечения вычисляется как геометрическая сумма деформаций от плоских изгибов:

$$f_{\text{полн}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}. \quad (32)$$

Направление полного прогиба вычисляется тригонометрически по значениям составляющих как $\text{tg}\alpha' = f_x / f_y$, при этом направление прогиба не перпендикулярно нейтральной оси сечения.

Особым случаем является *пространственный изгиб стержня круглого поперечного сечения* (сплошного или кольцевого). Под действием сил, действующих в различных направлениях, изгиб стержня будет происходить в разных плоскостях и его изогнутая ось также будет представлять собой пространственную кривую. Но даже при таком изгибе в каждом поперечном сечении силовая линия и нейтральная ось будут оставаться взаимно перпендикулярными, как это имеет место при плоском изгибе. Примером такого изгиба являются валы зубчатых и ременных передач, испытывающие изгиб в двух и более плоскостях. Опасное сечение в таких элементах устанавливают по результирующему изгибающему моменту, определяемому путем геометрического суммирования моментов в разных плоскостях, а затем дальнейший расчет на прочность выполняют как при обычном плоском изгибе. Таким же образом производится расчет и для стержней с сечением в форме квадрата или любого правильного многоугольника, у которых все центральные оси являются главными и все центральные моменты инерции равны между собой.

При обозначении видов изгиба иногда рассматривают вариант, называемый **СЛОЖНЫМ ИЗГИБОМ**, когда внешние силы и моменты одновременно действуют в разных плоскостях, совпадающих и несовпадающих с главными плоскостями инерции, и приложены в разных сечениях (рис. 14). Такой изгиб, по сути, представляет собой сочетание косога и пространственного изгибов, рассмотренных выше. В этом случае силовую нагрузку, действующую в произвольных силовых плоскостях, раскладывают на составляющие по главным плоскостям инерции и приводят *сложный изгиб* к двум плоским изгибам. А далее расчет выполняют подобно тому, как это было сделано при косом и пространственном изгибах.

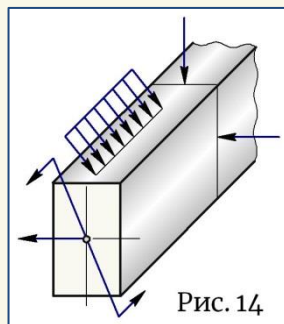


Рис. 14

3. Изгиб с растяжением (сжатием)

ИЗГИБ С РАСТЯЖЕНИЕМ (СЖАТИЕМ) – это такой вид нагружения, при котором на стержень действуют продольные и поперечные нагрузки, пересекающие ось стержня.

В этом случае в сечениях возникают пять внутренних усилий: продольная сила N , поперечные силы Q_x и Q_y и изгибающие моменты M_x и M_y . Пренебрегая влиянием поперечных сил, расчет на прочность производится только по нормальным напряжениям " σ ", обусловленным действием продольной силы N и изгибающих моментов M_x и M_y (7), действующих в главных плоскостях инерции. В этом случае напряженное состояние в точках принимается как одноосное, а поэтому для определения напряжений используется принцип независимости действия сил:

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x, \quad (33)$$

где знак слагаемых устанавливается по физическому воздействию на точку: если растяжение – «плюс», если сжатие – «минус».

Расчеты на прочность выполняются по опасному сечению, за которое принимается сечение, где все внутренние усилия достигают мак-

симула. Но если N , M_x и M_y имеют наибольшие значения в разных сечениях, рассматриваются несколько сечений и устанавливается, в каком из них комбинация внутренних сил является наиболее опасной.

Положение нейтральной оси определяется из условия, что напряжения в ее точках равны нулю, поэтому на основании (33) уравнение нейтральной оси при *изгибе с растяжением (сжатием)* имеет вид:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y_0 + \frac{M_y}{I_y} x_0 = 0, \quad (34)$$

где x_0, y_0 – текущие координаты точек на нейтральной оси. Из уравнении (34) следует, что при данной комбинации деформаций нейтральная ось является прямой, так как координаты точек на ней связаны линейно, но она не проходит через центр тяжести сечения. Ее положение определяется по отрезкам, которые она отсекает на главных осях $X - Y$ (рис. 15). Для определения этих отрезков рассматриваем на нейтральной оси точки ее пересечения с главными осями, имеющие соответственно координаты –

$$"B" (x_0 = a_x, y_0 = 0); "C" (x_0 = 0, y_0 = a_y),$$

и, подставляя поочередно эти значения в уравнение (34), получаем:

$$a_x = -\frac{I_y}{A} \cdot \frac{N}{M_y}; a_y = -\frac{I_x}{A} \cdot \frac{N}{M_x}. \quad (35)$$

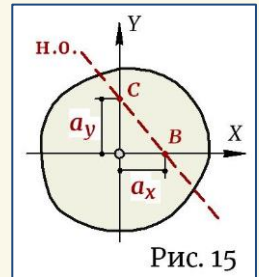


Рис. 15

Расчеты на прочность производятся по наиболее нагруженным точкам. От действия продольной силы напряжения во всех точках одинаковы, а от изгиба наибольшие напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси. Поэтому для опасных точек **условие прочности при изгибе с растяжением (сжатием)** имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y_{\max} + \frac{M_y}{I_y} x_{\max} \leq [\sigma], \quad (36)$$

а для элементов с симметричными, наиболее часто используемыми, сечениями, условием прочности является уравнение (9).

На основании условий прочности (36) и (9) выполняются проверочные и проектировочные расчеты. При подборе размеров сечения на первом этапе расчета продольной силой пренебрегают и рассмат-

ривают для элемента только изгиб в одной или двух плоскостях. Подбор сечения производят, задаваясь W_x/W_y , и путем последовательных приближений подбирают значения W_x и W_y , удовлетворяющие условию прочности. На втором этапе расчета выполняют окончательную проверку с учетом продольной нагрузки и, при необходимости, производят корректировку размеров сечения.

! Относительно представленных выше расчетов необходимо сделать важное замечание.

Рассмотренная методика применима для любых стержней, работающих на **изгиб и растяжение**, а для комбинации **изгиба и сжатия** ее можно использовать только для коротких стержней большой жесткости. Гибкие стержни под действием продольной силы способны терять устойчивость и изгибаться, что приводит к появлению дополнительных изгибающих моментов, связанных с продольным изгибом. Для таких стержней необходимо учитывать влияние продольной силы и в расчете рассматривать полные изгибающие моменты, возникающие как суммарный результат от поперечного и продольного изгибов $\rightarrow (M_x + Nf_y)$, $(M_y + Nf_x)$, где f_x и f_y – прогибы в главных плоскостях, являющиеся следствием совместного действия моментов M_x и M_y и изгиба от продольной силы N . Таким образом, комбинация поперечного **изгиба и сжатия**, по сути, является продольно-поперечным изгибом, причем в двух плоскостях, поэтому в этих расчетах принцип независимости действия сил неприменим.

4. Внецентренное растяжение (сжатие)

ВНЕЦЕНТРЕННЫМ РАСТЯЖЕНИЕМ (СЖАТИЕМ) называется случай, когда элемент подвергается действию продольных сил (растяжению или сжатию), но равнодействующая этих сил не совпадает с геометрической осью стержня, т.е. не проходит через центры тяжести сечений. В результате происходит растяжение (или сжатие) стержня и изгиб в одной или двух плоскостях.

Точка пересечения равнодействующей продольных сил " F " с поперечным сечением стержня называется **полюсом силы**, имеющим координатами в главных центральных осях " $X_F - Y_F$ " (рис. 16). **Внецентренное растяжение (сжатие)** является частным случаем рассмотренной выше комбинации изгиба с растяжением (сжатием), а по-

этому при исследовании данного случая будут использованы те же методы и подходы.

Чтобы определить действие нагрузки на элемент и установить, какие деформации в нем возникают, необходимо силу перенести к центру тяжести сечения. При параллельном переносе сила, согласно правилам теоретической механики, переносится как «сила и момент», а поэтому при *внецентренном растяжении (сжатии)* во всех сечениях будет действовать продольная сила $N = F$ и изгибающий момент, равный $M_{изг} = Fe$, где e – смещение полюса силы от центра тяжести сечения, называемое «эксцентриситетом» (рис. 17). Разложив момент по главным плоскостям инерции, получаем в сечении три внутренних усилия:

$$\boxed{N} = F; \quad \boxed{M_x} = Fy_F; \quad \boxed{M_y} = Fx_F, \quad (37)$$

величина и знак которых не зависят от положения сечения и во всех сечениях одинаковы, т.е. при внецентренном растяжении (сжатии) все сечения являются равноопасными.

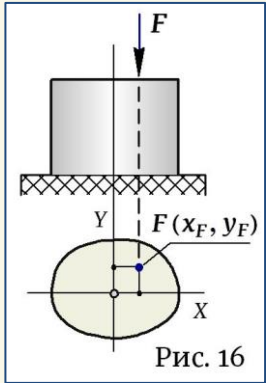


Рис. 16

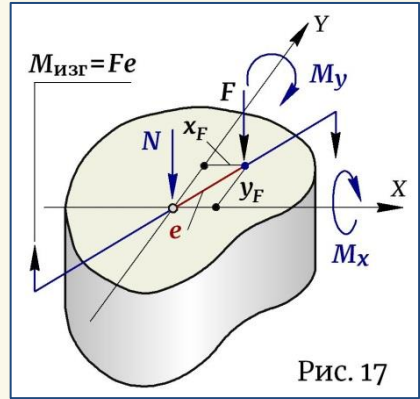


Рис. 17

Напряжения

От действия продольной силы N и моментов M_x и M_y в точках возникают напряжения " σ " (7), а значит, все точки находятся в линейном напряженном состоянии и это позволяет для определения напряжений использовать принципа независимости сил –

$$\sigma = \pm \sigma_N \pm \sigma_{M_x} \pm \sigma_{M_y} = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x,$$

откуда с учетом (37) получаем **формулу для определения напряжений при внецентренном растяжении (сжатии)**:

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{Fy_F}{I_x} y \pm \frac{Fx_F}{I_y} x = \pm \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y}{I_x/A} + \frac{x_F x}{I_y/A} \right) = \left\| \begin{array}{l} \frac{I_x}{A} = i_x^2 \\ \frac{I_y}{A} = i_y^2 \end{array} \right\| \rightarrow$$

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y}{i_x^2} + \frac{x_F x}{i_y^2} \right), \quad (38)$$

где F – внецентренно приложенная сила; A – площадь поперечного сечения; x_F, y_F, x, y – соответственно координаты полюса силы и координаты точки, в которой определяются напряжения, в главных центральных осях; i_x, i_y – главные радиусы инерции. Для заданной системы осей координаты полюса силы и координаты рассматриваемой точки подставляются в формулу со своим знаком, а знак (\pm) перед формулой принимается в зависимости от действия внецентренной силы: при растяжении – «плюс», при сжатии – «минус».

Из формулы (38) видно, что напряжения в центре тяжести сечения, имеющем координаты $x = 0$ и $y = 0$, не зависят от точки приложения силы и имеют постоянное значение, равное F/A .

Положение нейтральной оси

Исходя из условия, что на нейтральной оси напряжения равны нулю, на основании формулы (38) получаем **уравнение нейтральной оси при внецентренном растяжении (сжатии)**:

$$1 + \frac{x_F}{i_y^2} x_0 + \frac{y_F}{i_x^2} y_0 = 0, \quad (39)$$

где x_0, y_0 – текущие координаты точки на нейтральной оси.

Уравнение (39) является линейной функцией со свободным членом, не равным нулю, а это значит, что при *внецентренном растяжении (сжатии)* *нейтральная ось является прямой, не проходящей через центр тяжести сечения*, и ее положение определяется по отрезкам " $x_H - y_H$ ", которые она отсекает на главных осях.

Рассмотрим точки пересечения нейтральной оси с главными осями, имеющие соответственно координаты (рис. 18) –

$$"B" (x_0 = x_H, y_0 = 0); "C" (x_0 = 0, y_0 = y_H),$$

и, подставляя поочередно эти значения в уравнение (39), получаем **формулы для определения положения нейтральной оси при внецентренном растяжении (сжатии)**:

$$\boxed{x_H = -\frac{iy^2}{x_F}; y_H = -\frac{ix^2}{y_F}}, \quad (40)$$

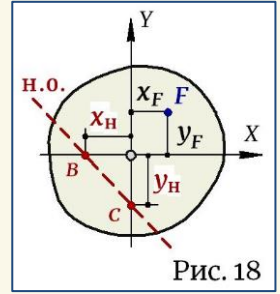


Рис. 18

где знак «минус» говорит о том, что в системе главных осей отрезки " $x_H - x_F$ " и " $y_H - y_F$ " имеют разные знаки, а это значит, что при *внецентренном растяжении (сжатии)* *нейтральная ось и полюс силы в сечении всегда лежат по разные стороны от центра тяжести.*

На практике при *внецентренном нагружении* элементов наиболее часто встречаются случаи, когда полюс силы попадает на одну из главных осей сечения. Такое нагружение рассматривается как **ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ**, и тогда для полюса силы, например, с координатами " F " ($x_F, y_F = 0$) положение нейтральной оси, согласно выражениям (40), определяется отрезками (рис. 19) –

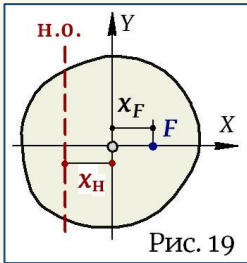


Рис. 19

$$\boxed{x_H} = -iy^2/x_F; \quad \boxed{y_H} = -ix^2/y_F = \infty.$$

А это значит, что при *внецентренном растяжении (сжатии)*, если полюс силы лежит на одной из главных осей сечения, *нейтральная ось пройдет параллельно другой главной оси, но по другую сторону от центра тяжести.*

Координаты полюса силы связаны с отрезками, которые нейтральная ось отсекает на главных осях, соотношениями (40), а значит, любое изменение этих значений влечет за собой изменение связанной с ним величины. Определим траекторию движения точки приложения силы при параллельном перемещении нейтральной оси.

Из соотношений (40) выразим координаты полюса силы и возьмем их отношение: $\boxed{x_F = -iy^2/x_H; y_F = -ix^2/y_H} \rightarrow$

$$\frac{y_F}{x_F} = \frac{ix^2}{iy^2} \cdot \frac{x_H}{y_H} \rightarrow y_F = \left(\frac{ix^2}{iy^2} \cdot \frac{x_H}{y_H} \right) x_F, \quad (41)$$

где для заданного сечения $\boxed{ix^2/iy^2 = \text{const}}$ и отношение x_H/y_H при параллельном перемещении нейтральной оси также является величиной постоянной – $\boxed{x_H/y_H = \text{tg}\alpha = \text{const} \rightarrow \alpha = \text{const}}$ (рис. 20, а). А

это значит, что уравнение (41) является уравнением траектории дви-

жения полюса силы при параллельном перемещении нейтральной оси. И так как координаты полюса силы здесь связаны линейно, а свободный член уравнения равен нулю, *силовая линия* представляет собой ПРЯМУЮ, проходящую через начало координат, а выражение в скобках является угловым коэффициентом этой прямой. Таким образом, при параллельном перемещении нейтральной оси точка приложения силы перемещается по ПРЯМОЙ, проходящей через центр тяжести сечения (рис. 20, а).

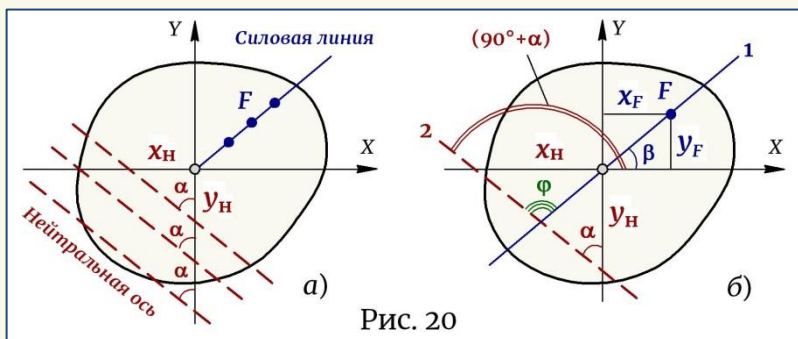


Рис. 20

Угол между *силовой линией* и *нейтральной осью* определяется по известной из математики формуле:

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}, \quad (42)$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты уравнений соответствующих прямых, равные (рис. 20, б): $k_1 = \operatorname{tg}\beta$; $k_2 = \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Примечание.

Здесь следует помнить правила, принятые в математике: угол наклона прямой рассматривается от положительного направления оси абсцисс, а угол между прямыми отсчитывается от прямой 1 к прямой 2, имеющих соответствующие угловые коэффициенты, против часовой стрелки.

На основании рис. 20, б и значений (40) определяются угловые коэффициенты k_1 и k_2 –

$$\boxed{k_1} = \operatorname{tg}\beta = \frac{y_F}{x_F}; \quad \boxed{k_2} = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{y_H}{x_H} = \left\| \begin{array}{l} x_H = -iy^2/x_F \\ y_H = -ix^2/y_F \end{array} \right\| = -\frac{ix^2}{iy^2} \cdot \frac{x_F}{y_F},$$

затем полученные значения подставляются в формулу (42) и вычисляется угол между силовой линией и нейтральной осью сечения.

Примечание.

При внецентренном растяжении-сжатии, независимо от формы сечения, угловые коэффициенты уравнений силовой линии и нейтральной оси всегда будут иметь разные знаки, так как одна из этих прямых составляет с положительным направлением оси X острый угол, а другая – тупой. Знак коэффициентов определяется знаком координат силы и знаком отрезков, отсекаемых нейтральной осью на главных осях, связанных с положением полюса силы формулами (4.0):

$$- \text{ в уравнении силовой линии (4.1) } - Y_F = \left(\frac{i_X^2}{i_Y^2} \cdot \frac{X_H}{Y_H} \right) X_F \rightarrow \boxed{k_1 = \frac{i_X^2}{i_Y^2} \cdot \frac{X_H}{Y_H}} ;$$

– в уравнении нейтральной оси (3.9) –

$$1 + \frac{X_F}{i_Y^2} X_0 + \frac{Y_F}{i_X^2} Y_0 = 0 \rightarrow Y_0 = -\frac{i_X^2}{i_Y^2} \cdot \frac{X_F}{Y_F} X_0 - \frac{i_X^2}{Y_F} \rightarrow \boxed{k_2 = -\frac{i_X^2}{i_Y^2} \cdot \frac{X_F}{Y_F}} ,$$

откуда видно –

★ если координаты $(X_F - Y_F)$ имеют одинаковые знаки, значит, согласно (4.0), отрезки $(X_H - Y_H)$ также имеют одинаковые знаки. И тогда: $k_1 > 0$ (силовая линия образует с осью X острый угол), $k_2 < 0$ (нейтральная ось образует с осью X тупой угол);

★ если $(X_F - Y_F)$ имеют разные знаки, согласно (4.0) – $(X_H - Y_H)$ также имеют разные знаки. И тогда: $k_1 < 0$ (силовая линия образует с осью X тупой угол), $k_2 > 0$ (нейтральная ось образует с осью X острый угол).

Угол " φ " между силовой линией и нейтральной осью, вычисляемый через тангенс по формуле (4.2), в зависимости от знака угловых коэффициентов и их величины, также может получиться положительным или отрицательным. В этом случае результат расчета угла следует принимать по модулю, так как важным является численное значение угла, но при этом учитывать, что положительный тангенс угла определяет острый угол, а отрицательный – тупой.

Расчеты на прочность

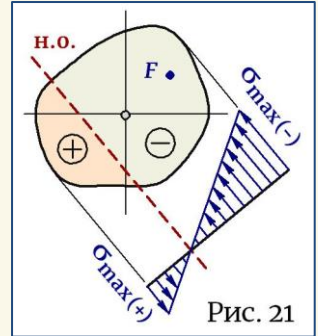
Как было сказано выше, при внецентренном растяжении (сжатии) все сечения являются равноопасными, так как независимо от положения сечения в них действуют одинаковые внутренние усилия. Однако поскольку здесь возникает изгиб, напряжения в точках сечений будут неодинаковыми и опасными являются точки, максимально удаленные от нейтральной оси. Эпюра распределения напряжений представлена на рис. 21, а условие прочности при внецентренном растяжении (сжатии) имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_{\max}}{i_y^2} + \frac{y_F y_{\max}}{i_x^2} \right) \leq [\sigma], \quad (43)$$

где x_{\max} , y_{\max} – координаты точки сечения, наиболее удаленной от нейтральной оси.

Для поперечных сечений с выступающими углами, в которых обе главные оси являются осями симметрии (прямоугольное, коробчатое, двутавровое и др.), опасные точки расположены в углах этих сечений и их можно найти без определения положения нейтральной оси. Для таких сечений **условие прочности при внецентренном растяжении (сжатии)** используется в виде (8) –

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$



Для материалов, имеющих одинаковую прочность при растяжении и сжатии, расчеты выполняются только для одной точки, наиболее удаленной от нейтральной оси. Для хрупких материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, следует рассматривать точки, наиболее удаленные и в области растяжения, и в области сжатия и проверку прочности производить для обеих деформаций, подставляя в условие прочности (43) соответствующее значение $[\sigma]$.

Ядро сечения

При любом виде изгиба – плоский изгиб, косой, пространственный, изгиб при внецентренном осевом нагружении и прочие – в сечении появляется нейтральная ось, которая делит сечение на напряжения разных знаков. Для любых материалов наличие двух знаков в сечении является неблагоприятным и влияет на прочность элемента, но особенно чувствительными в этой ситуации являются хрупкие материалы, неодинаково сопротивляющиеся растяжению и сжатию. Проектирование элементов из хрупких материалов, работающих на изгиб, требует особого подхода при конструировании и тщательного анализа возможности работы данной детали.

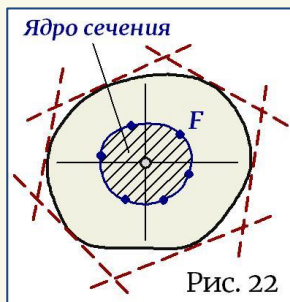
Однако при плоском, косом, пространственном и сложном изгибах избежать пересечения нейтральной осью сечения нельзя, так как она

проходит через центр тяжести сечения и изменить можно только угол ее положения, задавая соответствующие параметры нагружения.

Более благоприятной является ситуация при *внецентренном растяжении (сжатии)*. Здесь положение нейтральной оси, согласно соотношениям (40), зависит от координат внецентренно приложенной силы, и следовательно, изменяя координаты точки приложения силы, нейтральной осью можно «управлять» — ее можно двигать, задавая необходимое положение, и даже полностью вывести за пределы сечения, создав тем самым в сечении напряжения одного знака. Это проиллюстрировано на рис. 20, а, где показано, что движение полюса силы по прямой, проходящей через центр тяжести сечения, вызывает параллельное перемещение нейтральной оси.

Чтобы в сечении возникали напряжения одного знака, достаточно, чтобы нейтральная ось проходила по касательной к сечению, не пересекая его. Поэтому рассмотрим задачу в обратном порядке: обкатывая сечение по контуру нейтральной осью, что предполагает ее положение заданным (рис. 22), на основании формул (40) определяем координаты полюса силы, соответствующие данному ее положению:

$$x_F = -\frac{iy^2}{x_H}; \quad y_F = -\frac{ix^2}{y_H}. \quad (44)$$



Вычислив координаты точек приложения силы, соединяем их линией и получаем некоторую ограниченную часть сечения, которая называется *«ядро сечения»*, а выражения (44) являются *формулами для построения ядра сечения*.

ЯДРО СЕЧЕНИЯ — это замкнутая область вокруг центра тяжести, которая обладает следующим свойством: если силу прикладывать внутри ядра или по его контуру, нейтральная ось выйдет за пределы сечения, создав в сечении напряжения одного знака.

Внецентренные нагрузки часто возникают в стойках, колоннах, других опорных элементах, выполненных из хрупких материалов, например, чугуна, бетона, камня, кирпича, которые имеют достаточно высокую прочность на сжатие, но плохо работают на растяжение. Поэтому эти конструкции следует проектировать таким образом, чтобы в них не возникали растягивающие напряжения. Для этого сжимающая сила должна быть приложена строго в центре тяжести, но если конструктивно осуществить это невозможно, она должна быть приложена в

пределах ядра сечения или по его контуру, что обеспечит возникновение в сечении только сжимающих напряжений.

Форма ядра сечения определяется формой сечения. Так, например, в круглом сечении диаметром $"d"$ ядро сечения также имеет форму круга диаметром $"d/4"$, в правильном шестиугольнике – форму правильного шестиугольника, в прямоугольном или двутавровом сечении – форму ромба, в других сечениях, имеющих контур, состоящий из прямолинейных и криволинейных участков, ядро сечения имеет более сложную форму.

При многоугольной форме сечения при «обкатывании» контура нейтральной осью путем последовательного ее совмещения со сторонами, в угловых точках, где происходит переход от одной стороны к другой, возникает вращение нейтральной оси вокруг вершины, разделяющей эти стороны, и каждое ее положение определяет соответствующие координаты полюса силы. Уравнение нейтральной оси (39)

при *внецентренном растяжении (сжатии)* –
$$1 + \frac{X_F}{iy^2} x_0 + \frac{y_F}{ix^2} y_0 = 0$$

является уравнением ПРЯМОЙ, где текущие координаты x_0, y_0 точек на нейтральной оси связаны линейно. Координаты угловой точки, где происходит вращение нейтральной оси, постоянны, и если принять их как заданные, а переменными считать координаты точки приложения силы X_F, y_F , то уравнение (39) можно представить в виде –

$$1 + \frac{x_0}{iy^2} X_F + \frac{y_0}{ix^2} y_F = 0$$

. Это уравнение также является уравнением

ПРЯМОЙ, так как здесь координаты полюса силы X_F, y_F тоже связаны линейно. А это значит, что при вращении нейтральной оси около фиксированной точки сечения точка приложения силы перемещается по ПРЯМОЙ (рис. 23). Поэтому ядро сечения в многоугольных сечениях всегда состоит из прямолинейных участков. Справедливо и обратное утверждение: перемещение полюса силы по прямой связано с вращением нейтральной оси около постоянной точки.

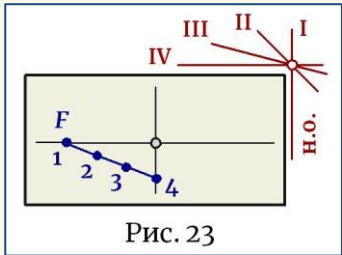


Рис. 23

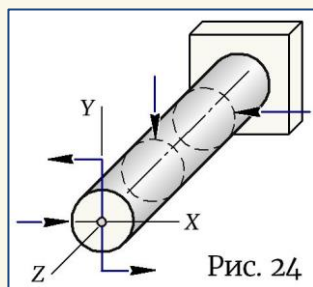
5. Кручение с изгибом

Кручение с изгибом является одной из самых распространенных комбинаций деформаций, которой подвергаются элементы машин, механизмов и строительных сооружений. На *кручение с изгибом* работают валы редукторов и коробок передач, оси колес, стойки и мосты автомобилей, коленчатые валы двигателей, элементы пространственных конструкций. При этом часто имеет место изгиб в двух и более плоскостях, как например, на валах зубчатых и ременных передач, где помимо рабочих нагрузок от давления колес или натяжения ремней вал подвергается вертикальному изгибу от веса этих деталей, а также собственного веса. В элементах авиационных конструкций дополнительный изгиб возникает от аэродинамических нагрузок, действующих на крыло и оперение самолета, и т.д.

Стержни круглого сечения

Рассмотрим случай *кручения с изгибом* элемента круглого поперечного сечения (рис. 24). При таком нагружении в сечениях действуют

пять внутренних усилий — $Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{кр}$, а значит, в точках сечения возникают нормальные и касательные напряжения, причем последние будут являться результатом действия поперечных сил и крутящего момента. Пренебрегая влиянием поперечных сил, расчет выполняем только по нормальным напряжениям от изгиба $\sigma_{изг}$ и касательным напряжениям от кручения $\tau_{кр}$.



В круглых сечениях (сплошных и кольцевых), где все центральные оси являются главными, создать косо́й изгиб невозможно, а поэтому при любом положении силовой плоскости возникает *плоский изгиб*. Если такой элемент одновременно подвергается изгибу в разных силовых плоскостях, возникает пространственный изгиб и изогнутая ось стержня, в отличие от плоского изгиба, принимает форму пространственной кривой. Но в стержнях круглого сечения, как было отмечено выше, при пространственном изгибе силовая линия и нейтральная ось остаются взаимно перпендикулярными, а это значит, что несмотря на изогнутую пространственную форму, каждое сечение стержня испытывает плоский изгиб. Поэтому расчет такого стержня выполняют как при плоском изгибе, но по **суммарному изгибающему моменту**

$M_{\text{изг}}$, вычисляемому как геометрическая сумма моментов в различных плоскостях —

$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \quad (45)$$

Вектор суммарного изгибающего момента в разных сечениях будет иметь различное направление, а поэтому эпюра момента $M_{\text{изг}}$ даже при отсутствии распределенных нагрузок будет криволинейной.

Примечание.

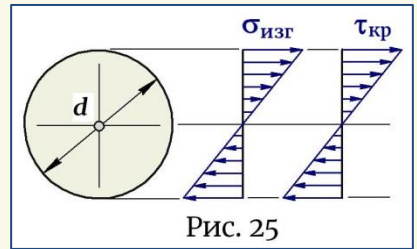
Сказанное выше справедливо для любого многоугольного сечения, в котором все центральные оси являются главными (квадрат, правильный шестиугольник). Для таких сечений, независимо от положения силовой плоскости, изгиб является плоским и расчет можно выполнять как для плоского изгиба — через суммарный изгибающий момент, однако для таких сечений удобнее использовать формулу $\sigma_{\text{max}} = M_x/W_x + M_y/W_y$.

В сечении стержня от изгиба и от кручения максимальные напряжения возникают на краю сечения (рис. 25) и, согласно формулам (4)-(5), соответственно равны:

$$\sigma_{\text{изг}} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_x}; \tau_{\text{кр}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_\rho}, \quad (46)$$

где, учитывая, что —

$$\left. \begin{aligned} W_x &= \pi d^3 / 32 \\ W_\rho &= \pi d^3 / 16 \end{aligned} \right\} \rightarrow W_\rho = 2 W_x,$$



напряжения принимают вид:

$$\sigma_{\text{изг}} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_x}; \tau_{\text{кр}} = \frac{M_{\text{кр}}}{2W_x}. \quad (47)$$

Как было рассмотрено выше, если в точках сечения возникают нормальные и касательные напряжения, расчеты на прочность выполняются с использованием теорий прочности (13) или (14), которые для комбинации изгиба и кручения принимают вид:

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\text{изг}}^2 + 4\tau_{\text{кр}}^2}; \sigma_{\text{max}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_{\text{изг}}^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2}. \quad (48)$$

Подставляем значения (47) в выражения (48) и получаем:

$$\sigma_{\max}^{\text{III}} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{изг}}}{W_x}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\text{кр}}}{2W_x}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}}{W_x} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_x};$$

$$\sigma_{\max}^{\text{IV}} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{изг}}}{W_x}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{\text{кр}}}{2W_x}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}}{W_x} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{IV}}}{W_x},$$

где значения $M_{\text{расч}}^{\text{III}}$ и $M_{\text{расч}}^{\text{IV}}$ – называются **«расчетные моменты»** по III-ей и IV-ой теориям прочности, соответственно равные:

$$\begin{cases} M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} \\ M_{\text{расч}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2} \end{cases}. \quad (49)$$

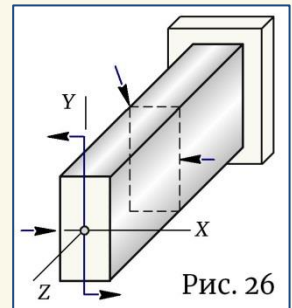
И тогда с учетом значений (49) **условие прочности при кручении с изгибом стержней круглого сечения** имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (50)$$

по которому выполняются проверочные и проектировочные расчеты.

Стержни некруглого сечения

В стержнях некруглого сечения (рис. 26) при **кручении с изгибом** возникают те же внутренние усилия — $Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{\text{кр}}$, приводящие к возникновению в точках нормальных и касательных напряжений, а значит, расчеты на прочность для таких стержней также производятся на основании одной из теорий прочности (48). Но в стержнях с некруглым сечением положение плоскости изгибающего момента является принципиально важным для прочности и жесткости стержня. Если эта плоскость не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции или изгибающее воздействие на стержень создается в нескольких силовых плоскостях одновременно, возникает кривой или пространственный изгиб. В этом случае нейтральная ось в каждом сечении занимает свое положение, перпендикулярное линии силы, а направление прогиба не совпадает с силовой плоскостью. Поэтому при изгибе таких стержней расчет по суммарному изгибающему моменту (45) недопустим, и максимальные



напряжения от изгиба определяются по принципу независимости действия сил как сумма напряжений от изгибающих моментов в главных плоскостях инерции, как это было рассмотрено выше для косоугольного и пространственного изгиба. И тогда, в частности, для сечений с двумя осями симметрии и выступающими острыми углами, нормальные напряжения от изгиба, а также касательные напряжения от кручения, определяются как:

$$\boxed{\sigma_{\text{изг}}} = M_x / W_x + M_y / W_y; \quad \boxed{\tau_{\text{кр}}} = M_{\text{кр}} / W_K, \quad (51)$$

где W_K – момент сопротивления при кручении стержней некруглого сечения, зависящий от формы и размеров сечения.

И тогда на основании значений (51) и формул (48) получаем **условие прочности при кручении с изгибом стержней некруглого сечения**:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{\text{max}}^{\text{III}} &= \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_K}\right)^2} \leq [\sigma] \\ \sigma_{\text{max}}^{\text{IV}} &= \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_K}\right)^2} \leq [\sigma] \end{aligned}}. \quad (52)$$

6. Кручение с растяжением (сжатием)

При *кручении с растяжением (сжатием)* в сечениях элемента возникают два внутренних усилия – продольная сила N и крутящий момент $M_{\text{кр}}$, которые вызывают появление в точках соответственно нормальных и касательных напряжений, вычисляемых по формулам (2) и (5). При растяжении (сжатии) все сечения являются равноопасными и в них действуют напряжения одинаковой величины, а при кручении – наиболее нагруженными являются точки контура сечения. Расчеты на прочность выполняются по опасным точкам с использованием теорий прочности (13) или (14), которые для комбинации *кручения с растяжением (сжатием)* принимают вид:

$$\boxed{\sigma_{\text{max}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_N^2 + 4\tau_{\text{кр}}^2}; \quad \sigma_{\text{max}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_N^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2}}, \quad (53)$$

где — $\sigma_N = N/A$; $\tau_{\text{кр}} = M_{\text{кр}}/W_p$. Подставляем эти значения в (53) и получаем **условие прочности при кручении с растяжением (сжатием)**:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^{\text{III}} &= \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}\right)^2} \leq [\sigma] \\ \sigma_{\max}^{\text{IV}} &= \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}\right)^2} \leq [\sigma] \end{aligned} \quad (54)$$

7. Общий случай пространственного нагружения

В самом общем случае пространственного нагружения в сечении возникают шесть внутренних усилий – $N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{\text{кр}}$, каждое из которых связано с одной из простейших деформацией и приводит к возникновению в точках нормальных или касательных напряжений (7), определяемых по соответствующим формулам (2)-(6). Сочетание деформаций создает в точках сечения различные виды напряженного состояния, что определяет при сложном сопротивлении методы расчета результирующих напряжений, по которым производится оценка прочности деталей. Нормальные напряжения, возникающие от *растяжения-сжатия* и *изгиба*, алгебраически суммируются по принципу независимости действия сил (8), касательные напряжения от *сдвига* и *кручения* суммируются геометрически (10), а при сочетании деформаций, приводящих к возникновению в точках нормальных и касательных напряжений (*изгиб с кручением*, *кручение с растяжением*), суммарные напряжения определяются с использованием одной из теорий прочности.

В самом общем случае пространственного нагружения, пренебрегая влиянием поперечных сил и касательных напряжений от поперечного изгиба, напряжения соответственно для элементов КРУГЛОГО и НЕКРУГЛОГО сечения определяются как:

$$\begin{aligned} \boxed{\sigma} &= \frac{N}{A} + \frac{M_{\text{изг}}}{W_x} = \frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_x}; & \boxed{\tau_{\text{кр}}} &= \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}; \\ \boxed{\sigma} &= \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}; & \boxed{\tau_{\text{кр}}} &= \frac{M_{\text{кр}}}{W_k}, \end{aligned}$$

которые подставляются в теории прочности (13) или (14) и вычисляется *расчетное напряжение*, являющееся основой расчетов на прочность:

★ для элементов КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ →

$$\sigma_{\max}^{\text{III}} = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_x}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_\rho}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (55)$$

$$\sigma_{\max}^{\text{IV}} = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_x}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_\rho}\right)^2} \leq [\sigma]$$

★ для элементов НЕКРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ →

$$\sigma_{\max}^{\text{III}} = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (56)$$

$$\sigma_{\max}^{\text{IV}} = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]$$

Примечание.

Выбор теории прочности, используемой в расчетах при сложном сопротивлении, зависит от механических свойств материала. Для пластичных материалов наиболее достоверными являются III-я и IV-я теории прочности, для хрупких материалов – теория прочности Мора.

8. Кручение и сдвиг. Расчет цилиндрических винтовых пружин

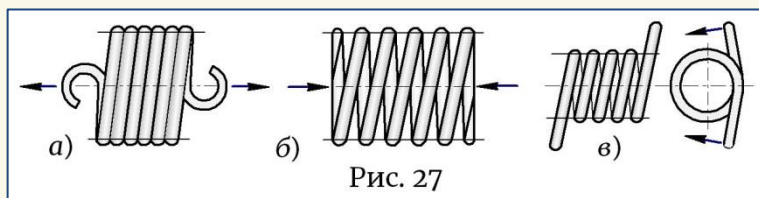
При сдвиге и кручении в сечении действуют три внутренних усилия — поперечные силы Q_x, Q_y и крутящий момент $M_{\text{кр}}$, вызывающие в точках сечения возникновение касательных напряжений соответствующего направления и величины. При комбинации этих деформаций результирующее напряжение "τ" в произвольной точке сечения определяется как геометрическая сумма (10) напряжений τ_x, τ_y и $\tau_{\text{кр}}$, но расчет на прочность выполняется по наиболее опасным точкам — точкам, в которых касательные напряжения от сдвига и кручения имеют одинаковое направление.

Классическим примером элемента, работающего на сдвиг и кручение, является ВИНТОВАЯ ПРУЖИНА.

Винтовые пружины – одни из самых широко распространенных деталей, используемых в различных машиностроительных конструкциях, автомобилестроении и приборостроении. Они применяются на транспортных средствах в качестве амортизирующих устройств для смягчения толчков и ударов (например, рессоры), работают как элементы натяжения и нажатия в муфтах, тормозах, фрикционных передачах, как пружины-демпферы для гашения крутильных колебаний трансмиссии в сцеплении и т. п. Винтовые пружины используются в качестве аккумуляторов энергии для приведения в движение отдельных деталей или механизмов (например, боевые пружины огнестрельного оружия); выполняют функцию возврата движущихся деталей в исходное положение (например, клапанные пружины двигателей); служат в качестве элементов регистрирующих и записывающих приборов и устройств.

Во многих механизмах имеются десятки и сотни пружин, выполняющих ответственные и сложные функции. Широкое применение пружин обусловлено простотой конструкции, компактностью, надежностью в работе. Их изготавливают путем холодной и горячей навивки проволоки (или прутка) с круглым, квадратным или прямоугольным сечением на специальные оправки. Форма оправки определяет форму пружины, по которой различают пружины цилиндрические, конические, фасонные (параболические, бочкообразные), призматические и др., выполненные с постоянным и переменным шагом, а также из прутка постоянного и переменного сечения.

По способу нагружения винтовые пружины делятся на пружины растяжения (рис. 27, а), сжатия (рис. 27, б) и кручения (рис. 27, в):



Пружины растяжения и сжатия конструктивно отличаются тем, что первые выполняются без зазоров между витками и в свободном состоянии имеют шаг, равный диаметру прутка, а вторые выполняются с зазором, обеспечивающим ход пружины при ее сжатии и рассчитанным таким образом, чтобы не происходило полного смыкания витков под рабочей нагрузкой. Пружины также отличаются оформлением концов, определяющих характер их установки, но концевые витки не являются рабочими и при проектировании пружин учитываются только как элементы крепления. Расчет пружин подчиняется

поставленной для них задаче и заключается в определении параметров пружины, обеспечивающих выполнение заданных функций.

Рассмотрим расчет цилиндрической винтовой пружины, навитой из прутка круглого поперечного сечения, и определим напряжения и деформации в пружине, например, при ее растяжении. Расчет винтовых пружин растяжения и сжатия выполняется по одинаковой методике и одинаковым расчетным формулам, за исключением некоторых особенностей, о которых будет сказано ниже.

