arrow2022 — процедура для рисования наконечников стрелок для ребер ориентированного графа. Данная функция была переписана с нуля, что позволило значительно упростить данную часть пакета функций.

В модулях grMinAbsVerSet2023, grMinEdgeCover2023, grMaxMatch2023, grMinAbsEdgeSet2023, grMaxStabSet2023, grMinVerCover2023, grColVer2023 было оптимизировано получение промежуточных параметров, а также заменены и адаптированы вызовы устаревших функций.

В результате работы были исправлены ошибки несовместимости с современными версиями программного комплекса MatLab, что позволит и дальше использовать данный инструментарий для решения задач целочисленного программирования. Помимо прикладных задач, данный набор процедур может быть использован в учебной деятельности как студентами, так и преподавателями.

УДК 681.511

ПОСТРОЕНИЕ КОРНЕВЫХ ТРАЕКТОРИЙ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА НЬЮТОНА

Мацак И.С.
Научный руководитель –Несенчук А.А., к.т.н., доцент

1. Корневые годографы систем

В теории автоматического управления существенное значение имеет анализ и синтез систем с неопределенными параметрами, т.к. в реальных системах в процессе работы параметры отклоняются отноминальных значений[1–3].Для расчета подобных систем используются различные подходы и методы, в том числе корневые [2].

При проектировании систем важно знать, каким образом будут изменяться их динамические свойства при вариации параметров. Известно, что динамические свойства, устойчивость и качество, системы определяются корнями ее характеристического уравнения, которое в общем виде можно записать следующим образом:

$$p(s) = \sum_{j=0}^{n} a_j s^{n-j}, \qquad (1)$$

гдеa_j – действительные коэффициенты;s – оператор Лапласа;s=σ+iω.

Поэтому, для установления динамических свойств системы, ее анализа и синтеза, эффективным является метод корневого годографа[1].

Корневым годографом называется совокупность траекторий перемещения всех корней характеристического уравнения замкнутой системы при изменении какого-либо параметра этой системы[2].

В качестве изменяющегося параметра может быть использован некоторый коэффициент (параметр) a_j=a_k уравнения (1),

$$-\infty < a_k < \infty. \quad (2)$$

Параметрa_j=a_k, который используется для построения корневого годографа, называется *параметром годографа* или *свободным параметром.*

Годограф определяется в аналитической и графической формах.

2. Алгоритм формирования аналитического корневого годографа

Аналитический корневой годографв общем виде определяется на основе комплексной функции отображения вида[3]:

$$a_k = -\frac{\phi(s)}{\psi(s)} = u(\sigma,\omega) + iv(\sigma,\omega), \quad (3)$$

где $\phi(s)$, $\psi(s)$ – некоторые полиномы от комплексного переменного s; u(σ,ω), v(σ,ω)– гармонические функции от переменных σ и ω.

Для получения конкретного аналитического уравнения корневого годографа необходимо определитьдинамическую характеристику системы[1–3], а также задать желаемый образ корневого годографа[3] в комплексной плоскостиa_kсвободного параметраa_k (3).В данном случае динамику системы опишем передаточной функцией разомкнутой системы[1–3]$G(s)$ в форме[3]:

$$G(s) = \frac{\psi(s)}{\phi(s)}. \quad (4)$$

В качестве образа корневого годографа[3] определим действительную ось u комплексной плоскости a_k, т.е. параметр годографа (свободный параметр) a_k изменяется в пределах (2). Такой годограф называется *корневым годографом Теодорчика – Эванса* (КГТЭ)[3].

На этом основании приведем ниже алгоритм поэтапного вывода аналитического уравнения корневого годографа.

Этап 1. Определение передаточной функции$G(s)$ (4)разомкнутой динамической системы.

Этап 2. Определение характеристического уравнения вида (1) замкнутой системы.Это уравнение полностью описывает систему со стороны её динамических свойств и характеристик.

Этап 3. Формирование функции отображения(3)для заданной системы. Для этого в сформированные на 1 этапе полиномы$\psi(s)$ и $\phi(s)$ (3) следует подставить выражение s=σ+iωи затем записать функцию отображения (3). Выражение разделится на две части: действительную – $u(\sigma,\omega)$ и мнимую – $iv(\sigma,\omega)$.

