$$\begin{cases} 150 + 4x + 3x^2 + \lambda = 0 \\ 3y^2 - 94 + \lambda = 0 \\ x + y - 60 = 0 \end{cases}.$$

Решением этой системы будет x=29, y=31, λ=-2789.

4. Далее найдем частные производные второго порядка:

$$L''_{xx} = 4 + 6x;\ \ L''_{xy} = L''_{yx} = 0;\ L''_{yy} = 6y.$$

5. Получим значения частных производных второго порядка в критической точке и проверим достаточное условие существования экстремума:

$$L''_{xx} = 178;\ \ L''_{xy} = L''_{yx} = 0;\ L''_{yy} = 186$$
$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2 = 178dx^2 + 186dy^2 > 0,$$

Следовательно,(29; 31) является точкой условного минимума.

Ответ. Для минимизации расходов необходимо реализовать 29 автомобилей в розницу и 31 автомобиль – оптом.

Литература

1. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов: Практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н. Ш. Кремер и др. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007.

УДК 621.311

ПОСЛЕДНЯЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА

Мисюля Д. Я.
Научный руководитель – Марченко Н. И., ст. пр.

Самая известная заметка, когда-либо оставленная в книге, вполне может звучать так: «У меня есть поистине чудесная демонстрация этого утверждения, которое слишком узко для того, чтобы вместить его на этих полях».

В 1630-х годах французский математик Пьер де Ферма сделал набросок этого непритязательного утверждения, на основании которого формируется теорема. Условие данной теоремы формулируется просто, однако доказательство теоремы искали многие математики более трёхсот лет.

Теорема утверждает, что выражение:

$$a^n + b^n = c^n$$

не имеет положительных целых решений для a, b, c и для любого целого числа $n \geq 3$.

Встречается и другой вариант формулировки, утверждающий, что это уравнение не имеет натуральных решений. Тем не менее очевидно, что если существует решение для целых чисел, то существует и решение в натуральных числах. Пусть a, b, c – целые числа, дающие решение уравнения Ферма. Если n чётно, то $|a|, |b|, |c|$ тоже будут решением, а если нечётно, то перенесём все степени отрицательных значений в другую часть уравнения, изменив знак. Например, если бы существовало решение уравнения $a^3 + b^3 = c^3$ и при этом a отрицательно, а прочие положительны, то $b^3 = c^3 + (-a)^3$ и получаем натуральные решения $c, |a|,\ b.$ Поэтому обе формулировки эквивалентны. Обобщениями утверждения теоремы Ферма являются опровергнутая гипотеза Эйлера и открытая гипотеза Ландера – Паркина – Селфриджа.

В общем виде теорема была сформулирована Пьером Ферма в 1637 году на полях «Арифметики» Диофанта. Дело в том, что Ферма делал свои пометки на полях читаемых математических трактатов и там же формулировал пришедшие на ум задачи и теоремы.

Эйлер в 1770 году доказал теорему для $n = 3$, Дирихле и Лежандр в 1825 для $n = 5$, Ламе – для $n = 7$. Куммер показал, что теорема верна для всех простых n, Меньших 100, за возможным исключением т. н. иррегулярных простых 37, 59, 67.

Над полным доказательством теоремы работало немало выдающихся математиков. Тем не менее, эти усилия привели к получению многих важных результатов современной теории чисел. Давид Гильберт в своём докладе «Математические проблемы» так отозвался об этой проблеме: «Проблема доказательства этой неразрешимости являет разительный пример того, какое побуждающее влияние на науку может оказать специальная и на первый взгляд малозначительная проблема. Ибо, побуждённый задачей Ферма, Куммер пришёл к введению идеальных чисел и к открытию теоремы об однозначном разложении чисел в круговых полях на идеальные простые множители – теоремы, которая теперь является центральной в современной теории чисел и значение которой выходит далеко за пределы теории чисел в область алгебры и теории функций».

В 1980-х годах появился новый подход к решению проблемы. Из гипотезы Морделла, доказанной Фальтингсом в 1983 году, следует, что уравнение $a^n + b^n = c^n$ при $n > 2$ может иметь лишь конечное число взаимно простых решений.

Последний, но самый важный, шаг в доказательстве теоремы был сделан Эндрю Уайлсом из Принстонского университета в сентябре 1994 года. Его доказательство было опубликовано в журнале «Annals of Mathematics».