Основными геометрическими и механическими параметрами винтовой пружины являются (рис. 28):

D – средний диаметр пружины; d – диаметр проволоки (прутка); α – угол подъема винтовой линии; $c = D/d$ – индекс пружины, характеризующий кривизну витка; S_0 – зазор между витками в ненагруженном состоянии; $h = \pi D \operatorname{tg} \alpha$ – шаг пружины в свободном состоянии; n – число рабочих витков; $\ell = \pi D n$ – полная длина рабочей части пружины; G – модуль сдвига материала.

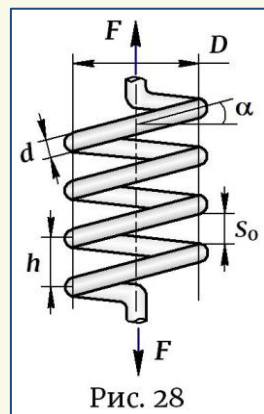


Рис. 28

Примечание.

При проектировании пружины сжатия помимо рабочих витков, подвергающихся деформации под нагрузкой, необходимо учитывать дополнительные торцевые (опорные) витки, которые плотно прижимают друг к другу и шлифуют до образования плоской опорной поверхности, перпендикулярной оси пружины. При этом площадка контакта должна по возможности представлять собой полное кольцо во избежание внецентренного приложения силы. Опорные витки не совершают перемещений и не участвуют в работе пружины, они являются нерабочими и называются «мертвыми витками». Число опорных витков с каждой стороны должно составлять 1...1,25, поэтому полное число витков выбирают кратным 0,5 и вычисляют как $n_{\text{полн}} = n + (1,5 \dots 2,5)$. И тогда при проектировании цилиндрических пружин полная ее длина в развернутом виде с учетом опорных витков принимается равной $\ell = \pi D n_{\text{полн}}$.

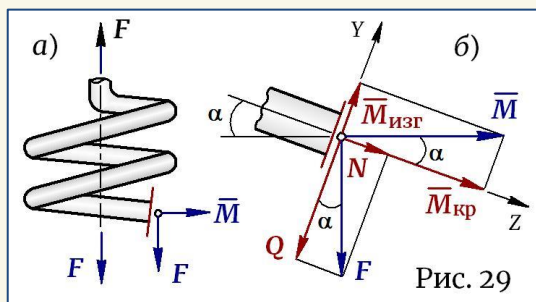
Внутренние усилия

Точный расчет винтовых пружин является сложной задачей, так как при растяжении (сжатии) пружины прутки, из которого она навита, испытывает одновременно несколько деформаций – сдвиг, круче-

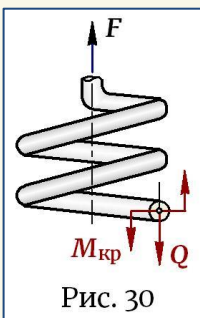
ние, изгиб и растяжение (в пружинах растяжения) или сжатие (в пружинах сжатия). Определим внутренние усилия в прутке, вызывающие эти деформации. Для этого используем метод сечений и рассмотрим отсеченную часть пружины, в которой из условия равновесия внешняя сила F уравнивается внутренними силами, возникающими в поперечном сечении прутка. Для определения внутренних сил от действия силы F необходимо произвести перенос этой силы к сечению, в результате которого в сечении возникают две внутренние нагрузки – сила, равная F , параллельная оси пружины и приложенная в центре тяжести сечения, и момент, образованный парой сил при переносе силы F и равный $M = F(D/2)$ (рис. 29, а).

Учитывая угол наклона сечения витка относительно плоскости действия силы и момента и разложив указанные нагрузки в системе координат $Y-Z$ (здесь моменты представлены в виде вектор-момента), получаем в сечении внутренние усилия, вызывающие в прутке пружины указанные выше деформации и соответственно равные (рис. 29, б):

$$\begin{aligned} N &= F \sin \alpha; \quad Q = F \cos \alpha; \\ M_{кр} &= F(D/2) \cos \alpha; \quad (57) \\ M_{изг} &= F(D/2) \sin \alpha. \end{aligned}$$



Однако в большинстве применяемых винтовых пружин угол подъема винтовой линии невелик ($2^\circ \dots 5^\circ$) и мало изменяется в процессе деформации, поэтому в таких пружинах можно считать, что каждый виток лежит в плоскости, перпендикулярной оси пружины, а плоскость, проходящая по оси пружины, совпадает с плоскостью поперечного сечения. И тогда, принимая для малых углов $\sin \alpha = 0$; $\cos \alpha = 1$, на основании значений (57) получаем — $N = 0$ и $M_{изг} = 0$, а значит,



растяжением и изгибом прутка можно пренебречь и считать, что пруток винтовой пружины испытывает только *сдвиг* и *кручение* силами, соответственно равными (рис. 30):

$$\boxed{Q} = F; \quad \boxed{M_{кр}} = F(D/2). \quad (58)$$

Такие пружины называются *пружинами малого шага*, а указанные допущения положены в основу приближенного расчета пружин.

Напряжения

При *сдвиге* и *кручении* в точках сечения возникают касательные напряжения τ_Q и $\tau_{кр}$. Принимая, что касательные напряжения при закручивании витка имеют такой же характер изменения по сечению, как при кручении прямого стержня, а напряжения от сдвига равномерно распределены по сечению, как это принято считать при расчете болтовых и заклепочных соединений, шпонок и т.д., в соответствии с направлением Q и $M_{кр}$ (рис. 30) эпюры касательных напряжений в сечении винтовой пружины имеют вид (рис. 31). Наибольшие напряжения τ_{max} возникают на внутренней поверхности витка (в точке "А"), где касательные напряжения от *сдвига* и *кручения* имеют одинаковое направление. Как показывает опыт эксплуатации пружин — и растяжения, и сжатия — именно на внутренней стороне витка возникают первые трещины и начинается разрушение пружины. Поэтому расчет винтовых пружин на прочность выполняется по точкам внутренней поверхности, в которых на основании принципа независимости действия сил и формул (3) и (6) максимальные напряжения определяются как:

$$\tau_{max} = \tau_Q + \tau_{кр} = \frac{Q}{A} + \frac{M_{кр}}{W_\rho},$$

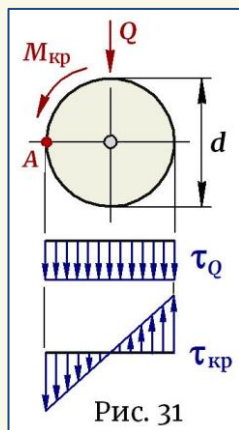
где с учетом $A = \pi d^2/4$ и $W_\rho = \pi d^3/16$, а также значений (58) получаем:

$$\tau_{max} = \frac{F}{\pi d^2/4} + \frac{F(D/2)}{\pi d^3/16} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(\frac{d}{2D} + 1 \right). \quad (59)$$

Отношение " $d/2D$ " в выражении (59) — величина малого порядка и значительно меньше единицы, поэтому этим значением пренебрегают и **формула для максимальных касательных напряжений в цилиндрической винтовой пружине** принимает вид:

$$\tau_{max} = \frac{8FD}{\pi d^3}, \quad (60)$$

откуда видно, что увеличение диаметра D пружины приводит к возрастанию в ней напряжений и снижению прочности, а увеличение диаметра прутка d повышает прочность пружины.



Значение в скобках формулы (59) выражает влияние поперечной силы на величину напряжений и, принимая эту величину равной единице, считают, что пруток пружины работает только на *кручение*. Однако на практике встречаются механизмы, как например, железнодорожные подвижные составы, пружины гашения крутильных колебаний в автомобилях и др., где используются очень мощные, жесткие пружины, диаметр которых соизмерим с диаметром прутка и в которых напряжения, возникающие от сдвига, весьма существенны. Поэтому при проектировании таких пружин в расчет вводится *поправочный коэффициент "k"*, позволяющий получить более точную расчетную формулу для максимальных напряжений —

$$\tau_{\max} = k \frac{8FD}{\pi d^3}, \quad (61)$$

определяющий не только влияние поперечных сил и других внутренних усилий в сечении, но также учитывающий кривизну витка и различие кривизны на внутренней и наружной поверхностях пружины. Этим коэффициентом заменяют скобку в выражении (59). Он зависит от индекса пружины "с" и его значение в зависимости от конструкции пружины, ее размеров и кривизны винтовой линии вычисляют по эмпирическим формулам —

$$k \approx 1 + \frac{1,45}{c}; \quad k \approx \frac{4c+1}{4c-1} + \frac{0,615}{c}; \quad k \approx \frac{4c-1}{4c+4} + \frac{0,615}{c}; \quad k \approx \frac{4c+2}{4c-3}$$

или принимают из справочных таблиц или графиков. Индекс пружины "с" принимают в пределах 4...12. Низкий индекс соответствует более высокой кривизне намотки прутка, большей неоднородности распределения напряжений и значительному уровню концентрации напряжений в витках, поэтому пружины с индексом $c < 4$ применять не рекомендуется, к тому же навивка пружин с низким индексом является технологически сложным процессом. Поправочный коэффициент *всегда больше единицы*. С увеличением индекса пружины коэффициент уменьшается и при индексе $c \geq 10$ его значение становится близким к единице, поэтому в приближении для таких пружин принимают $k = 1$, но в ответственных случаях расчет напряжений следует выполнять с учетом поправочного коэффициента (61).

И тогда с учетом поправочного коэффициента *условие прочности для цилиндрической винтовой пружины* имеет вид:

$$\tau_{\max} = k \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau]. \quad (62)$$

Применяемые пружины должны обладать необходимой несущей способностью, поэтому их изготавливают из высокопрочной легированной стали с высокими прочностными показателями, для которой допускаемое напряжение составляет $[\tau] = 200 \dots 1000$ МПа. Кроме того, поскольку работа витых пружин основана на упругих свойствах материала, последний должен обладать высоким пределом упругости, выносливости и релаксационной стойкости.

Деформация

Деформация пружины " λ " (ход пружины) – это изменение ее длины вдоль оси при растяжении или сжатии (рис. 32). В пружинах сжатия деформация " λ " называется *осадкой* пружины.

Определение деформации в винтовых пружинах выполняется энергетическим методом на основании *закона сохранения энергии*:

★ Сила F , приложенная вдоль оси пружины, изменяет ее длину, а значит, на деформации λ совершает работу, согласно теореме Клапейрона равную –

$$A_F = \frac{F\lambda}{2}; \quad (63)$$

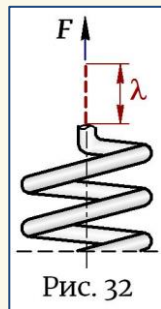


Рис. 32

★ В результате деформирования в пружине накапливается энергия от деформаций *кручения* и *сдвига*, однако учитывая незначительную долю последней, в расчет принимается только потенциальная энергия *кручения*, которая на основании значений $[\overline{M}_{кр}] = FD/2$ (58),

$[\overline{I}_\rho] = \pi d^4/32$ и $[\overline{\ell}] = \pi Dn$ принимает вид –

$$U = U_{кр} = \frac{M_{кр}^2 \ell}{2GI_\rho} = \frac{(FD/2)^2 \pi Dn}{2G(\pi d^4/32)} = \frac{4F^2 D^3 n}{Gd^4}; \quad (64)$$

★ На основании *закона сохранения энергии* $\rightarrow [\overline{A}_F = U]$, поэтому приравниваем значения (63) и (64) и получаем **формулу для вычисления деформации в винтовой пружине**:

$$\lambda = \frac{8FD^3n}{Gd^4} = \frac{F}{C}, \quad (65)$$

где

$$C = \frac{Gd^4}{8D^3n} \quad (66)$$

называется **жесткостью пружины**, а величина, обратная жесткости, называется **податливостью пружины**. Отсюда следует, что увеличение диаметра пружины и числа витков уменьшает ее жесткость, а увеличение диаметра прутка жесткость пружины повышает.

В выражении (65), представленном в виде $\lambda = (8FD^3/Gd^4)n$, значение $\lambda' = 8FD^3/Gd^4 = F/C'$ определяет деформацию одного витка от силы F , а величина $C' = Gd^4/8D^3$ соответствует жесткости одного витка. А это значит, что деформация всей пружины согласно (65) больше деформации одного витка $\rightarrow \lambda = \lambda'n$, а жесткость одного витка больше жесткости всей пружины (66) $\rightarrow C = C'/n \rightarrow C' = Cn$. Значение C' указывается в стандарте пружин.

Как было сказано выше, расчет пружин растяжения и пружин сжатия выполняется по одинаковой методике и одинаковым расчетным формулам, но есть некоторые особенности расчета, связанные с возникающими в пружинах деформациями. Так, при проектировании пружин сжатия следует учитывать, что под действием рабочей нагрузки возможно смыкание витков и закрытие зазоров, в результате чего ход пружины прекращается и ее работа как упругого элемента нарушается, так как сомкнувшиеся витки выключаются из работы и пружина работает на сжатие как цельный полый цилиндр. Предельная осадка пружины, при которой зазоры полностью закрываются, равна $\lambda_{\text{пред}} = s_0(n-1)$, а предельная сила, соответствующая закрытию

зазоров, согласно (65), определяется как $F_{\text{пред}} = Gd^4\lambda_{\text{пред}}/8D^3n$.

Поэтому пружины сжатия для сохранения упругих свойств проектируются таким образом, чтобы в нагруженном состоянии зазор между витками сохранялся и составлял величину $s_F = (0,1...0,15)d$. На

основании этого шаг пружины " h " рассчитывается как (рис. 33):

$$h = d + \lambda/n + s_F, \quad (67)$$

где $\lambda/n = \lambda'$ – осадка одного витка от силы F ; s_F – сохраняемый зазор между витками пружины в рабочем состоянии.

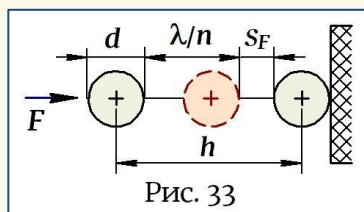


Рис. 33

Также при проектировании пружин сжатия большой высоты следует учитывать, что вследствие возможного эксцентриситета осевой силы или наличия моментов, действующих в плоскости, проходящей по оси пружины, велика вероятность потери устойчивости и возникновения продольного изгиба, поэтому пружины большой высоты при $H_0/D \geq 2,6$, где H_0 – высота пружины в свободном состоянии, конструируют с установкой на оправках или в гильзах (стаканах), препятствующих их выпучиванию.

Пружины сжатия мало чувствительны к перегрузкам. Если при каких-то условиях нагружения на рабочем ходу происходит поломка одного из витков, это не приводит к выходу пружины из строя и механизм продолжает работать, в то время как в пружинах растяжения поломка витка соответствует полному нарушению работы узла, в котором пружина установлена.

Пружины из прутка прямоугольного и квадратного сечения

В машиностроении основное применение в узлах и механизмах имеют пружины из прутка круглого сечения благодаря их лучшей работе при напряжениях кручения. Однако при больших нагрузках или в особо ответственных случаях используют цилиндрические пружины из прутка прямоугольного или квадратного сечения, как правило, в качестве пружин сжатия. Такие пружины обладают большей жесткостью, обеспечивают высокую нагрузку при малых деформациях, имеют компактные размеры, удобные для конструкций с ограниченным пространством, просты в изготовлении и надежны в эксплуатации. Несмотря на то, что распределение напряжений в прямоугольном или квадратном сечении не такое равномерное, как в круглом сечении, пружины прямоугольного (квадратного) сечения, в отличие от пружин круглого сечения, способны накапливать и сохранять большее количество энергии на меньшей площади, поскольку в отведенное пространство в силу их компактности можно вместить большее количество материала. Эти пружины широко используют в пресс-штампах и штампах для литья под давлением, в механическом оборудовании с элементами точного упругого движения, в обрабатывающей и химической промышленности, автомобилестроении и других областях.

Расчет винтовых пружин прямоугольного (квадратного) сечения (рис. 34) выполняется по тем же формулам и тем же конструктивным подходам, что и расчет пружин круглого сечения, но только с тем отличием, что геометрические характеристики сечения в расчетных формулах выражаются по формулам кручения, соответствующим профилю сечения:

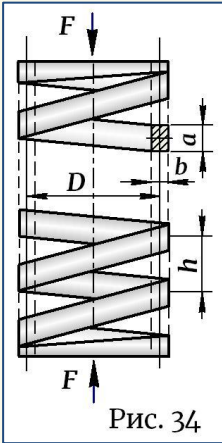


Рис. 34

$$I_K = \beta ab^3; W_K = \alpha ab^2, \quad (67)$$

где I_K и W_K – момент инерции и момент сопротивления при кручении стержней некруглого сечения; a, b – длинная и короткая стороны прямоугольного сечения соответственно (для квадрата $a = b$); α, β – коэффициенты формы, принимаемые в зависимости от соотношения сторон сечения (табл. 1):

Таблица 1

a/b	α	β	a/b	α	β	a/b	α	β
1,0	0,208	0,141	2,5	0,256	0,249	8,0	0,307	0,307
1,5	0,231	0,196	3,0	0,267	0,263	10,0	0,313	0,313
1,75	0,239	0,214	4,0	0,282	0,281	∞	0,333	0,333
2,0	0,246	0,229	6,0	0,299	0,299			

И тогда на основании значения (58) с учетом (67) получаем **формулу для напряжений в пружине прямоугольного (квадратного) сечения** –

$$\tau_{\max} = k \frac{FD}{2W_K} = k \frac{FD}{2\alpha ab^2}, \quad (68)$$

где поправочный коэффициент "k" выбирается по номограммам или справочным таблицам в зависимости от индекса пружины и отношения сторон прямоугольного сечения.

Деформация пружины с витками прямоугольного (квадратного) сечения, как и пружины из прутка круглого сечения, определяется энергетическим методом на основании **закона сохранения энергии**.

Принимая энергию деформации кручения в виде –

$$U_{кр} = \frac{M_{кр}^2 \ell}{2GI_K} = \frac{(FD/2)^2 \pi Dn}{2GI_K} = \frac{F^2 D^3 \pi n}{8GI_K}$$

и приравнивая ее величину работе силы F на перемещении λ (63), с

учетом значения (67) получаем **формулу для определения деформации пружины прямоугольного (квадратного) сечения** —

$$\boxed{A_F = U_{кр}} \rightarrow \frac{F\lambda}{2} = \frac{F^2 D^3 \pi n}{8GI_K} \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{FD^3 \pi n}{4GI_K} = \frac{FD^3 \pi n}{4G\beta ab^3}}. \quad (69)$$

При расчете пружин с витками прямоугольного сечения большое значение имеет не только отношение сторон прямоугольника, но и расположение сечения относительно оси пружины. Пружины прямоугольного сечения изготавливают двух типов — с расположением длинной стороны прямоугольника вдоль оси пружины (рис. 35, а) и с расположением перпендикулярно оси (рис. 35, б). Индекс таких пружин определяется отношением диаметра пружины D к длине стороны, лежащей по нормали к оси, и для указанных положений сечения соответственно равен (рис. 35, а, б) —

$$\boxed{c = D/b; c = D/a},$$

а значит, что при одинаковом среднем диаметре пружина с сечением, вытянутым в перпендикулярном к оси направлении, имеет меньший индекс и большую кривизну внутренних волокон. Поэтому при индексе $c = D/a < 4$ и отношении размеров $a/b > 4$ вследствие высокой концен-

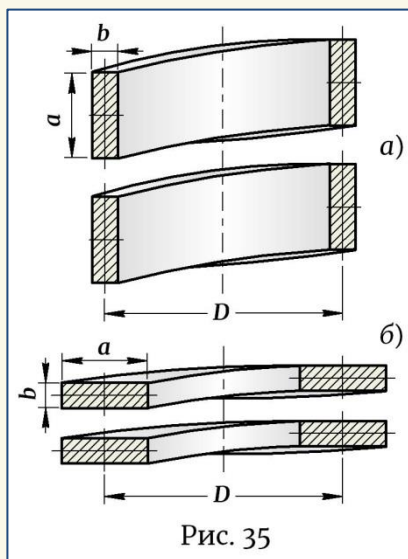


Рис. 35

трации напряжений на внутренней поверхности витка, а также трудности изготовления, применение таких пружин не рекомендуется.

Положение прямоугольного сечения витка влияет на величину максимальных напряжений (68) и точки их возникновения. В пружинах *большой кривизны* независимо от положения сечения относительно оси (рис. 35), а также в пружинах квадратного сечения, максимальные напряжения возникают на внутренней поверхности в середине стороны сечения, ближайшей к оси пружины. В пружинах *малой кривизны* и только с расположением сечения перпендикулярно оси (рис. 35, б) максимальные напряжения могут возникать в точках вблизи середины длинной стороны, так же как это имеет место при кручении прямых стержней такого же сечения.

Что касается жесткости, то расположение прямоугольного сечения относительно оси пружины существенно не сказывается на ее жесткости, а определяет лишь соотношение высоты и диаметра и позволяет при проектировании варьировать размеры пружины в радиальном и осевом направлении. Так, при сохранении жесткости, расположив большую сторону прямоугольного сечения витка перпендикулярно оси пружины, можно уменьшить ее высоту, а при расположении параллельно оси — уменьшить ее диаметр.

Составные (концентрические) пружины

Пружинные узлы, состоящие из нескольких (чаще двух) составных концентрически установленных пружин сжатия, используются для увеличения нагрузочной способности конструкции, а также для увеличения жесткости системы при заданной нагрузке и сохранении радиальных размеров. Такие концентрически расположенные пружины воспринимают нагрузку одновременно и являются наиболее рациональными конструкциями как с точки зрения компактности, что важно в случае ограниченности пространства, так и способности воспринимать значительно большие нагрузки. Для устранения перекоса и сильного закручивания торцовых опор концентрические пружины, размещаемые одна в другой, делают с противоположным направлением навивки — левого и правого подъема. Между пружинами должен быть достаточный радиальный зазор, а опоры должны быть сконструированы таким образом, чтобы обеспечивалось взаимное центрирование пружин и не возникало бокового сползания во время работы.

Рассмотрим узел, составленный из двух концентрически установленных пружин, выполненных из прутка круглого сечения (рис. 36). Расчет таких пружин является задачей статически неопределимой и выполняется путем совместного рассмотрения трех сторон задачи — *статической, геометрической и физической*.

Статической стороной является условие равновесия верхней плиты, согласно которому сила F распределяется между пружинами и равна сумме сил, сжимающих наружную и внутреннюю пружины — $F = F_1 + F_2$.

Геометрическая сторона выражает равенство осадок внешней и внутренней пружин

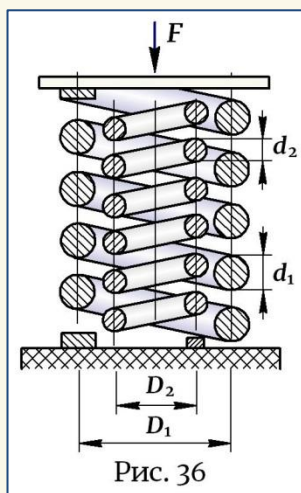


Рис. 36

— $\lambda_1 = \lambda_2$, а физическая сторона устанавливает связь между осадками пружин и воздействующими на них усилиями, согласно (65) и (66), определяемую как:

$$\lambda_1 = \frac{8F_1 D_1^3 n_1}{G d_1^4} = \frac{F_1}{C_1}; \quad \lambda_2 = \frac{8F_2 D_2^3 n_2}{G d_2^4} = \frac{F_2}{C_2},$$

где C_1 и C_2 — жесткости пружин.

Объединяя три стороны задачи, определяем силы, воспринимаемые каждой пружиной $F_1 = \frac{F}{1+C_2/C_1}$; $F_2 = \frac{F}{1+C_1/C_2}$, выраженные через силу F , которые, как видно из полученных значений, распределяются пропорционально жесткостям пружин: $F_1/F_2 = C_1/C_2$.

Однако рассмотренная выше методика расчета удобна только для оценки прочности используемой составной пружины при заданных условиях эксплуатации, но является нерациональной при выполнении проектировочных расчетов, связанных с подбором нагрузки или конструированием пружины под заданные силовые условия. Так, при расчете грузоподъемности пружинного узла заданных размеров и жесткости определение допускаемой нагрузки $[F]$ производится из условия прочности каждой из пружин, а затем по результатам расчетов принимается меньшее значение, в результате чего не обеспечивается равнопрочность конструкции и прочностные возможности пружин задействованы не полностью. Проектирование пружин под заданную нагрузку требует учета соотношения их жесткостей, что также не приводит к одинаковой загруженности пружин. Поэтому при конструировании составных пружин, чтобы обеспечить более рациональное их использование и согласованную работу пружинного узла, следует находить решения, чтобы напряжения в пружинах были одинаковыми и равными допускаемому напряжению —

$$\tau_1 = \tau_2 = \dots = [\tau], \quad (70)$$

чтобы все пружины имели одинаковый рабочий ход —

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda \quad (71)$$

и примерно одинаковую высоту в предельно сжатом состоянии, соответствующую полному смыканию витков —

$$H_{\text{пред}} \approx n_1 d_1 \approx n_2 d_2 \approx \dots \approx n d. \quad (72)$$

Методика такого расчета исходит из одинаковой жесткости пружин, равенства индекса и радиального зазора между витками.

На основании условия прочности (62) и значения (65) максимальной допустимая нагрузка для пружины и ее осадка, соответствующая этой нагрузке, равны:

$$\tau_{\max} = k \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau] \rightarrow F = \frac{\pi d^3 [\tau]}{8kD}; \quad (73)$$

$$\lambda = \frac{8FD^3 n}{Gd^4} = \frac{D^3 n \pi d^3 [\tau]}{Gd^4 k D} = \frac{\pi c^2 n d [\tau]}{k G} = \frac{\pi c^2 H_{\text{пред}} [\tau]}{k G}, \quad (74)$$

где $c = D/d$ — индекс пружины, определяемый из формулы (74) как —

$$c = \sqrt{\frac{\lambda k G}{\pi H_{\text{пред}} [\tau]}}. \quad (75)$$

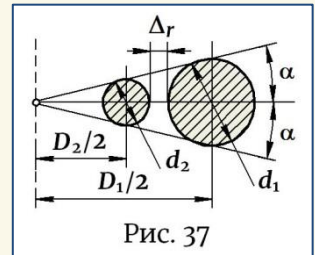
Отсюда следует, что в пружинном узле (рис. 36) для каждой из концентрических пружин выполнение условий (70)-(72) возможно только при равенстве индексов пружин — $c_1 = c_2 = c$, т.е. равенстве соотношений $c = \frac{D_1}{d_1} = \frac{D_2}{d_2}$, откуда $d_1 = \frac{D_1}{c}$ и $d_2 = \frac{D_2}{c}$, а значит, справедливым для пружин с учетом (72) будет соотношение — $\frac{d_1}{d_2} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{n_2}{n_1}$.

Конструктивно поставленные условия (70)-(72) и вытекающее отсюда равенство индексов можно обеспечить, расположив сечения витков соосных пружин относительно прямых, образующих угол 2α , как показано на рис. 37:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d_1}{D_1} = \frac{d_2}{D_2} = \frac{1}{c} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{\pi H_{\text{пред}} [\tau]}{\lambda k G}}.$$

При сжатии пружин происходит изменение их диаметров и возможно нарушение центрирования, поэтому между пружинами должен быть достаточный радиальный зазор, принимаемый равным (рис. 37):

$$\Delta r = \frac{d_1 - d_2}{2}. \quad (76)$$



Тогда с учетом значения (76) получаем соотношение диаметров пружин, выраженное через их индекс:

$$D_1 - D_2 = 2 \left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} + \Delta r \right) = 2d_1 \rightarrow \frac{D_2}{D_1} = 1 - \frac{2}{c} = \frac{c-2}{c}. \quad (77)$$

Силы, действующие на каждую из пружин, при условии равенства их индексов, согласно выражению (73), определяются как –

$$F_1 = \frac{\pi d_1^3 [\tau]}{8kD_1} = \frac{\pi [\tau] D_1^2}{8kc^3}; \quad F_2 = \frac{\pi d_2^3 [\tau]}{8kD_2} = \frac{\pi [\tau] D_2^2}{8kc^3},$$

а их соотношение с учетом значения (77) равно:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{D_2^2}{D_1^2} = \left(\frac{c-2}{c} \right)^2 \rightarrow \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} = \frac{c-2}{c}. \quad (78)$$

Объединяем выражение (78) со уравнением $F = F_1 + F_2$ и получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными –

$$\begin{cases} \frac{c-2}{c} = \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \\ F_1 + F_2 = F, \end{cases} \quad (79)$$

позволяющую определить усилия, воспринимаемые каждой пружиной, предполагая, что полная нагрузка F , приходящаяся на составную пружину, есть величина заданная. Соотношения сил (79) определяют наиболее рациональную конструкцию пружинного узла из концентрически установленных пружин, а усилия F_1 и F_2 , рассчитанные из этих соотношений, являются наиболее оптимальными, по которым и производится расчет пружин.

ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Косой и пространственный изгиб →

- ★ Напряжения и условие прочности при косом изгибе:

$$\sigma = \pm M_z \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y + \frac{\sin \varphi}{I_y} x \right); \quad \sigma_{\max} = \pm M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{W_x} + \frac{\sin \varphi}{W_y} \right) \leq [\sigma]$$

- ★ Уравнение нейтральной оси при косом изгибе и ее положение:

$$\frac{\cos \varphi}{I_x} y_0 + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_0 = 0; \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \varphi$$

- ★ Напряжения и условие прочности при пространственном изгибе:

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{x(\max)}}{W_x} + \frac{M_{y(\max)}}{W_y} \leq [\sigma]$$

- ★ Уравнение нейтральной оси при пространственном изгибе и ее

положение:
$$\frac{M_x}{I_x} y_0 + \frac{M_y}{I_y} x_0 = 0; \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_x}$$

Внецентренное растяжение (сжатие) →

- ★ Напряжения и условие прочности при внецентренном растяжении (сжатии):

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x}{i^2_y} + \frac{y_F y}{i^2_x} \right); \quad \sigma_{\max} = \pm \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_{\max}}{i^2_y} + \frac{y_F y_{\max}}{i^2_x} \right) \leq [\sigma]$$

- ★ Уравнение нейтральной оси при внецентренном растяжении (сжатии) и ее положение:

$$1 + \frac{x_F x_0}{i^2_y} + \frac{y_F y_0}{i^2_x} = 0; \quad x_H = -\frac{i^2_y}{x_F}; \quad y_H = -\frac{i^2_x}{y_F}$$

- ★ Формулы для построение ядра сечения: $x_F = -\frac{i^2_y}{x_H}; \quad y_F = -\frac{i^2_x}{y_H}$

Растяжение (сжатие) с изгибом →

- ★ Стержней некруглого сечения:

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x; \quad \sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{x(\max)}}{W_x} + \frac{M_{y(\max)}}{W_y} \leq [\sigma]$$

- ★ Стержней круглого сечения:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\text{изг}}}{W_x} \leq [\sigma], \quad \text{где } M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Общий случай нагружения →
$$\begin{cases} \sigma_{\max}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \\ \sigma_{\max}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \end{cases}$$

Изгиб с кручением →

★ Стержней круглого сечения: $\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_x} \leq [\sigma]$, где

$$M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}; \quad M_{\text{расч}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 M_{\text{кр}}^2};$$

$$M_{\text{расч}}^{\text{II}} = \frac{1-\mu}{2} M_{\text{изг}} + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}; \quad M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

★ Стержней некруглого сечения:

$$\sigma_{\max}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\text{изг}}^2 + 4\tau_{\text{кр}}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\max}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_{\text{изг}}^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma],$$

где W_k – момент сопротивления при кручении

Кручение с растяжением (сжатием) →

$$\sigma_{\max}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_N^2 + 4\tau_{\text{кр}}^2} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_\rho}\right)^2} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\max}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_N^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_\rho}\right)^2} \leq [\sigma]$$

Кручение и сдвиг. Расчет цилиндрических винтовых пружин →

$$\tau_{\max} = k_1 \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau]; \quad \lambda = k_2 \frac{8FD^3 n}{Gd^4}; \quad c = \frac{D}{d} \text{ – индекс пружины}$$

$$C = \frac{Gd^4}{8D^3 n} \text{ – жесткость пружины}; \quad \frac{1}{C} = \frac{8D^3 n}{Gd^4} \text{ – податливость пружины}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Косой и пространственный изгиб. Расчеты на прочность

Задача 1

Определить положение нейтральной оси прямоугольного сечения балки, если плоскость действия нагрузки (силовая плоскость) совпадает с одной из диагональных плоскостей. Принять размеры сечения: $b = 3 \text{ см}$; $h = 6 \text{ см}$.

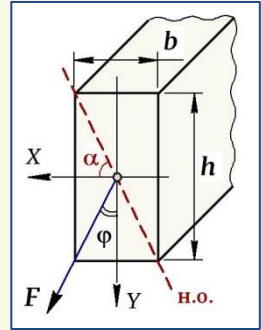
РЕШЕНИЕ:

① Угол отклонения силовой плоскости от главной плоскости инерции равен:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b/2}{h/2} = \frac{b}{h}. \quad (1)$$

② С учетом значения (1) определяем положение нейтральной оси сечения:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \varphi = -\frac{bh^3/12}{hb^3/12} \cdot \frac{b}{h} = -\frac{h}{b} = -\frac{6}{3} = -2 \rightarrow \alpha = 63,4^\circ.$$

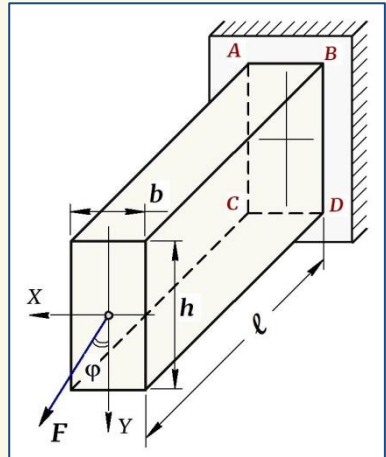


Примечание.

Если силовая плоскость проходит по одной из диагональных плоскостей, нейтральная ось (н.о.) сечения пройдет по другой диагонали.

Задача 2

Деревянная балка длиной $\ell = 2 \text{ м}$, имеющая прямоугольное сечение размерами $b \times h = 12 \times 20 \text{ см}$, жестко закреплена в заделке и нагружается на конце консоли силой $F = 2,8 \text{ кН}$, проходящей через центр тяжести сечения, но под углом $\varphi = 30^\circ$ к главной оси Y . Вычислить напряжения в точках опасного сечения и построить эпюру напряжений по сторонам опасного сечения. Определить величину и направление полного прогиба конца консоли. Принять для балки: $E = 1 \times 10^4 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

① Для заданного сечения вычисляем моменты инерции относительно главных центральных осей $X - Y$:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 20^3}{12} = 8000 \text{ см}^4; \quad (1)$$
$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{20 \cdot 12^3}{12} = 2880 \text{ см}^4.$$

② Согласно расчетной схеме балки опасным является сечение в заделке, где действует максимальный изгибающий момент, равный —

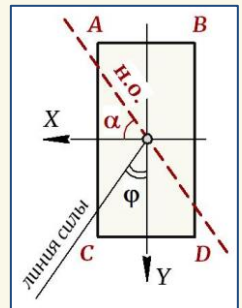
$$M_{\max} = F\ell = 2,8 \cdot 2 = 5,6 \text{ кНм}. \quad (2)$$

③ Определяем в опасном сечении положение нейтральной оси:

$$\boxed{\text{tg}\alpha = -\frac{I_x}{I_y} \text{tg}\varphi} = -\frac{8000}{2880} \text{tg}30^\circ = -1,6037 \rightarrow \boxed{\alpha} = 58^\circ.$$

Примечание.

Нейтральная ось делит сечение на напряжения двух знаков. В соответствии с расчетной схемой данной балки ниже нейтральной оси действуют сжимающие напряжения, выше — растягивающие. Дальнейшее вычисление напряжений при правильном его выполнении, с учетом знака каждой точки в осях $X - Y$, должно подтвердить знак напряжений в точках "A, B, C, D" опасного сечения.



④ Напряжения в точках опасного сечения определяются по формуле:

$$\boxed{\sigma_{\max} = \pm M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_i + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_i \right)}, \quad (3)$$

где x_i, y_i — координаты точек в системе главных центральных осей.

Примечание.

При косом изгибе знак в формуле для напряжений устанавливается в соответствии с расчетной схемой балки по следующему правилу. Первоначально главным центральным осям необходимо задать положительное направление таким образом, чтобы линия действия силы проходила в первом квадранте. И тогда, в зависимости от того, какое действие сила производит на точки первого квадранта — вызывает здесь растяжение или сжатие (а это определяется расчетной схемой), устанавливается знак, соответствующий схеме нагружения.

По формуле (3), подставляя сюда координаты точек "A,B,C,D" со знаком, соответствующим заданному направлению осей X-Y, с учетом (1) и (2) определяем напряжения в точках опасного сечения:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= -M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_A + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_A \right) = \left\| \begin{array}{l} x_A = +60 \text{ мм} \\ y_A = -100 \text{ мм} \end{array} \right\| = \\ &= -5,6 \cdot 10^6 \left[\frac{\cos 30^\circ}{8000 \cdot 10^4} (-100) + \frac{\sin 30^\circ}{2880 \cdot 10^4} (+60) \right] = +0,23 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_B &= -M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_B + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_B \right) = \left\| \begin{array}{l} x_B = -60 \text{ мм} \\ y_B = -100 \text{ мм} \end{array} \right\| = \\ &= -5,6 \cdot 10^6 \left[\frac{\cos 30^\circ}{8000 \cdot 10^4} (-100) + \frac{\sin 30^\circ}{2880 \cdot 10^4} (-60) \right] = +11,9 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_C &= -M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_C + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_C \right) = \left\| \begin{array}{l} x_C = -60 \text{ мм} \\ y_C = +100 \text{ мм} \end{array} \right\| = \\ &= -5,6 \cdot 10^6 \left[\frac{\cos 30^\circ}{8000 \cdot 10^4} (-100) + \frac{\sin 30^\circ}{2880 \cdot 10^4} (+60) \right] = -0,23 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

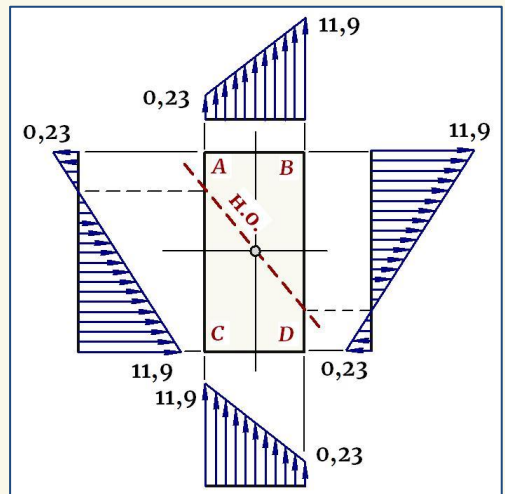
$$\begin{aligned} \sigma_D &= -M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_D + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_D \right) = \left\| \begin{array}{l} x_D = +60 \text{ мм} \\ y_D = +100 \text{ мм} \end{array} \right\| = \\ &= -5,6 \cdot 10^6 \left[\frac{\cos 30^\circ}{8000 \cdot 10^4} (+100) + \frac{\sin 30^\circ}{2880 \cdot 10^4} (+60) \right] = -11,9 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Знак вычисленных напряжений соответствует положению нейтральной оси в сечении, определяющей знак напряжений в угловых точках "A,B,C,D".

По полученным значениям напряжений строим эпюру их распределения по сторонам опасного сечения.

⑤ Используя для данной расчетной схемы балки формулу для максимального прогиба —

$$f = \frac{F \ell^3}{3EI_{\text{н.о.}}}, \quad (4)$$



определяем величину и направление полного прогиба конца консоли. Для этого раскладываем силу "F" по направлению осей X-Y, определяем составляющие F_x и F_y , вызывающие прогиб в направлении соответствующих осей –

$$F_x = F \sin \varphi = 2,8 \sin 30^\circ = 1,4 \text{ кН};$$

$$F_y = F \cos \varphi = 2,8 \cos 30^\circ = 2,42 \text{ кН} -$$

и по формуле (4) с учетом (1) вычисляем прогибы по их направлениям:

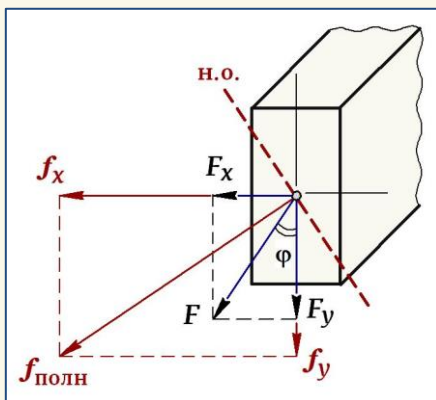
$$f_x = \frac{F_x \ell^3}{3EI_y} = \frac{1,4 \cdot 10^3 (2 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 2880 \cdot 10^4} = 12,96 \text{ мм};$$

$$f_y = \frac{F_y \ell^3}{3EI_x} = \frac{2,42 \cdot 10^3 (2 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 8000 \cdot 10^4} = 8,1 \text{ мм}.$$

Тогда полный прогиб конца консоли равен –

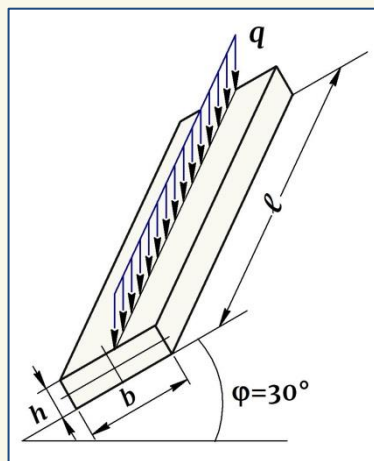
$$f_{\text{полн}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{12,96^2 + 8,1^2} = 15,3 \text{ мм}$$

и при **косом изгибе** он происходит в направлении, перпендикулярном нейтральной оси.