Этап 4. Задание образа корневого годографа. Как было отмечено выше, образом корневого годографа является действительная ось u комплексной плоскости a_k варьируемого параметра (3), что соответствует пределам (2) изменения a_k.

Этап 5. Определение уравнения корневого годографа (УКГ)Теодорчика-Эванса (УКГТЭ). На основании этапов3и 4алгоритма определяется уравнение Бердникова-Теодорчика[3],котороеразбивается на два уравнения:

ω=0

и уравнение корневого годографа Теодорчика – Эванса:

$$v(\sigma,\omega)=0\,. \tag{5}$$

Уравнение (5) представляет собой уравнениеКГТЭ в аналитической форме и используется для определения точекКГТЭ в комплексной плоскости s(исключая действительную ось σ). На основе уравнения(5) выполняется графическое построение корневого годографа.

3. Алгоритм формирования графического КГТЭ

После формирования уравнения КГТЭ (5) в аналитической форме формируется графический корневой годограф.

В рамках научной работы разработаны алгоритм и программа для графического построения корневых траекторий систем управления на основе использования метода Ньютона [4].

3.1. Метод Ньютона для решения нелинейных уравнений

Метод Ньютона предназначен для решения нелинейных уравнений от одной переменной и систем нелинейных уравнений и основан на идее линеаризации. Данный метод был предложен Ньютоном в 1669 году. Ученик Ньютона Рафсон в 1690 г. предложил общую форму метода. Поэтому, часто говорят о методе Ньютона – Рафсона. Дальнейшее развитие исследований связано с именами таких известных математиков, как Фурье, Коши и другие. Например, Фурье доказал в 1818 г., что метод сходится квадратично в окрестности корня, а Коши (1829, 1847) предложил многомерное обобщение метода и использовал метод для доказательства существования решения уравнения.

Классический метод Ньютона или касательных заключается в том, что если x_n— некоторое приближение к корню x уравнения $f(x) = 0, f \in C^1$, то следующее приближение определяется как корень касательной к функции f^x, проведенной в точке x_n.

Уравнение касательной к функции f^xв точке x_nимеет вид:

$$f'(x_j) = \frac{y - f(x^n)}{x - x_n}.$$

В уравнении касательной примем y=0 и x=x_{n+1}. Тогда алгоритм последовательных вычислений по методу Ньютона состоит в следующем:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

(6)

3.2. Алгоритм формирования КГТЭ с использованием метода Ньютона

В данной работе метод Ньютона используется для решения уравнения КГТЭ (5). Вначале задается интервал значений σ, в котором ожидаемо может находиться решение, и внутри этого интервала производится поиск решений (корней ω_i) с определенным шагом изменения σ.

Первое приближение корня согласно (6) определяется по формуле

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Второе приближение корня определяется по формуле

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Таким образом, i-ое приближение корня определяется по формуле

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}.$$

В нашем случае x_i=ω_i.

Вычисления ведутся до тех пор, пока не будет достигнуто совпадение десятичных знаков, которые необходимы в ответе, или заданной точности e.

Входными данными алгоритма являются:

1). Нелинейная функция $f(x)=v_1(\omega)$; $v_1(\omega)$ – уравнение КГТЭ (5) после подстановки в него текущего значения σ.

2). Производная $v_1'(\omega)$ функции $v_1(\omega)$, если её можно задать аналитически.

3). Точность e, с которой требуется найти решение.

4). Максимальное число итераций, которое может быть пройдено алгоритмом.

5). Начальное приближение $x_0.=\omega_0$.

Выходными данными алгоритма в случае успеха является число (корень ω_i уравнения (5)), удовлетворяющее решению с заданной точностью. В случае выхода итерации за заданное ограничение, считается, что алгоритм не смог найти удовлетворяющее ограничениям решение, и выдается сообщение об ошибке.

4. Программа формирования КГТЭ

Для формирования аналитического КГТЭ разработана программа, включающая следующие функции.

1. Функция *REIMK* для вычисления коэффициентов полиномов $\phi(s)$ и $\psi(s)$ (см. выражения (3) и (4).)

2. Функция *PROM* для определения базовых полиномов $E(\sigma,\omega)$, $F(\sigma,\omega)$, $P(\sigma,\omega)$, $R(\sigma,\omega)$ [3], на основе которых формируются функция (3) и уравнение КГТЭ (5).