В своем доказательстве Уайлс использовал метод противоречия который предполагает, что теорема Ферма ложна. Это означает что существуют ненулевые решения для a, b, c и для $n > 2$, что дает нам эллиптическую кривую:

$$y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$$

Учитывая два вышеуказанных условия, теперь данная эллиптическая кривая не имеет связанной модулярной формы, однако Уайлс доказал, что все эллиптические кривые имеют некоторые связанные модулярные формы, что приводит к противоречию.

Эллиптических кривые, могут быть представлены в виде:

$$y^2 = g(x) \rightarrow cubic\ polynomial$$

Теперь, если построить график этого уравнения, мы получим 4 различных типа узлов, но учитывая текущую ситуацию нам нужно избегать тех узлов, которые имеют острые точки, а это третий и четвертый узел. Оставшиеся узлы – это особый тип кривых, называемых модулярными.

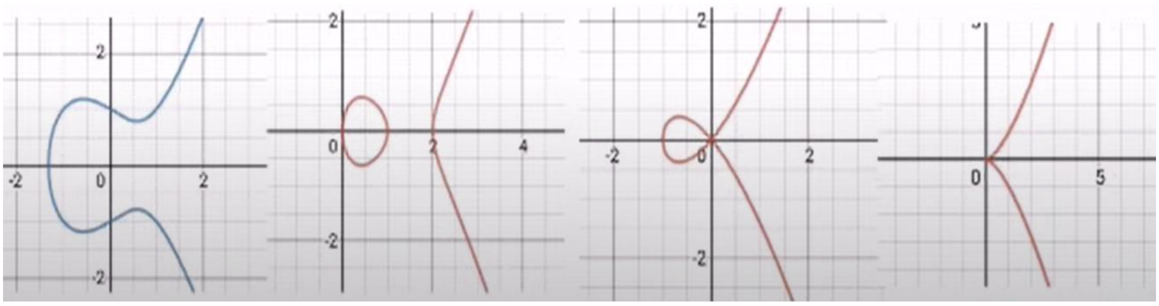

Рис. 8. Графики эллиптических кривых.

Функция называется модулярной, если она определяется следующим выражением:

$$f(x) \rightarrow modular$$
$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^k f(z)$$

Здесь $f(x)$ является голоморфной функцией. Таким образом каждая точка в окрестности точки поля является аналитической и здесь матрица принадлежит множеству матриц два на два с целыми числами с конечными элементами и определителем 1:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(Z)$$

Так же z лежит в верхней половине аргоновой плоскости которая означает, что:

$$Im(z) > 0\ K \rightarrow positive\ integer$$

Далее рассматривается поле алгебраических чисел $\bar{Q}$ – это представления Галуа, под которыми понимают автоморфизмы в $\bar{Q}$, которые с этого мента будут использовать это конкретное обозначение:

$$G_Q = Gal(\bar{Q}/Q)$$

На самом деле это означает что представление Галуа работает с точками кручения P кривой, которая является эллиптической:

$$\rho(E, p) \rightarrow p\ torsion\ points\ on\ E$$

Таким образом Уайлс, основываясь на приведенных выше условиях, приводит большой контуру доказательств и находит, что каждая эллиптическая кривая модулярна, что дает нам требуемое противоречие и доказывает, что теорема верна.

Первый вариант своего доказательства Уайлс опубликовал в 1993 году (после 7 лет напряжённой работы), но в нём вскоре был обнаружен серьёзный пробел, который с помощью Ричарда Лоуренса Тейлора удалось достаточно быстро устранить. В 1995 году был опубликован завершающий вариант.

Литература

1. Постников, М. М. Введение в теорию алгебраических чисел / М. М. Постников. – М.: Наука, 1982. – 240 с.

2. Рибенбойм, П. Последняя теорема Ферма для любителей / П. Рибенбойм. – М.: Мир, 2003. – 429 с.

3. Эдвардс, Г. Последняя теорема Ферма / Г. Эдвардс. – М.: Мир, 1980. – 477 с.

4. Donald C. Benson. The Moment of Proof: Mathematical Epophanies / Benson C. Donald. – Oxford University Press, 1999. – 352 p.

5. Faltings, Gerd (1995). The Proof of Fermat's last theorem by R. Taylor and A. Wiles, Notices of the AMS (42) (7), 743 – 746.

6. Fermat's last theorem. The history of the problem [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Fermat%27s_last_theorem.html – Дата доступа: 30.04.2023