Задача 3

Дощатые обрешетины крыши длиной $\ell = 2 \text{ м}$, шарнирно опертые на стропила, подвергаются действию вертикальной нагрузки "q", равномерно распределенной по длине обрешетины. Крыша наклонена под углом $\varphi = 30^\circ$ к горизонту. Обрешетины выполнены из досок сечением $b \times h = 18 \times 5 \text{ см}$. Определить допустимую нагрузку $[q]$, если для мате-



риала $[\sigma] = 12 \text{ МПа}$, $E = 1 \times 10^4 \text{ МПа}$. Определить величину и направление полного прогиба обрешетины посередине пролета.

РЕШЕНИЕ:

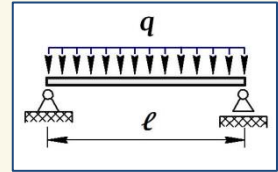
① Для заданного сечения вычисляем необходимые для решения задачи геометрические характеристики:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{18 \cdot 5^3}{12} = 187,5 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{5 \cdot 18^3}{12} = 2430 \text{ см}^4. \quad (1)$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{18 \cdot 5^2}{6} = 75 \text{ см}^3; \quad W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{5 \cdot 18^2}{6} = 270 \text{ см}^3. \quad (2)$$

② Согласно расчетной схеме балки опасным является сечение посередине пролета, где максимальный изгибающий момент равен:

$$M_{\max} = q\ell^2 / 8. \quad (3)$$



③ Из условия прочности при *косом изгибе* –

$$\sigma_{\max} = M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{W_x} + \frac{\sin \varphi}{W_y} \right) \leq [\sigma] \quad (4)$$

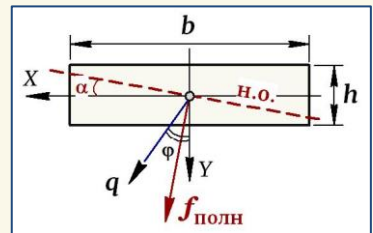
с учетом значений (3) и (2) определяем допустимую нагрузку $[q]$:

$$\sigma_{\max} = \frac{q\ell^2}{8} \left(\frac{\cos \varphi}{W_x} + \frac{\sin \varphi}{W_y} \right) \leq [\sigma], \quad \text{откуда}$$

$$[q] = \frac{8[\sigma]}{\ell^2 \left(\frac{\cos \varphi}{W_x} + \frac{\sin \varphi}{W_y} \right)} = \frac{8 \cdot 12}{(2 \cdot 10^3)^2 \left(\frac{\cos 30^\circ}{75 \cdot 10^3} + \frac{\sin 30^\circ}{270 \cdot 10^3} \right)} = 1,8 \text{ кН/м.}$$

④ С учетом значений (1) определяем в опасном сечении положение нейтральной оси:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \varphi = -\frac{187,5}{2430} \operatorname{tg} 30^\circ = \\ &= -0,0445 \rightarrow \alpha \approx 3^\circ. \end{aligned}$$



⑤ Используя для данной расчетной схемы балки формулу для максимального прогиба –

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q\ell^4}{EI_{\text{H.O.}}}, \quad (5)$$

определяем величину и направление полного прогиба сечения посередине пролета. Для этого раскладываем нагрузку "q" по направлению осей X-Y, определяем составляющие q_x и q_y , вызывающие прогиб в направлении соответствующих осей, и по формуле (5) с учетом значений (1) вычисляем прогибы по их направлениям:

$$f_x = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_x \ell^4}{EI_y} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \sin \varphi}{EI_y} = \frac{5}{384} \cdot \frac{1,8 \sin 30^\circ (2 \cdot 10^3)^4}{1 \cdot 10^4 \cdot 2430 \cdot 10^4} = 0,77 \text{ мм};$$

$$f_y = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_y \ell^3}{EI_x} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cos \varphi}{EI_x} = \frac{5}{384} \cdot \frac{1,8 \cos 30^\circ (2 \cdot 10^3)^4}{1 \cdot 10^4 \cdot 187,5 \cdot 10^4} = 17,3 \text{ мм}.$$

Тогда полный прогиб конца консоли равен –

$$f_{\text{полн}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{0,77^2 + 17,3^2} = 17,4 \text{ мм}$$

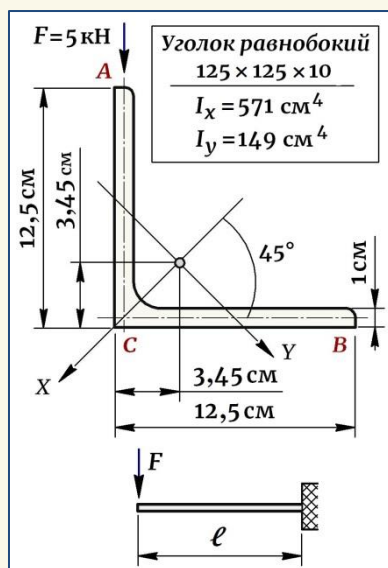
и он происходит в направлении, перпендикулярном нейтральной оси.

Задача 4

Равнобокий уголок $125 \times 125 \times 10$ мм длиной $\ell = 1$ м жестко зашпелен одним концом в заделке, а на другом конце нагружается силой $F = 5$ кН, линия действия которой проходит через центр изгиба – точку пересечения осей полок. Определить в заделке напряжения в точках "А, В, С" сечения уголка, положение нейтральной оси, а также величину и направление полного прогиба конца консоли. Принять для материала уголка: $E = 2 \times 10^5$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

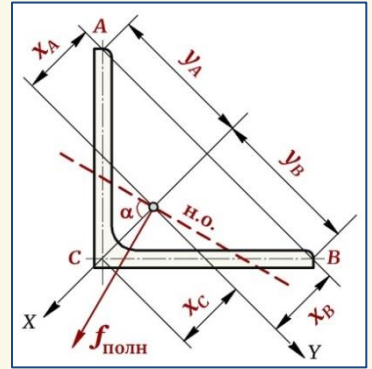
В равнополочном уголке ось симметрии X и перпендикулярная ей ось Y, проходящая через центр тяжести сечения, являются главными центральными осями инерции. Линия действия силы не совпадает ни с одной из главных осей и отклонена от них на угол $\varphi = 45^\circ$, а значит, при такой схеме нагружения уголок испытывает **косой изгиб**.



① Определяем в сечении положение нейтральной оси:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \varphi} = -\frac{571}{149} \operatorname{tg} 45^\circ = -3,83 \rightarrow$$

$$\boxed{\alpha} = 75^\circ.$$



② Напряжения в точках "А,В,С" опасно-го сечения определяем по формуле –

$$\boxed{\sigma_{\max} = \pm M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_i + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_i \right)},$$

где знак перед формулой согласно расчетной схеме балки выбирается «минус» и входящие в формулу значения соответственно равны:

$$M_{\max} = F\ell = 5 \cdot 1 = 5 \text{ кНм}; \quad I_x = 571 \text{ см}^4; \quad I_y = 149 \text{ см}^4;$$

$$\left[\begin{array}{l} x_A = -(12,5 \cos 45^\circ - 3,45 / \cos 45^\circ) = -3,96 \text{ см}; \\ y_A = -(12,5 \cos 45^\circ) = -8,84 \text{ см}; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_B = x_A = -3,96 \text{ см}; \\ y_B = +8,84 \text{ см}; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x_C = +3,45 / \cos 45^\circ = +4,88 \text{ см}; \\ y_C = 0. \end{array} \right.$$

Вычисляем напряжения в заданных точках:

$$\boxed{\sigma_A} = -M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_A + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_A \right) =$$

$$= -5 \cdot 10^6 \left[\frac{\cos 45^\circ}{571 \cdot 10^4} (-88,4) + \frac{\sin 45^\circ}{149 \cdot 10^4} (-39,6) \right] = +148,7 \text{ МПа};$$

$$\boxed{\sigma_B} = -M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_B + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_B \right) =$$

$$= -5 \cdot 10^6 \left[\frac{\cos 45^\circ}{571 \cdot 10^4} (+88,4) + \frac{\sin 45^\circ}{149 \cdot 10^4} (-39,6) \right] = +39,2 \text{ МПа};$$

$$\boxed{\sigma_C} = -M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_C + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_C \right) =$$

$$= -5 \cdot 10^6 \left[\frac{\cos 45^\circ}{571 \cdot 10^4} \cdot 0 + \frac{\sin 45^\circ}{149 \cdot 10^4} (+48,8) \right] = -115,8 \text{ МПа}.$$

③ На основании формулы для наибольшего прогиба —

$$f = \frac{F\ell^3}{3EI_{н.о.}}$$

определяем величину и направление полного прогиба конца консоли:

$$f_x = \frac{F_x \ell^3}{3EI_y} = \frac{F \sin \varphi \ell^3}{3EI_y} = \frac{5 \cdot 10^3 \sin 45^\circ (1 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 149 \cdot 10^4} = 3,95 \text{ мм};$$

$$f_y = \frac{F_y \ell^3}{3EI_x} = \frac{F \cos \varphi \ell^3}{3EI_x} = \frac{5 \cdot 10^3 \cos 45^\circ (1 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 571 \cdot 10^4} = 1,03 \text{ мм}.$$

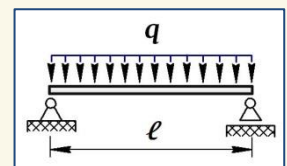
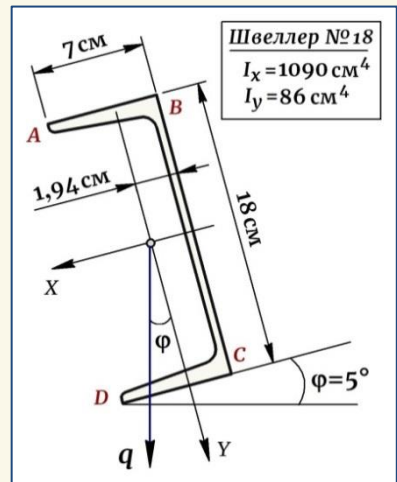
Тогда полный прогиб конца консоли равен —

$$f_{\text{полн}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{3,95^2 + 1,03^2} = 4,1 \text{ мм}$$

и происходит в направлении, перпендикулярном нейтральной оси (см. рисунок выше).

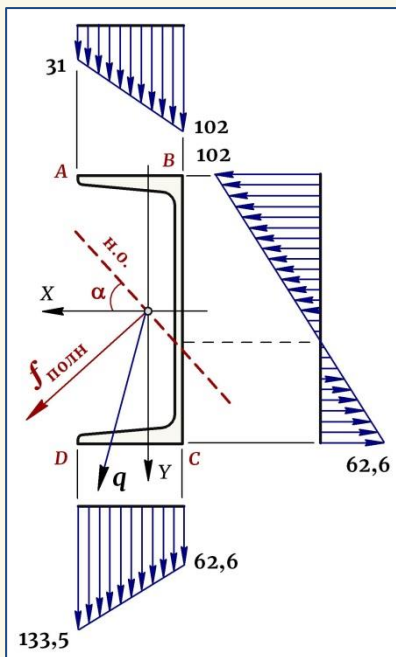
Задача 5

Шарнирно опертая по концам балка длиной $\ell = 4$ м несет равномерно распределенную нагрузку $q = 5$ кН/м. Балка выполнена из швеллера №18, при этом стенка швеллера наклонена к плоскости действия нагрузки под углом $\varphi = 5^\circ$. Вычислить напряжения в точках опасного сечения "А, В, С, D" и построить эпюры этих напряжений. Определить величину и направление наибольшего прогиба. Кручением швеллера пренебречь. Принять: $E = 2 \times 10^5$ МПа.



РЕШЕНИЕ:

① Положение нейтральной оси в сечении определяем по формуле:



$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \varphi = -\frac{1090}{86} \operatorname{tg} 5^\circ = -1,11 \rightarrow$$

$$\alpha = 48^\circ.$$

② Напряжения в точках "А,В,С,Д" опасного сечения определяем как:

$$\sigma_{\max} = \pm M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_i + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_i \right),$$

где знак перед формулой согласно расчетной схеме балки принимаем «плюс» и входящие в формулу значения соответственно равны:

$$M_{\max} = \frac{q\ell^2}{8} = \frac{5 \cdot 4^2}{8} = 10 \text{ кНм};$$

$$I_x = 1090 \text{ см}^4; I_y = 86 \text{ см}^4.$$

Вычисляем напряжения в заданных точках:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= + M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_A + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_A \right) = \left\| \begin{array}{l} x_A = 7 - 1,94 = +5,06 \text{ см} \\ y_A = -9 \text{ см} \end{array} \right\| = \\ &= + 10 \cdot 10^6 \left[\frac{\cos 5^\circ}{1090 \cdot 10^4} (-90) + \frac{\sin 5^\circ}{86 \cdot 10^4} (+50,6) \right] = -31 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_B &= + M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_B + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_B \right) = \left\| \begin{array}{l} x_B = -1,94 \text{ см} \\ y_B = -9 \text{ см} \end{array} \right\| = \\ &= + 10 \cdot 10^6 \left[\frac{\cos 5^\circ}{1090 \cdot 10^4} (-90) + \frac{\sin 5^\circ}{86 \cdot 10^4} (-19,4) \right] = -102 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_C &= + M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_C + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_C \right) = \left\| \begin{array}{l} x_C = -1,94 \text{ см} \\ y_C = +9 \text{ см} \end{array} \right\| = \\ &= + 10 \cdot 10^6 \left[\frac{\cos 5^\circ}{1090 \cdot 10^4} (+90) + \frac{\sin 5^\circ}{86 \cdot 10^4} \cdot (-19,4) \right] = +62,6 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\sigma_D = + M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_D + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_D \right) = \left\| \begin{array}{l} x_D = 7 - 1,94 = +5,06 \text{ см} \\ y_D = +9 \text{ см} \end{array} \right\| =$$

$$= +10 \cdot 10^6 \left[\frac{\cos 5^\circ}{1090 \cdot 10^4} (+90) + \frac{\sin 5^\circ}{86 \cdot 10^4} (+50,6) \right] = +133,5 \text{ МПа.}$$

По расчетным значениям строим эпюру напряжений.

③ Для данной расчетной схемы балки используем формулу для максимального прогиба —

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \ell^4}{EI_{\text{н.о.}}},$$

и, разложив нагрузку на составляющие по направлению осей $X-Y$, определяем прогибы, возникающие в этих направлениях —

$$f_x = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_x \ell^4}{EI_y} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \sin \varphi \ell^4}{EI_y} = \frac{5}{384} \cdot \frac{5 \cdot \sin 5^\circ (4 \cdot 10^3)^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 86 \cdot 10^4} = 8,45 \text{ мм};$$

$$f_y = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_y \ell^3}{EI_x} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cos \varphi \ell^3}{EI_x} = \frac{5}{384} \cdot \frac{5 \cdot \cos 5^\circ (4 \cdot 10^3)^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 1090 \cdot 10^4} = 7,62 \text{ мм},$$

а также величину и направление полного прогиба посередине пролета:

$$f_{\text{полн}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{8,45^2 + 7,62^2} = 11,4 \text{ мм},$$

который произойдет в направлении, перпендикулярном нейтральной оси (см. рисунок выше).

Задача 6

В заданных балках вследствие их изгиба прогиб сечения f происходит в направлении, указанном на рисунке. Определить для каждой из балок положение плоскости действия сил, т.е. угол φ , который силовая плоскость образует с осью Y .

РЕШЕНИЕ:

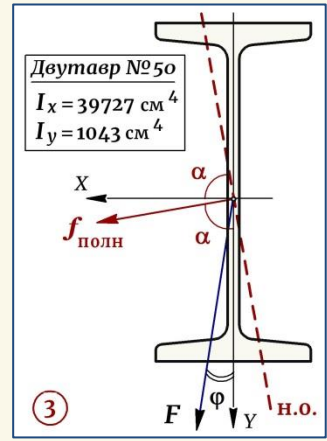
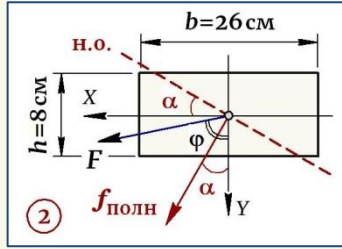
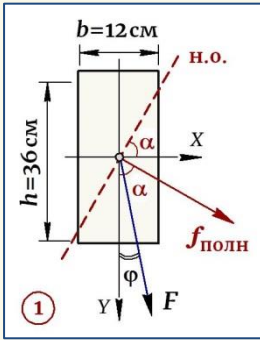
При *косом изгибе* прогиб сечений происходит в направлении, перпендикулярном нейтральной оси, а это значит, что если нейтральная ось составляет с осью X угол α , такой же угол с осью Y составляет вектор прогиба f . Поэтому направление прогиба вычисляется по та-

кой же формуле, как и положение нейтральной оси:

$$\text{tg} \alpha = \frac{I_x}{I_y} \text{tg} \varphi.$$

Отсюда, зная направление прогиба, вычисляем положение силовой плоскости по формуле:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \varphi$$



Сечение 1 — $\alpha = 60^\circ$ →

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_y}{I_x} \operatorname{tg} \alpha = \frac{hb^3/12}{bh^3/12} \operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2}{h^2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{12^2}{36^2} \operatorname{tg} 60^\circ = 0,1925 \rightarrow \varphi = 11^\circ.$$

Сечение 2 — $\alpha = 30^\circ$ →

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_y}{I_x} \operatorname{tg} \alpha = \frac{hb^3/12}{bh^3/12} \operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2}{h^2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{26^2}{8^2} \operatorname{tg} 30^\circ = 6,098 \rightarrow \varphi = 81^\circ.$$

Сечение 3 — $\alpha = 80^\circ$ →

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_y}{I_x} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1043}{39727} \operatorname{tg} 80^\circ = 0,149 \rightarrow \varphi = 8,5^\circ.$$

Задача 7

Чугунный брус треугольного сечения, шарнирно опертый по концам, изгибается силой $F = 6 \text{ кН}$, приложенной посередине пролета длиной $\ell = 1,2 \text{ м}$. Линия действия силы проходит параллельно стороне треугольника. Подобрать размеры сечения, если для материала $[\sigma]_{\text{раст}} = 40 \text{ МПа}$, $[\sigma]_{\text{сж}} = 100 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① Согласно размерам треугольного сечения силовая плоскость, параллельная стороне треугольника, проходит под углом к оси Y :

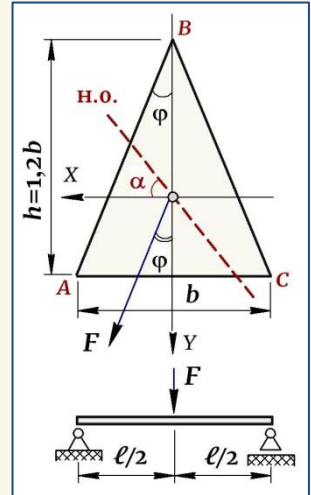
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{0,5b}{1,2b} = 0,4167 \rightarrow \boxed{\varphi} = 22,6^\circ. \quad (1)$$

② Определяем положение нейтральной оси сечения. С учетом моментов инерции для заданного треугольника, в котором $h = 1,2b$, —

$$I_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{b(1,2b)^3}{36} = 0,048b^4 \quad (2)$$
$$I_y = \frac{hb^3}{48} = \frac{1,2b \cdot b^3}{48} = 0,025b^4$$

и значения (1) получаем:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg}\varphi} = -\frac{0,048b^4}{0,025b^4} \operatorname{tg}22,6^\circ = -0,8 \rightarrow$$
$$\boxed{\alpha} = 38,6^\circ.$$



③ Для заданной расчетной схемы балки область сечения, расположенная ниже нейтральной оси, испытывает растяжение, а лежащая выше — сжатие. Максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, поэтому наибольшие растягивающие напряжения возникают в точке "А", а наибольшие сжимающие — в точке "В", имеющих координаты в системе главных центральных осей соответственно равные:

$$x_A = 0,5b; y_A = 1,2b/3 = 0,4b; \quad (3)$$

$$x_B = 0; y_B = 2(1,2b)/3 = 0,8b. \quad (4)$$

④ Опасным на балке является сечение посередине пролета, где:

$$M_{\max} = \frac{F\ell}{4} = \frac{6 \cdot 1,2}{4} = 1,8 \text{ кНм}. \quad (5)$$

⑤ Определяем размер сечения из условия прочности чугунной балки на растяжение:

$$\boxed{\sigma_{\max} = M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_A + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_A \right) \leq [\sigma]_{\text{раст}}},$$

которое согласно значениям (2) и (3) принимает вид –

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{b^3} (8,33 \cos \varphi + 20 \sin \varphi) \leq [\sigma]_{\text{раст}},$$

где для $\varphi = 22,6^\circ \rightarrow (8,33 \cos \varphi + 20 \sin \varphi) = 15,379$ и откуда с учетом значения (5) вычисляем размер сечения:

$$b = \sqrt[3]{\frac{M_{\max} \cdot 15,379}{[\sigma]_{\text{раст}}}} = \sqrt[3]{\frac{1,8 \cdot 10^6 \cdot 15,379}{40}} = 88,5 \text{ мм.}$$

⑥ Определяем размер сечения из условия прочности чугуновой балки на сжатие:

$$\sigma_{\max} = M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_B + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_B \right) \leq [\sigma]_{\text{сж}},$$

которое согласно значениям (2) и (4) принимает вид –

$$\sigma_{\max} = \frac{16,67 M_{\max}}{b^3} \cos \varphi \leq [\sigma]_{\text{сж}},$$

откуда с учетом значений (1) и (5) вычисляем размер сечения:

$$b = \sqrt[3]{\frac{16,67 M_{\max} \cos \varphi}{[\sigma]_{\text{сж}}}} = \sqrt[3]{\frac{16,67 \cdot 1,8 \cdot 10^6 \cos 22,6^\circ}{100}} = 65,2 \text{ мм.}$$

Из двух значений принимаем бóльшее – $b = 88,5 \text{ мм}$.

Задача 8

Деревянный брус с поперечным сечением, представленном на рисунке, шарнирно опирается по концам и посередине пролета длиной $\ell = 2,4 \text{ м}$ нагружается сосредоточенной силой "F", наклоненной к оси симметрии сечения Y под углом $\varphi = 60^\circ$. Определить силу [F], если для материала $[\sigma] = 12 \text{ МПа}$. Принять для сечения: $I_x = 6525 \text{ см}^4$, $I_y = 3686 \text{ см}^4$.

РЕШЕНИЕ:

① Определяем положение нейтральной оси сечения:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \varphi} = -\frac{6525}{3686} \operatorname{tg} 60^\circ = -3,07 \rightarrow \boxed{\alpha} = 72^\circ.$$

② Опасным на балке является сечение посередине пролета:

$$M_{\max} = \frac{F\ell}{4}. \quad (1)$$

③ Наиболее нагруженной в опасном сечении является точка "А", имеющая координаты в главных центральных осях:

$$x_A = 7 \text{ см}; \quad y_A = 8,82 \text{ см}. \quad (2)$$

④ Из условия прочности при *косом изгибе* с учетом значений (1) и (2) подбираем силу $[F]$, безопасную для прочности балки:

$$\boxed{\sigma_{\max} = M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_A + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_A \right) \leq [\sigma]},$$

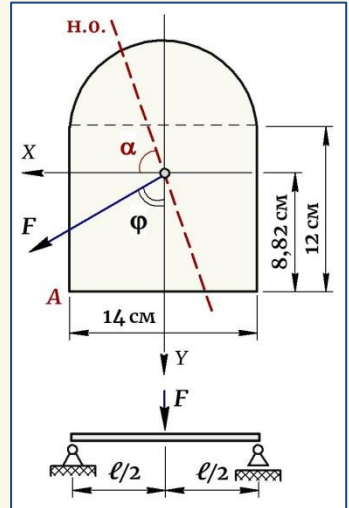
где —

$$\left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_A + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_A \right) = \left(\frac{\cos 60^\circ \cdot 88,2}{6525 \cdot 10^4} + \frac{\sin 60^\circ \cdot 70}{3686 \cdot 10^4} \right) = 0,0232 \cdot 10^{-4}.$$

В результате получаем —

$$\sigma_{\max} = M_{\max} \cdot 0,0232 \cdot 10^{-4} = \frac{F\ell}{4} \cdot 0,0232 \cdot 10^{-4} \leq [\sigma],$$

$$\text{откуда: } [F] = \frac{4[\sigma]}{\ell \cdot 0,0232 \cdot 10^{-4}} = \frac{4 \cdot 12}{2,4 \cdot 10^3 \cdot 0,0232 \cdot 10^{-4}} = 8,6 \text{ кН}.$$

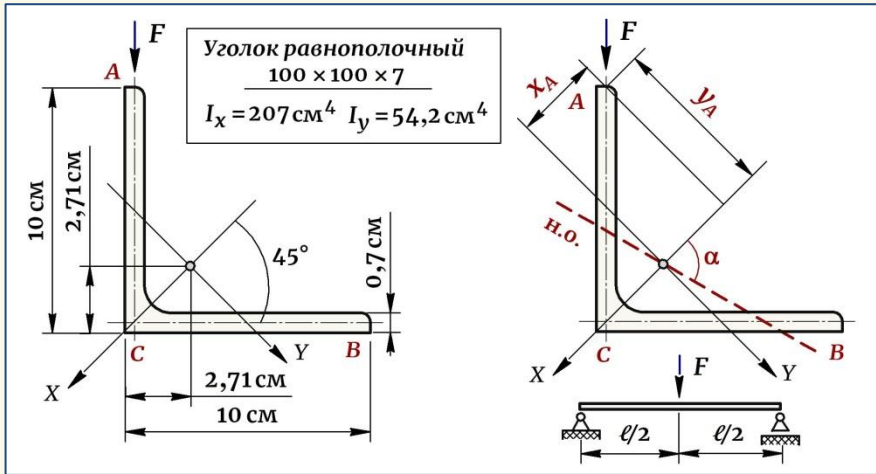


Задача 9

Равнобокий уголок $100 \times 100 \times 7$ мм длиной $\ell = 1,5$ м шарнирно опирается на опоры и нагружается посередине пролета силой "F". Линия действия силы проходит через центр изгиба. Определить допускаемую величину этой силы, если для балки $[\sigma] = 160$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

В равнополочном уголке линия действия силы не совпадает с главными центральными осями сечения $X - Y$ и отклонена от них на угол $\varphi = 45^\circ$, а значит, уголок испытывает *косой изгиб*.



- ① Опасным на балке является сечение посередине пролета:

$$M_{\max} = F\ell/4. \quad (1)$$

- ② Определяем в сечении положение нейтральной оси:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg}\varphi} = -\frac{207}{54,2} \operatorname{tg}45^\circ = -3,82 \rightarrow \boxed{\alpha} = 75,3^\circ,$$

где при данной схеме нагружения все точки сечения, лежащие ниже нейтральной оси, испытывают растяжение, выше – сжатие.

- ③ Наиболее удаленной от нейтральной оси, и следовательно, наиболее нагруженной в опасном сечении является точка "А", имеющая координаты в главных центральных осях –

$$\begin{aligned} X_A &= -(10 \cos 45^\circ - 2,71/\cos 45^\circ) = -3,24 \text{ см}; \\ Y_A &= -(10 \cos 45^\circ) = -7,07 \text{ см}, \end{aligned} \quad (2)$$

и испытывающая наибольшие сжимающие напряжения. Считая, что материал уголка одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, знак «минус» координат X_A и Y_A (2), который соответствует заданному направлению главных осей $X - Y$, в дальнейшем расчете можно не учитывать.

④ Записываем для балки условие прочности и подбираем допускаемую безопасную силу $[F]$:

$$\sigma_{\max} = M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_A + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_A \right) \leq [\sigma], \text{ где —}$$

$$\left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_A + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_A \right) = \left(\frac{\cos 45^\circ \cdot 70,7}{207 \cdot 10^4} + \frac{\sin 45^\circ \cdot 32,4}{54,2 \cdot 10^4} \right) = 0,6787 \cdot 10^{-4}.$$

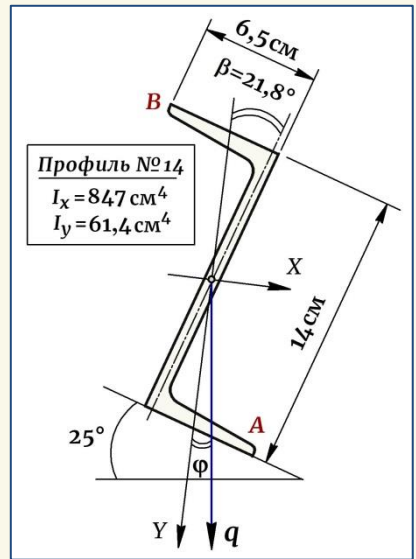
В результате получаем —

$$\sigma_{\max} = M_{\max} \cdot 0,6787 \cdot 10^{-4} = (F\ell/4) \cdot 0,6787 \cdot 10^{-4} \leq [\sigma],$$

откуда:
$$[F] = \frac{4 [\sigma]}{\ell \cdot 0,6787 \cdot 10^{-4}} = \frac{4 \cdot 160}{1,5 \cdot 10^3 \cdot 0,6787 \cdot 10^{-4}} = 6,3 \text{ кН.}$$

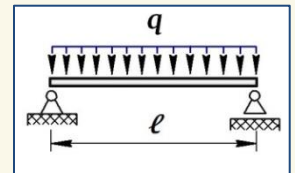
Задача 10

Балка зетового сечения №14 длиной $\ell = 2,2 \text{ м}$ работает как шарнирно опертая по концам и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой "q", плоскость действия которой проходит через центр изгиба. Оси X-Y являются главными центральными осями сечения. Определить наибольшую допустимую нагрузку $[q]$, если $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, а также величину и направление полного прогиба посередине пролета. Принять: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

① Определяем положение нейтральной оси в сечении. Главные центральные оси X-Y в зетовом сечении повернуты относительно полок под углом $\beta = 21,8^\circ$, поэтому угол отклонения силовой плоскости от оси Y соответственно равен $\varphi = 25^\circ - 21,8^\circ = 3,2^\circ$.



В результате получаем:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \varphi = -\frac{847}{61,4} \operatorname{tg} 3,2^\circ = -0,7712 \rightarrow}$$

$$\boxed{\alpha = 37,6^\circ.}$$

② Опасным на балке является сечение посередине пролета, где возникает максимальный изгибающий момент, равный:

$$M_{\max} = ql^2/8.$$

③ В опасном сечении наиболее удаленными от нейтральной оси являются точка "А" (в зоне растяжения) и точка "В" (в зоне сжатия), имеющие одинаковые координаты в главных осях, но с соответствующим направлению осей знаком —

$$x_A = x_B = \pm (6,5 - 7 \operatorname{tg} 21,8^\circ) \cos 21,8^\circ = \pm 3,44 \text{ см};$$

$$y_A = y_B = \pm [7/\cos 21,8^\circ + (6,5 - 7 \operatorname{tg} 21,8^\circ) \sin 21,8^\circ] = \pm 8,91 \text{ см},$$

который в дальнейшем расчете не учитываем, принимая, что материал имеет одинаковую прочность на растяжение и сжатие.

④ Записываем для балки условие прочности и подбираем допускаемую нагрузку $[q]$:

$$\boxed{\sigma_{\max} = M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_{A,B} + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_{A,B} \right) \leq [\sigma]}, \text{ где —}$$

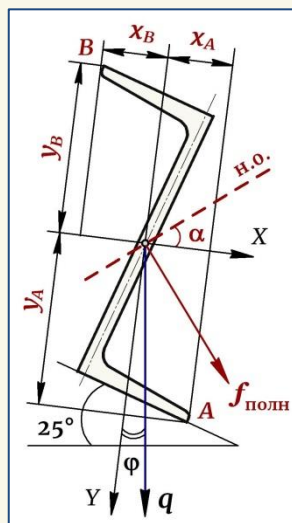
$$\left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_{A,B} + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_{A,B} \right) = \left(\frac{\cos 3,2^\circ \cdot 89,1}{847 \cdot 10^4} + \frac{\sin 3,2^\circ \cdot 34,4}{61,4 \cdot 10^4} \right) = \frac{0,1363}{10^4}.$$

В результате получаем —

$$\sigma_{\max} = M_{\max} \cdot 0,1363 \cdot 10^{-4} = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{0,1363}{10^4} \leq [\sigma], \text{ откуда:}$$

$$[q] = \frac{8[\sigma]}{l^2 \cdot 0,1363 \cdot 10^{-4}} = \frac{8 \cdot 160}{(2,2 \cdot 10^3)^2 \cdot 0,1363 \cdot 10^{-4}} = 19,4 \text{ кН/м.}$$

⑤ Для данной расчетной схемы балки используем формулу для максимального прогиба —



$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q\ell^4}{EI_{н.о.}}$$

и, разложив нагрузку на составляющие по направлению осей X – Y –

$$q_x = q \sin \varphi = 19,4 \sin 3,2^\circ = 1,08 \text{ кН/м};$$

$$q_y = q \cos \varphi = 19,4 \cos 3,2^\circ = 19,37 \text{ кН/м},$$

определяем прогибы, возникающие в этих направлениях –

$$f_x = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_x \ell^4}{EI_y} = \frac{5}{384} \cdot \frac{1,08 (2,2 \cdot 10^3)^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 61,4 \cdot 10^4} = 2,68 \text{ мм};$$

$$f_y = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_y \ell^3}{EI_x} = \frac{5}{384} \cdot \frac{19,37 (2,2 \cdot 10^3)^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 847 \cdot 10^4} = 3,49 \text{ мм},$$

а также величину и направление полного прогиба посередине пролета:

$$f_{\text{полн}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{2,68^2 + 3,49^2} = 4,4 \text{ мм},$$

который произойдет в направлении, перпендикулярном нейтральной оси (см. рисунок выше).

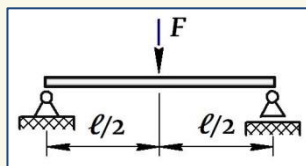
Примечание.

При изгибе тонкостенных профилей, характеризующихся наличием горизонтальных и вертикальных участков большой протяженности, вследствие действия здесь касательных напряжений, направленных параллельно контурам, возникает **поток касательных напряжений**, равнодействующая которого равна поперечной силе Q , действующей в сечении. В сечениях, симметричных относительно главной плоскости инерции, являющейся силовой плоскостью (например, двутавр), поток касательных напряжений уравновешен и его равнодействующая Q проходит через центр тяжести сечения. В сечениях, нагруженных в главной плоскости инерции, не являющейся плоскостью симметрии (например, швеллеры, равнобокие и неравнобокие уголки), поток касательных напряжений создает момент относительно центра тяжести и оси балки, который вызывает ее закручивание и искривление сечения. Поэтому в таких сечениях во избежание закручивания при изгибе равнодействующая внешних сил, равная поперечной силе Q , должна проходить через **центр изгиба** – точку, относительно которой сумма моментов всех касательных сил в сечении равна нулю. Определение положения центра изгиба является одним из наиболее важных расчетов для целого ряда конструкций. Следует понимать, что в общем случае центр изгиба не совпадает с центром тяжести сечения, но подобно центру тяжести всегда лежит на оси симметрии или на пересечении осей симметрии. В этом случае центр изгиба сов-

падает с центром тяжести сечения, что имеет место в сечениях двутавр, полых прямоугольных и квадратных сечениях, круглых замкнутых сечениях и т. д. Для сечений в виде тавра, уголка или других пучкообразных сечений центр изгиба расположен в центре пучка, т. е. на пересечении средних линий прямоугольных участков, из которых состоит сечение. Чтобы в элементах такого профиля создать плоский изгиб без закручивания, силовая плоскость должна проходить либо по оси симметрии сечения, либо по линии, проходящей через центр изгиба. В зетовом сечении, главные оси $X - Y$ которого наклонены к полкам, центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения.

Задача 11

При установке на опоры двутавра №70 длиной $\ell = 4$ м, предназначенного для работы на изгиб силой $F = 600$ кН в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью стенки, была допущена ошибка и стенка двутавра отклонилась от вертикали на угол $\varphi = 2^\circ$. Определить связанное с этим увеличение максимальных напряжений σ_{\max} в балке и изменение полного прогиба посередине пролета. Принять для двутавра: $I_x = 134600$ см⁴; $I_y = 2730$ см⁴; $W_x = 3840$ см³; $W_y = 260$ см³; $E = 2 \times 10^5$ МПа.



РЕШЕНИЕ:

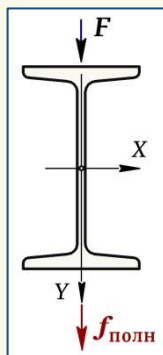
① Опасным на балке является сечение посередине пролета, где действует максимальный изгибающий момент, равный:

$$M_{\max} = F\ell/4 = 600 \cdot 4/4 = 600 \text{ кН}.$$

② Рассматриваем вариант вертикальной установки двутавра, что обеспечивает **плоский изгиб**, и по соответствующим формулам определяем максимальные напряжения и прогиб посередине пролета:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{600 \cdot 10^6}{3840 \cdot 10^3} = 156 \text{ МПа};$$

$$f_{\text{полн}} = f_y = \frac{F\ell^3}{48EI_x} = \frac{600 \cdot 10^3 (4 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 134600 \cdot 10^4} = 2,97 \text{ мм}.$$



③ Рассматриваем установку двутавра с отклонением стенки от вертикали на угол $\varphi = 2^\circ$, в результате чего возникает *косой изгиб* :

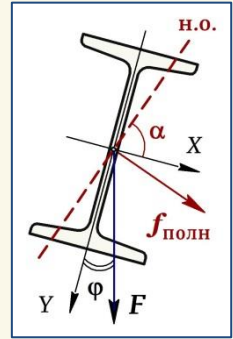
★ Определяем положение нейтральной оси —

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \varphi} = -\frac{134600}{2730} \operatorname{tg} 2^\circ = -1,7217 \rightarrow$$

$$\boxed{\alpha} = 60^\circ.$$

★ Определяем максимальные напряжения —

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{W_x} + \frac{\sin \varphi}{W_y} \right) = \\ &= 600 \cdot 10^6 \left(\frac{\cos 2^\circ}{3840 \cdot 10^3} + \frac{\sin 2^\circ}{260 \cdot 10^3} \right) = 237 \text{ МПа}; \end{aligned}$$



★ Определяем величину и направление полного прогиба —

$$\boxed{f_x} = \frac{F_x \ell^3}{48EI_y} = \frac{F \sin \varphi \ell^3}{48EI_y} = \frac{600 \cdot 10^3 \sin 2^\circ (4 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2730 \cdot 10^4} = 5,1 \text{ мм};$$

$$\boxed{f_y} = \frac{F_y \ell^3}{48EI_x} = \frac{F \cos \varphi \ell^3}{48EI_x} = \frac{600 \cdot 10^3 \cos 2^\circ (4 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 134600 \cdot 10^4} = 2,97 \text{ мм};$$

$$\boxed{f_{\text{полн}}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{5,1^2 + 2,97^2} = 5,9 \text{ мм}.$$

Полный прогиб происходит в направлении, перпендикулярном нейтральной оси (см. рисунок выше).

ВЫВОДЫ:

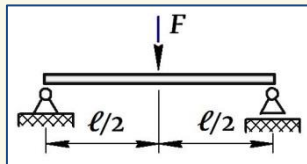
1. При изгибе двутавровой балки в случае отклонении стенки двутавра от вертикали даже на такой незначительный угол 2° напряжения возрастают примерно в полтора раза — $\frac{237}{156} \approx 1,5$.

2. Прогиб в вертикальной плоскости Y почти не изменяется, но появляется составляющая прогиба в горизонтальной плоскости X , что нарушает жесткость конструкции, и полный прогиб балки посередине пролета в целом увеличивается почти в два раза.

Задача 12

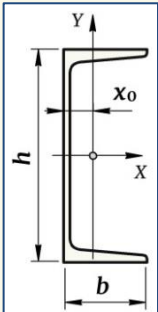
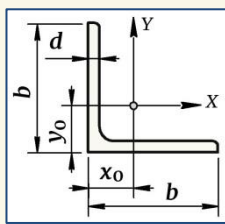
Шарнирно опертая по концам балка длиной $\ell = 2,8\text{ м}$ нагружена посередине пролета сосредоточенной силой " F ". Поперечное сечение балки – швеллер №24. При проектировании конструкции предполагается, что к стенке швеллера вдоль всей длины будет приварен равнобокий уголок $125 \times 125 \times 12\text{ мм}$. Принимая для материала элементов $[\sigma] = 160\text{ МПа}$, определить силу $[F]$:

а) для одного швеллера; б) для составного сечения, считая, что силовая плоскость в обоих случаях проходит через центр тяжести сечения параллельно стенке швеллера. Определить также для обоих вариантов балок полный прогиб посередине пролета, возникающий от силы $F = 50\text{ кН}$.