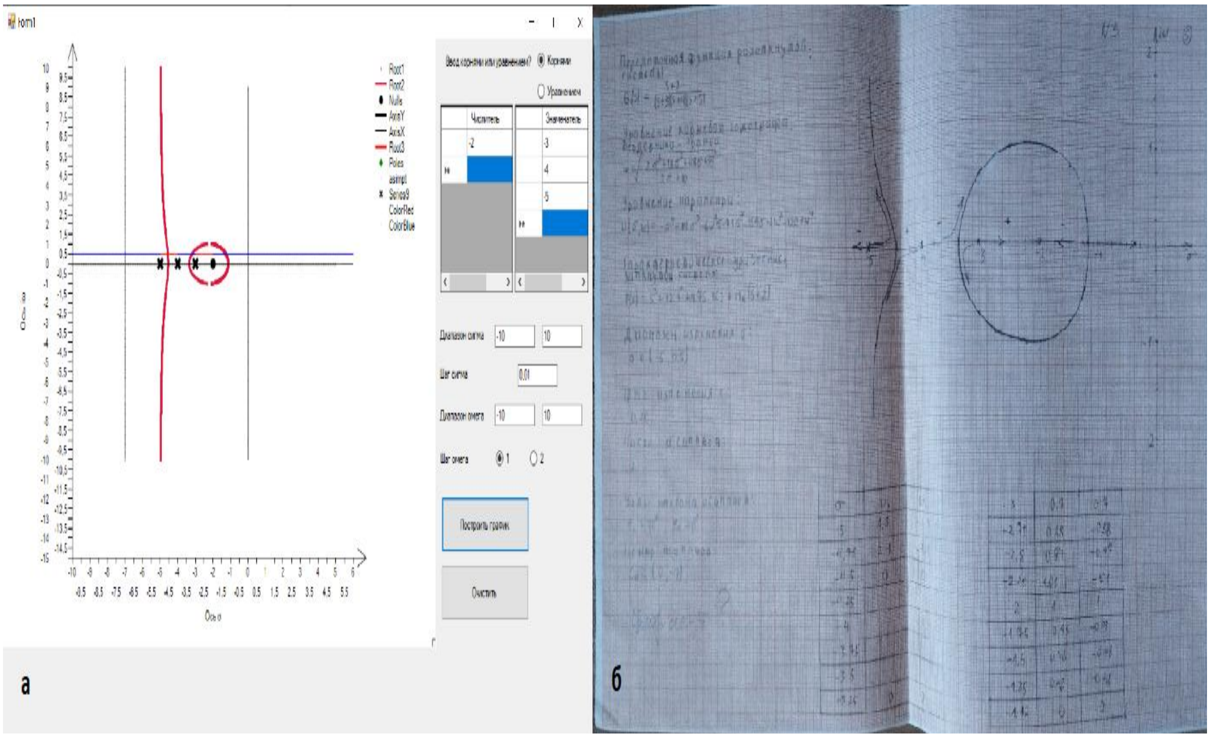
3. Функция *BT* для непосредственного формирования уравнения КГТЭ.

Для формирования графического КГТЭ разработана программа, включающая следующие функции.

1. Функция *POLRT*, предназначенная для определения координат σ и ω кривой КГТЭ на основании вычисленных по методу Ньютона корней ω_i.

2. Функция *GRAPH* для построения графика корневого годографа.

Примеры построения корневых траекторий для передаточной функции разомкнутой системы $\frac{(s+2)}{(s+3)(s+4)(s+5)}=G(s)$ приведены на рисунке 1. На рисунке 1, *а* корневой годограф построен с помощью программы, на рисунке 1, *б* – вручную.



а б

Рис. 1 – Пример построения корневых траекторий:
а – программно, б – вручную.

В результате выполненной научной работы разработана программа на высокоуровневом языке *C#* в среде разработки *Visual Studio* 2022, включающая класс *KGUtils*, предоставляющий инструментарий для формирования базовых полиномов, составления уравнений КГТЭ и графического построения корневых траекторий.

Литература

1. Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.
2. Попов,Е.П. Теория линейных систем автоматического управления / Е.П. Попов. – М.: Наука, 1989. – 150 с.
3. Несенчук, А.А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода / А.А. Несенчук. – Мн.: ОИПИ НАН Беларуси, 2005. – 234 с.
4. Крылов, В.И. Начала теории вычислительных методов / В.И. Крылов. – Мн., 1984. – 263 с.