РЕШЕНИЕ:

① Из таблиц СОРТАМЕНТА выписываем исходные данные для прокатных профилей, рассматриваемых в задаче:

Швеллер № 24	Уголок равнобокий $125 \times 125 \times 12\text{ мм}$
 <p> $h = 24\text{ см}$ $b = 9\text{ см}$ $A = 30,6\text{ см}^2$ $x_0 = 2,42\text{ см}$ $I_x = 2900\text{ см}^4$ $I_y = 208\text{ см}^4$ $W_x = 242\text{ см}^3$ $W_y = 31,6\text{ см}^3$ </p>	 <p> $b = 12,5\text{ см}$ $d = 1,2\text{ см}$ $x_0 = y_0 = 3,53\text{ см}$ $A = 24,3\text{ см}^2$ $I_x = I_y = 422\text{ см}^4$ $I_{xy} = 248\text{ см}^4$ </p>

② Опасным на балке является сечение посередине пролета, где действует максимальный изгибающий момент, равный:

$$M_{\max} = F\ell/4. \quad (1)$$

③ Рассматриваем балку, состоящую из одного швеллера (рис. 1). Силовая плоскость проходит параллельно стенке швеллера, но не через центр изгиба, а через центр тяжести сечения, поэтому помимо изгиба возникает закручивание швеллера, о чем было сказано выше. Однако кручением пренебрегаем и из условия прочности для **плоского**

изгиба с учетом (1) определяем для балки наибольшую допустимую силу $[F]$:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{F\ell}{4W_x} \leq [\sigma], \text{ откуда}$$

$$[F] = \frac{4W_x [\sigma]}{\ell} = \frac{4 \cdot 242 \cdot 10^3 \cdot 160}{2,8 \cdot 10^3} = 55,3 \text{ кН.} \quad (2)$$

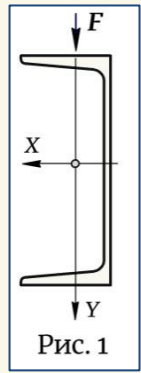


Рис. 1

④ Рассматриваем балку, состоящую из швеллера и равнобокого уголка, жестко приваренного к швеллеру по всей длине (рис. 2). В составном сечении находим центр тяжести, определяем положение главных центральных осей $X-Y$ и вычисляем главные центральные моменты инерции. На основании данных для швеллера и уголка устанавливаем, что главные оси инерции $X-Y$ составного сечения повернуты относительно системы центральных осей X_C-Y_C , параллельных полкам и стенке швеллера, на угол $15,2^\circ$, а главные центральные моменты инерции равны — $I_x = 4546 \text{ см}^4$ и $I_y = 858 \text{ см}^4$.

Согласно условию нагружения силовая плоскость проходит через центр тяжести сечения параллельно стенке швеллера, а значит, отклонена от главной оси Y на угол $\varphi = 15,2^\circ$, соответствующий повороту оси от вертикали. В результате в балке возникает **косой изгиб**:

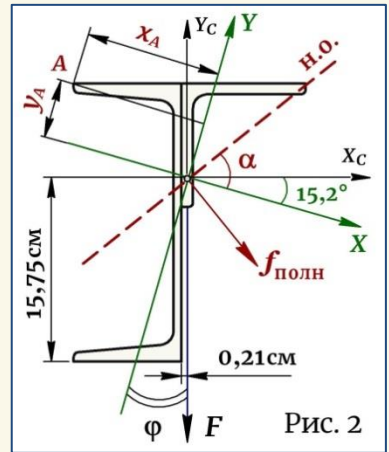


Рис. 2

★ Определяем в сечении положение нейтральной оси —

$$\text{tg}\alpha = -\frac{I_x}{I_y} \text{tg}\varphi = -\frac{4546}{858} \text{tg}15,2^\circ = -1,4395 \rightarrow \alpha = 55,2^\circ,$$

которая делит сечение на напряжения двух знаков, где, согласно расчетной схеме балки, точки, лежащие выше нейтральной оси, испытывают сжатие, ниже — растяжение.

★ Наиболее удаленной от нейтральной оси является в сечении точка "А" (рис. 2), имеющая координаты в центральных осях X_C-Y_C с учетом их направления, равные: $(-9,21 \text{ см}; 8,25 \text{ см})$. Учитывая, что

главные центральные оси инерции повернуты относительно $X_C - Y_C$ по часовой стрелке, угол поворота является отрицательным $\boxed{-15,2^\circ}$, и тогда на основании формул при повороте осей координаты точки "А" в главных осях $X - Y$ определяются как:

$$x_A = -9,21 \cos(-15,2^\circ) + 8,25 \sin(-15,2^\circ) = -11,05 \text{ см};$$

$$y_A = -[-9,21 \sin(-15,2^\circ)] + 8,25 \cos(-15,2^\circ) = 5,55 \text{ см},$$

где знак координат соответствует направлению главных осей $X - Y$.

★ Записываем для составной балки условие прочности при **косом изгибе** и определяем наибольшую допускаемую силу $[F]$:

$$\sigma_{\max} = M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_A + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_A \right) \leq [\sigma], \text{ где}$$

$$\left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_A + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_A \right) = \frac{\cos(-15,2^\circ) 55,5}{4546 \cdot 10^4} + \frac{\sin(-15,2^\circ) (-110,5)}{858 \cdot 10^4} =$$

$$= 0,0456 \cdot 10^{-4}. \text{ В результате с учетом значения (1) получаем —}$$

$$\sigma_{\max} = M_{\max} \cdot 0,0456 \cdot 10^{-4} = \frac{F\ell}{4} \cdot 0,0456 \cdot 10^{-4} \leq [\sigma], \text{ откуда:}$$

$$[F] = \frac{4[\sigma]}{\ell \cdot 0,0456 \cdot 10^{-4}} = \frac{4 \cdot 160}{2,8 \cdot 10^3 \cdot 0,0456 \cdot 10^{-4}} = 50,1 \text{ кН}. \quad (3)$$

⑤ Определяем для обеих балок наибольший прогиб, возникающий от действия силы $F = 50 \text{ кН}$:

★ **Балка из одного швеллера** (рис. 1):

$$\boxed{f_{\text{полн}}} = f_y = \frac{F\ell^3}{48EI_x} = \frac{50 \cdot 10^3 (2,8 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2900 \cdot 10^4} = 3,94 \text{ мм}. \quad (4)$$

★ **Составная балка** (рис. 2):

$$\boxed{f_x} = \frac{F_x \ell^3}{48EI_y} = \frac{F \sin \varphi \ell^3}{48EI_y} = \frac{50 \cdot 10^3 \sin 15,2^\circ (2,8 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 858 \cdot 10^4} = 3,49 \text{ мм};$$

$$\boxed{f_y} = \frac{F_y \ell^3}{48EI_x} = \frac{F \cos \varphi \ell^3}{48EI_x} = \frac{50 \cdot 10^3 \cos 15,2^\circ (2,8 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4546 \cdot 10^4} = 2,43 \text{ мм};$$

$$\boxed{f_{\text{полн}}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{3,49^2 + 2,43^2} = 4,25 \text{ мм}. \quad (5)$$

ВЫВОДЫ:

1. Анализ значений (2) и (3) показывает, что составная балка, выполненная из швеллера с приваренным по длине уголком, при заданной схеме нагружения имеет грузоподъемность примерно на 10% меньшую, чем балка, выполненная из одного швеллера.

2. При одинаковой нагрузке прогиб составной балки (5) примерно на 8% больше, чем балки из швеллера (4), а значит, она имеет также и более низкую жесткость.

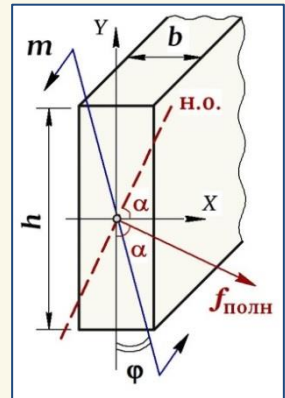
Задача 13

В балке прямоугольного сечения с размерами " $h = 3b$ " определить положение силовой плоскости и вектора изгибающего момента, если прогиб балки возникает в направлении под углом $\alpha = 70^\circ$ к главной вертикальной оси инерции сечения.

РЕШЕНИЕ:

При **косом изгибе** прогиб сечений происходит в направлении, перпендикулярном нейтральной оси, а это значит, что если нейтральная ось составляет с осью X угол α , такой же угол с осью Y составляет вектор прогиба f . Поэтому направление прогиба вычисляется по такой же формуле, как и положение нейтральной оси:

$$\boxed{\text{tg}\alpha = \frac{I_x}{I_y} \text{tg}\varphi}$$



Отсюда определяем положение плоскости момента " m ":

$$\text{tg}\varphi = \frac{I_y}{I_x} \text{tg}\alpha = \frac{hb^3/12}{bh^3/12} \text{tg}\alpha = \frac{3b \cdot b^3}{b \cdot (3b)^3} \text{tg}\alpha = \frac{\text{tg}\alpha}{9} = \frac{\text{tg}70^\circ}{9} = 0,3053 \rightarrow$$

$$\boxed{\varphi} = 17^\circ.$$

Задача 14

Для балки полукруглого сечения определить наибольшую допускаемую силу $[F]$. Значения $d, a, [\sigma]$ и $\varphi = 55^\circ$ считать заданными. Решение выполнить в общем виде.

РЕШЕНИЕ:

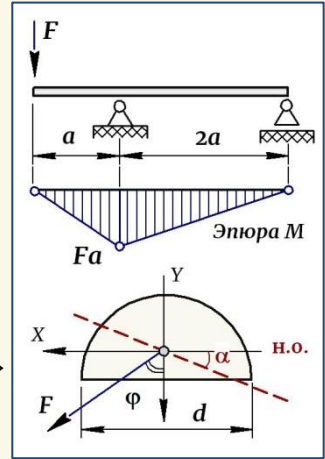
① Максимальный изгибающий момент в опасном сечении балки равен:

$$M_{\max} = Fa. \quad (1)$$

② Определяем положение нейтральной оси в сечении, принимая для полукруглого сечения значения $I_x = 0,0069d^4$ и $I_y = \pi d^4/128$:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \varphi} = -\frac{0,0069d^4}{\pi d^4/128} \operatorname{tg} 55^\circ = -0,4017 \rightarrow$$

$$\boxed{\alpha} = 21,8^\circ.$$



③ Записываем для балки условие прочности и с учетом значения (1), принимая для полукруга $W_x = 0,0239d^3$ (для верхних волокон) и $W_y = 0,05d^3$, определяем наибольшую допускаемую силу $[F]$:

$$\boxed{\sigma_{\max} = M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{W_x} + \frac{\sin \varphi}{W_y} \right)} = Fa \left(\frac{\cos \varphi}{W_x} + \frac{\sin \varphi}{W_y} \right) \leq [\sigma], \text{ откуда}$$

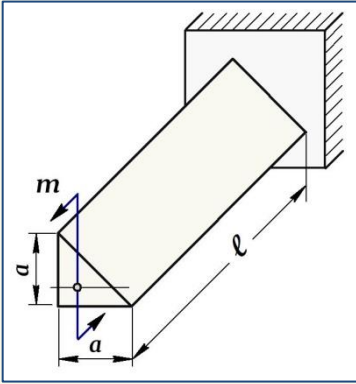
$$[F] = \frac{[\sigma]}{a \left(\frac{\cos \varphi}{W_x} + \frac{\sin \varphi}{W_y} \right)} = \frac{[\sigma]}{a \left(\frac{\cos 55^\circ}{0,0239d^3} + \frac{\sin 55^\circ}{0,05d^3} \right)} = 0,025 \frac{[\sigma] d^3}{a}.$$

Задача 15

В балке треугольного сечения, нагруженной в вертикальной плоскости моментом m , определить наибольшие напряжения и полный прогиб конца консоли. Значения ℓ, a, E, m считать заданными. Решение выполнить в общем виде.

РЕШЕНИЕ:

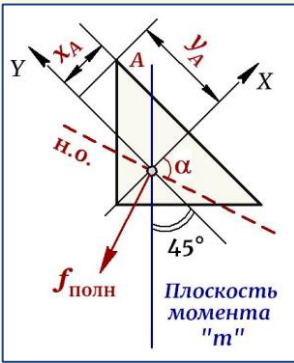
- ① В треугольном сечении главными центральными осями являются оси $X-Y$. Силовая плоскость проходит через центры тяжести сечений, но не совпадает с главными плоскостями инерции, поэтому балка испытывает *косой изгиб*. Максимальный изгибающий момент и моменты инерции треугольного сечения относительно главных осей соответственно равны:



$$M_{\max} = m; I_x = a^4/24; I_y = a^4/72. \quad (1)$$

- ② Определяем положение нейтральной оси в сечении:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \varphi = -\frac{a^4/24}{a^4/72} \operatorname{tg} 45^\circ = -3 \rightarrow \alpha = 72^\circ.}$$



- ③ Наиболее удаленной от нейтральной оси в сечении, и значит, наиболее нагруженной, является точка "А", координаты которой в главных осях $X-Y$ определяются по правилам преобразования системы координат и соответственно равны:

$$\begin{aligned} x_A &= (-1/3)a \cos 45^\circ + (2/3)a \sin 45^\circ = (a\sqrt{2})/6; \\ y_A &= -(-1/3)a \sin 45^\circ + (2/3)a \cos 45^\circ = (a\sqrt{2})/2. \end{aligned} \quad (2)$$

- ④ С учетом значений (1) и (2) определяем напряжения в точке "А":

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_A + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_A \right) = \\ &= m \left(\frac{\cos 45^\circ (a\sqrt{2})/2}{a^4/24} + \frac{\sin 45^\circ (a\sqrt{2})/6}{a^4/72} \right) = 24 \frac{m}{a^3}. \end{aligned}$$

- ⑤ Определяем величину и направление полного прогиба конца консоли. Для этого раскладываем плоскость момента на главные плоскости инерции и с учетом значений (1) определяем прогибы от момен-

тов m_x и m_y в соответствующих плоскостях, а также величину полного прогиба, который происходит в направлении, перпендикулярном нейтральной оси:

$$\boxed{f_x} = \frac{m_x \ell^2}{2EI_y} = \frac{m \sin 45^\circ \ell^2}{2EI_y} = \frac{m(\sqrt{2}/2)\ell^2}{2E(a^4/72)} = 18\sqrt{2} \frac{m\ell^2}{Ea^4};$$

$$\boxed{f_y} = \frac{m_y \ell^2}{2EI_x} = \frac{m \cos 45^\circ \ell^2}{2EI_x} = \frac{m(\sqrt{2}/2)\ell^2}{2E(a^4/24)} = 6\sqrt{2} \frac{m\ell^2}{Ea^4};$$

$$\boxed{f_{\text{полн}}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{\left(18\sqrt{2} \frac{m\ell^2}{Ea^4}\right)^2 + \left(6\sqrt{2} \frac{m\ell^2}{Ea^4}\right)^2} = 26,8 \frac{m\ell^2}{Ea^4}.$$

Задача 16

Определить наибольшие напряжения и перемещение свободного конца консольной балки длиной $\ell = 1$ м, выполненной из неравнобокого уголка $75 \times 50 \times 5$ мм, нагруженного на конце консоли моментом $m = 0,6$ кНм. Принять для уголка: $E = 2 \times 10^5$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① Определяем в сечении уголка положение нейтральной оси:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \varphi} = -\frac{40}{7,24} \operatorname{tg} 23,6^\circ = -2,41 \rightarrow \boxed{\alpha} = 67,5^\circ.$$

② Наиболее удаленной от нейтральной оси в сечении, и значит, наиболее нагруженной, является точка "А", координаты которой в главных осях X - Y определяются по правилам преобразования системы координат и соответственно равны:

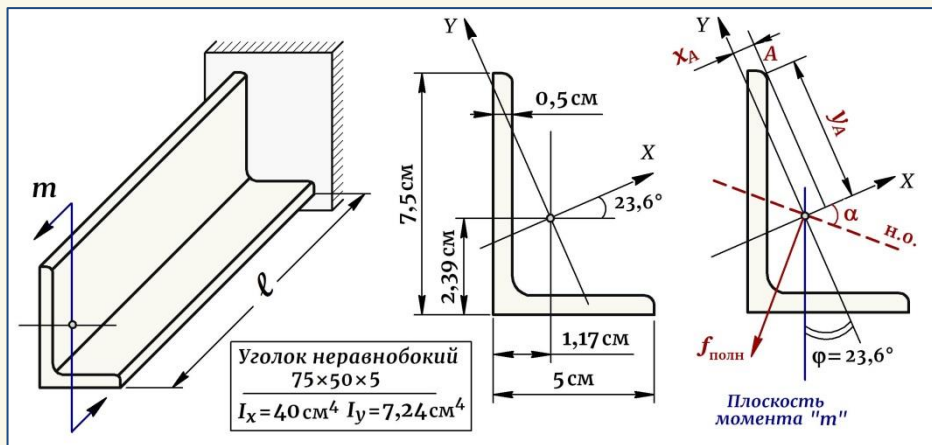
$$\begin{aligned} X_A &= -(1,17 - 0,5) \cos 23,6^\circ + (7,5 - 2,39) \sin 23,6^\circ = 1,43 \text{ см}; \\ Y_A &= -[-(1,17 - 0,5)] \sin 23,6^\circ + (7,5 - 2,39) \cos 23,6^\circ = 4,95 \text{ см}. \end{aligned} \quad (1)$$

③ По формуле для напряжений при **косом изгибе** —

$$\boxed{\sigma_{\max} = M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y_A + \frac{\sin \varphi}{I_y} x_A \right)},$$

учитывая, что $M_{\max} = m$, с учетом значений (1) определяем в уголке напряжения в точке "А":

$$\sigma_{\max} = 0,6 \cdot 10^6 \left(\frac{\cos 23,6^\circ}{40 \cdot 10^4} \cdot 49,5 + \frac{\sin 23,6^\circ}{7,24 \cdot 10^4} \cdot 14,3 \right) = 115,5 \text{ МПа.}$$



④ Определяем величину и направление полного прогиба конца консоли. Для этого раскладываем плоскость момента на главные плоскости инерции, определяем прогибы от моментов m_x и m_y в соответствующих плоскостях, а также величину полного прогиба, который происходит в направлении, перпендикулярном нейтральной оси:

$$f_x = \frac{m_x \ell^2}{2EI_y} = \frac{m \sin 23,6^\circ \ell^2}{2EI_y} = \frac{0,6 \cdot 10^6 \sin 23,6^\circ \cdot (1 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 7,24 \cdot 10^4} = 8,29 \text{ мм;}$$

$$f_y = \frac{m_y \ell^2}{2EI_x} = \frac{m \cos 23,6^\circ \ell^2}{2EI_x} = \frac{0,6 \cdot 10^6 \cos 23,6^\circ \cdot (1 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 40 \cdot 10^4} = 3,44 \text{ мм;}$$

$$f_{\text{полн}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{8,29^2 + 3,44^2} = 9 \text{ мм.}$$

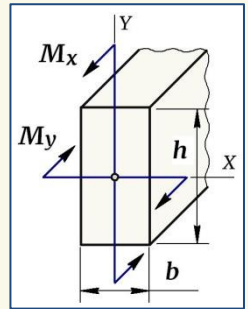
Задача 17

Брус прямоугольного сечения подвергается *косому изгибу* моментами M_x и M_y . Из условия прочности бруса определить соотношение сторон " $k = h/b$ ", при котором брус имеет наименьший вес.

РЕШЕНИЕ:

① При заданном соотношении сторон моменты сопротивления прямоугольного сечения соответственно равны:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{k^2b^3}{6}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{kb^3}{6}. \quad (1)$$



② Записываем для бруса условие прочности —

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]$$

и с учетом значений (1) получаем:

$$\sigma_{\max} = \frac{6M_x}{k^2b^3} + \frac{6M_y}{kb^3} \leq [\sigma], \quad \text{откуда} \quad \boxed{b} = \sqrt[3]{\frac{6M_x + 6kM_y}{k^2[\sigma]}}. \quad (2)$$

③ Площадь сечения согласно заданному соотношению сторон прямоугольника с учетом значения (2) равна:

$$\begin{aligned} \boxed{A} = bh = kb^2 &= k \left(\sqrt[3]{\frac{6M_x + 6kM_y}{k^2[\sigma]}} \right)^2 = k \sqrt[3]{\frac{(6M_x + 6kM_y)^2}{k^4[\sigma]^2}} = \\ &= \sqrt[3]{\frac{36(M_x + kM_y)^2}{k[\sigma]^2}} = \frac{\left[36(M_x + kM_y)^2 \right]^{1/3}}{\left(k[\sigma]^2 \right)^{1/3}} = \frac{u}{v}, \end{aligned} \quad (3)$$

где числитель и знаменатель в выражении (3) представлен в виде функций, соответственно равных —

$$\boxed{u} = \left[36(M_x + kM_y)^2 \right]^{1/3}; \quad \boxed{v} = \left(k[\sigma]^2 \right)^{1/3}. \quad (4)$$

④ Брус имеет наименьший вес при наименьшей площади сечения, поэтому исследуем функцию (3) на экстремум и определим значение "k", при котором площадь сечения будет минимальной:

$$\boxed{\frac{dA}{dk} = 0} \rightarrow (u/v)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = 0 \rightarrow \boxed{u'v - v'u = 0}. \quad (5)$$

На основании значений (4) и их производных приводим уравнение (5) к виду —

$$\sqrt[3]{36} \frac{2}{3} (M_x + kM_y)^{-1/3} M_y k^{1/3} [\sigma]^{2/3} - \sqrt[3]{36} (M_x + kM_y)^{2/3} \times$$

$$\times [\sigma]^{2/3} \frac{1}{3} k^{-2/3} = 0, \text{ сокращаем на } \frac{\sqrt[3]{36} [\sigma]^{2/3}}{3} \text{ и получаем:}$$

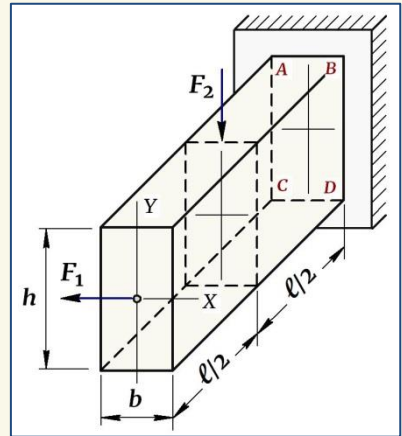
$$\frac{2M_y \sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{(M_x + kM_y)}} - \frac{\sqrt[3]{(M_x + kM_y)^2}}{\sqrt[3]{k^2}} = 0 \rightarrow 2M_y k - M_x - kM_y = 0,$$

откуда —

$$\boxed{k = M_x / M_y}.$$

Задача 18

Деревянная балка прямоугольного сечения длиной $\ell = 1,4$ м, защемленная одним концом, нагружается силами $F_1 = 0,6$ кН и $F_2 = 1,5$ кН, как показано на рисунке. Подобрать прямоугольное сечение балки при отношении сторон " $h/b = 3$ ", если для материала $[\sigma] = 12$ МПа. Определить величину и направление полного прогиба конца консоли. Принять: $E = 1 \times 10^4$ МПа.

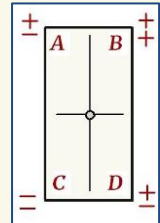


РЕШЕНИЕ:

① Опасным на балке является сечения в заделке "ABCD", где действуют наибольшие изгибающие моменты —

$$\begin{aligned} M_x &= F_2 \cdot \ell/2 = 1,5 \cdot 0,7 = 1,05 \text{ кНм;} \\ M_y &= F_1 \cdot \ell = 0,6 \cdot 1,4 = 0,84 \text{ кНм} \end{aligned} \quad (1)$$

и где наиболее нагруженными являются точки "B" и "C", в которых возникают напряжения одного знака.



② Так как балка нагружается силами, действующими в различных плоскостях и приложенными в разных сечениях, ее изогнутая ось принимает форму пространственной кривой. Записываем условие прочности для **пространственного изгиба** —

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma], \quad (2)$$

где согласно заданному соотношению размеров сечения $\boxed{h/b=3}$ —

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = 1,5b^3; \quad W_y = \frac{hb^2}{6} = 0,5b^3. \quad (3)$$

Подставляем значения (1) и (3) в условие прочности (2) и определяем размеры прямоугольного сечения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{1,5b^3} + \frac{M_y}{0,5b^3} \leq [\sigma] \rightarrow$$

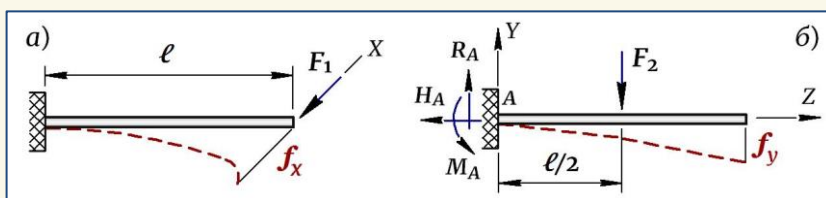
$$\boxed{b} = 3 \sqrt{\frac{M_x + 3M_y}{1,5[\sigma]}} = 3 \sqrt{\frac{(1,05 + 3 \cdot 0,84) 10^6}{1,5 \cdot 12}} = 5,8 \text{ см}; \quad \boxed{h} = 3b = 17,4 \text{ см}.$$

По полученным размерам сечения вычисляем моменты инерции —

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{5,8 \cdot 17,4^3}{12} = 2546,2 \text{ см}^4; \quad (4)$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{17,4 \cdot 5,8^3}{12} = 282,9 \text{ см}^4$$

③ Определяем величину и направление полного прогиба конца консоли. Первоначально вычисляем прогиб свободного конца в горизонтальной и вертикальной плоскостях — по направлению главных осей:



★ Прогиб f_x в горизонтальной плоскости (а) возникает от действия силы F_1 , приложенной на конце консоли, и вычисляется как:

$$\boxed{f_x} = \frac{F_1 \ell^3}{3EI_y} = \frac{0,6 \cdot 10^3 (1,4 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 282,9 \cdot 10^4} = 19,4 \text{ мм}; \quad (5)$$

★ Прогиб f_y в вертикальной плоскости (б) возникает от силы F_2 , но так как она приложена в середине балки, прогиб свободного конца от ее действия определяем *методом начальных параметров*. Уравнение прогибов для данного направления имеет вид:

$$EI_x y_z = EI_x y_0 + EI_x \Theta_0 \cdot z - \frac{M_A z^2}{2} + \frac{R_A z^3}{6} - \frac{F_2 (z - \ell/2)^3}{6}, \quad (6)$$

где $EI_x y_0 = 0; EI_x \Theta_0 = 0; M_A = F_2 (\ell/2); R_A = F_2.$ (7)

Подставляем значения (7) в уравнение (6), задаем координату конца консоли $z = \ell$ и с учетом (4) и заданных величин получаем:

$$EI_x y_{z/z=\ell} = -\frac{F_2 (\ell/2) \ell^2}{2} + \frac{F_2 \ell^3}{6} - \frac{F_2 (\ell/2)^3}{6} = -\frac{5F_2 \ell^3}{48} \rightarrow$$

$$y_{z/z=\ell} = \boxed{f_y} = -\frac{5F_2 \ell^3}{48EI_x} = -\frac{5 \cdot 1,5 \cdot 10^3 (1,4 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 2546,2 \cdot 10^4} = -1,68 \text{ мм}. \quad (8)$$

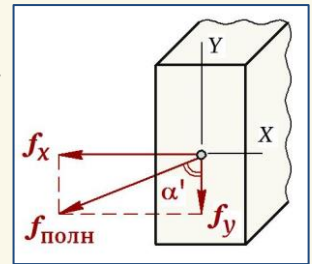
Примечание.

Знак «минус» в выражении (8) имеет чисто математический смысл и означает, что вертикальный прогиб балки, помещенной в систему координат "Y – Z", происходит в отрицательном направлении оси Y.

★ С учетом значений (5) и (8) определяем полный прогиб свободного конца консоли и направление прогиба:

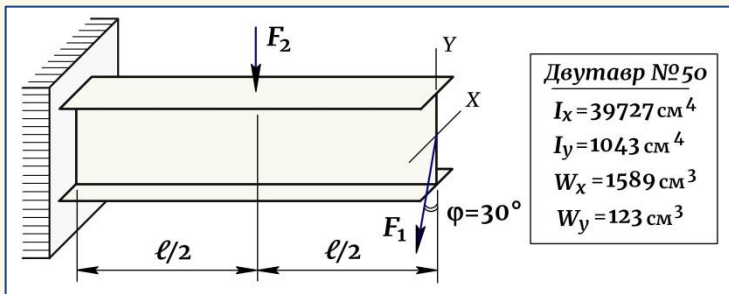
$$\boxed{f_{\text{полн}}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{19,4^2 + 1,68^2} = 19,5 \text{ мм}.$$

$$\text{tg} \alpha' = \frac{f_x}{f_y} = \frac{19,4}{1,68} = 11,548 \rightarrow \boxed{\alpha'} = 85^\circ.$$



Задача 19

Консольная балка с заделкой длиной $\ell = 2$ м, выполненная из двутавра №50, нагружена силами $F_1 = 12$ кН и $F_2 = 24$ кН. Определить в опасном сечении балки максимальные напряжения и положение нейтральной оси.



РЕШЕНИЕ:

① Опасным на балке является сечения в заделке, где действуют наибольшие изгибающие моменты, равные —

$$M_x = F_1 \cos \varphi \cdot l + F_2 \cdot l/2 = 12 \cos 30^\circ \cdot 2 + 24 \cdot 1 = 44,8 \text{ кНм};$$

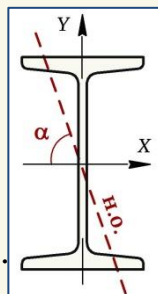
$$M_y = F_1 \sin \varphi \cdot l = 12 \sin 30^\circ \cdot 2 = 12 \text{ кНм}.$$

② Определяем максимальные напряжения в опасном сечении:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{44,8 \cdot 10^6}{1589 \cdot 10^3} + \frac{12 \cdot 10^6}{123 \cdot 10^3} = 125,8 \text{ МПа}.$$

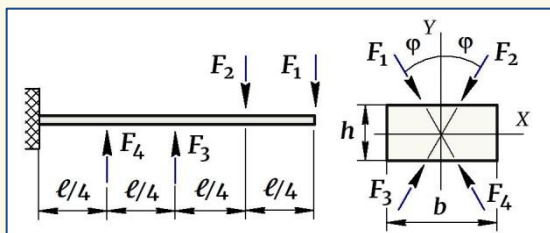
③ Определяем положение нейтральной оси в опасном сечении:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} = -\frac{39727}{1043} \cdot \frac{12}{44,8} = -10,2 \rightarrow \alpha = 84,4^\circ.$$



Задача 20

Балка прямоугольного сечения $b \times h = 18 \times 12 \text{ см}$ длиной $l = 4,8 \text{ м}$ нагружена системой сил $F_1 = F_2 = F_3 = 1 \text{ кН}$ и $F_4 = 2 \text{ кН}$, приложенных, как показано на рисунке. Установить на балке опасное сечение, определить в опасном сечении максимальные напряжения и положение нейтральной оси. Принять: $\varphi = 30^\circ$.



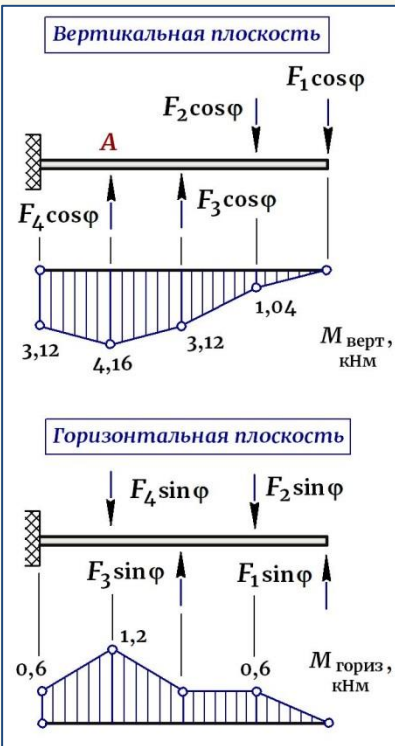
РЕШЕНИЕ:

① Определяем для балки геометрические характеристики сечения, необходимые для решения задачи:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{18 \cdot 12^3}{12} = 2592 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{12 \cdot 18^3}{12} = 5832 \text{ см}^4;$$
$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{18 \cdot 12^2}{6} = 432 \text{ см}^3; \quad W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{12 \cdot 18^2}{6} = 648 \text{ см}^3.$$

② Раскладываем систему сил по направлению осей X-Y и рассматриваем изгиб в главных плоскостях инерции. Так как силы действуют в двух взаимно перпендикулярных направлениях и приложены в разных сечениях балки, возникает **пространственный изгиб**.

Строим эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях и устанавливаем на балке опасное сечение. Опасным является сечение "А", где изгибающие моменты одновременно принимают наибольшее значение:



$$M_{\text{верт}} = M_x = 4,16 \text{ кНм};$$

$$M_{\text{гориз}} = M_y = 1,2 \text{ кНм}.$$

③ Определяем на балке максимальные напряжения:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} =$$

$$= \frac{4,16 \cdot 10^6}{432 \cdot 10^3} + \frac{1,2 \cdot 10^6}{648 \cdot 10^3} = 11,5 \text{ МПа}.$$

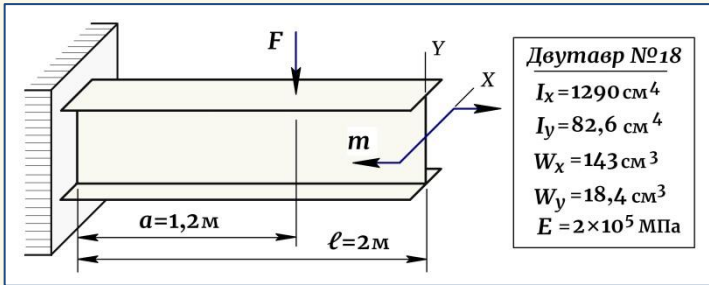
④ Определяем в опасном сечении положение нейтральной оси:

$$\text{tg} \alpha = - \frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} =$$

$$= - \frac{2592}{5832} \cdot \frac{1,2}{4,16} = -0,128 \rightarrow \alpha = 7,3^\circ.$$

Задача 21

Для балки двутаврового сечения №18, нагруженной системой сил $F=6\text{ кН}$ и $m=1,8\text{ кНм}$, определить максимальные напряжения, а также величину и направление полного прогиба конца консоли.



РЕШЕНИЕ:

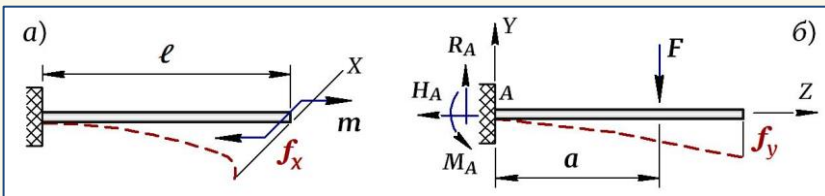
- ① Опасным на балке является сечение в заделке, где:

$$M_x = Fa = 6 \cdot 1,2 = 7,2 \text{ кНм}; \quad M_y = m = 1,8 \text{ кНм}.$$

- ② Определяем в опасном сечении максимальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{7,2 \cdot 10^6}{143 \cdot 10^3} + \frac{1,8 \cdot 10^6}{18,4 \cdot 10^3} = 148,2 \text{ МПа}.$$

- ③ Определяем величину и направление полного прогиба конца консоли, для чего вычисляем прогиб свободного конца в горизонтальной и вертикальной плоскостях — в главных плоскостях инерции:



★ Прогиб конца консоли f_x в горизонтальной плоскости (а) возникает от действия момента "m", приложенного на конце консоли, и может быть вычислен по формуле:

$$\boxed{f_x} = \frac{m l^2}{2EI_y} = \frac{1,8 \cdot 10^6 (2 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 82,6 \cdot 10^4} = 21,8 \text{ мм}; \quad (1)$$

★ Прогиб конца консоли f_y в вертикальной плоскости (б) возникает от силы "F" и определяется методом начальных параметров. Уравнение прогибов для данной балки имеет вид:

$$EI_{x\gamma z} = EI_{x\gamma 0} + EI_{x\Theta 0} \cdot z - \frac{M_A z^2}{2} + \frac{R_A z^3}{6} - \frac{F(z-a)^3}{6}, \quad (2)$$

где $EI_{x\gamma 0} = 0; EI_{x\Theta 0} = 0; M_A = Fa; R_A = F.$ (3)

Подставляем значения (3) в уравнение (2), задаем координату конца консоли $z = \ell$ и с учетом заданных величин получаем:

$$EI_{x\gamma z/z=\ell} = -\frac{Fa\ell^2}{2} + \frac{F\ell^3}{6} - \frac{F(\ell-a)^3}{6} = -6,912 \text{ кНм}^3, \text{ откуда}$$

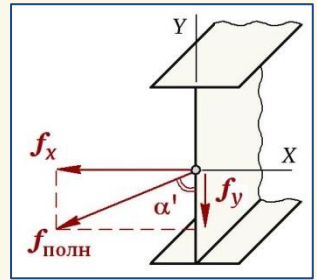
$$y_{z/z=\ell} = \boxed{f_y} = -\frac{6,912}{EI_x} = -\frac{6,912 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} = -2,68 \text{ мм}, \quad (4)$$

где знак «минус» означает, что вертикальный прогиб балки происходит в отрицательном направлении оси Y.

★ С учетом значений (1) и (4) определяем полный прогиб свободного конца консоли и направление прогиба:

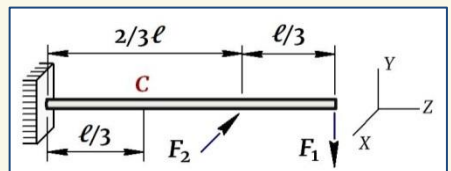
$$\boxed{f_{\text{полн}}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{21,8^2 + 2,68^2} = 22 \text{ мм}.$$

$$\text{tg} \alpha' = \frac{f_x}{f_y} = \frac{21,8}{2,68} = 8,134 \rightarrow \boxed{\alpha'} = 83^\circ.$$



Задача 22

Для заданной балки постоянного сечения определить в сечении "С" положение нейтральной оси, а также величину и направление полного прогиба. Задачу решить в общем виде. Принять заданными величины: $F_1 = F, F_2 = 2F, \ell, I_x, I_y = (1/4)I_x, E.$



РЕШЕНИЕ:

① Изгибающие моменты в сечении "С" соответственно равны:

$$M_x = F_1(2/3)\ell = F(2/3)\ell; \quad M_y = F_2(1/3)\ell = 2F(1/3)\ell. \quad (1)$$

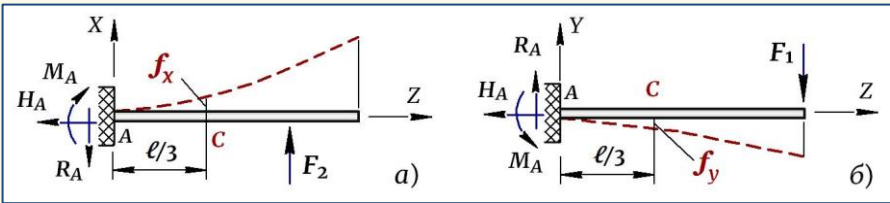
② С учетом значений (1) определяем положение нейтральной оси:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = -\frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_x}} = -\frac{I_x}{(1/4)I_x} \cdot \frac{2F(1/3)\ell}{F(2/3)\ell} = -4 \rightarrow \boxed{\alpha} = 76^\circ.$$

Примечание.

Так как при пространственном изгибе отношение моментов в сечениях не является величиной постоянной ($M_y/M_x \neq \text{const}$), нейтральная ось в каждом сечении будет занимать различное положение.

③ Для определения полного прогиба в сечении "С" первоначально, используя метод начальных параметров, находим прогиб сечения в главных плоскостях инерции, т.е. согласно расчетной схеме балки – в вертикальном и горизонтальном направлениях:



★ Прогиб f_x в горизонтальной плоскости (а) возникает от силы F_2 (рисунок расположим в плоскости листа). Уравнение прогибов для данного направления имеет вид:

$$EI_y \chi_z = EI_y \chi_0 + EI_y \Theta_0 \cdot z + \frac{M_A z^2}{2} - \frac{R_A z^3}{6} + \frac{F_2 [z - (2/3)\ell]}{6}, \quad (2)$$

$$\text{где } EI_y \chi_0 = 0; \quad EI_y \Theta_0 = 0; \quad M_A = F_2(2/3)\ell; \quad R_A = F_2. \quad (3)$$

Подставляем значения (3) в уравнение (2), задаем координату точки "С" $\rightarrow z = (1/3)\ell$ и получаем:

$$EI_y \chi_{z/z=(1/3)\ell} = \frac{F_2(2/3)\ell [(1/3)\ell]^2}{2} - \frac{F_2 [(1/3)\ell]^3}{6} = \frac{5}{162} F_2 \ell^3 \rightarrow$$
$$\chi_{z/z=(1/3)\ell} = \boxed{f_x} = \frac{5}{162} \cdot \frac{F_2 \ell^3}{EI_y} = \frac{5}{162} \cdot \frac{2F\ell^3}{E(1/4)I_x} = \frac{40}{162} \frac{F\ell^3}{EI_x}. \quad (4)$$

★ Прогиб f_y в вертикальной плоскости (6) возникает от силы F_1 .
Уравнение прогибов для данного направления имеет вид:

$$EI_{x\gamma}z = EI_{x\gamma}y_0 + EI_{x\Theta_0} \cdot z - \frac{M_A z^2}{2} + \frac{R_A z^3}{6}, \quad (5)$$

где $EI_{x\gamma}y_0 = 0$; $EI_{x\Theta_0} = 0$; $M_A = F_1 \ell$; $R_A = F_1$. (6)

Подставляем значения (6) в уравнение (5), задаем координату точки "C" $\rightarrow z = (1/3)\ell$ и получаем:

$$EI_{x\gamma}z/z=(1/3)\ell = -\frac{F_1 \ell [(1/3)\ell]^2}{2} + \frac{F_1 [(1/3)\ell]^3}{6} = -\frac{8}{162} F_1 \ell^3 \rightarrow$$

$$y_{z/z=(1/3)\ell} = \boxed{f_y} = -\frac{8}{162} \frac{F_1 \ell^3}{EI_x} = -\frac{8}{162} \frac{F \ell^3}{EI_x}. \quad (7)$$

Примечание.

Знак горизонтального и вертикального прогибов соответствует заданному направлению осей X-Y и в дальнейших расчетах не учитывается.

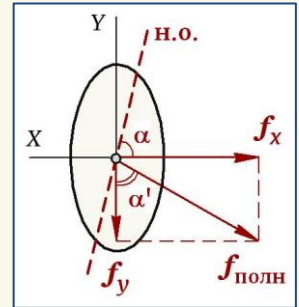
★ Полный прогиб сечения "C" и направление прогиба на основании значений (4) и (7) соответственно равны:

$$\boxed{f_{\text{полн}}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{40}{162} \frac{F \ell^3}{EI_x}\right)^2 + \left(\frac{8}{162} \frac{F \ell^3}{EI_x}\right)^2} = 0,25 \frac{F \ell^3}{EI_x}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{f_x}{f_y} = \left(\frac{40}{162} \frac{F \ell^3}{EI_x}\right) : \left(\frac{8}{162} \frac{F \ell^3}{EI_x}\right) = 5 \rightarrow$$

$$\boxed{\alpha'} = 78,7^\circ.$$



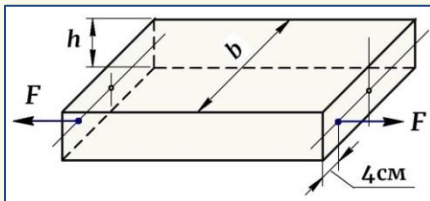
ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При **косом изгибе** нейтральная ось во всех сечениях занимает одинаковое положение и все сечения имеют одинаковое направление прогиба, перпендикулярное нейтральной оси. Поэтому при **косом изгибе** балка изгибается в плоскости и ее изогнутая ось является плоской кривой, хотя плоскость деформаций и силовая плоскость не совпадают. При пространственном изгибе каждое сечение балки имеет свое направление прогиба и оно не перпендикулярно нейтральной оси сечения. В результате изогнутая ось балки представляет собой пространственную кривую, поэтому такой изгиб называется **пространственным изгибом**.

2. Внецентренное растяжение (сжатие)

Задача 23

Стальная полоса прямоугольного сечения шириной $b=24\text{ см}$ растягивается двумя силами $F=180\text{ кН}$, параллельными оси и приложенными посередине толщины сечения на расстоянии 4 см от края полосы. Определить необходимую толщину полосы " h ", если для материала $[\sigma]=160\text{ МПа}$.

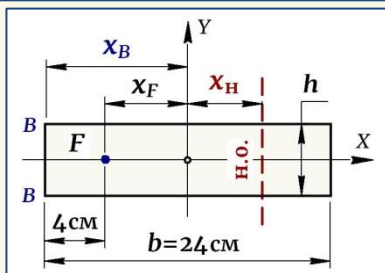


РЕШЕНИЕ:

① В заданном прямоугольном сечении —

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{bh^3/12}{bh} = \frac{h^2}{12};$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{hb^3/12}{bh} = \frac{b^2}{12} = \frac{24^2}{12} = 48\text{ см}^2,$$



а координаты полюса силы в главных осях $X-Y$ с учетом их направления соответственно равны: $x_F = -8\text{ см}$; $y_F = 0$.

② Определяем в сечении положение нейтральной оси:

$$x_H = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{48}{(-8)} = +6\text{ см}; \quad y_H = -\frac{i_x^2}{y_F} = \infty.$$

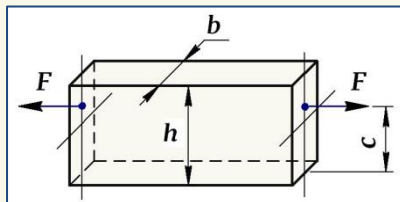
③ Наиболее удаленными в сечении от нейтральной оси, а значит, наиболее нагруженными, являются точки стороны " $B-B$ ", имеющие координату $x_B = -12\text{ см}$. Записываем условие прочности при **внецентренном растяжении** и определяем толщину полосы:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_B}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_x^2} \right) \leq [\sigma] \rightarrow \sigma_{\max} = \frac{F}{bh} \left(1 + \frac{x_F x_B}{i_y^2} \right) \leq [\sigma],$$

$$\rightarrow h = \frac{F \left(1 + x_F x_B / i_y^2 \right)}{b [\sigma]} = \frac{180 \cdot 10^3 \left[1 + (-8) \cdot (-12) / 48 \right]}{240 \cdot 160} = 14\text{ мм}.$$

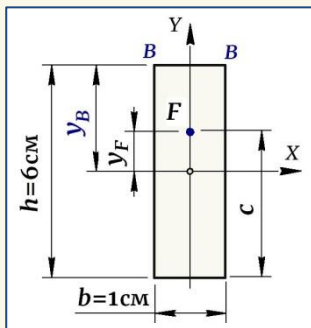
Задача 24

Стержень имеет прямоугольное сечение размерами $b \times h = 1 \times 6$ см и растягивается внецентренно приложенной силой $F = 48$ кН. Определить, на каком расстоянии " c " следует приложить эту силу, чтобы максимальные напряжения в стержне не превышали $[\sigma] = 160$ МПа.



РЕШЕНИЕ:

В заданном прямоугольном сечении полюс силы лежит на главной оси Y и имеет координаты $[X_F = 0; Y_F]$, значит, нейтральная ось пройдет параллельно оси X по другую сторону от центра тяжести. Независимо от ее положения (пересечет она сечение или пройдет за его пределами), наиболее нагруженными являются точки стороны " $B-B$ " как наиболее удаленные от нейтральной оси и имеющие координаты $[X_B; y_B = h/2]$. Здесь возникают наибольшие напряжения и условие прочности стержня для данного **случая внецентренного растяжения** имеет вид:



$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y_B}{i_x^2} \right) \leq [\sigma], \quad (1)$$

где $A = bh$; $y_B = \frac{h}{2}$; $i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{bh^3/12}{bh} = \frac{h^2}{12}$. (2)

Подставляем значения (2) в условие прочности (1) и определяем координату полюса силы y_F :

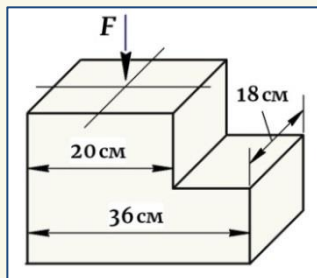
$$\sigma_{\max} = \frac{F}{bh} \left(1 + \frac{y_F \cdot h/2}{h^2/12} \right) = \frac{F}{bh} \left(1 + \frac{6y_F}{h} \right) \leq [\sigma] \rightarrow$$

$$y_F = \frac{bh^2 [\sigma] - Fh}{6F} = \frac{10 \cdot 60^2 \cdot 160 - 48 \cdot 10^3 \cdot 60}{6 \cdot 48 \cdot 10^3} = 10 \text{ мм} = 1 \text{ см.}$$

Отсюда получаем: $[c] = h/2 + y_F = 3 + 1 = 4 \text{ см.}$

Задача 25

Стойка прямоугольного сечения с размерами основания 18×36 см нагружается силой $F = 480$ кН. Определить максимальные напряжения в основании стойки. Построить ядро сечения.



РЕШЕНИЕ:

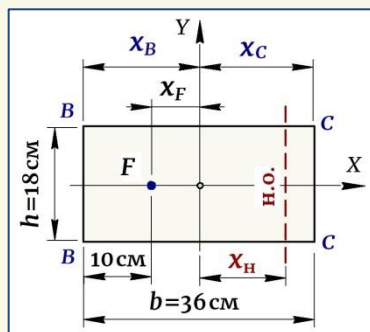
① В основании стойки, согласно заданным размерам сечения —

$$A = bh = 36 \cdot 18 = 648 \text{ см}^2;$$

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{bh^3/12}{bh} = \frac{h^2}{12} = \frac{18^2}{12} = 27 \text{ см}^2;$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{hb^3/12}{bh} = \frac{b^2}{12} = \frac{36^2}{12} = 108 \text{ см}^2,$$

а координаты полюса силы в главных осях $X-Y$ с учетом направления осей равны: $x_F = -8$ см; $y_F = 0$.



② Положение нейтральной оси:

$$x_H = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{108}{(-8)} = +13,5 \text{ см}; \quad y_H = -\frac{i_x^2}{y_F} = \infty.$$

③ По формуле для напряжений *при внецентренном сжатии* —

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_x^2} \right),$$

учитывая заданный случай нагружения, определяем максимальные напряжения в основании стойки:

★ Наибольшие *сжимающие* напряжения возникают в точках "В-В", имеющих координату $x_B = -18$ см —

$$\sigma_{\max(-)} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_B}{i_y^2} \right) = -\frac{480 \cdot 10^3}{648 \cdot 10^2} \left[1 + \frac{(-8)(-18)}{108} \right] = -17,3 \text{ МПа};$$

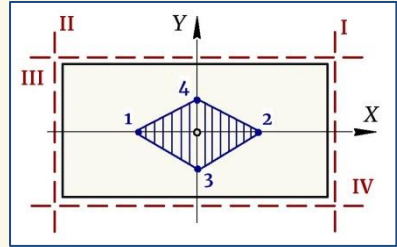
★ Наибольшие *растягивающие* напряжения возникают в точках "С-С", имеющих координату $x_C = +18$ см —

$$\sigma_{\max(+)} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_C}{i_y^2} \right) = -\frac{480 \cdot 10^3}{648 \cdot 10^2} \left[1 + \frac{(-8)(+18)}{108} \right] = +2,5 \text{ МПа.}$$

④ Строим в основании стойки **ядро сечения**. Для этого задаем положение нейтральной оси таким образом, чтобы она не пересекала сечение, а проходила по касательной к его контуру, и по формулам —

$$x_F = -\frac{i_y^2}{x_H}; \quad y_F = -\frac{i_x^2}{y_H}$$

определяем координаты полюса силы "F", соответствующие заданному положению нейтральной оси:



Н.о. I :

$$\left. \begin{array}{l} x_H = +18 \text{ см} \\ y_H = \infty \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_F = -6 \text{ см;} \\ y_F = 0. \end{array} \right.$$

Н.о. II :

$$\left. \begin{array}{l} x_H = -18 \text{ см} \\ y_H = \infty \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_F = +6 \text{ см;} \\ y_F = 0. \end{array} \right.$$

Н.о. III :

$$\left. \begin{array}{l} x_H = \infty \\ y_H = +9 \text{ см} \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_F = 0; \\ y_F = -3 \text{ см.} \end{array} \right.$$

Н.о. IV :

$$\left. \begin{array}{l} x_H = \infty \\ y_H = -9 \text{ см} \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_F = 0; \\ y_F = +3 \text{ см.} \end{array} \right.$$

По полученным координатам полюса силы (точкам 1-4) строим **ядро сечения**.

Примечание.

В многоугольной форме сечения при «обкатывании» контура нейтральной осью путем последовательного ее совмещения со сторонами в угловых точках, где происходит переход от одной стороны к другой, возникает вращение нейтральной оси вокруг вершины, разделяющей эти стороны, и каждое ее положение определяет соответствующие координаты полюса силы. Уравнение нейтральной оси при внецентренном растяжении-сжатии —

$1 + \frac{x_F}{i_y^2} x + \frac{y_F}{i_x^2} y = 0$ является уравнением ПРЯМОЙ, где текущие координаты x, y точек на нейтральной оси связаны линейно. Если координаты угловой точки, где происходит вращение нейтральной оси, принять как заданные и фиксированные, а переменными считать координаты полюса силы x_F, y_F , то уравнение можно представить в виде —

$1 + \frac{x}{i_y^2} x_F + \frac{y}{i_x^2} y_F = 0$, которое также является уравнением ПРЯМОЙ, где

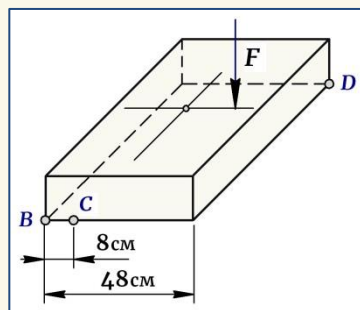
координаты полюса силы X_F, Y_F тоже связаны линейно. А это значит, что при вращении нейтральной оси около постоянной точки полюс силы перемещается по прямой. Справедливо и обратное утверждение: перемещение полюса силы по прямой связано с вращением нейтральной оси около постоянной точки. Более подробно этот вопрос рассмотрен в теоретической части пособия.

Задача 26

Напряжения в точке "B" сжимаемого бруса равны $\sigma_B = +64 \text{ МПа}$, а в точке "C" равны нулю. Определить напряжения в точке "D".

РЕШЕНИЕ:

① Брус подвергается **внецентренному сжатию**, и так как в точке "B" возникают положительные, т.е. растягивающие напряжения, значит, нейтральная ось пересекает сечение, создавая в сечении напряжения двух знаков. При этом полюс силы лежит на одной из главных центральных осей сечения. А это значит, что нейтральная ось проходит параллельно второй главной оси по другую сторону от центра тяжести, и так как по условию задачи $\sigma_C = 0$, нейтральная ось проходит через точку "C" параллельно Y.



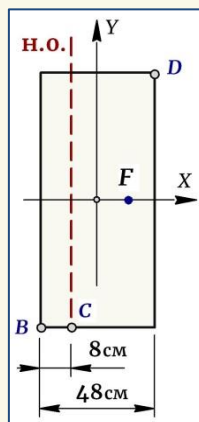
② По положению нейтральной оси устанавливаем координаты полюса силы:

$$\left. \begin{array}{l} x_H = -16 \text{ см} \\ y_H = \infty \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_F = -\frac{iy^2}{x_H} = -\frac{iy^2}{(-16)} = \frac{iy^2}{16}; \\ y_F = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

③ В точке "B" напряжения заданы и равны:

$$\sigma_B = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_B}{iy^2} + \frac{y_F y_B}{ix^2} \right), \quad (2)$$

где с учетом координат (1) и $x_B = -24 \text{ см}$ —



$$\left(1 + \frac{x_F x_B}{iy^2} + \frac{y_F y_B}{ix^2}\right) = \left(1 + \frac{x_F x_B}{iy^2}\right) = 1 + \frac{(iy^2/16)(-24)}{iy^2} = -0,5. \quad (3)$$

Подставляем значение (3) в (2) и находим отношение "F/A":

$$\frac{F}{A} = - \frac{\sigma_B}{\left(1 + \frac{x_F x_B}{iy^2} + \frac{y_F y_B}{ix^2}\right)} = - \frac{64}{(-0,5)} = 128 \text{ Н/мм}^2. \quad (4)$$

④ Напряжения в точке "D" равны:

$$\sigma_D = - \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_D}{iy^2} + \frac{y_F y_D}{ix^2}\right),$$

где с учетом координат (1) и $x_D = 24 \text{ см}$ —

$$\left(1 + \frac{x_F x_D}{iy^2} + \frac{y_F y_D}{ix^2}\right) = \left(1 + \frac{x_F x_D}{iy^2}\right) = 1 + \frac{(iy^2/16)24}{iy^2} = 2,5. \quad (5)$$

И тогда на основании (4) и (5) получаем:

$$\sigma_D = - \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_D}{iy^2} + \frac{y_F y_D}{ix^2}\right) = -128 \cdot 2,5 = -320 \text{ МПа}.$$

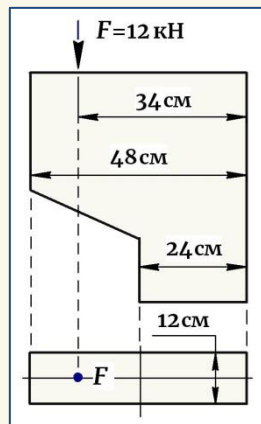
Задача 27

Проверить прочность нижней части бетонного столба прямоугольного сечения, если для бетона допускаемые напряжения составляют $[\sigma]_{\text{сж}} = 7 \text{ МПа}$, $[\sigma]_{\text{раст}} = 1,5 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① Бетонный столб по всей высоте подвергается **внецентренному сжатию**, но прочность нижней части меньше, так как она имеет меньшее сечение, и значит, здесь будут возникать бóльшие напряжения. Поэтому прочность бетонного столба проверяется по нижней части. Здесь, согласно заданным размерам сечения —

$$A = bh = 24 \cdot 12 = 288 \text{ см}^2;$$



$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{24 \cdot 12^3}{12} = 3456 \text{ см}^4 \rightarrow i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{3456}{288} = 12 \text{ см}^2;$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{12 \cdot 24^3}{12} = 13842 \text{ см}^4 \rightarrow i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{13842}{288} = 48 \text{ см}^2,$$

а координаты полюса силы в главных осях $X-Y$ с учетом направления осей равны: $x_F = -22 \text{ см}; y_F = 0$.

② Положение нейтральной оси —

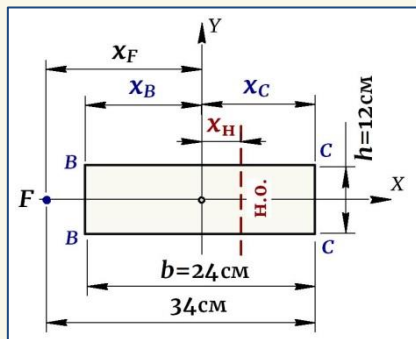
$$x_H = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{48}{(-22)} = 2,2 \text{ см}; \quad y_H = -\frac{i_x^2}{y_F} = \infty$$

показывает, что в сечении будут возникать напряжения двух знаков: наибольшие *сжимающие* напряжения — в точках "В-В" с координатой $x_B = -12 \text{ см}$, а наибольшие *растягивающие* — в точках "С-С" с координатой $x_C = +12 \text{ см}$.

③ По формуле для напряжений при *внецентренном сжатии* —

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_x^2} \right),$$

учитывая заданный случай нагружения, определяем в указанных точках максимальные напряжения и проверяем прочность столба:



$$\sigma_{\max(-)} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_B}{i_y^2} \right) = -\frac{12 \cdot 10^3}{288 \cdot 10^2} \left[1 + \frac{(-22)(-12)}{48} \right] = -2,7 \text{ МПа.}$$

Так как $\sigma_{\max(-)} < [\sigma]$ — прочность столба на сжатие обеспечена.

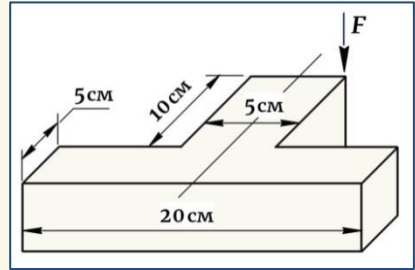
$$\sigma_{\max(+)} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_C}{i_y^2} \right) = -\frac{12 \cdot 10^3}{288 \cdot 10^2} \left[1 + \frac{(-22)(+12)}{48} \right] = +1,9 \text{ МПа.}$$

Так как $\sigma_{\max(+)} > [\sigma]$ — прочность столба на растяжение не обеспечена. Перегрузка составляет 27%, что недопустимо.

Задача 28

Короткий чугунный стержень сжимается силой "F", приложенной в точке на краю сечения. Определить допускаемую силу [F], если для чугуна $[\sigma]_{\text{раст}} = 80 \text{ МПа}$, $[\sigma]_{\text{сж}} = 150 \text{ МПа}$.

Построить эпюру распределения напряжений по сечению и ядро сечения.



РЕШЕНИЕ:

① Определяем в сечении положение центра тяжести и главных центральных осей X-Y, а также вычисляем геометрические характеристики, необходимые для решения задачи:

$$y_C = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 10 + 20 \cdot 5 \cdot 2,5}{10 \cdot 5 + 20 \cdot 5} = \frac{750}{150} = 5 \text{ см};$$

$$I_x = \left[5 \cdot 10^3 / 12 + 10 \cdot 5 \cdot 5^2 \right] + \left[20 \cdot 5^3 / 12 + 20 \cdot 5 \cdot 2,5^2 \right] = 2500 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 10 \cdot 5^3 / 12 + 5 \cdot 20^3 / 12 = 3437,5 \text{ см}^4;$$

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{2500}{150} = 16,67 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{3437,5}{150} = 22,92 \text{ см}^2. \quad (1)$$

$$\text{Координаты полюса силы: } \boxed{x_F = 2,5 \text{ см}; y_F = 10 \text{ см}}. \quad (2)$$

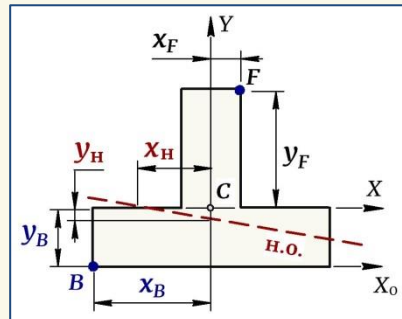
② С учетом (1) и (2) определяем положение нейтральной оси:

$$\boxed{x_H = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{22,92}{2,5} = -9,17 \text{ см};} \quad \boxed{y_H = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{16,67}{10} = -1,67 \text{ см}.}$$

③ Из условия прочности при **внецентренном растяжении-сжатии** определяем допускаемую силу [F] —

$$\boxed{\sigma_{\max} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_x^2} \right) \leq [\sigma]} :$$

★ Наибольшие сжимающие напряжения возникают в точке приложения силы и имеют такие же координаты, как и полюс силы (2) —



$$\boxed{\sigma_{\max(-)}} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_F}{i_y^2} + \frac{y_F y_F}{i_x^2} \right) \leq [\sigma]_{\text{сж}}, \quad (3)$$

где с учетом значений (1) и (2):

$$\left(1 + \frac{x_F x_F}{i_y^2} + \frac{y_F y_F}{i_x^2} \right) = 1 + \frac{2,5 \cdot 2,5}{22,92} + \frac{10 \cdot 10}{16,67} = 7,27. \quad (4)$$

В результате получаем:

$$[F] = \frac{A [\sigma]_{\text{сж}}}{\left(1 + \frac{x_F x_F}{i_y^2} + \frac{y_F y_F}{i_x^2} \right)} = \frac{150 \cdot 10^2 \cdot 150}{7,27} = 310 \text{ кН}.$$

Примечание.

Следует понимать, что допускаемые напряжения на сжатие, стоящие в правой части условия прочности (3), отрицательны, поэтому при выполнении расчета знак «минус» здесь слева и справа можно опустить.

★ Наибольшие растягивающие напряжения возникают в точке "В", имеющей координаты $\boxed{x_B = -10 \text{ см}; y_B = -5 \text{ см}}$ –

$$\boxed{\sigma_{\max(+)}} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_B}{i_y^2} + \frac{y_F y_B}{i_x^2} \right) \leq [\sigma]_{\text{раст}}, \quad (5)$$

где с учетом значений (1) и (2):

$$\left(1 + \frac{x_F x_B}{i_y^2} + \frac{y_F y_B}{i_x^2} \right) = 1 + \frac{2,5(-10)}{22,92} + \frac{10(-5)}{16,67} = -3,09. \quad (6)$$

В результате получаем:

$$[F] = -\frac{A [\sigma]_{\text{раст}}}{\left(1 + \frac{x_F x_B}{i_y^2} + \frac{y_F y_B}{i_x^2} \right)} = \frac{150 \cdot 10^2 \cdot 80}{(-3,09)} = 388 \text{ кН}.$$

Из двух значений для силы принимаем меньшее – $\boxed{[F] = 310 \text{ кН}}$.

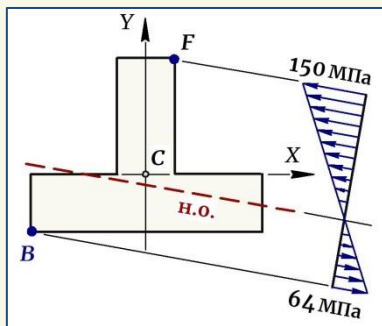
④ Для принятого значения силы с учетом выражений (4) и (6) определяем в указанных (наиболее нагруженных) точках напряжения:

$$\sigma_F = \sigma_{\max(-)} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_F}{iy^2} + \frac{y_F y_F}{ix^2} \right) =$$

$$= -\frac{310 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^2} \cdot 7,26 = -150 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = \sigma_{\max(+)} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_B}{iy^2} + \frac{y_F y_B}{ix^2} \right) =$$

$$= -\frac{310 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^2} (-3,08) = +64 \text{ МПа}.$$



Строим эпюру распределения напряжений по сечению.

⑤ Строим **ядро сечения**. Для этого задаем положение нейтральной оси таким образом, чтобы она, не пересекая, обкатывала сечение по

контур, и по формулам — $x_F = -\frac{iy^2}{x_H}$; $y_F = -\frac{ix^2}{y_H}$ определяем координаты полюса силы "F", соответствующие заданному положению нейтральной оси:

$$\text{H.o. I: } \left. \begin{array}{l} x_H = \infty \\ y_H = -5 \text{ см} \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_F = 0; \\ y_F = +3,3 \text{ см} \end{array} \right.$$

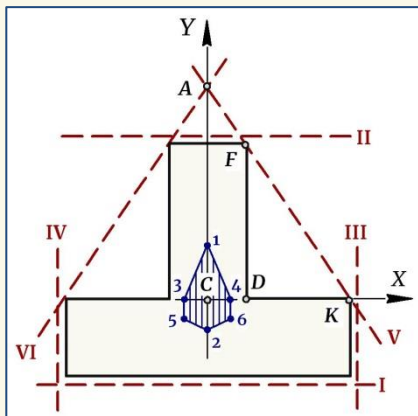
$$\text{H.o. II: } \left. \begin{array}{l} x_H = \infty \\ y_H = +10 \text{ см} \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_F = 0; \\ y_F = -1,7 \text{ см.} \end{array} \right.$$

$$\text{H.o. III: } \left. \begin{array}{l} x_H = +10 \text{ см} \\ y_H = \infty \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_F = -2,3 \text{ см}; \\ y_F = 0. \end{array} \right.$$

$$\text{H.o. IV: } \left. \begin{array}{l} x_H = -10 \text{ см} \\ y_H = \infty \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_F = +2,3 \text{ см}; \\ y_F = 0. \end{array} \right.$$

$$\text{H.o. V: } \left. \begin{array}{l} x_H = +10 \text{ см} \\ y_H = +13,3 \text{ см (из подобия } \triangle ACK \sim \triangle FDK) \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_F = -2,3 \text{ см}; \\ y_F = -1,2 \text{ см.} \end{array} \right.$$

$$\text{H.o. VI: } \left. \begin{array}{l} x_H = -10 \text{ см} \\ y_H = +13,3 \text{ см (из подобия } \triangle ACK \sim \triangle FDK) \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_F = +2,3 \text{ см}; \\ y_F = -1,2 \text{ см.} \end{array} \right.$$



Задача 29

Во время испытания стержня прямоугольного сечения размерами $b \times h = 5 \times 2,5$ см на растяжение, было установлено, что под определенной нагрузкой напряжения на одной стороне сечения были равны $+40$ МПа, а на другой — $+160$ МПа. Определить величину силы "F" и ее смещение от оси стержня.

РЕШЕНИЕ:

① Для заданного сечения —

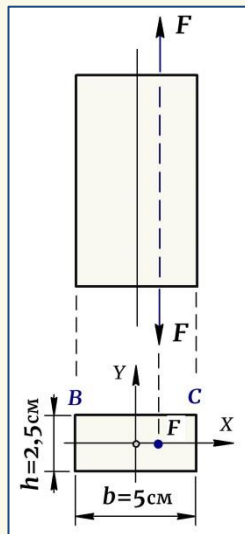
$$A = bh = 5 \cdot 2,5 = 12,5 \text{ см}^2;$$

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{bh^3/12}{bh} = \frac{h^2}{12} = \frac{2,5^2}{12} = 0,52 \text{ см}^2;$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{hb^3/12}{bh} = \frac{b^2}{12} = \frac{5^2}{12} = 2,08 \text{ см}^2.$$

② Напряжения при **внецентренном растяжении** определяются по формуле —

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_x^2} \right),$$



и согласно условию задачи — $\sigma_B = +40$ МПа, $\sigma_C = +160$ МПа, а это значит, что нейтральная ось проходит за пределами сечения, создавая в сечении напряжения одного знака. Учитывая заданный случай нагружения ($y_F = 0$), записываем значения напряжений в указанных точках и с учетом координат точек $x_B = -2,5$ см; $x_C = +2,5$ см приводим задачу к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными — F и x_F :

$$\begin{cases} \sigma_B = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_B}{i_y^2} \right) = \frac{F}{5 \cdot 2,5 \cdot 10^2} \left[1 + \frac{x_F (-2,5)}{2,08} \right] = +40 \text{ МПа} \\ \sigma_C = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_C}{i_y^2} \right) = \frac{F}{5 \cdot 2,5 \cdot 10^2} \left[1 + \frac{x_F \cdot 2,5}{2,08} \right] = +160 \text{ МПа,} \end{cases}$$

откуда определяем силу F и точку ее приложения x_F :

$$\boxed{F} = 125 \text{ кН}; \quad \boxed{x_F} = 0,5 \text{ см.}$$

Задача 30

При сверлении детали на шпиндель сверлильного станка передается осевая нагрузка $F = 15 \text{ кН}$. Определить диаметр круглой чугунной колонны, если для чугуна $[\sigma]_{\text{раст}} = 40 \text{ МПа}$.

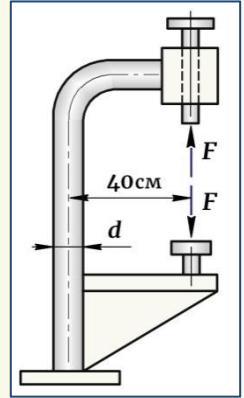
РЕШЕНИЕ:

① Чугунная колонна испытывает **внецентренное растяжение**. Полос силы приложен за пределами сечения и имеет координаты —

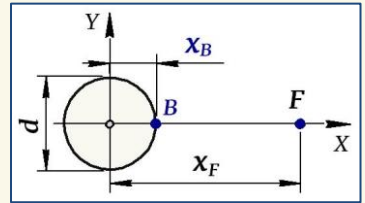
$$\boxed{x_F = 40 \text{ см}; y_F = 0}, \quad (1)$$

а для самого сечения:

$$i_x^2 = i_y^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{\pi d^4 / 64}{\pi d^2 / 4} = \frac{d^2}{16}. \quad (2)$$



② Для данного случая нагружения нейтральная ось пройдет по другую сторону от центра тяжести сечения параллельно оси Y . Наиболее удаленной от нейтральной оси, а значит, наиболее нагруженной в сечении является точка "В", где будут возникать наибольшие растягивающие напряжения.



③ Записываем условие прочности колонны при **внецентренном растяжении** —

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_x^2} \right) \leq [\sigma]$$

и, учитывая значения (1), (2) и координату точки "В" — $x_B = d/2$, определяем диаметр чугунной колонны:

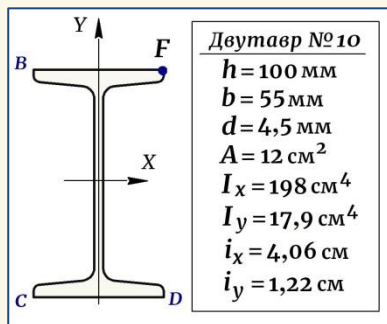
$$\sigma_{\text{max}} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_B}{i_y^2} \right) \leq [\sigma] \rightarrow$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{F}{\pi d^2 / 4} \left(1 + \frac{x_F \cdot d/2}{d^2 / 16} \right) = \frac{4 \cdot 15 \cdot 10^3}{\pi d^3} (d + 400 \cdot 8) \leq [\sigma] \rightarrow$$

$$0,01256 d^3 - 6d - 19200 = 0 \rightarrow \boxed{d} = 116 \text{ мм.}$$

Задача 31

Короткий чугунный стержень двутаврового профиля (двутавр №10) сжимается силой $F = 25$ кН. Определить напряжения в точках "B, F, C, D" сечения, построить эпюру напряжений и ядро сечения.



РЕШЕНИЕ:

① Принимаем координаты полюса силы —

$$x_F = b/2 = 2,75 \text{ см}; \quad y_F = h/2 = 5 \text{ см} \quad (1)$$

и определяем положение нейтральной оси в сечении:

$$x_H = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{1,22^2}{2,75} = -0,54 \text{ см}; \quad y_H = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{4,06^2}{5} = -3,3 \text{ см}.$$

② По формуле для напряжений при **внецентренном сжатии** —

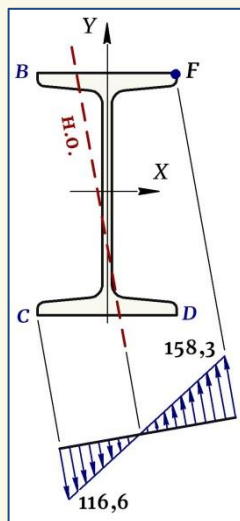
$$\sigma = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_x^2} \right)$$

с учетом значений (1) определяем напряжения в заданных точках сечения и строим эпюру распределения напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_B &= -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_B}{i_y^2} + \frac{y_F y_B}{i_x^2} \right) = \left\| \begin{array}{l} x_B = -2,75 \text{ см} \\ y_B = 5 \text{ см} \end{array} \right\| = \\ &= -\frac{25 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^2} \left[1 + \frac{2,75(-2,75)}{1,22^2} + \frac{5 \cdot 5}{4,06^2} \right] = +53,4 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_F &= -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_F}{i_y^2} + \frac{y_F y_F}{i_x^2} \right) = \left\| \begin{array}{l} x_F = 2,75 \text{ см} \\ y_F = 5 \text{ см} \end{array} \right\| = \\ &= -\frac{25 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^2} \left[1 + \frac{2,75 \cdot 2,75}{1,22^2} + \frac{5 \cdot 5}{4,06^2} \right] = -158,3 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_C &= -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_C}{i_y^2} + \frac{y_F y_C}{i_x^2} \right) = \left\| \begin{array}{l} x_C = -2,75 \text{ см} \\ y_C = -5 \text{ см} \end{array} \right\| = \\ &= -\frac{25 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^2} \left[1 + \frac{2,75(-2,75)}{1,22^2} + \frac{5(-5)}{4,06^2} \right] = +116,6 \text{ МПа}; \end{aligned}$$



$$\sigma_D = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_D}{i_y^2} + \frac{y_F y_D}{i_x^2} \right) = \left\| \begin{array}{l} x_D = 2,75 \text{ см} \\ y_D = -5 \text{ см} \end{array} \right\| =$$

$$= -\frac{25 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^2} \left[1 + \frac{2,75 \cdot 2,75}{1,22^2} + \frac{5 \cdot (-5)}{4,06^2} \right] = -95,1 \text{ МПа.}$$

③ Строим **ядро сечения**. Для этого задаем положение нейтральной оси таким образом, чтобы она, не пересекая, обкатывала сечение по

контуру, и по формулам — $x_F = -\frac{i_y^2}{x_H}; y_F = -\frac{i_x^2}{y_H}$ определяем ко-

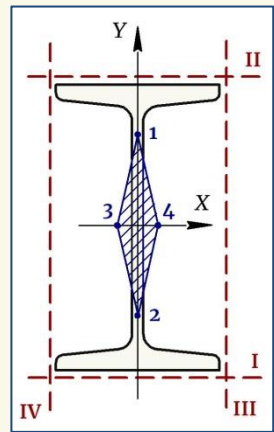
ординаты полюса силы "F", соответствующие заданному положению нейтральной оси:

$$\text{Н.о. I: } \left. \begin{array}{l} x_H = \infty \\ y_H = -5 \text{ см} \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_F = 0; \\ y_F = +3,3 \text{ см} \end{array} \right.$$

$$\text{Н.о. II: } \left. \begin{array}{l} x_H = \infty \\ y_H = +5 \text{ см} \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_F = 0; \\ y_F = -3,3 \text{ см.} \end{array} \right.$$

$$\text{Н.о. III: } \left. \begin{array}{l} x_H = +2,75 \text{ см} \\ y_H = \infty \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_F = -0,54 \text{ см}; \\ y_F = 0. \end{array} \right.$$

$$\text{Н.о. IV: } \left. \begin{array}{l} x_H = -2,75 \text{ см} \\ y_H = \infty \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_F = +0,54 \text{ см}; \\ y_F = 0. \end{array} \right.$$

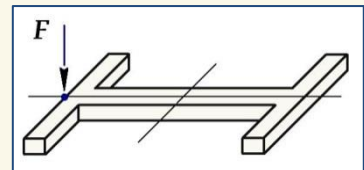


Задача 32

Определить величину силы "F", которую можно безопасно приложить в указанной точке короткой стойки из двутавра №20, если $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$.

Показать положение нейтральной оси в сечении. Принять для двутавра:

$$I_x = 2030 \text{ см}^4; A = 28,9 \text{ см}^2.$$



РЕШЕНИЕ:

① Двутавровая стойка подвергается **внецентренному сжатию**. Определяем силу "F" из условия прочности:

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_{\max}}{i_y^2} + \frac{y_F y_{\max}}{i_x^2} \right) \leq [\sigma],$$

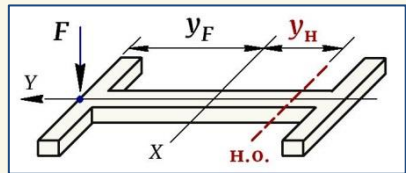
где $x_F = 0$; $y_F = 10 \text{ см}$; $y_{\max} = 10 \text{ см}$; $i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{2030}{28,9} = 70,24 \text{ см}^2$.

Откуда получаем:

$$[F] = \frac{A [\sigma]}{1 + \frac{y_F y_{\max}}{i_x^2}} = \frac{28,9 \cdot 10^2 \cdot 120}{1 + \frac{10 \cdot 10}{70,24}} = 143 \text{ кН}.$$

② Положение нейтральной оси. Так как полюс силы лежит на главной оси Y , нейтральная ось пройдет параллельно оси X по другую сторону от центра тяжести сечения. Поэтому положение нейтральной оси определяем по отрезку, который она отсекает на оси Y :

$$y_H = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{70,24}{10} = -7 \text{ см}.$$



Задача 33

Колонна диаметром $d = 44 \text{ мм}$ сжимается силой $F = 148,5 \text{ кН}$. Определить, во сколько раз вырастут напряжения в колонне, если линия действия силы окажется смещенной от оси на $e = 2 \text{ мм}$.

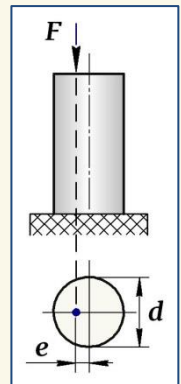
РЕШЕНИЕ:

① При **центральной сжатии**, считая, что сжимающие напряжения отрицательны, напряжения в колонне равны:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} = -\frac{F}{\pi d^2 / 4} = -\frac{148,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 44^2 / 4} = -97,7 \text{ МПа}.$$

② В случае смещения линии действия силы от оси колонна испытывает **внецентренное сжатие**, при котором напряжения определяются как:

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x_{\max}}{i_y^2} + \frac{y_F y_{\max}}{i_x^2} \right), \text{ где}$$



$$x_F = -2 \text{ мм}, x_{\max} = -22 \text{ мм}, y_F = 0, i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\pi d^4 / 64}{\pi d^2 / 4} = \frac{d^2}{16} = 121 \text{ мм}^2.$$

В результате получаем:

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{\pi d^2 / 4} \left(1 + \frac{x_F x_{\max}}{i_y^2} \right) = -\frac{148,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 44^2 / 4} \left[1 + \frac{(-2)(-22)}{121} \right] = -133 \text{ МПа}.$$

Анализ результатов расчета показывает, что при смещении силы от оси колонны на 2 мм напряжения возрастают на $\approx 36\%$.

Задача 34

Определить, как будет перемещаться полюс внецентренно приложенной силы "F" при параллельном перемещении нейтральной оси. Определить также угол "φ" между силовой линией и нейтральной осью сечения, если координаты полюса силы равны $x_F - y_F$ и для сечения отношение моментов инерции составляет $I_x / I_y = m$.

РЕШЕНИЕ:

① При заданном соотношении моментов инерции получаем:

$$\left. \begin{array}{l} I_x = i_x^2 \cdot A \\ I_y = i_y^2 \cdot A \end{array} \right\} \rightarrow \frac{I_x}{I_y} = \frac{i_x^2 \cdot A}{i_y^2 \cdot A} = m \rightarrow \boxed{\frac{i_x^2}{i_y^2} = m}. \quad (1)$$

② При параллельном перемещении нейтральной оси отношение отрезков $x_H - y_H$, которые она отсекает на главных осях $X - Y$, есть величина постоянная, т.к. $\boxed{\alpha} = \text{const} \rightarrow \text{tg} \alpha = x_H / y_H = \text{const}. \quad (2)$

③ Используем формулы, которые связывают координаты полюса силы $x_F - y_F$ и отрезки $x_H - y_H \rightarrow$

$$\boxed{x_F = -\frac{i_y^2}{x_H}; y_F = -\frac{i_x^2}{y_H}}, \quad (3)$$

и рассмотрим в них отношение величин $-\frac{y_F}{x_F} = \frac{i_x^2}{i_y^2} \cdot \frac{x_H}{y_H}$. Учитывая

здесь, что (i_x^2 / i_y^2) (1) и (x_H / y_H) (2) являются величинами постоянными, получаем уравнение траектории движения полюса силы при

параллельном перемещении нейтральной оси —

$$y_F = \left(\frac{iy^2}{ix^2} \cdot \frac{x_H}{y_H} \right) x_F. \quad (4)$$

Так как в уравнении (4) координаты полюса силы связаны линейно, значит, *силовая линия* представляет собой ПРЯМОЮ, проходящую через начало координат. Таким образом, при параллельном перемещении нейтральной оси полюс силы перемещается по ПРЯМОЙ, проходящей через центр тяжести сечения.

④ Определяем угол между *силовой линией* и *нейтральной осью* сечения.

Обозначим *силовую линию* как прямую 1, а *нейтральную ось* — как прямую 2, и напомним, что угол между двумя прямыми, как это принято в математике, отсчитывается от прямой 1 к прямой 2 против часовой стрелки.

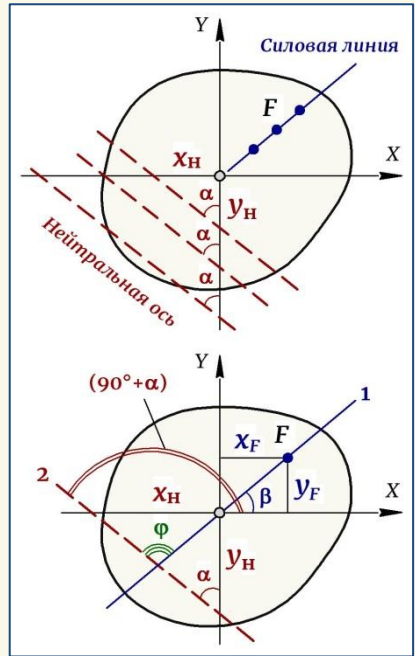
Введем в расчет угловой коэффициент прямой линии, определяемый как тангенс угла между положительным направлением оси абсцисс и заданной прямой. Тогда для *силовой линии* и *нейтральной оси*, учитывая, что последняя повернута к положительному направлению оси абсцисс под углом $(90^\circ + \alpha)$, угловые коэффициенты соответственно равны:

$$k_1 = \operatorname{tg}\beta; \quad k_2 = \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \quad (5)$$

где согласно рисунку и значениям (1) и (3) —

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \operatorname{tg}\beta = \frac{y_F}{x_F}; \\ k_2 &= -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{y_H}{x_H} = \left\| \begin{aligned} x_H &= -iy^2/x_F \\ y_H &= -ix^2/y_F \end{aligned} \right\| = -\frac{iy^2}{ix^2} \cdot \frac{x_F}{y_F} = -m \frac{x_F}{y_F}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Угол между *нейтральной осью* и *силовой линией* определяется как разность углов, образуемых соответствующими прямыми с положительным направлением оси X, т.е. $\varphi = (90^\circ + \alpha) - \beta$, а значит, с



учетом (5) его можно определить через угловые коэффициенты как:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}[(90^\circ + \alpha) - \beta] = \frac{\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)\operatorname{tg}\beta} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (7)$$

И тогда на основании значений (6) и (7) получаем:

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\beta(-\operatorname{ctg}\alpha)} = \frac{-m \frac{x_F}{y_F} - \frac{y_F}{x_F}}{1 + \frac{y_F}{x_F} \left(-m \frac{x_F}{y_F} \right)} = \left| \frac{(m x_F^2 + y_F^2)}{x_F y_F (1 - m)} \right|.$$

Задача 35

Определить для кольцевого сечения, при каком соотношении наружного и внутреннего радиусов "R/r" ядро сечения будет иметь радиус "r", т.е. занимать всю площадь внутри кольца.

РЕШЕНИЕ:

① Для кольцевого сечения:

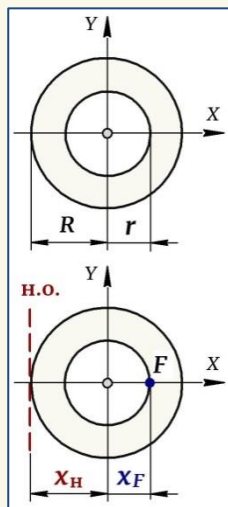
$$I_x = I_y = \pi(D^4 - d^4)/64 = \pi(R^4 - r^4)/4;$$

$$A = \pi(D^2 - d^2)/4 = \pi(R^2 - r^2), \text{ откуда } \rightarrow$$

$$i_x^2 = i_y^2 = \frac{I}{A} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4\pi(R^2 - r^2)} = \frac{R^2 + r^2}{4}. \quad (1)$$

② Для построения **ядра сечения** «обкатываем» сечение нейтральной осью по контуру, не пересекая его, и определяем координаты полюса силы, соответствующие положению нейтральной оси. В круглых сечениях **ядро сечения** также имеет круглую форму, поэтому достаточно определить только его радиус, который, согласно условию задачи, чтобы ядро занимало всю площадь внутри кольца, равен r.

Так как граница ядра соответствует нейтральной оси, проходящей по касательной к сечению, поэтому, значению отрезка $\boxed{x_F = r}$ соответствует нейтральная ось, параллельная оси Y и отсекающая на оси X отрезок $\boxed{x_H = -R}$. И тогда с учетом значения (1) получаем:



$$\chi_H = -\frac{iy^2}{\chi_F} \rightarrow -R = -\frac{R^2 + r^2}{4r} \rightarrow \frac{R}{r} + \frac{r}{R} = 4.$$

Обозначим отношение $\frac{R}{r} = m$ и приводим задачу к решению квадратного уравнения — $m + 1/m - 4 = 0 \rightarrow m^2 - 4m + 1 = 0$, откуда

$$m_1 = 3,73 \text{ и } m_2 = 0,27.$$

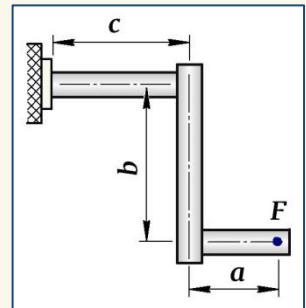
Так как $\frac{R}{r} > 1$, принимаем $m_1 = \frac{R}{r} = 3,73$.

3. Кручение с изгибом стержней круглого сечения. Расчет валов зубчатых и ременных передач

Задача 36

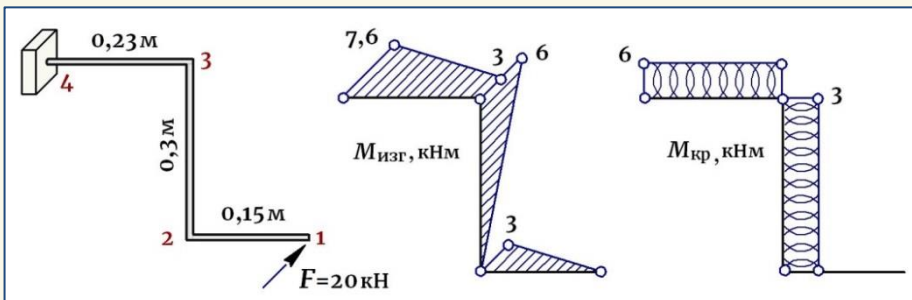
Стальной коленчатый вал круглого поперечного сечения нагружается силой $F = 20 \text{ кН}$, приложенной перпендикулярно к геометрической плоскости оси вала. Используя IV-ю теорию прочности, подобрать диаметр участков вала, если для материала вала $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Принять: $a = 0,15 \text{ м}$; $b = 0,3 \text{ м}$; $c = 0,23 \text{ м}$.



РЕШЕНИЕ:

Строим эпюры на участках коленчатого вала, устанавливаем вид сопротивления на каждом участке и, используя условие прочности, соответствующее случаю нагружения участка, по опасному сечению подбираем его диаметр:



Участок 1-2 – Плоский изгиб:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{M_{\max}}{\pi d^3 / 32} \leq [\sigma],$$

откуда
$$d_1 = 3 \sqrt{\frac{32 M_{\max}}{\pi [\sigma]}} = 3 \sqrt{\frac{32 \cdot 3 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 160}} = 58 \text{ мм.}$$

Участок 2-3 – Изгиб в одной плоскости и кручение:

$$\sigma_{\max}^{IV} = \frac{M_{\text{расч}}^{IV}}{W_x} = \frac{M_{\text{расч}}^{IV}}{\pi d^3 / 32} \leq [\sigma],$$

где
$$M_{\text{расч}}^{IV} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{6^2 + 0,75 \cdot 3^2} = 6,54 \text{ кНм} \rightarrow$$

$$d_2 = 3 \sqrt{\frac{32 M_{\text{расч}}^{IV}}{\pi [\sigma]}} = 3 \sqrt{\frac{32 \cdot 6,54 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 160}} = 75 \text{ мм.}$$

Участок 3-4 – Изгиб в одной плоскости и кручение:

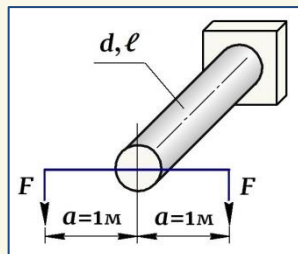
$$\sigma_{\max}^{IV} = \frac{M_{\text{расч}}^{IV}}{W_x} = \frac{M_{\text{расч}}^{IV}}{\pi d^3 / 32} \leq [\sigma],$$

где
$$M_{\text{расч}}^{IV} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{7,6^2 + 0,75 \cdot 6^2} = 9,2 \text{ кНм} \rightarrow$$

$$d_3 = 3 \sqrt{\frac{32 M_{\text{расч}}^{IV}}{\pi [\sigma]}} = 3 \sqrt{\frac{32 \cdot 9,2 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 160}} = 84 \text{ мм.}$$

Задача 37

В стержне круглого поперечного сечения диаметром $d = 40$ мм и длиной $\ell = 0,4$ м, нагруженном на конце двумя одинаковыми симметрично расположенными грузами $F = 1$ кН, определить максимальные напряжения и установить, как изменятся напряжения, если один из грузов будет снят. Использовать III-ю теорию прочности.



РЕШЕНИЕ:

① Рассматриваем вариант нагружения стержня двумя симметрично приложенными грузами. В этом случае стержень подвергается **плоскому изгибу** силой $2F$ и максимальные напряжения равны:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{2F\ell}{\pi d^3/32} = \frac{32 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 40^3} = 127,4 \text{ МПа. (1)}$$

② Рассматриваем вариант нагружения стержня, когда один из грузов снят. В этом случае возникает **изгиб с кручением** и в сечениях стержня действуют изгибающий и крутящий моменты, равные:

$$M_{\text{изг}} = F\ell = 1 \cdot 0,4 = 0,4 \text{ кНм}; \quad M_{\text{кр}} = Fa = 1 \cdot 1 = 1 \text{ кНм.}$$

Вычисляем расчетный момент —

$$M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{0,4^2 + 1^2} = 1,08 \text{ кНм} —$$

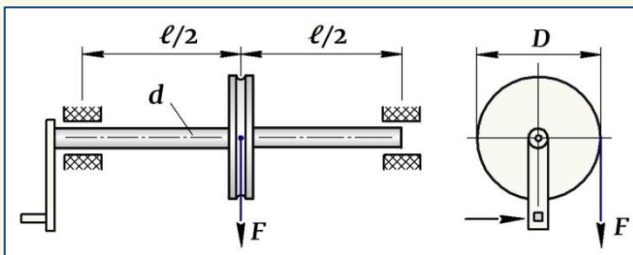
и определяем максимальные напряжения в стержне:

$$\sigma_{\max}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_x} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{\pi d^3/32} = \frac{32 \cdot 1,08 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 40^3} = 172 \text{ МПа. (2)}$$

Сравнительный анализ результатов расчета (1) и (2) показывает, что в случае снятия одного из грузов, напряжения возрастают на 35%.

Задача 38

Используя III-ю теорию прочности, определить наибольшую допускаемую силу $[F]$, которую может выдержать данная конструкция. Вал ворота имеет круглое сечение $d = 30 \text{ мм}$ и длину $\ell = 0,8 \text{ м}$, диаметр шкива — $D = 360 \text{ мм}$. Для материала вала $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$. Весом вала и шкива пренебречь.

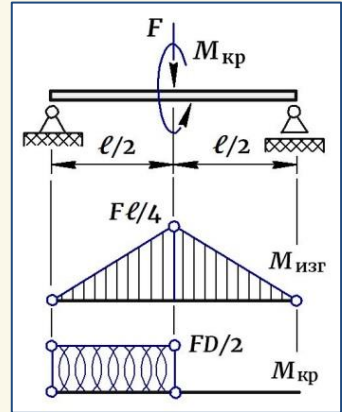


РЕШЕНИЕ:

① Из расчетной схемы вала видно, что опасным является сечение в середине пролета, где действуют крутящий и наибольший изгибающий моменты, равные:

$$\boxed{M_{\text{изг}}} = \frac{F\ell}{4} = \frac{F \cdot 0,8}{4} = 0,2F \text{ (кНм)};$$
$$\boxed{M_{\text{кр}}} = \frac{FD}{2} = \frac{F \cdot 0,36}{2} = 0,18F \text{ (кНм)}.$$

(1)



② Из условия прочности при **кручении с изгибом** стержней круглого сечения –

$$\boxed{\sigma_{\text{max}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_x} \leq [\sigma]},$$

где на основании значений (1) –

$$\boxed{M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}} = \sqrt{(0,2F)^2 + (0,18F)^2} = 0,27F \text{ (кНм)},$$

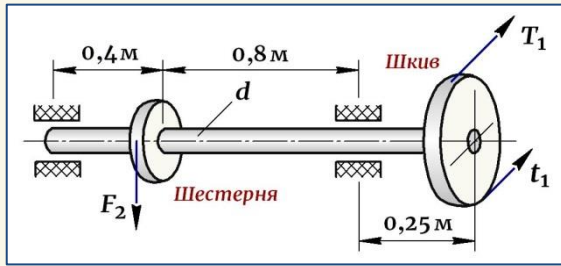
определяем наибольшую допускаемую силу для конструкции:

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_x} = \frac{0,27F \cdot 10^6}{\pi d^3 / 32} \leq [\sigma] \rightarrow$$

$$[F] = \frac{\pi d^3 \cdot [\sigma]}{32 \cdot 0,27 \cdot 10^6} = \frac{3,14 \cdot 30^3 \cdot 80}{32 \cdot 0,27 \cdot 10^6} = 0,785 \text{ кН} \approx 0,8 \text{ кН}.$$

Задача 39

На стальной вал постоянного сечения, вращающийся со скоростью $n = 100$ об/мин, через ведущий шкив ременной передачи передается мощность $N = 10$ л.с. Натяжения ведущей T_1 и ведомой t_1 ветвей шкива связаны соотношением $T_1 = 2,6t_1$. Диаметр шкива $D_1 = 0,6$ м, диаметр шестерни $D_2 = 0,24$ м. Подобрать диаметр вала " d ", если для материала $[\sigma] = 100$ МПа. Использовать III-ю теорию прочности. Весом вала, шкива и шестерни пренебречь.



РЕШЕНИЕ:

① Определяем внешние закручивающие моменты, действующие на вал, в местах посадки шкива и шестерни. От действия шкива:

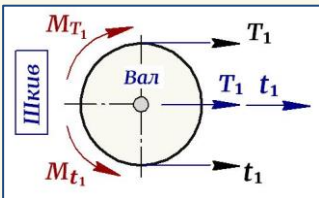
$$M_1 = 7,2 \frac{N}{n} = 7,2 \frac{10}{100} = 0,72 \text{ кНм.}$$

Из условия равновесия вала — $\sum M_Z = 0$: $M_1 - M_2 = 0$, откуда

$$\boxed{M_1 = M_2 = 0,72 \text{ кНм}} . \quad (1)$$

② С учетом значений (1) определяем изгибающие силы, действующие на вал, в местах посадки шкива и шестерни:

$$а) M_1 = M_{T_1} - M_{t_1} = T_1 \frac{D_1}{2} - t_1 \frac{D_1}{2} = \| T_1 = 2,6 t_1 \| = 1,6 t_1 \frac{D_1}{2},$$



откуда силы натяжения ветвей шкива —

$$t_1 = \frac{2 M_1}{1,6 D_1} = \frac{2 \cdot 0,72}{1,6 \cdot 0,6} = 1,5 \text{ кН;} \quad (2)$$

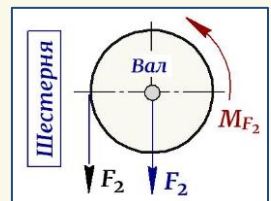
$$T_1 = 2,6 t_1 = 2,6 \cdot 1,5 = 3,9 \text{ кН.}$$

Тогда сила F_1 , действующая на вал со стороны шкива и изгибающая вал в горизонтальной плоскости, с учетом значений (2) равна:

$$\boxed{F_1} = T_1 + t_1 = 3,9 + 1,5 = 5,4 \text{ кН.} \quad (3)$$

б) $M_{F_2} = F_2 \frac{D_2}{2} = M_2$, откуда сила F_2 , действующая на вал со стороны шестерни и изгибающая вал в вертикальной плоскости, равна:

$$\boxed{F_2} = \frac{2 M_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,72}{0,24} = 6 \text{ кН.} \quad (4)$$



③ Создаем расчетную схему вала (рис. 1, а). Вал подвергается *изгибу в двух плоскостях и кручению*. Рассматриваем каждую деформацию в отдельности и с учетом значений (1), (3), (4) строим эпюры:

★ Рассматриваем изгиб в *вертикальной плоскости* (рис. 1, б). Для этого прикладываем к валу силу F_2 , определяем из уравнений равновесия реакции опор и по правилам знаков, принятым для изгибающего момента, строим эпюру M_x (рис. 1, в);

★ Рассматриваем изгиб в *горизонтальной плоскости* (рис. 1, г). Для этого прикладываем к валу силу F_1 (здесь удобнее плоскость действия силы положить в плоскости листа), определяем из уравнений равновесия реакции опор и строим эпюру M_y (рис. 1, д);

★ Так как вал имеет круглое сечение, то для таких элементов в случае изгиба в двух плоскостях можно определять суммарный изгибающий момент как:

$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \quad (5)$$

И тогда для граничных сечений вала на основании (5) получаем:

$$M_{\text{изг}}(A) = 0; \quad M_{\text{изг}}(B) = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{1,6^2 + 0,45^2} = 1,65 \text{ кНм};$$

$$M_{\text{изг}}(C) = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{0 + 1,35^2} = 1,35 \text{ кНм}; \quad M_{\text{изг}}(D) = 0.$$

По полученным данным строим суммарную эпюру изгибающих моментов (рис. 1, е).

Примечание.

Здесь следует иметь ввиду, что поскольку изгиб происходит в двух плоскостях, то только на крайних участках – слева и справа – суммарная эпюра моментов будет прямолинейна. На внутренних участках эпюра будет представлять собой плавную провесную линию.

★ Рассматриваем кручение вала и строим эпюру крутящих моментов (рис. 1, ж).

Опасным на валу является сечение "В", в котором:

$$M_{\text{изг}} = 1,65 \text{ кНм}; \quad M_{\text{кр}} = 0,72 \text{ кНм}, \quad \text{откуда}$$

$$M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{1,65^2 + 0,72^2} = 1,8 \text{ кНм}.$$

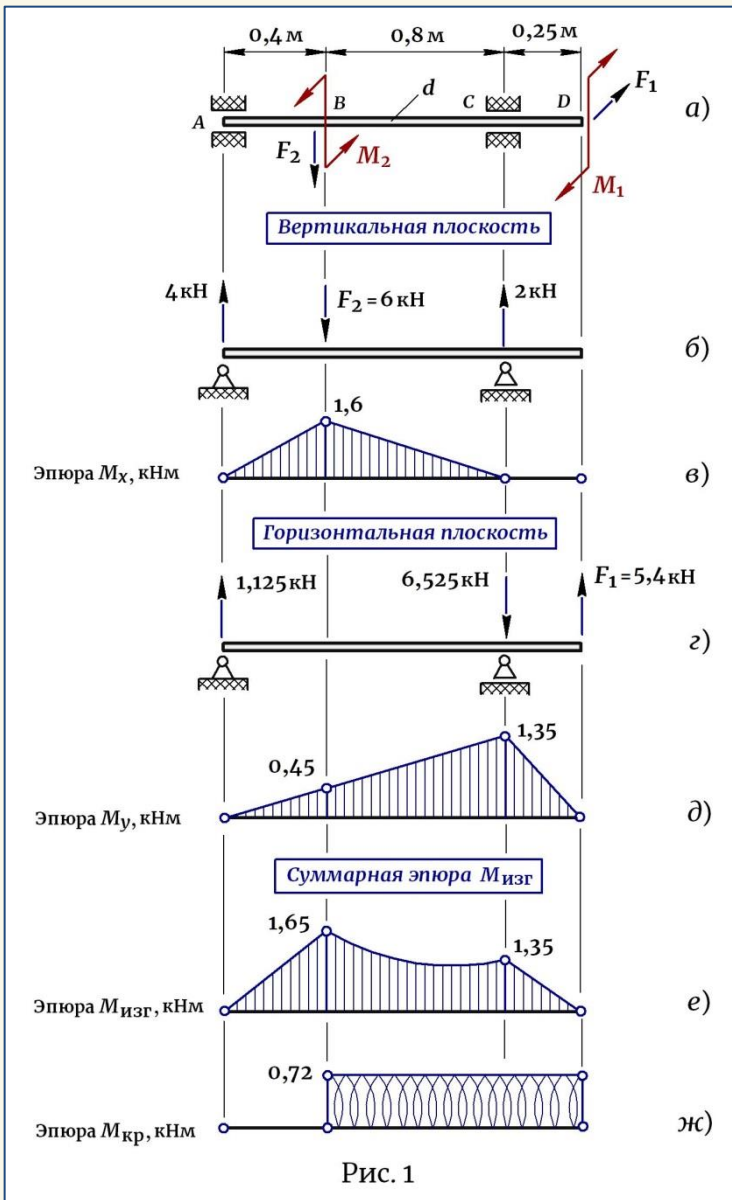


Рис. 1

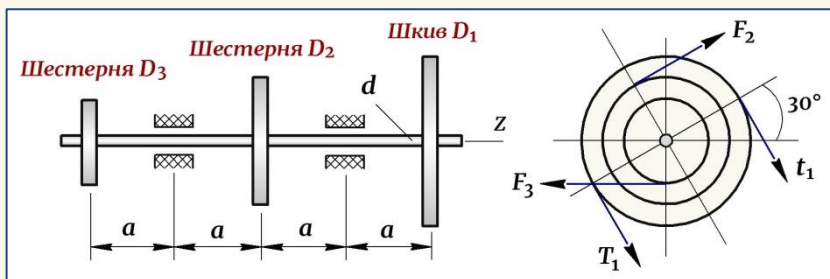
④ По опасному сечению подбираем диаметр вала:

$$\sigma_{\max}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_x} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{\pi d^3/32} \leq [\sigma],$$

откуда
$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,8 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 100}} = 56,8 \approx 60 \text{ мм.}$$

Задача 40

На стальной вал постоянного сечения " d ", вращающийся со скоростью $n = 650$ об/мин, через ведущий шкив $D_1 = 500$ мм с помощью ременной передачи передается мощность $N = 40$ кВт, которая затем распределяется между шестернями $D_2 = 300$ мм и $D_3 = 200$ мм в соотношении $N_2/N_3 = 1,5$. Натяжения ведущей T_1 и ведомой t_1 ветвей шкива связаны соотношением $T_1 = 2t_1$. Определить диаметр вала " d ", если $[\sigma] = 160$ МПа. Использовать IV-ю теорию прочности. Принять $a = 0,1$ м. Весом вала, шкива и шестерен пренебречь.



РЕШЕНИЕ:

① Определяем внешние крутящие моменты, действующие на вал, в местах посадки шкива и шестерен. Со стороны шкива:

$$M_1 = 9,7 \frac{N}{n} = 9,7 \frac{40}{650} = 0,6 \text{ кНм.} \quad (1)$$

Согласно условию задачи передаваемая через ременную передачу мощность распределяется между шестернями 2 и 3 в соотношении $N_2/N_3 = 1,5$, откуда получаем:

$$\frac{M_2}{M_3} = \frac{9,7 N_2 / n}{9,7 N_3 / n} = \frac{N_2}{N_3} = 1,5 \rightarrow M_2 = 1,5 M_3. \quad (2)$$

Тогда из условия равновесия вала с учетом значений (1) и (2) определяем закручивающие моменты на валу:

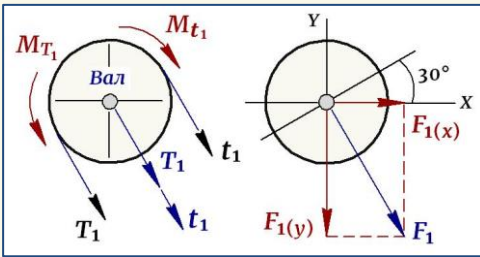
$$\begin{aligned} \sum M_Z = 0: & \quad \boxed{M_1 = 0,6 \text{ кНм}} \\ M_1 - M_2 - M_3 = 0 & \quad \boxed{M_2 = 0,36 \text{ кНм}} \\ M_1 - 1,5 M_3 - M_3 = 0 \rightarrow & \quad \boxed{M_3 = 0,24 \text{ кНм}} \end{aligned} \quad (3)$$

② Определяем силы, действующие на вал в местах посадки шкива и шестерен, и с учетом значений (3) получаем –

Шкив 1: $M_1 = M_{T_1} - M_{t_1} = T_1 \frac{D_1}{2} - t_1 \frac{D_1}{2} \Rightarrow T_1 = 2t_1 \Rightarrow \frac{t_1 D_1}{2},$

откуда силы натяжения ветвей шкива и сила, изгибающая вал в месте установки шкива, а также ее составляющие в вертикальной и горизонтальной плоскостях соответственно равны:

$$t_1 = \frac{2 M_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 0,6}{0,5} = 2,4 \text{ кН}; \quad T_1 = 2 t_1 = 2 \cdot 2,4 = 4,8 \text{ кН}.$$



$$\boxed{F_1} = T_1 + t_1 = 2,4 + 4,8 = 7,2 \text{ кН},$$

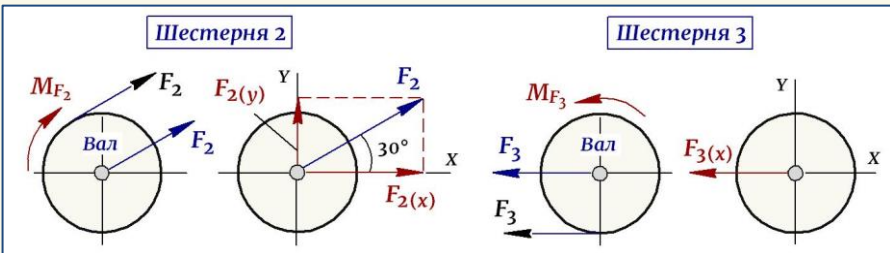
откуда \rightarrow

$$\left. \begin{aligned} \boxed{F_1(x)} &= F_1 \sin 30^\circ = 3,6 \text{ кН} \\ \boxed{F_1(y)} &= F_1 \cos 30^\circ = 6,2 \text{ кН} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Шестерни 2 и 3:

$$M_2 = \frac{F_2 D_2}{2} \rightarrow \boxed{F_2} = \frac{2 M_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,36}{0,3} = 2,4 \text{ кН},$$

$$M_3 = \frac{F_3 D_3}{2} \rightarrow \boxed{F_3} = \frac{2 M_3}{D_3} = \frac{2 \cdot 0,24}{0,2} = 2,4 \text{ кН},$$



откуда составляющие сил F_2 и F_3 в вертикальной и горизонтальной плоскостях соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} \boxed{F_2(x)} &= F_2 \cos 30^\circ = 2,1 \text{ кН} \\ \boxed{F_2(y)} &= F_2 \sin 30^\circ = 1,2 \text{ кН} \end{aligned} \right\}; \quad (5) \quad \left. \begin{aligned} \boxed{F_3(x)} &= F_3 = 2,4 \text{ кН} \\ \boxed{F_3(y)} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

③ Создаем расчетную схему вала (рис. 1, а). Вал подвергается *изгибу в двух плоскостях и кручению*. Рассматриваем каждую деформацию в отдельности и с учетом значений (3), (4), (5), (6) строим эпюры:

★ Рассматриваем изгиб в *вертикальной плоскости* (рис. 1, б). Для этого прикладываем к валу в соответствующих сечениях силы $F_1(y)$ и $F_2(y)$, $F_3(y) = 0$, определяем из уравнений равновесия реакции опор и строим эпюру M_x (рис. 1, в);

★ Рассматриваем изгиб в *горизонтальной плоскости* (рис. 1, г). Для этого прикладываем к валу в соответствующих сечениях силы $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $F_3(x)$, располагая силовую плоскость в плоскости листа, определяем реакции опор и строим эпюру M_y (рис. 1, д);

★ Определяем суммарный изгибающий момент как —

$$\boxed{M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}} \quad (7)$$

и в граничных сечениях на основании формулы (7) получаем:

$$\boxed{M_{\text{изг}}(A)} = 0; \quad \boxed{M_{\text{изг}}(B)} = \sqrt{0 + 0,24^2} = 0,24 \text{ кНм};$$

$$\boxed{M_{\text{изг}}(C)} = \sqrt{0,37^2 + 0,04^2} = 0,38 \text{ кНм};$$

$$\boxed{M_{\text{изг}}(D)} = \sqrt{0,62^2 + 0,36^2} = 0,72 \text{ кНм}; \quad \boxed{M_{\text{изг}}(K)} = 0.$$

Строим суммарную эпюру изгибающих моментов (рис. 1, е).

★ Рассматриваем кручение вала и строим эпюру крутящих моментов (рис. 1, ж).

Опасным на валу является сечение "D", в котором:

$$\boxed{M_{\text{изг}} = 0,72 \text{ кНм}; M_{\text{кр}} = 0,6 \text{ кНм}}, \text{ откуда}$$

$$\boxed{M_{\text{расч}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{0,72^2 + 0,75 \cdot 0,6^2} = 0,89 \text{ кНм}.}$$

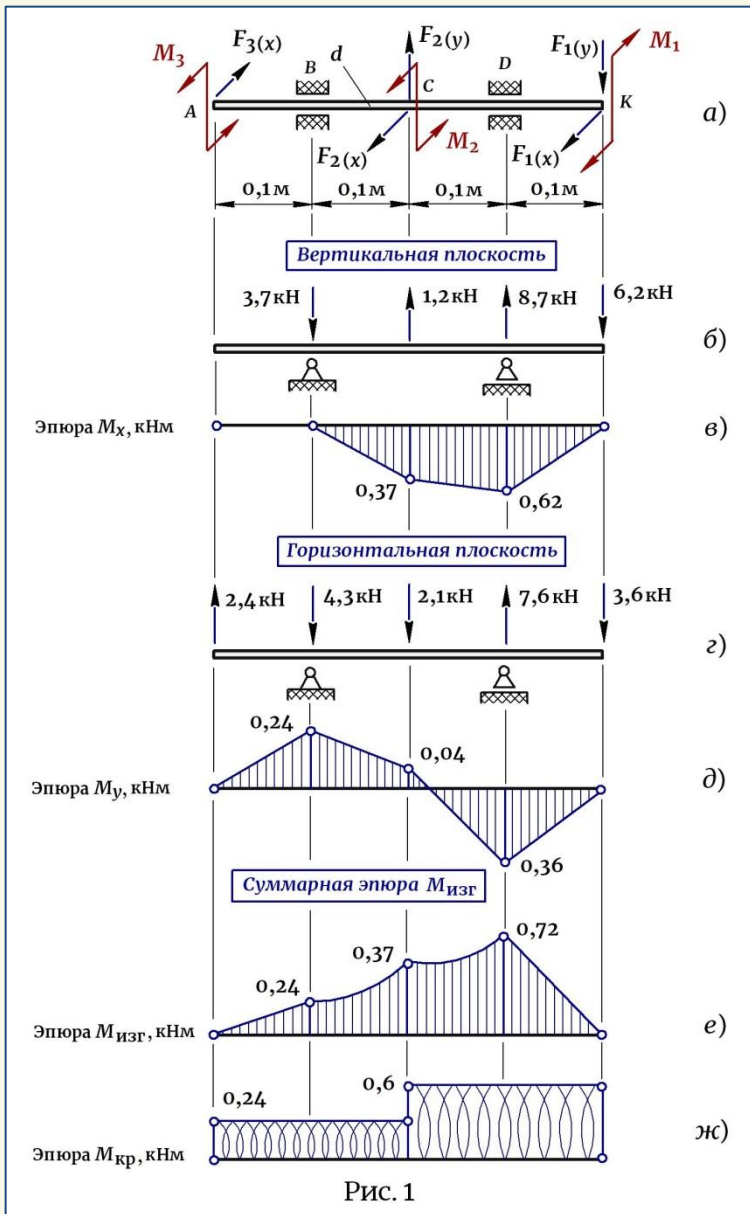


Рис. 1

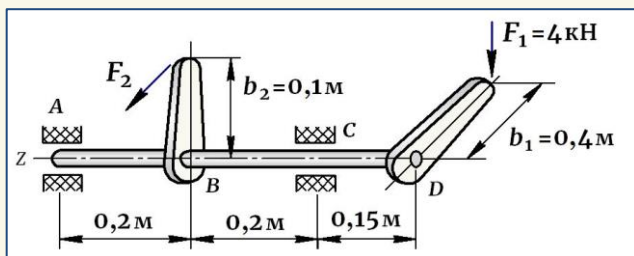
④ По опасному сечению подбираем диаметр вала:

$$\sigma_{\max}^{IV} = \frac{M_{расч}^{IV}}{W_x} = \frac{M_{расч}^{IV}}{\pi d^3/32} \leq [\sigma],$$

откуда
$$d = 3 \sqrt{\frac{32 M_{\text{расч}}^{\text{IV}}}{\pi [\sigma]}} = 3 \sqrt{\frac{32 \cdot 0,89 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 160}} = 38,4 \approx 40 \text{ мм.}$$

Задача 41

Вал рулевого управления самолета имеет трубчатое сечение с отношением внутреннего и наружного диаметров $d/D = 0,8$ и нагружен,



как показано на рисунке. Используя III-ю теорию прочности, подобрать размеры сечения, если для вала $[\sigma] = 95 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① Через систему эксцентриков вал подвергается действию сил F_1 и F_2 , приводящих к его **изгибу в двух плоскостях и кручению**. Определяем крутящие моменты, закручивающие вал на участке BD , и силу F_2 , создающую **горизонтальный изгиб**:

★ Внешние крутящие моменты M_1 и M_2 из условия равновесия — $\sum M_Z = 0: M_1 - M_2 = 0 \rightarrow$ имеют одинаковое значение и равны:

$$M_1 = F_1 b_1 = 4 \cdot 0,4 = 1,6 \text{ кН} \rightarrow \boxed{M_1 = M_2 = 1,6 \text{ кНм}}, \quad (1)$$

★ Учитывая, что $M_2 = F_2 b_2$, с учетом значения (1) получаем —

$$\boxed{F_2} = \frac{M_2}{b_2} = \frac{1,6}{0,1} = 16 \text{ кН.} \quad (2)$$

② Создаем расчетную схему вала и, рассматривая каждую деформацию в отдельности, с учетом заданных значений и значений (1) и (2) строим эпюры изгибающих и крутящих моментов (см. рис. ниже).

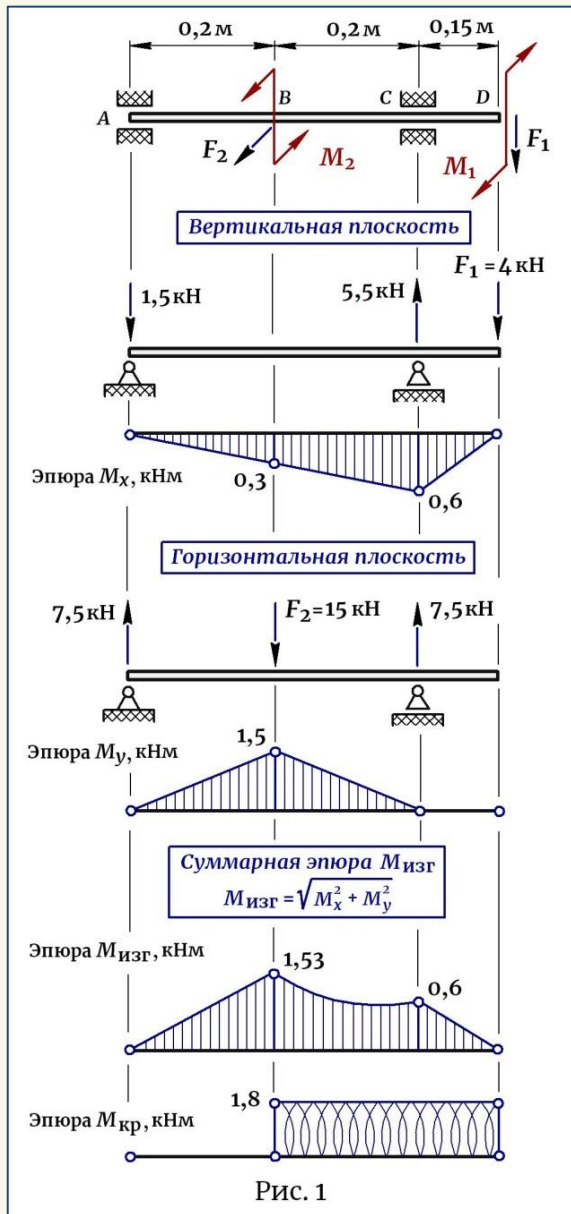


Рис. 1

Опасным на валу является сечение "В", в котором:

$$|M_{изг}| = 1,63 \text{ кНм}; |M_{кр}| = 1,6 \text{ кНм}, \text{ откуда}$$

$$M_{расч}^{III} = \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{1,63^2 + 1,6^2} = 2,28 \text{ кНм}. \quad (3)$$

③ По опасному сечению подбираем диаметр вала —

$$\sigma_{\max \text{ III}} = \frac{M_{\text{расч III}}}{W_x} \leq [\sigma],$$

где согласно условию задачи:

$$W_x = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \parallel d = 0,8D \parallel = \frac{\pi[D^4 - (0,8D)^4]}{32D} = 0,058D^3. \quad (4)$$

Подставляем значения (3) и (4) в условие прочности и получаем:

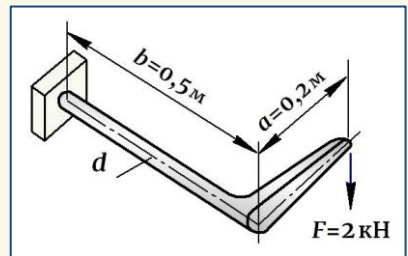
$$\sigma_{\max \text{ III}} = \frac{M_{\text{расч III}}}{W_x} = \frac{M_{\text{расч III}}}{0,058D^3} \leq [\sigma], \text{ откуда}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{расч III}}}{0,058[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{2,28 \cdot 10^6}{0,058 \cdot 95}} = 75 \text{ мм}; \quad d = 0,8D = 60 \text{ мм}.$$

Задача 42

Используя III-ю теорию прочности, определить диаметр кулачка "d", если для материала $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:



① Наиболее нагруженным в кулачке является сечение в жесткой заделке, где действуют крутящий и изгибающий моменты, равные:

$$M_{\text{кр}} = Fa = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ кНм}; \quad M_{\text{изг}} = Fb = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ кНм},$$

для которых — $M_{\text{расч III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{1^2 + 0,4^2} = 1,08 \text{ кНм}.$

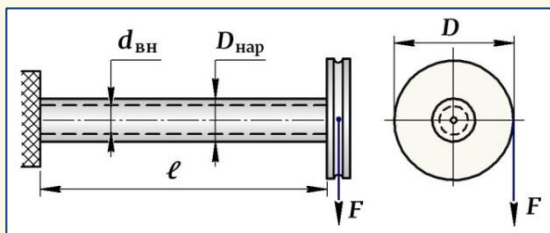
② Из условия прочности подбираем диаметр кулачка:

$$\sigma_{\max \text{ III}} = \frac{M_{\text{расч III}}}{W_x} = \frac{M_{\text{расч III}}}{\pi d^3 / 32} \leq [\sigma]$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{расч III}}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,08 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 160}} = 40 \text{ мм}.$$

Задача 43

Диск диаметром $D=10\text{ см}$ укреплен на конце полой трубы круглого сечения ($D_{\text{нар}}=6,5\text{ см}$, $d_{\text{вн}}=5,1\text{ см}$) длиной $\ell=0,8\text{ м}$ и нагружен силой $F=2\text{ кН}$. Определить наибольшие напряжения в трубе, используя III-ю теорию прочности.



РЕШЕНИЕ:

① Полая труба подвергается **изгибу с кручением**. Наиболее нагруженным является сечение в заделке, где действуют крутящий и изгибающий моменты, равные:

$$M_{\text{кр}} = F(D/2) = 2 \cdot 0,05 = 0,1 \text{ кНм}; \quad M_{\text{изг}} = F\ell = 2 \cdot 0,8 = 1,6 \text{ кНм},$$

для которых — $M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{1,6^2 + 0,1^2} = 1,6 \text{ кНм}$.

② Наибольшие напряжения определяются по формуле —

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_{\text{х}}},$$

где $W_{\text{х}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{3,14(6,5^4 - 5,1^4)}{32 \cdot 6,5} = 16,7 \text{ см}^3$, и равны:

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_{\text{х}}} = \frac{1,6 \cdot 10^6}{16,7 \cdot 10^3} = 95,8 \text{ МПа}.$$

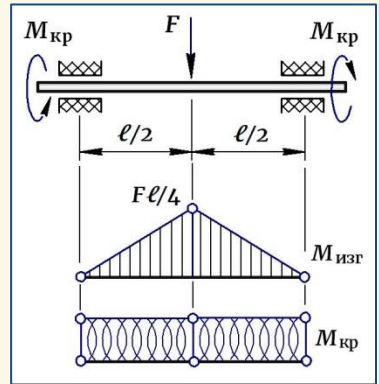
Задача 44

Полый чугунный вал круглого поперечного сечения с размерами $D=140\text{ мм}$ и $d=90\text{ мм}$ передает мощность $N=150\text{ л.с.}$ при скорости вращения $n=100\text{ об/мин}$. Расстояние между опорными подшипниками равно $\ell=1,6\text{ м}$. Посередине к валу приложена сосредоточенная сила $F=30\text{ кН}$. Используя II-ю теорию прочности, определить для опасного сечения наибольшие напряжения. Принять: $\mu=0,25$.

РЕШЕНИЕ:

① Вал подвергается **изгибу с кручением** и действующие в его опасном сечении изгибающий и крутящий моменты равны —

$$\begin{aligned} M_{\text{изг}} &= \frac{F\ell}{4} = \frac{30 \cdot 1,6}{4} = 12 \text{ кНм}; \\ M_{\text{кр}} &= 7,2 \frac{N}{n} = 7,2 \frac{150}{100} = 10,8 \text{ кНм}, \end{aligned} \quad (1)$$



а расчетный момент по II – ой теории проч-
прочности с учетом (1) определяется как:

$$\begin{aligned} M_{\text{расч II}} &= \frac{1-\mu}{2} M_{\text{изг}} + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} = \\ &= \frac{1-0,25}{2} \cdot 12 + \frac{1+0,25}{2} \sqrt{12^2 + 10,8^2} = 14,6 \text{ кНм}. \end{aligned} \quad (2)$$

② Для сечения вала —

$$W_x = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{3,14(14^4 - 9^4)}{32 \cdot 14} = 223,3 \text{ см}^3. \quad (3)$$

③ С учетом значений (2) и (3) определяем для опасного сечения наибольшие напряжения:

$$\sigma_{\text{max II}} = \frac{M_{\text{расч II}}}{W_x} = \frac{14,6 \cdot 10^6}{223,3 \cdot 10^3} = 65,4 \text{ МПа}.$$

Задача 45

Полый стальной вал с отношением наружного D и внутреннего d диаметров " $D = 2d$ " скручивается моментом $M_{\text{кр}} = 27 \text{ кНм}$ и изгибается моментом $M_{\text{изг}} = 14 \text{ кНм}$. Используя III – ю теорию прочности, подобрать диаметр вала, если $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① Подбор диаметра вала выполняем из условия прочности **при кру-
чении с изгибом:**

$$\sigma_{\max}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (1)$$

где $M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{14^2 + 27^2} = 30,4 \text{ кНм}; \quad (2)$

$$W_x = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{\pi[(2d)^4 - d^4]}{32 \cdot 2d} = 0,736d. \quad (3)$$

② Подставляем значения (2) и (3) в условие прочности (1) и подбираем размеры сечения полого вала:

$$\sigma_{\max}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_x} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{0,736d} \leq [\sigma], \text{ откуда}$$

$$d = 3 \sqrt{\frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{0,736[\sigma]}} = 3 \sqrt{\frac{30,4 \cdot 10^6}{0,736 \cdot 120}} = 70 \text{ мм}; \quad D = 2d = 140 \text{ мм}.$$

Задача 46

Сплошной стальной вал круглого сечения нагружен в опасном сечении изгибающим $M_{\text{изг}} = 11,5 \text{ кНм}$ и крутящим $M_{\text{кр}} = 8,5 \text{ кНм}$ моментами. Используя III – ю и IV – ю теории прочности, подобрать диаметр вала "d", если для материала $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① Вычисляем расчетные моменты:

$$M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{11,5^2 + 8,5^2} = 11,9 \text{ кНм};$$

$$M_{\text{расч}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{11,5^2 + 0,75 \cdot 8,5^2} = 13,6 \text{ кНм}.$$

② Подбор диаметра вала выполняем из условия прочности для **кручения с изгибом:**

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_x} = \frac{M_{\text{расч}}}{\pi d^3 / 32} \leq [\sigma], \text{ откуда}$$

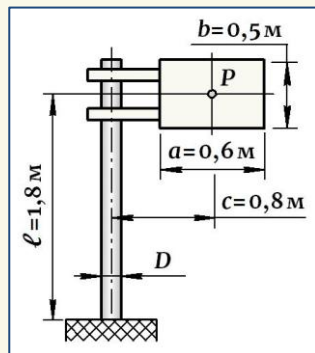
$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 11,9 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 80}} = 115 \text{ мм};$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{расч}}^{\text{IV}}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 13,6 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 80}} = 120 \text{ мм}.$$

Задача 47

Дорожный знак укреплен на полой стойке круглого поперечного сечения с наружным диаметром $D = 60 \text{ мм}$ и подвергается ветровой нагрузке $p = 1,5 \text{ кН/м}$. Используя III-ю теорию прочности, определить толщину стенки стойки, если для нее $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:



① Равнодействующая ветровой нагрузки на дорожный знак равна —

$$P = p(a \times b) = 1,5(0,6 \times 0,5) = 0,45 \text{ кН}$$

и приложена в его центре тяжести.

② Действие этой силы на стойку создает в ней **изгиб с кручением** и в ее основании возникают изгибающий и крутящий моменты, равные:

$$M_{\text{изг}} = P\ell = 0,45 \cdot 1,8 = 0,81 \text{ кНм}; \quad M_{\text{кр}} = Pc = 0,45 \cdot 0,8 = 0,36 \text{ кНм}.$$

③ Подбираем размер сечения стойки из условия прочности **при кручении с изгибом**:

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_x} \leq [\sigma],$$

где — $M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{0,81^2 + 0,36^2} = 0,89 \text{ кНм}.$

Отсюда получаем: $W_x = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{[\sigma]} = \frac{0,89 \cdot 10^6}{100} = 8,9 \text{ см}^3.$

Учитывая, что $W_x = \pi(D^4 - d^4)/32D \rightarrow$

$$\boxed{d} = \sqrt[4]{D^4 - \frac{32DW_x}{\pi}} = \sqrt[4]{6^4 - \frac{32 \cdot 6 \cdot 8,9}{3,14}} = 5,2 \text{ см},$$

откуда определяем толщину стенки стойки:

$$\boxed{t} = \frac{D-d}{2} = \frac{60-52}{2} = 4 \text{ мм}.$$

Задача 48

Два бруса из одинакового материала, имеющие одинаковый вес и длину, но один — круглого сечения диаметром " d ", а другой — квадратного со стороной сечения " a ", подвергаются изгибу с кручением. Определить, при каком соотношении между изгибающим $M_{\text{изг}}$ и крутящим $M_{\text{кр}}$ моментами более прочным является брус круглого сечения и при каком — брус квадратного сечения. Для расчета использовать III-ю теорию прочности.

РЕШЕНИЕ:

① Согласно условию задачи брусья выполнены из одного материала, имеют одинаковый вес и длину, а это значит, что площади поперечных сечений брусев также одинаковы. Отсюда получаем соотношение между размерами сечений:

$$\left. \begin{array}{l} A_{\text{круг}} = \pi d^2 / 4 \\ A_{\text{квадр}} = a^2 \end{array} \right\} \rightarrow \pi d^2 / 4 = a^2 \rightarrow \boxed{a = \frac{d\sqrt{\pi}}{2}}. \quad (1)$$

② Обозначим соотношение изгибающего и крутящего моментов:

$$\boxed{M_{\text{изг}} / M_{\text{кр}} = m}. \quad (2)$$

③ При **кручении с изгибом** бруса **круглого сечения** максимальные напряжения вычисляются через расчетный момент —

$$\sigma_{\text{круг}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_x},$$

где $\boxed{M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}}$ и $\boxed{W_x = \pi d^3 / 32}$.

Тогда с учетом соотношения (2) получаем:

$$\sigma_{\text{круг}}^{\text{III}} = \frac{\sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}}{\pi d^3 / 32} = \sqrt{\frac{32^2 M_{\text{кр}}^2 (m^2 + 1)}{\pi^2 d^6}}. \quad (3)$$

④ При **кручении с изгибом** бруса **квадратного сечения** максимальные напряжения определяются как —

$$\sigma_{\text{квадр}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\text{изг}}^2 + 4\tau_{\text{кр}}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{изг}}}{W_{\chi}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_{\kappa}}\right)^2},$$

где для **квадратного сечения** $W_{\chi} = a^3/6; W_{\kappa} = 0,208a^3$. В результате с учетом соотношений (1) и (2) получаем выражение (4):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{квадр}}^{\text{III}} &= \sqrt{\left(\frac{M_{\text{изг}}}{a^3/6}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\text{кр}}}{0,208a^3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{6 \cdot 2^3 M_{\text{изг}}}{d^3 \pi \sqrt{\pi}}\right)^2 + 4\left(\frac{2^3 M_{\text{кр}}}{0,208 d^3 \pi \sqrt{\pi}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2^6 M_{\text{кр}}^2 (36m^2 + 92)}{\pi^3 d^6}}. \end{aligned}$$

⑤ Рассмотрим отношение значений (3) и (4) и после преобразования приводим его к виду:

$$\frac{\sigma_{\text{круг}}^{\text{III}}}{\sigma_{\text{квадр}}^{\text{III}}} = \sqrt{\frac{16\pi(m^2 + 1)}{36m^2 + 92}}. \quad (5)$$

Более прочным является брус, в котором при прочих равных условиях возникают меньшие напряжения. Отсюда следует:

★ более прочным будет брус **круглого сечения**, если выражение (5)

меньше единицы, т.е. $\sqrt{\frac{16\pi(m^2 + 1)}{36m^2 + 92}} < 1$, откуда получаем —

$$16\pi(m^2 + 1) < 36m^2 + 92 \rightarrow \boxed{m = M_{\text{изг}}/M_{\text{кр}} < 1,71};$$

★ более прочным будет брус **квадратного сечения**, если выраже-

ние (5) больше единицы, т.е. $\sqrt{\frac{16\pi(m^2 + 1)}{36m^2 + 92}} > 1$, откуда получаем —

$$16\pi(m^2 + 1) > 36m^2 + 92 \rightarrow \boxed{m = M_{\text{изг}}/M_{\text{кр}} > 1,71}.$$

4. Другие случаи сложного сопротивления. Расчет пространственного стержня

Задача 49

Стержень круглого сечения диаметром $d = 40$ мм подвергается растяжению силой $F = 40$ кН и кручению моментом $M_{кр} = 0,5$ кНм. Используя III-ю теорию прочности, проверить прочность стержня, если для него $[\sigma] = 120$ МПа.



РЕШЕНИЕ:

При **кручении с растяжением** напряжения определяются как:

$$\sigma_{\max}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\text{раст}}^2 + 4\tau_{\text{кр}}^2}, \text{ где}$$

$$\sigma_{\text{раст}} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi d^2 / 4} = \frac{40 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 40^2 / 4} = 31,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{кр}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} = \frac{M_{\text{кр}}}{\pi d^3 / 16} = \frac{0,5 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 40^3 / 16} = 39,8 \text{ МПа}.$$

В результате получаем:

$$\sigma_{\max}^{\text{III}} = \sqrt{31,8^2 + 4 \cdot 39,8^2} = 85,7 \text{ МПа}.$$

Так как $\sigma_{\max}^{\text{III}} < [\sigma]$ — прочность стержня обеспечена.

Задача 50

Трубчатый стержень с наружным и внутренним диаметрами, соответственно равными $D = 8$ см и $d = 6$ см, скручивается парой сил с моментом $M_{кр} = 4,2$ кНм. Какое наибольшее растягивающее усилие "F" может быть дополнительно приложено к стержню, если для материала $[\sigma] = 120$ МПа. Использовать IV-ю теорию прочности.

РЕШЕНИЕ:

① Согласно IV-й теории прочности максимальные напряжения при **кручении с растяжением** определяются как:

$$\sigma_{\max}^{IV} = \sqrt{\sigma_{\text{раст}}^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2} = \sqrt{\left(\frac{F}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}\right)^2}, \quad (1)$$

где

$$A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{3,14(8^2 - 6^2)}{4} = 21,98 \text{ см}^2;$$

$$W_{\rho} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{3,14(8^4 - 6^4)}{16 \cdot 8} = 68,7 \text{ см}^3. \quad (2)$$

② На основании (1) записываем для стержня условие прочности –

$$\sigma_{\max}^{IV} = \sqrt{\sigma_{\text{раст}}^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2} = \sqrt{\left(\frac{F}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}\right)^2} \leq [\sigma]$$

и с учетом значений (2) определяем растягивающую силу "F", которую можно дополнительно безопасно приложить к стержню:

$$\left(\frac{F}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}\right)^2 = ([\sigma])^2 \rightarrow \boxed{F} = A \cdot \sqrt{([\sigma])^2 - 3\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}\right)^2} =$$

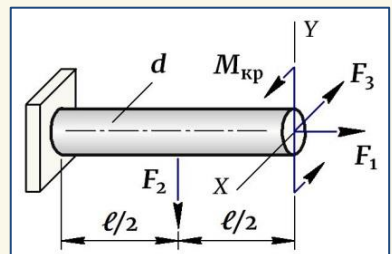
$$= 21,98 \cdot 10^2 \sqrt{120^2 - 3\left(\frac{4,2 \cdot 10^6}{68,7 \cdot 10^3}\right)^2} = 124 \text{ кН}.$$

Задача 51

Для стержня круглого поперечного сечения диаметром $d = 6 \text{ см}$ и длиной $\ell = 1,2 \text{ м}$, нагруженного моментом $M_{\text{кр}} = 1 \text{ кНм}$ и силами $F_1 = 40 \text{ кН}$, $F_2 = 1,6 \text{ кН}$ и $F_3 = 0,6 \text{ кН}$, используя III-ю теорию прочности, определить наибольшие напряжения в опасном сечении.

РЕШЕНИЕ:

① Стержень подвергается **растяжению**, **изгибу в двух плоскостях** и **кручению**. Вычисляем геометрические характеристики для круглого сечения, которые будут необходимы при определении напряжений для соответствующих деформаций:



$$A = \pi d^2 / 4 = 3,14 \cdot 6^3 / 4 = 28,26 \text{ см}^2;$$

$$W_x = \pi d^3 / 32 = 3,14 \cdot 6^3 / 32 = 21,195 \text{ см}^3;$$

$$W_p = \pi d^3 / 16 = 3,14 \cdot 6^3 / 16 = 42,39 \text{ см}^3.$$

② Для случая, когда вместе с изгибом (в одной или двух плоскостях) и кручением одновременно возникает растяжение или сжатие, для определения напряжений следует использовать формулу:

$$\sigma_{\max}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau_{\text{кр}}^2}, \quad (1)$$

где $\sigma = \sigma_{\text{раст}} + \sigma_{\text{изг}}$ — напряжения, возникающие от растяжения и изгиба в двух плоскостях; $\tau_{\text{кр}}$ — напряжения от кручения.

③ Определяем нормальные напряжения от растяжения и изгиба в двух плоскостях:

$$\sigma_{\text{раст}} = \frac{F_1}{A} = \frac{40 \cdot 10^3}{28,26 \cdot 10^2} = 14,2 \text{ МПа}; \quad (2)$$

$$M_x = F_2 (\ell/2) = 1,6 \cdot 0,6 = 0,96 \text{ кНм}; \quad M_y = F_3 \ell = 0,6 \cdot 1,2 = 0,72 \text{ кНм};$$

$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{0,96^2 + 0,72^2} = 1,2 \text{ кНм} \rightarrow$$

$$\sigma_{\text{изг}} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_x} = \frac{1,2 \cdot 10^6}{21,195 \cdot 10^3} = 56,6 \text{ МПа}. \quad (3)$$

Тогда на основании значений (2) и (3) суммарные нормальные напряжения равны:

$$\sigma = \sigma_{\text{раст}} + \sigma_{\text{изг}} = 14,2 + 56,6 = 70,8 \text{ МПа}. \quad (4)$$

④ Определяем касательные напряжения от кручения:

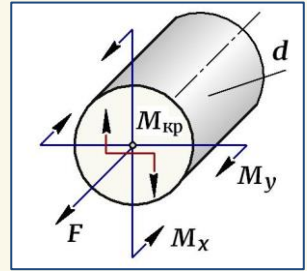
$$\tau_{\text{кр}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} = \frac{1 \cdot 10^6}{42,39 \cdot 10^3} = 23,6 \text{ МПа}. \quad (5)$$

Подставляем значения (4) и (5) в формулу (1) и определяем для стержня наибольшие напряжения в опасном сечении:

$$\sigma_{\max}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau_{\text{кр}}^2} = \sqrt{70,8^2 + 4 \cdot 23,6^2} = 85 \text{ МПа}.$$

Задача 52

Мотылевая шейка коленчатого вала, имеющая круглое сечение диаметром " d ", подвергается кручению моментом $M_{кр} = 3 \text{ кНм}$, растяжению силой $F = 15 \text{ кН}$ и изгибу в двух плоскостях моментами $M_x = 1,5 \text{ кНм}$ и $M_y = 2 \text{ кНм}$. Используя IV-ю теорию прочности, подобрать диаметр детали " d ", если для материала $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

① Для данной комбинации деформаций — **изгиб в двух плоскостях, кручение и растяжение** — условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau_{кр}^2} \leq [\sigma], \quad (1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} [\sigma] &= \sigma_{\text{раст}} + \sigma_{\text{изг}} = \frac{F}{A} + \frac{M_{\text{изг}}}{W_x} = \frac{F}{\pi d^2/4} + \frac{M_{\text{изг}}}{\pi d^3/32}; \\ [\tau_{кр}] &= \frac{M_{кр}}{W_\rho} = \frac{M_{кр}}{\pi d^3/16}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

② При подборе диаметра шейки на предварительном этапе расчета деформацией растяжения пренебрегаем и рассматриваем только изгиб детали в двух плоскостях и кручение. В этом случае решение выполняем через расчетный момент:

$$[M_{\text{изг}}] = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5 \text{ кНм}; \quad [M_{кр}] = 3 \text{ кНм} \rightarrow$$

$$M_{\text{расч}}^{IV} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 M_{кр}^2} = \sqrt{2,5^2 + 0,75 \cdot 3^2} = 3,6 \text{ кНм}.$$

И тогда из условия прочности при **кручении с изгибом** —

$$\sigma_{\max}^{IV} = \frac{M_{\text{расч}}^{IV}}{W_x} = \frac{M_{\text{расч}}^{IV}}{\pi d^3/32} \leq [\sigma]$$

подбираем диаметр:

$$[d] = 3 \sqrt{\frac{32 M_{\text{расч}}^{IV}}{\pi [\sigma]}} = 3 \sqrt{\frac{32 \cdot 3,6 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 140}} = 64 \text{ мм}. \quad (3)$$

③ Возвращаемся к заданным условиям нагружения и проверяем полученное значение диаметра (3) с учетом деформации растяжения. И тогда, согласно выражениям (2), получаем:

$$\begin{aligned} \boxed{\sigma} &= \frac{F}{\pi d^2/4} + \frac{M_{\text{изг}}}{\pi d^3/32} = \frac{4 \cdot 15 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 64^2} + \frac{32 \cdot 2,5 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 64^3} = 102 \text{ МПа}; \\ \boxed{\tau_{\text{кр}}} &= \frac{M_{\text{кр}}}{\pi d^3/16} = \frac{16 \cdot 3 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 64^3} = 58,3 \text{ МПа}. \end{aligned} \quad (4)$$

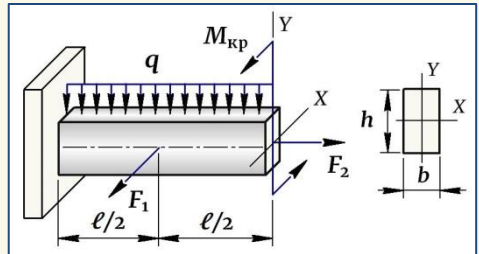
Подставляем полученные значения (4) в условие прочности (1) и проверяем прочность шейки:

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2} = \sqrt{102^2 + 3 \cdot 58,3^2} = 143,5 \text{ МПа} > [\sigma].$$

Перегрузка составляет 2,5%, что допустимо. Поэтому принимаем диаметр шейки — $\boxed{d} = 64 \text{ мм}$.

Задача 53

Для стержня прямоугольного поперечного сечения с размерами $b \times h = 6 \times 10 \text{ см}$ и длиной $\ell = 1,2 \text{ м}$, нагруженного распределенной нагрузкой $q = 0,5 \text{ кН/м}$, силами $F_1 = 0,8 \text{ кН}$, $F_2 = 2,4 \text{ кН}$ и крутящим моментом $M_{\text{кр}} = 0,2 \text{ кНм}$, используя IV-ю теорию прочности, определить наибольшие напряжения в опасном сечении.



РЕШЕНИЕ:

① Стержень подвергается **растяжению, изгибу в двух плоскостях и кручению**. Вычисляем геометрические характеристики прямоугольного сечения, необходимые для решения задачи:

$$A = bh = 6 \cdot 10 = 60 \text{ см}^2;$$

$$W_x = bh^2/6 = 6 \cdot 10^2/6 = 100 \text{ см}^3;$$

$$W_y = hb^2/6 = 10 \cdot 6^2/6 = 60 \text{ см}^3.$$

② Для случая, когда вместе с изгибом и кручением возникает одновременно растяжение или сжатие, максимальные напряжения определяются по формуле:

$$\sigma_{\max}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2}, \quad (1)$$

где $\sigma = \sigma_{\text{раст}} + \sigma_{\text{изг}}$ — напряжения, возникающие от растяжения и изгиба в двух плоскостях, при этом следует рассматривать наиболее нагруженную в опасном сечении точку, где напряжения от всех трех деформаций имеют один знак; $\tau_{\text{кр}}$ — напряжения от кручения.

③ Определяем нормальные напряжения от растяжения и изгиба в двух плоскостях —

$$M_x = \frac{q\ell^2}{2} = \frac{0,5 \cdot 1,2^2}{2} = 0,36 \text{ кНм}; \quad M_y = \frac{F_1\ell}{2} = \frac{0,8 \cdot 1,2}{2} = 0,48 \text{ кНм} \rightarrow$$

и получаем:

$$\sigma = \sigma_{\text{раст}} + \sigma_x + \sigma_y = \frac{F_2}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} =$$

$$= \frac{2,4 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^2} + \frac{0,36 \cdot 10^6}{100 \cdot 10^3} + \frac{0,48 \cdot 10^6}{60 \cdot 10^3} = 0,4 + 3,6 + 8 = 12 \text{ МПа}. \quad (2)$$

Примечание.

Для стержней некруглого сечения при изгибе в двух плоскостях нельзя определять суммарный изгибающий момент, как это делают для круглых сечений. Здесь следует определять напряжения от изгиба в каждой плоскости, а затем полученные значения алгебраически суммировать на основании принципа независимости действия сил.

④ Касательные напряжения от кручения для стержней некруглого сечения определяются по формуле:

$$\tau_{\text{кр}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_K}, \quad (3)$$

где W_K — момент сопротивления при кручении стержней некруглого сечения. Эта геометрическая характеристика зависит от формы сечения и для прямоугольника определяется по формуле $W_K = \alpha hb^2$, где коэффициент α принимается в зависимости от отношения сторон сечения h/b . Для заданного сечения:

$$h/b = 10/6 \rightarrow \alpha = 0,236 \rightarrow W_K = 0,236 \cdot 10 \cdot 6^2 = 85 \text{ см}^3. \quad (4)$$

С учетом значения (4) по формуле (3) вычисляем касательные напряжения в стержне прямоугольного сечения от кручения:

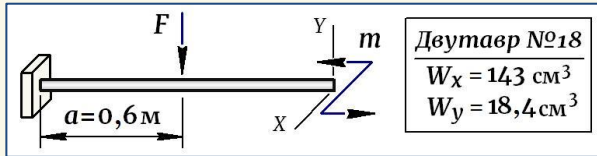
$$\boxed{\tau_{кр}} = \frac{M_{кр}}{W_k} = \frac{0,2 \cdot 10^6}{85 \cdot 10^3} = 2,4 \text{ МПа.} \quad (5)$$

Подставляем значения (2) и (5) в формулу (1) и определяем для стержня наибольшие напряжения в опасном сечении:

$$\boxed{\sigma_{\max}^{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau_{кр}^2} = \sqrt{12^2 + 3 \cdot 2,4^2} = 12,7 \text{ МПа.}$$

Задача 54

Для балки (двутавр №18), нагружаемой силой $F = 10 \text{ кН}$ и моментом $m = 1,8 \text{ кНм}$, определить максимальные напряжения в опасном сечении.



РЕШЕНИЕ:

Балка подвергается **изгибу в двух плоскостях**. Опасным является сечение в заделке, где действуют изгибающие моменты, равные:

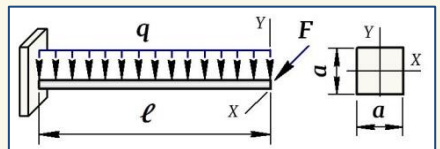
$$\boxed{M_x} = Fa = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ кНм}; \quad \boxed{M_y} = m = 1,8 \text{ кНм.}$$

Максимальные напряжения определяются как:

$$\boxed{\sigma_{\max}} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{6 \cdot 10^6}{143 \cdot 10^3} + \frac{1,8 \cdot 10^6}{18,4 \cdot 10^3} = 140 \text{ МПа.}$$

Задача 55

Для балки квадратного сечения длиной $\ell = 0,8 \text{ м}$, подвергаемой изгибу в двух плоскостях нагрузкой $q = 2 \text{ кН/м}$ и силой $F = 1 \text{ кН}$, подобрать размер сечения "а", если для материала $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

① Балка подвергается **изгибу в двух плоскостях**. Опасным является сечение в заделке, где действуют изгибающие моменты, равные:

$$\boxed{M_x} = \frac{q\ell^2}{2} = \frac{2 \cdot 0,8^2}{2} = 0,64 \text{ кНм}; \quad \boxed{M_y} = F\ell = 1 \cdot 0,8 = 0,8 \text{ кНм}.$$

② Подбираем размер квадратного сечения из условия прочности:

$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]}, \text{ где } W_x = W_y = \frac{a^3}{6}.$$

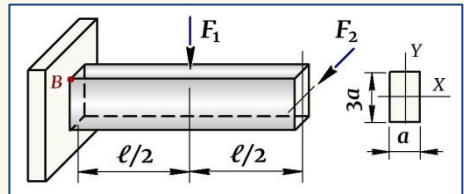
В результате получаем:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{M_x}{a^3/6} + \frac{M_y}{a^3/6} = \frac{6(M_x + M_y)}{a^3} \leq [\sigma] \rightarrow$$

$$\boxed{a} = 3\sqrt{\frac{6(M_x + M_y)}{[\sigma]}} = 3\sqrt{\frac{6(0,64 + 0,8) \cdot 10^6}{120}} = 42 \text{ мм}.$$

Задача 56

Для балки прямоугольного сечения размерами " $a \times 3a$ ", подвергемой изгибу в двух плоскостях, найти соотношение между силами F_1 и F_2 , при котором напряжения в точке "B" равны нулю.



РЕШЕНИЕ:

① Для заданного сечения —

$$W_x = \frac{a(3a)^2}{6} = 1,5a^3; \quad W_y = \frac{3a \cdot a^2}{6} = 0,5a^3. \quad (1)$$

② По принципу независимости действия сил напряжения в точке "B" определяются как алгебраическая сумма напряжений от каждой силы в отдельности и по условию задачи оно равно нулю:

$$\sigma_B = \pm \sigma_{(F_1)} \pm \sigma_{(F_2)} = 0, \text{ где} \quad (2)$$

$$\sigma_{(F_1)} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{F_1(\ell/2)}{1,5a^3} = \frac{F_1\ell}{3a^3}; \quad \sigma_{(F_2)} = -\frac{M_y}{W_y} = -\frac{F_2\ell}{0,5a^3} = -\frac{2F_2\ell}{a^3}. \quad (3)$$

Примечание.

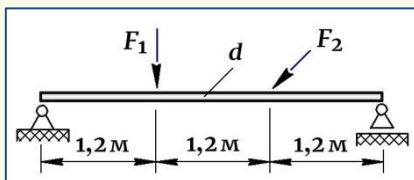
От силы F_1 в точке "В" возникают растягивающие напряжения, а от силы F_2 — сжимающие, поэтому в выражениях (2) эти напряжения следует рассматривать с соответствующим знаком.

Подставляем значения (3) в условие (2) и получаем:

$$\sigma_B = \frac{F_1\ell}{3a^3} - \frac{2F_2\ell}{a^3} = 0 \rightarrow \boxed{F_1 = 6F_2}.$$

Задача 57

Балка круглого сечения диаметром " d " подвергается изгибу в двух плоскостях — в вертикальной плоскости силой $F_1 = 2,4$ кН и в горизонтальной — силой $F_2 = 3,6$ кН. Подобрать диаметр балки " d ", если для материала $[\sigma] = 160$ МПа.



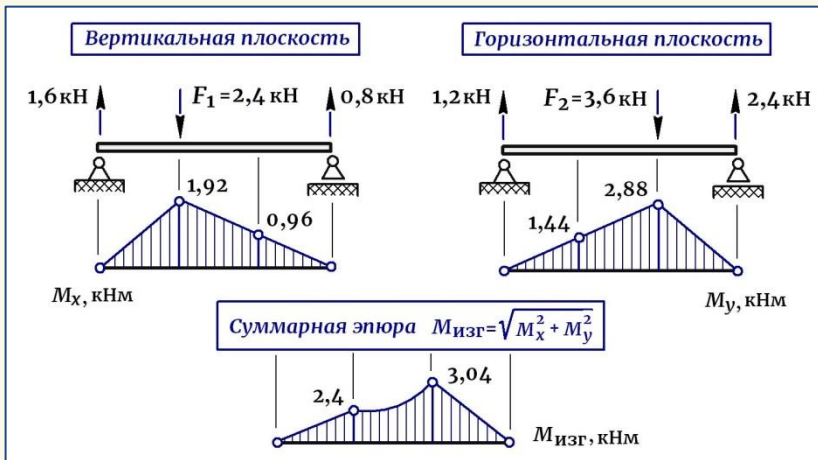
РЕШЕНИЕ:

① Балка испытывает **изгиб в двух плоскостях**. Подбор диаметра выполняется по наиболее нагруженному сечению, где возникают максимальные напряжения. Чтобы установить его местоположение, первоначально на балке рассматривают изгиб в вертикальной и горизонтальной плоскостях, а затем, так как балка имеет круглое сечение, по границам участков вычисляют суммарный изгибающий момент и строят эпюру суммарного момента (см. рис. ниже).

② Опасным на балке является сечение, где действует наибольший изгибающий момент $\rightarrow \boxed{M_{\text{изг}} = 3,04 \text{ кНм}}$. Тогда из условия прочности при **изгибе в двух плоскостях** балки круглого сечения —

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_x} = \frac{M_{\text{изг}}}{\pi d^3/32} \leq [\sigma]$$

получаем:
$$\boxed{d} = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{изг}}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3,04 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 160}} = 58 \text{ мм}.$$



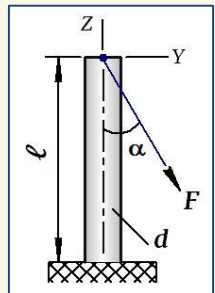
Задача 58

Деревянный столб длиной $\ell = 0,8 \text{ м}$ и диаметром $d = 10 \text{ см}$ удерживает канат, который натянут силой " F " и действует на столб под углом $\alpha = 30^\circ$. Установить для столба вид деформации и определить силу " F ", если для материала столба $[\sigma] = 15 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① Сила " F ", проходящая под углом к оси столба, если ее разложить на составляющие по направлению оси и в перпендикулярном ей направлении, вызывает **сжатие и изгиб** соответствующими силами —

$$F_z = F \cos \alpha; \quad F_y = F \sin \alpha, \quad (1)$$



в результате чего в поперечных сечениях возникают продольная сила N и изгибающий момент $M_{изг}$. Наиболее нагруженным является сечение в заделке, где с учетом значений (1) внутренние усилия равны:

$$\boxed{N} = F_z = F \cos \alpha; \quad \boxed{M_{изг}} = F_y \ell = F \sin \alpha \cdot \ell. \quad (2)$$

В опасном сечении возникают наибольшие напряжения, которые, согласно принципу независимости действия сил и значениям (2), определяются как:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{сж}} + \sigma_{\text{изг}} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\text{изг}}}{W_{\chi}} = \frac{F \cos \alpha}{\pi d^2 / 4} + \frac{F \sin \alpha \cdot \ell}{\pi d^3 / 32}. \quad (3)$$

② Записываем условие прочности при **сжатии и изгибе** и с учетом значений (3) определяем силу "F", безопасную для элемента:

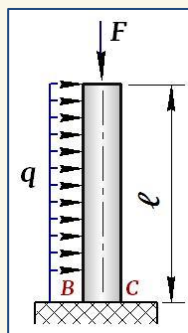
$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\text{изг}}}{W_{\chi}} \leq [\sigma] \rightarrow \sigma_{\max} = \frac{F \cos \alpha}{\pi d^2 / 4} + \frac{F \sin \alpha \cdot \ell}{\pi d^3 / 32} \leq [\sigma],$$

откуда —

$$[F] = \frac{\pi d^3 [\sigma]}{4(d \cos \alpha + 8\ell \sin \alpha)} = \frac{3,14 \cdot 100^3 \cdot 15}{4(100 \cos 30^\circ + 8 \cdot 0,8 \cdot 10^3 \sin 30^\circ)} = 3,6 \text{ кН.}$$

Задача 59

Деревянный столб квадратного сечения размером 30×30 см и длиной $\ell = 4$ м нагружен продольной силой $F = 270$ кН и нагрузкой $q = 5$ кН/м. Установить вид деформации столба и определить напряжения в точках "B" и "C" опасного сечения.



РЕШЕНИЕ:

Столб работает на **изгиб и сжатие**. Наиболее нагруженным является сечение в заделке, во всех точках которого от силы "F" возникают сжимающие напряжения, а от изгиба под действием распределенной нагрузки "q" в точке "B" возникают растягивающие, а в точке "C" — сжимающие напряжения. Принимая для сечения —

$$N = F = 270 \text{ кН}; \quad M_{\text{изг}} = q\ell^2 / 2 = 5 \cdot 4^2 / 2 = 40 \text{ кНм};$$

$$A = 30 \times 30 = 900 \text{ см}^2; \quad W_{\chi} = 30^3 / 6 = 4500 \text{ см}^3,$$

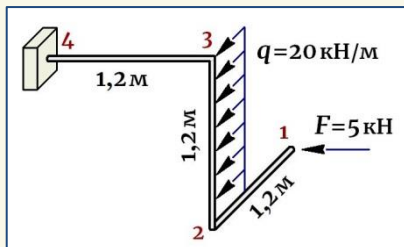
определяем напряжения в заданных точках:

$$\sigma_B = -\frac{F}{A} - \frac{M_{\text{изг}}}{W_{\chi}} = -\frac{270 \cdot 10^3}{900 \cdot 10^2} - \frac{40 \cdot 10^6}{4500 \cdot 10^3} = -11,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_C = -\frac{F}{A} + \frac{M_{\text{изг}}}{W_{\chi}} = -\frac{270 \cdot 10^3}{900 \cdot 10^2} + \frac{40 \cdot 10^6}{4500 \cdot 10^3} = +5,8 \text{ МПа.}$$

Задача 60

Пространственный стержень круглого поперечного сечения диаметром $d=10\text{см}$ выполнен из стали и нагружен системой сил, как показано на рисунке. Построить на участках стержня эпюры внутренних сил, установить вид сопротивления и проверить прочность каждого участка, если для материала $[\sigma]=160\text{МПа}$. При необходимости, если прочность будет не обеспечена, подобрать новый диаметр стержня. Использовать IV-ю теорию прочности.

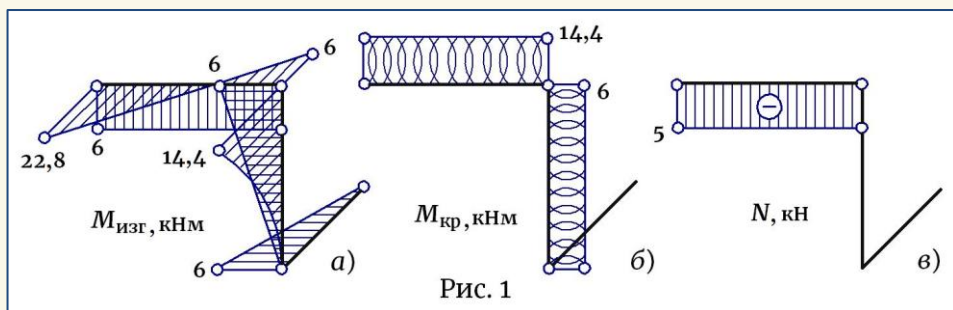


РЕШЕНИЕ:

① Для заданного сечения определяем геометрические характеристики, необходимые для решения задачи:

$$\begin{aligned} A &= \pi d^2 / 4 = 3,14 \cdot 10^2 / 4 = 78,5 \text{ см}^2; \\ W_x &= \pi d^3 / 32 = 3,14 \cdot 10^3 / 32 = 98,125 \text{ см}^3; \\ W_p &= \pi d^3 / 16 = 3,14 \cdot 10^3 / 16 = 196,25 \text{ см}^3. \end{aligned} \quad (1)$$

② От заданных внешних сил, двигаясь от свободного конца и перенося нагрузку от одного участка к другому по правилам переноса сил, строим на участках стержня эпюры внутренних усилий — эпюру изгибающих $M_{\text{изг}}$ (рис. 1, а) и крутящих $M_{\text{кр}}$ (рис. 1, б) моментов, а также эпюру продольных сил N (рис. 1, в):



③ Устанавливаем на каждом участке вид сопротивления и, используя условие прочности, соответствующее случаю нагружения, с учетом значений (1) проверяем прочность участка по наиболее нагруженному на нем сечению:

Участок 1-2 – Изгиб в одной плоскости:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_x} \leq [\sigma] \rightarrow$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_x} = \frac{6 \cdot 10^6}{98,125 \cdot 10^3} = 61 \text{ МПа} < [\sigma] -$$

прочность участка обеспечена.

Участок 2-3 – Изгиб в двух плоскостях и кручение:

$$\sigma_{\max}^{\text{IV}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{IV}}}{W_x} \leq [\sigma], \text{ где}$$

$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{6^2 + 14,4^2} = 15,6 \text{ кНм};$$

$$M_{\text{расч}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{15,6^2 + 0,75 \cdot 6^2} = 16,4 \text{ кНм}.$$

В результате получаем:

$$\sigma_{\max}^{\text{IV}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{IV}}}{W_x} = \frac{16,4 \cdot 10^6}{98,125 \cdot 10^3} = 167 \text{ МПа} > [\sigma].$$

Перенапряжение составляет:

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{167 - 160}{160} \cdot 100\% = 4,4\%, \text{ что допустимо.}$$

Участок 3-4 – Изгиб в двух плоскостях, кручение, сжатие:

$$\sigma_{\max}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} [\sigma] = \sigma_{\text{сж}} + \sigma_{\text{изг}} &= \frac{N}{A} + \frac{M_{\text{изг}}}{W_x} = \frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_x} = \frac{5 \cdot 10^3}{78,5 \cdot 10^2} + \\ &+ \frac{\sqrt{6^2 + 22,8^2}}{98,125 \cdot 10^3} = \frac{5 \cdot 10^3}{78,5 \cdot 10^2} + \frac{23,6 \cdot 10^6}{98,125 \cdot 10^3} = 0,64 + 240,5 = 241 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$[\tau_{\text{кр}}] = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} = \frac{14,4 \cdot 10^6}{196,25 \cdot 10^3} = 73,4 \text{ МПа}.$$

В результате получаем:

$$\sigma_{\max}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2} = \sqrt{241^2 + 3 \cdot 73,4^2} = 272,5 \text{ МПа} > [\sigma].$$

Перенапряжение составляет:

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{272,5 - 160}{160} \cdot 100\% = 70\%, \text{ что недопустимо,}$$

поэтому необходимо подбирать новый диаметр.

④ Подбираем диаметр стержня по наиболее нагруженному сечению – сечению в заделке, где внутренние усилия имеют значения:

$$\boxed{M_{\text{изг}}} = 23,6 \text{ кНм}; \quad \boxed{M_{\text{кр}}} = 14,4 \text{ кНм}; \quad \boxed{N} = 5 \text{ кН.}$$

На данной стадии расчета, учитывая что продольная сила вызывает напряжения незначительной величины, *сжатием пренебрегаем*. Рассматриваем на участке только *изгиб в двух плоскостях и кручение* и расчет выполняем через расчетный момент –

$$M_{\text{расч}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{23,6^2 + 0,75 \cdot 14,4^2} = 26,7 \text{ кНм}$$

и условие прочности:

$$\sigma_{\max}^{\text{IV}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{IV}}}{W_{\chi}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{IV}}}{\pi d^3 / 32} \leq [\sigma],$$

откуда

$$\boxed{d} = 3 \sqrt{\frac{32 M_{\text{расч}}^{\text{IV}}}{\pi [\sigma]}} = 3 \sqrt{\frac{32 \cdot 26,7 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 160}} = 120 \text{ мм.}$$

Возвращаемся к исходным условиям нагружения и проверяем расчетный диаметр с *учетом сжатия*, принимая для него новые геометрические характеристики:

$$\begin{aligned} A &= \pi d^2 / 4 = 3,14 \cdot 12^2 / 4 = 113 \text{ см}^2; \\ W_{\chi} &= \pi d^3 / 32 = 3,14 \cdot 10^3 / 32 = 169,6 \text{ см}^3; \\ W_{\rho} &= \pi d^3 / 16 = 3,14 \cdot 10^3 / 16 = 339,1 \text{ см}^3. \end{aligned} \quad (2)$$

И тогда с учетом значений (2) получаем –

$$\boxed{\sigma} = \sigma_{\text{сж}} + \sigma_{\text{изг}} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\text{изг}}}{W_{\chi}} = \frac{5 \cdot 10^3}{113 \cdot 10^2} + \frac{23,6 \cdot 10^6}{169,6 \cdot 10^3} = 139,6 \text{ МПа};$$

$$\boxed{\tau_{\text{кр}}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} = \frac{14,4 \cdot 10^6}{339,4 \cdot 10^3} = 42,4 \text{ МПа}$$

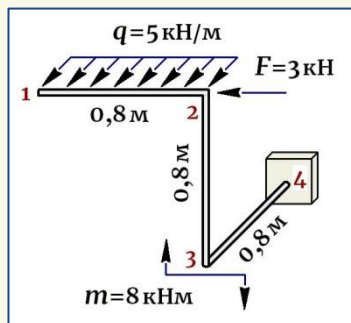
и проверяем прочность стержня:

$$\sigma_{\max}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2} = \sqrt{139,6^2 + 3 \cdot 42,4^2} = 157,7 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Окончательно принимаем диаметр — $d = 12 \text{ см}$.

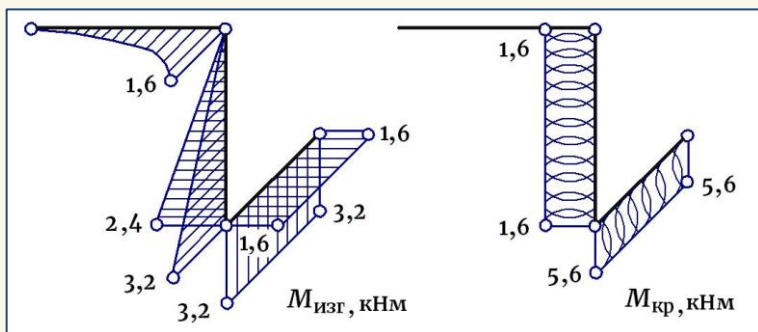
Задача 61

Для ломаного стержня круглого поперечного сечения, используя III-ю прочности, подобрать диаметр "d", если для материала $[\sigma] = 130 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

① Пренебрегая влиянием продольных и поперечных сил на величину возникающих напряжений, рассматриваем только изгиб и кручение и строим на стержне эпюры изгибающих $M_{\text{изг}}$ и крутящих $M_{\text{кр}}$ моментов:



② Подбираем диаметр стержня "d". Наиболее нагруженными являются **Участок 2-3** и **Участок 3-4**, где возникает **изгиб в двух плоскостях и кручение**. Вычисляем для этих участков расчетный момент и устанавливаем на стержне опасное сечение:

Участок 2-3 —

$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{2,4^2 + 3,2^2} = 4 \text{ кНМ};$$

$$M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{4^2 + 1,6^2} = 4,3 \text{ кНМ}.$$

Участок 3-4 –

$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{1,6^2 + 3,2^2} = 3,6 \text{ кНм};$$

$$M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{3,6^2 + 5,6^2} = 6,7 \text{ кНм}.$$

Наиболее опасным является сечение в заделке, так как здесь возникает бóльший расчетный момент.

Записываем для опасного сечения условие прочности –

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_x} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{\pi d^3 / 32} \leq [\sigma],$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6,7 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 130}} = 80 \text{ мм}.$$

5. Расчет цилиндрических винтовых пружин

Задача 62

Цилиндрическая винтовая пружина нагружена растягивающей силой $F = 0,4 \text{ кН}$. Определить максимальные касательные напряжения в витках пружины и ее удлинение, если диаметр пружины равен $D = 12 \text{ см}$, диаметр прутка $d = 10 \text{ мм}$, число витков $n = 5$. Принять для пружины: $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$; поправочный коэффициент $k = 1,0$.

РЕШЕНИЕ:

① Определяем напряжения в пружине:

$$\tau_{\text{max}} = k \frac{8FD}{\pi d^3} = 1,0 \frac{8 \cdot 0,4 \cdot 10^3 \cdot 120}{3,14 \cdot 10^3} = 122,3 \text{ МПа}.$$

② Определяем удлинение пружины:

$$\lambda = \frac{8FD^3 n}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 0,4 \cdot 10^3 \cdot 120^3 \cdot 5}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^4} = 34,6 \text{ мм}.$$

Задача 63

Определить величину допускаемой силы $[F]$, сжимающей пружину, а также осадку пружины, если диаметр пружины $D = 12$ см, диаметр прутка $d = 16$ мм, число рабочих витков $n = 5$. Принять для пружины: $[\tau] = 360$ МПа; $G = 8 \times 10^4$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① Для пружины с индексом $\rightarrow c = D/d = 120/16 = 7,5$, вычисляем поправочный коэффициент: $k \approx 1 + 1,45/c = 1 + 1,45/7,5 = 1,19$.

② Из условия прочности для цилиндрической винтовой пружины определяем допускаемую силу, безопасную для ее прочности:

$$\tau_{\max} = k \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau] \rightarrow [F] = \frac{\pi d^3 [\tau]}{8Dk} = \frac{3,14 \cdot 16^3 \cdot 360}{8 \cdot 120 \cdot 1,19} = 4 \text{ кН.}$$

③ Определяем осадку пружины:

$$\lambda = \frac{8FD^3 n}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 120^3 \cdot 5}{8 \cdot 10^4 \cdot 16^4} = 52,7 \text{ мм.}$$

Задача 64

Витки пружины амортизатора моментной связи, применяемого в сцепных устройствах на речном транспорте, имеют диаметр $D = 12$ см. Пружина спроектирована таким образом, чтобы под действием силы $F = 80$ кН она сжималась на величину $\lambda = 72,5$ мм. Определить диаметр " d " прутка пружины и число рабочих витков " n ", если для материала $[\tau] = 800$ МПа. Принять для расчета: $G = 8 \times 10^4$ МПа; поправочный коэффициент $k = 1,26$.

РЕШЕНИЕ:

① Из условия прочности пружины определяем диаметр прутка:

$$\tau_{\max} = k \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau] \rightarrow$$

$$d = \sqrt[3]{k \frac{8FD}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{1,26 \frac{8 \cdot 80 \cdot 10^3 \cdot 120}{3,14 \cdot 800}} = 34 \text{ мм.}$$

② По заданной величине осадки пружины вычисляем число витков:

$$\lambda = \frac{8FD^3 n}{Gd^4} \rightarrow n = \frac{\lambda Gd^4}{8FD^3} = \frac{72,5 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 34^4}{8 \cdot 80 \cdot 10^3 \cdot 120^3} \approx 7 \text{ витков.}$$

Задача 65

Определить максимальные напряжения и осадку пружины сжатия, если диаметр стального прутка $d = 5$ мм, индекс пружины $c = 6$, число витков $n = 8$, действующая на пружину сила $F = 0,52$ кН. Принять для пружины: $G = 8 \times 10^4$ МПа; поправочный коэффициент $k = 1,25$.

РЕШЕНИЕ:

① Вычисляем средний диаметр пружины:

$$c = D/d \rightarrow D = cd = 6 \cdot 5 = 30 \text{ мм.}$$

② Определяем максимальные напряжения в пружине. Учитывая поправочный коэффициент и значение диаметра D , получаем:

$$\tau_{\max} = k \frac{8FD}{\pi d^3} = 1,25 \frac{8 \cdot 0,52 \cdot 10^3 \cdot 30}{3,14 \cdot 5^3} = 318 \text{ МПа.}$$

③ Определяем осадку пружины:

$$\lambda = \frac{8FD^3 n}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 0,52 \cdot 10^3 \cdot 30^3 \cdot 8}{8 \cdot 10^4 \cdot 5^4} = 18 \text{ мм.}$$

Задача 66

Определить требуемое число рабочих витков пружины " n ", если действующая на пружину сила равна $F = 0,42$ кН, диаметр стального прутка $d = 5$ мм, индекс пружины $c = 8$ и осадка пружины не должна превышать $[\lambda] = 45$ мм.

РЕШЕНИЕ:

- ① Определяем средний диаметр пружины:

$$c = \frac{D}{d} \rightarrow D = cd = 8 \cdot 5 = 40 \text{ мм.}$$

- ② Из условия жесткости пружины определяем число витков:

$$\lambda = \frac{8FD^3n}{Gd^4} \leq [\lambda] \rightarrow [n] \leq \frac{Gd^4 [\lambda]}{8FD^3} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 5^4 \cdot 45}{8 \cdot 0,42 \cdot 10^3 \cdot 40^3} = 10,5 \approx 10.$$

Задача 67

Стальная пружина для буксирного гака диаметром $D = 16 \text{ см}$ с числом рабочих витков $n = 8$ и зазором между витками в свободном состоянии $s_0 = 16,5 \text{ мм}$ сжимается силой $F = 20 \text{ кН}$. Определить диаметр прутка пружины, если для материала $[\tau] = 440 \text{ МПа}$. Вычислить также силу, при которой произойдет полное сжатие пружины. Принять: $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$; поправочный коэффициент $k = 1,26$.

РЕШЕНИЕ:

- ① Из условия прочности пружины подбираем диаметр прутка:

$$\tau_{\max} = k \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau] \rightarrow$$

$$[d] = \sqrt[3]{k \frac{8FD}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{1,26 \frac{8 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 160}{3,14 \cdot 440}} = 28,6 \text{ мм.}$$

- ② Полное сжатие пружины наступит тогда, когда ее осадка достигнет предельной величины $\lambda_{\text{пред}}$, при которой витки полностью смыкаются и которая вычисляется как:

$$\lambda_{\text{пред}} = s_0 (n - 1) = 16,5 (10 - 1) = 148,5 \text{ мм.}$$

- ③ Сила, при которой происходит полное сжатие пружины, определяется по значению осадки, соответствующей смыканию витков:

$$\lambda_{\text{пред}} = \frac{8FD^3n}{Gd^4} \rightarrow F = \frac{Gd^4\lambda_{\text{пред}}}{8D^3n} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 28,6^4 \cdot 148,5}{8 \cdot 160^3 \cdot 10} = 24,3 \text{ кН.}$$

Задача 68

Пружина амортизатора, применяемого для подвески грузов к крюкам подъемных кранов, имеет наружный диаметр $D = 38 \text{ мм}$, диаметр прутка $d = 6 \text{ мм}$, шаг $h = 13,5 \text{ мм}$, число витков $n = 12$. Пружина работает под нагрузкой $F = 1,2 \text{ кН}$. Определить величину зазора между витками при сжатии и установить, является ли она достаточной для пружины в рабочем состоянии. Принять: $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① Для заданных условий эксплуатации определяем осадку пружины:

$$\lambda = \frac{8FD^3n}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 1,2 \cdot 10^3 \cdot 38^3 \cdot 12}{8 \cdot 10^4 \cdot 6^4} = 61 \text{ мм.} \quad (1)$$

② Шаг ненагруженной пружины "h" равен сумме величин:

$$h = d + \lambda/n + s_F,$$

где d – диаметра прутка; λ/n – осадка одного витка; s_F – зазор между витками, сохраняемый в рабочем состоянии.

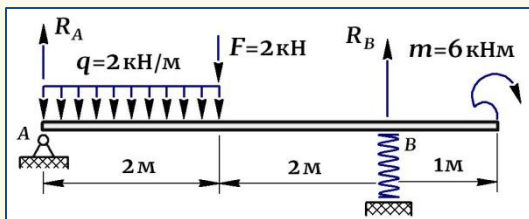
Отсюда с учетом значения (1) получаем:

$$s_F = h - d - \frac{\lambda}{n} = 13,5 - 6 - \frac{61}{12} = 2,4 \text{ мм.} \quad (2)$$

Проектирование пружин и подбор параметром требует выполнения условия, чтобы при осадке зазоры между витками пружины полностью не закрывались и составляли величину $s_F \geq [s] = 0,1d$. Для заданной пружины $[s] = 0,1d = 0,6 \text{ мм}$, значит согласно расчету (2), $s_F = 2,4 \text{ мм} \geq [s]$ – условие выполняется и полное смыкание витков пружины в рабочем состоянии не произойдет.

Задача 69

Абсолютно жесткий брус, нагруженный системой сил, одним концом опирается на шарнирную опору, а второй опорой является пружина с индексом $c = D/d = 6$. Опре-



делить для пружины диаметр " D ", диаметр прутка " d " и число рабочих витков " n " так, чтобы напряжения в ней не превышали $[\tau] = 820 \text{ МПа}$, а осадка составляла не более $[\lambda] = 35 \text{ мм}$. Принять для пружины: поправочный коэффициент $k = 1,25$; $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① Определяем на конструкции опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0: q \cdot 2 \cdot 1 + F \cdot 2 + m - R_B \cdot 4 = 0 &\rightarrow R_B = 3,5 \text{ кН}; \\ \sum M_B = 0: m + R_A \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 3 - F \cdot 2 = 0 &\rightarrow R_A = 2,5 \text{ кН}. \end{aligned} \quad (1)$$

Проверка — $\sum Y = 0: R_A + R_B - F - q \cdot 2 = 0 \rightarrow 2,5 + 3,5 - 2 - 2 \cdot 2 = 0$.

② Реакция на опоре "B" равна силе, сжимающей пружину: $R_B = F_{\text{п}}$.

Записываем для пружины условие прочности и с учетом индекса пружины $c = D/d = 6$ и значения (1) получаем:

$$\tau_{\max} = k \frac{8F_{\text{п}}D}{\pi d^3} \leq [\tau] \rightarrow \tau_{\max} = k \frac{8F_{\text{п}}(cd)}{\pi d^3} = k \frac{8F_{\text{п}}c}{\pi d^2} \leq [\tau],$$

откуда
$$d = \sqrt{k \frac{8F_{\text{п}}c}{\pi [\tau]}} = \sqrt{1,25 \frac{8 \cdot 3,5 \cdot 10^3 \cdot 6}{3,14 \cdot 820}} = 9 \text{ мм}; \quad (2)$$

$$D = cd = 6 \cdot 9 = 54 \text{ мм}.$$

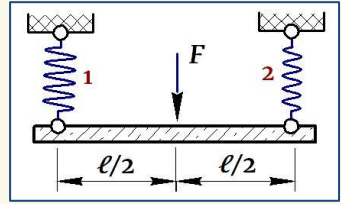
③ Записываем условие жесткости для пружины и с учетом значений диаметров (2) определяем на ней число рабочих витков:

$$\lambda = \frac{8F_{\text{п}}D^3n}{Gd^4} \leq [\lambda], \text{ откуда}$$

$$\boxed{n} = \frac{Gd^4 [\lambda]}{8F_{\text{пр}} D^3} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 9^4 \cdot 35}{8 \cdot 3,5 \cdot 10^3 \cdot 54^3} = 4,2 \text{ витка.}$$

Задача 70

Жесткий брус, подвешенный на двух пружинах с одинаковым числом витков $n=7$ и диаметрами $D_1=10$ см и $D_2=7$ см, нагружен посередине силой $F=24$ кН. Подобрать диаметры прутка " d_1 " и " d_2 " каждой пружины, чтобы напряжения в них не превышали $[\tau]=640$ МПа. Определить удлинение пружин. Принять для пружин: $G=8 \times 10^4$ МПа; поправочные коэффициенты — $k_1=1,26$; $k_2=1,34$.



РЕШЕНИЕ:

① В силу симметрии приложенной нагрузки обе пружины растянутся одинаковыми усилиями, равными:

$$N_1 = N_2 = F/2 = 12 \text{ кН.} \quad (1)$$

② С учетом значений (1) из условия прочности для каждой пружины подбираем диаметр прутка —

$$\tau_{\max} = k \frac{8ND}{\pi d^3} \leq [\tau] \rightarrow d = 3 \sqrt{k \frac{8ND}{\pi [\tau]}} \text{ и получаем:}$$

$$\boxed{d_1} = 3 \sqrt{k_1 \frac{8N_1 D_1}{\pi [\tau]}} = 3 \sqrt{1,26 \frac{8 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 100}{3,14 \cdot 640}} = 18,2 \text{ мм;} \quad (2)$$

$$\boxed{d_2} = 3 \sqrt{k_2 \frac{8N_2 D_2}{\pi [\tau]}} = 3 \sqrt{1,34 \frac{8 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 70}{3,14 \cdot 640}} = 16,5 \text{ мм.}$$

③ С учетом (1) и (2) определяем удлинение каждой пружины:

$$\boxed{\lambda} = \frac{8ND^3 n}{Gd^4} \rightarrow \begin{aligned} \boxed{\lambda_1} &= \frac{8N_1 D_1^3 n}{G d_1^4} = \frac{8 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 100^3 \cdot 7}{8 \cdot 10^4 \cdot 18,2^4} = 76,6 \text{ мм;} \\ \boxed{\lambda_2} &= \frac{8N_2 D_2^3 n}{G d_2^4} = \frac{8 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 70^3 \cdot 7}{8 \cdot 10^4 \cdot 16,5^4} = 38,9 \text{ мм.} \end{aligned} \quad (3)$$

Примечание.

Податливость пружины прямо пропорциональна ее индексу $c = D/d$, поэтому для снижения жесткости и увеличения податливости пружины ее индекс следует принимать по возможности большим. Обычно индекс пружин равен $c = 4 \dots 12$. В данной задаче согласно расчетным данным (2) индексы пружин равны — $c_{(1)} = D_1/d_1 = 5,5$; $c_{(2)} = D_2/d_2 = 4,2$, а это значит, что первая пружина является более деформируемой, чем вторая, что подтверждается расчетом удлинений (3). Следовательно, жесткий брус, подвешенный на двух пружинах разной жесткости, под действием силы, приложенной посередине, потеряет горизонтальное положение.

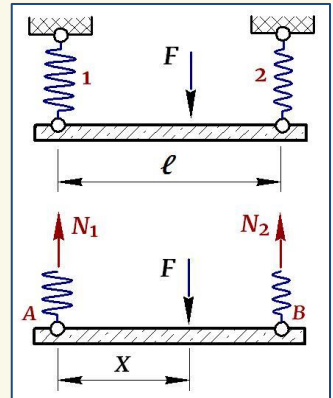
Задача 71

Для бруса длиной $\ell = 4$ м, подвешенного на двух стальных пружинах жесткостью $C_1 = 2$ кН/м и $C_2 = 6$ кН/м, нагруженного силой "F", определить, на каком расстоянии "X" от левой пружины следует приложить силу, чтобы брус оставался горизонтальным.

РЕШЕНИЕ:

① Деформация пружин определяется по формуле — $\lambda = 8ND^3n/Gd^4$, где $C = Gd^4/8D^3n$ называется **жесткостью пружины**. Поэтому деформацию пружины можно представить в виде — $\lambda = N/C$, и тогда для заданной конструкции соответственно получаем:

$$\lambda_1 = \frac{N_1}{C_1}; \quad \lambda_2 = \frac{N_2}{C_2}. \quad (1)$$



② Определяем расстояние "X", на котором следует приложить силу, чтобы брус оставался горизонтальным:

★ Составляем для бруса уравнения равновесия и определяем силы N_1 и N_2 , растягивающие пружины:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0: & F \cdot X - N_2 \ell = 0 \\ \sum M_B = 0: & F(\ell - X) - N_1 \ell = 0, \end{aligned} \quad \text{откуда} \quad \boxed{N_1 = \frac{F(\ell - X)}{\ell}; \quad N_2 = \frac{F \cdot X}{\ell}}. \quad (2)$$

★ Условием горизонтальности бруса является равенство деформаций пружин — $\lambda_1 = \lambda_2$, откуда с учетом значений (1) и (2) получаем:

$$\frac{N_1}{C_1} = \frac{N_2}{C_2} \rightarrow \frac{F(\ell - X)}{\chi C_1} = \frac{F \cdot X}{\chi C_2} \rightarrow \boxed{X} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \ell = \frac{4}{2+6} 6 = 3 \text{ м.}$$

Задача 72

Две пружины в месте стыка нагружены осевой силой $F = 0,8 \text{ кН}$, в результате действия которой первая пружина растягивается, вторая — сжимается, но суммарная длина пружин не изменяется. Установить, как распределится сила "F" между пружинами, вычислить касательные напряжения в пружинах и определить перемещение точки приложения силы. Принять: $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$;

$$D_1 = 4 \text{ см}; d_1 = 0,8 \text{ см}; n_1 = 6;$$

$$D_2 = 8 \text{ см}; d_2 = 1 \text{ см}; n_2 = 4.$$

РЕШЕНИЕ:

① Под действием силы "F" пружины деформируются — одна растягивается, другая сжимается, в результате чего в местах их закрепления на опорах возникают опорные реакции R_A и R_B . Задача является **статически неопределимой** и для ее решения используем *метод деформаций*, который заключается в совместном рассмотрении *статической, геометрической и физической* сторон:

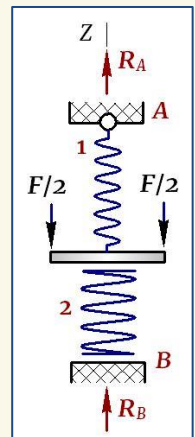
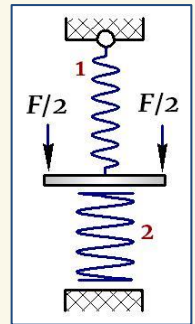
а) Статическая сторона. Так как система находится в равновесии, все силы, действующие на нее, должны удовлетворять статическому уравнению равновесия:

$$\sum Z = 0: R_A + R_B - F = 0. \quad (1)$$

б) Геометрическая сторона. Согласно условию соединения пружин должно выполняться равенство их деформаций:

$$\lambda_1 = \lambda_2. \quad (2)$$

в) Физическая сторона — это закон Гука, который связывает усилия в пружинах с возникающими в них



деформациями. Так как верхняя пружина растягивается силой N_1 , равной R_A , а нижняя сжимается силой N_2 , равной R_B , физическую сторону получаем в виде:

$$\lambda_1 = \frac{8R_A D_1^3 n_1}{G d_1^4}; \lambda_2 = \frac{8R_B D_2^3 n_2}{G d_2^4}. \quad (3)$$

Подставляем значения (3) в равенство (2) —

$$\frac{8R_A D_1^3 n_1}{G d_1^4} = \frac{8R_B D_2^3 n_2}{G d_2^4} \rightarrow R_B = R_A \frac{D_1^3 n_1}{d_1^4} \cdot \frac{d_2^4}{D_2^3 n_2} = R_A \frac{4^3 \cdot 6 \cdot 1^4}{8^3 \cdot 4 \cdot 0,8^4},$$

и получаем $R_B = 0,46 R_A$. (4)

Подставляем соотношение (4) в статическое уравнение (1) —

$$\sum Z = 0: R_A + R_B - F = 0 \rightarrow R_A + 0,46 R_A = F$$

и определяем реакции опор: $R_A = 0,68 F; R_B = 0,32 F$.

Так как силы N_1 и N_2 , растягивающие первую и сжимающие вторую пружины равны соответствующим опорным реакциям, получаем:

$$\begin{cases} R_A = N_1 = 0,68 F = 0,68 \cdot 0,8 = 0,544 \text{ кН} \\ R_B = N_2 = 0,32 F = 0,32 \cdot 0,8 = 0,256 \text{ кН} \end{cases}. \quad (5)$$

② По значениям индексов пружин —

$$c_1 = D_1/d_1 = 40/8 = 5; \quad c_2 = D_2/d_2 = 80/10 = 8$$

принимая из справочных таблиц поправочные коэффициенты —

$$k_1 = 1,31; k_2 = 1,18 \quad (6)$$

и с учетом значений (5) и (6) определяем напряжения в пружинах:

$$\tau_{\max} = k \frac{8ND}{\pi d^3} \rightarrow$$

$$\tau_{\max(1)} = k_1 \frac{8N_1 D_1}{\pi d_1^3} = 1,31 \frac{8 \cdot 0,544 \cdot 10^3 \cdot 40}{3,14 \cdot 8^3} = 141,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max(2)} = k_2 \frac{8N_2 D_2}{\pi d_2^3} = 1,18 \frac{8 \cdot 0,256 \cdot 10^3 \cdot 80}{3,14 \cdot 10^3} = 61,6 \text{ МПа}.$$

③ Определяем перемещение точки приложения силы. На основании равенства деформаций (2) перемещение точки приложения силы

равно удлинению первой пружины или укорочению второй. В результате получаем:

$$\Delta_F = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{8N_1 D_1^3 n_1}{G d_1^4} = \frac{8 \cdot 0,544 \cdot 10^3 \cdot 40^3 \cdot 6}{8 \cdot 10^4 \cdot 8^4} = 5,2 \text{ мм.}$$

Задача 73

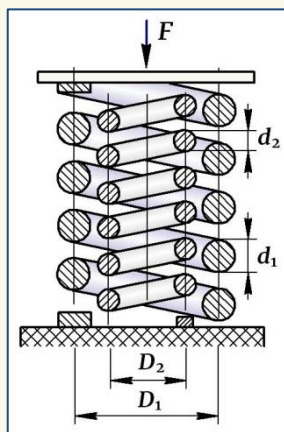
Две витые цилиндрические пружины малого шага вставлены одна в другую концентрически и подвергаются действию силы $F = 4,3 \text{ кН}$.

Параметры пружин: $D_1 = 160 \text{ мм}$; $d_1 = 16 \text{ мм}$;
 $n_1 = 8$ (наружная пружина) и $D_2 = 80 \text{ мм}$;
 $d_2 = 12 \text{ мм}$; $n_2 = 12$ (внутренняя пружина).

Для обеих пружин — $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$. Определить наибольшие напряжения в пружинах и осадку пружин.

РЕШЕНИЕ:

① Задача является **статически неопределимой**, поэтому решение выполняем путем совместного рассмотрения *статической, геометрической и физической сторон*:



а) Статическая сторона. Под действием силы "F" обе пружины сжимаются и в них возникают продольные силы N_1 и N_2 . Но так как жесткость пружин неодинакова, сила "F" распределяется между ними не поровну, а пропорционально их жесткости, и $N_1 \neq N_2$. Более жесткий элемент всегда принимает на себя бóльшую долю нагрузки, но при любом распределении сил должно выполняться условие статического равновесия системы:

$$\sum Z = 0: N_1 + N_2 - F = 0. \quad (1)$$

б) Геометрическая сторона. Геометрической стороной является равенство деформаций пружин:

$$\lambda_1 = \lambda_2. \quad (2)$$

в) Физическая сторона — это закон Гука, который связывает усилия в пружинах с возникающими в них деформациями:

$$\lambda_1 = \frac{8N_1 D_1^3 n_1}{G d_1^4}; \lambda_2 = \frac{8N_2 D_2^3 n_2}{G d_2^4}. \quad (3)$$

Подставляем (3) в равенство (2) — $\frac{8N_1 D_1^3 n_1}{G d_1^4} = \frac{8N_2 D_2^3 n_2}{G d_2^4} \rightarrow$

$$N_2 = N_1 \frac{D_1^3 n_1}{d_1^4} \cdot \frac{d_2^4}{D_2^3 n_2} = N_1 \frac{160^3 \cdot 8 \cdot 12^4}{80^3 \cdot 12 \cdot 16^4} = 1,69 N_1. \quad (4)$$

Объединяем (1) и (4) и получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными, откуда находим силы N_1 и N_2 , сжимающие пружины:

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = F \\ N_2 = 1,69 N_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_1 = 1,6 \text{ кН} \\ N_2 = 2,7 \text{ кН} \end{cases}. \quad (5)$$

Согласно расчетной жесткости пружин —

$$C_1 = G d_1^4 / 8 D_1^3 n_1 = 8 \cdot 10^4 \cdot 16^4 / 8 \cdot 160^3 \cdot 8 = 20 \text{ Н/мм};$$

$$C_2 = G d_2^4 / 8 D_2^3 n_2 = 8 \cdot 10^4 \cdot 12^4 / 8 \cdot 80^3 \cdot 12 = 33,75 \text{ Н/мм},$$

более жесткой является *внутренняя* пружина, поэтому она принимает большую долю нагрузки, что подтверждается расчетом (5).

② По значениям индексов пружин —

$$\boxed{c_1 = D_1/d_1} = 160/16 = 10; \quad \boxed{c_2 = D_2/d_2} = 80/12 = 6,67$$

устанавливаем поправочные коэффициенты —

$$\boxed{k \approx 1 + 1,45/c} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 + 1,45/10 = 1,14; \\ k_2 = 1 + 1,45/6,67 = 1,22 \end{cases} \quad (6)$$

и с учетом значений (5) и (6) определяем напряжения в пружинах:

$$\boxed{\tau_{\max} = k \frac{8ND}{\pi d^3}} \quad \begin{cases} \tau_{\max(1)} = k_1 \frac{8N_1 D_1}{\pi d_1^3} = 1,14 \frac{8 \cdot 1,6 \cdot 10^3 \cdot 160}{3,14 \cdot 16^3} = 181,5 \text{ МПа}; \\ \tau_{\max(2)} = k_2 \frac{8N_2 D_2}{\pi d_2^3} = 1,22 \frac{8 \cdot 2,7 \cdot 10^3 \cdot 80}{3,14 \cdot 12^3} = 388,6 \text{ МПа}. \end{cases}$$

③ Определяем осадку пружин. Учитывая, что обе пружины получают одинаковую осадку, расчет ведем по наружной пружине:

$$\boxed{\lambda = \frac{8ND^3 n}{G d^4}} \rightarrow \boxed{\lambda_1} = \boxed{\lambda_2} = \frac{8N_1 D_1^3 n_1}{G d_1^4} = \frac{8 \cdot 1,6 \cdot 10^3 \cdot 160^3 \cdot 8}{8 \cdot 10^4 \cdot 16^4} = 80 \text{ мм}.$$

Задача 74

Винтовая цилиндрическая пружина диаметром $D=80$ мм и числом рабочих витков $n=8$, свитая из прутка квадратного сечения размером $a=6$ мм, растягивается силой F . Определить допускаемую силу $[F]$ и соответствующую силе потенциальную энергию деформации пружины, если $[\tau]=400$ МПа. Принять: $G=8 \times 10^4$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① Пренебрегая влиянием поперечных сил и считая, что при растяжении пружины пруток испытывает только кручение, условие прочности для пружины записываем в виде:

$$\tau_{\max} = k \frac{M_{\text{кр}}}{W_K} = k \frac{F(D/2)}{W_K} \leq [\tau],$$

где $W_K = \alpha a^3 = 0,208 a^3$ — момент сопротивления при кручении стержня квадратного сечения; поправочный коэффициент $k \approx 1$ при индексе пружины $c = D/a = 80/6 \geq 10$.

В результате условие прочности принимает вид:

$$\tau_{\max} = \frac{F(D/2)}{0,208 a^3} = \frac{FD}{0,416 a^3} \leq [\tau],$$

откуда $[F] = \frac{0,416 a^3 [\tau]}{D} = \frac{0,416 \cdot 6^3 \cdot 400}{80} = 0,45$ кН.

② Так как при растяжении пружины пруток работает только на кручение, а при кручении стержней квадратного сечения момент инерции определяется как — $I_K = \beta a^4 = 0,141 a^4$, вычисляем потенциальную энергию деформации пружины:

$$U = \frac{M_{\text{кр}}^2 \ell}{2GI_K} = \frac{(FD/2)^2 \pi D n}{2G \cdot 0,141 a^4} = \frac{F^2 D^3 \pi n}{8G \cdot 0,141 a^4} =$$
$$= \frac{450^2 \cdot 80^3 \cdot 3,14 \cdot 8}{8 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0,141 \cdot 6^4} = 22270 \text{ Нмм} = 22,3 \text{ Дж.}$$

Задача 75

Две пружины, имеющие одинаковый диаметр " D ", одинаковое число витков " n " и одинаковый модуль сдвига " G ", но одна пружина выполнена из прутка *круглого поперечного сечения* диаметром " d ", а другая — из прутка *квадратного сечения* размером " a ", нагружаются одинаковой силой " F ". Определить отношение максимальных касательных напряжений в пружинах $\tau_{\max(1)}/\tau_{\max(2)}$ и отношение деформаций пружин λ_1/λ_2 , если площади поперечных сечений прутков одинаковы.

РЕШЕНИЕ:

① Из условия равенства площадей поперечных сечений получаем:

$$\boxed{A_1 = A_2} \rightarrow \pi d^2/4 = a^2, \text{ откуда } \boxed{a = (d\sqrt{\pi})/2 = 0,886d}. \quad (1)$$

② С учетом соотношения (1) записываем для пружин значения максимальных касательных напряжений. Пренебрегая действием поперечной силы, предполагаем, что прутки пружин испытывают только кручение и напряжения в них определяются по формулам —

$$\begin{aligned} \tau_{\max(1)} &= k \frac{M_{\text{кр}}}{W_\rho} = k \frac{F(D/2)}{\pi d^3/16} = k \frac{8FD}{\pi d^3} = 2,55k \frac{FD}{d^3}; \\ \tau_{\max(2)} &= k \frac{M_{\text{кр}}}{W_K} = k \frac{F(D/2)}{0,208a^3} = \frac{kF(D/2)}{0,208(0,886d)^3} = 3,46k \frac{FD}{d^3}, \end{aligned} \quad (2)$$

откуда получаем: $\boxed{\tau_{\max(1)}/\tau_{\max(2)} = 0,74}. \quad (3)$

③ Формула для вычисления изменения длины пружины выводится на основании *закона сохранения энергии*, согласно которому работа внешних сил численно равна энергии деформации, накапливаемой в элементе при упругом деформировании:

$$\boxed{\frac{F\lambda}{2} = \frac{M_{\text{кр}}^2 \ell}{2GI_{\rho(K)}}} \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{FD^3 \pi n}{4GI_{\rho(K)}}},$$

где $I_{\rho(K)}$ — момент инерции круглого I_ρ и квадратного I_K сечений при кручении прутка, соответственно равные:

$$\boxed{I_\rho = \pi d^4/32}; \quad \boxed{I_K = \beta a^4 = 0,141a^4}. \quad (4)$$

Тогда с учетом соотношения (1) и значений (4) записываем для пружин величину деформации от действия силы "F" —

$$\lambda_1 = \frac{FD^3\pi n}{4GI_\rho} = \frac{FD^3\pi n}{4G(\pi d^4/32)} = 8 \frac{FD^3n}{Gd^4};$$

$$\lambda_1 = \frac{FD^3\pi n}{4GI_K} = \frac{FD^3\pi n}{4G \cdot 0,141a^4} = \frac{FD^3\pi n}{4G \cdot 0,141(0,886d)^4} = 9,03 \frac{FD^3n}{Gd^4},$$

откуда получаем: $\boxed{\lambda_1/\lambda_2 = 0,88}$. (6)

Примечание.

Анализ результатов (3) и (6) показывает, что при одинаковых площадях поперечного сечения и прочих равных условиях пружина из прутка круглого сечения имеет более высокую прочность, но является более жесткой, чем пружина с сечением прутка квадратной формы. Но если для обеих пружин размеры сечения принять $d = a$, то при равнопрочности пружин, пружина с квадратным сечением прутка является более грузоподъемной, чем пружина круглого сечения:

$$\tau_{\max} = k \frac{F_1(D_1/2)}{\pi d^3/16} = k \frac{8F_1D_1}{\pi d^3} = 2,55k \frac{F_1D_1}{d^3} \rightarrow \boxed{F_1 = \frac{d^3\tau_{\max}}{2,55kD_1}};$$

$$\tau_{\max} = k \frac{F_2(D_2/2)}{0,208a^3} = k \frac{F_2(D_2/2)}{0,208d^3} = 2,4k \frac{F_2D_2}{d^3} \rightarrow \boxed{F_2 = \frac{d^3\tau_{\max}}{2,4kD_2}},$$

откуда — $\boxed{F_2/F_1 = 1,06}$.

Задача 76

Пружина диаметром $D = 50$ мм, имеющая шаг $h = 15$ мм и число витков $n = 10$, навитая из прутка квадратного поперечного сечения размером $a = 5$ мм, сжимается силой "F" до полного исчезновения зазора между витками. Определить эту силу и максимальные напряжения в пружине. Принять для пружины: $G = 8 \times 10^4$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① Зазор между витками пружины в свободном состоянии равен:

$$s_0 = h - a = 15 - 5 = 10 \text{ мм.}$$

② Предельная осадка пружины, при которой витки полностью смыкаются, определяется как:

$$\lambda_{\text{пред}} = s_0 (n - 1) = 10(10 - 1) = 90 \text{ мм.}$$

③ Сила, при которой происходит полное сжатие пружины, определяется по значению осадки, соответствующей смыканию витков и вычисляемой для прутка квадратного сечения по формуле:

$$\lambda_{\text{пред}} = \frac{FD^3\pi n}{4GI_K} = \frac{FD^3\pi n}{4G \cdot 0,141a^4},$$

$$\text{отсюда } F = \frac{4G \cdot 0,141a^4 \lambda_{\text{пред}}}{D^3\pi n} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0,141 \cdot 5^4 \cdot 90}{50^3 \cdot 3,14 \cdot 10} = 0,65 \text{ кН.}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов: Учебник. / М.Д. Подскребко – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
2. Сборник задач по сопротивлению материалов / А.С. Вольмир [и др.]; под ред. Вольмира А.С. – М.: Наука, 1984. – 407 с.
3. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: Учебник./В.И. Феодосьев – М.: Наука, 1986. – 512 с.
4. Дарков, А.В. Сопротивление материалов: Учебник. / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро – М.: Высшая школа, 1975. – 742 с.
5. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев – М.: Наука, 1976. – 607 с.
6. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов: Учебник./ Г.С. Писаренко [и др.]; под ред. Писаренко Г.С. – Киев: Вища школа, 1979. – 696 с.
7. Татур, Г.К. Общий курс сопротивления материалов: Учебник. / Г.К. Татур – Минск: Вышэйшая школа, 1974. – 462 с.