14. D. Bonchev and D. Rouvray, "Graph Theory and the Topology of Chemical Compounds," Elsevier, 1983.
15. M. Newman, "Networks: An Introduction," Oxford University Press, 2010.
16. M. Jackson, "Social and Economic Networks," Princeton University Press, 2008.
17. V. Batagelj and A. Mrvar, "Pajek - Analysis and Visualization of Large Networks," Wiley, 2014.

УДК 519.62

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНВАРИАНТНОГО ПОГРУЖЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Сироткин А. И.
Научный руководитель – Роговцов Н. Н., д. ф.- м. наук, профессор

Значительную часть теоретических и прикладных проблем естествознания можно свести к решению краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Одним из классических методов решения таких задач является метод разделения переменных (метод Фурье). Однако сложность эффективного использования этого метода резко возрастает для ситуаций, когда необходимо решать краевые задачи для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. При этом сильно сужаются возможности для отыскания аналитических и даже полуаналитических решений краевых задач для указанных выше уравнений. Известно [1-3], что эффективное использование метода Фурье тесно связано с решением классической задачи Штурма-Лиувилля. Качественная математическая теория этой задачи изложена, в частности, в монографиях [1-3]. Однако, для получения решений многих фундаментальных и прикладных проблем зачастую требуется не только производить качественное исследование свойств решений задачи Штурма-Лиувилля, но и находить их решения в явной (конкретной) форме (в частности, в полуаналитическом, численном, графическом и иных видах).

Одним из подходов, который позволяет находить решение задачи Штурма-Лиувилля, является метод инвариантного погружения [4, 5]. Суть этого метода заключается в том, что частные краевые задачи (в частности, задача Штурма-Лиувилля) погружаются инвариантным образом в семейство задач того же типа. Далее находятся уравнения, связывающие между собой решения этих задач, соответствующих различным значениям параметров (в качестве такого параметра можно, например, взять длину отрезка, на границах которого ставятся краевые условия какого-то типа). Фактически метод инвариантного погружения сводит решение краевых задач к решению задач Коши.

Рассмотрим следующую классическую задачу Штурма-Лиувилля [1-3]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[p(x)\cdot\frac{dy(x)}{dx}\right]+[\lambda\cdot\rho(x)-q(x)]\cdot y(x)=0, \ \ x\epsilon[0;l], \ \ l\epsilon[0;L]; & (1)\\ y(0)=0; & \\ y'(l)=0; & (2)\end{cases}$$

где $p(x),\rho(x),q(x)$ – непрерывные на отрезке $[0;L]$ функции. Искомые нетривиальные решения *y(x)* называются собственными функциями этой задачи, а значения λ, при которых такое решение существует — её собственными значениями. Вид функций $p(x),\rho(x)$, *q(x)* определяется конкретным типом области применения метода Фурье. Суть метода инвариантного погружения состоит в переходе от задачи с граничными условиями к задачам с начальными условиями, т. е. к задачам Коши, которые решаются с использованием классических численных методов.

Кратко проиллюстрируем возможности метода инвариантного погружения для решения задачи Штурма-Лиувилля. Положим $p(x)\equiv 1$ на отрезке $[0;L]$ и рассмотрим такую неоднородную краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{d^2y(x)}{dx^2}=\big(q(x)-\lambda\cdot\rho(x)\big)\cdot y(x)+g(x); & (3)\\ y(0)=0; & \\ y'(l)=0. & (4)\end{cases}$$

Отметим, что, если однородная задача, соответствующая (3), (4), имеет нетривиальное решение, то сама задача (3), (4), вообще говоря, решения иметь не будет.

Для иллюстрации процедуры метода инвариантного погружения возьмём функции $\rho(x)$, *q(x)*, $g(x)$ в следующем виде:

$$\begin{cases} \rho(x)=1, \\ q(x)=\cos(2x), \\ g(x)=2\cdot e^{-100x}\sin(2x). \end{cases} \quad (5)$$

Будем изменять параметр λ на полуинтервале, т. е. $\lambda\epsilon[\varepsilon;+\infty),\varepsilon>0$. Для отыскания первого собственного значения $\lambda=\lambda^*$, как показано в работах [4,5], следует найти такое значение l^*, для которого решение задачи Коши

$$\begin{cases} Q'(l)=1-\big(q(l)-\lambda\cdot\rho(l)\big)\cdot Q^2(l), \\ Q(0)=0, \end{cases} \quad (6)$$

стремилось бы по модулю к $+\infty$. Уравнение (6) является уравнением Риккати. В общем случае оно не имеет решения в аналитическом виде. Поэтому фактически функция $Q(l)$ должна находиться численными методами. Если для выбранного λ^* решение для некоторого, очень близкого $x = l^* \epsilon [0; L]$ стремится по модулю к $+\infty$, то $\lambda = \lambda^*$ есть собственное значение задачи Штурма-Лиувилля, когда берётся отрезок $[0; l^*]$. Таким образом можно получить зависимость $\lambda(l)$, используя которую можно по заданной длине отрезка $l \epsilon [0; L]$ находить первое собственное значение задачи Штурма-Лиувилля. График зависимости $\lambda(l)$ для конкретно заданных функций (5) для задачи (3), (4) представлен на рисунке 1.

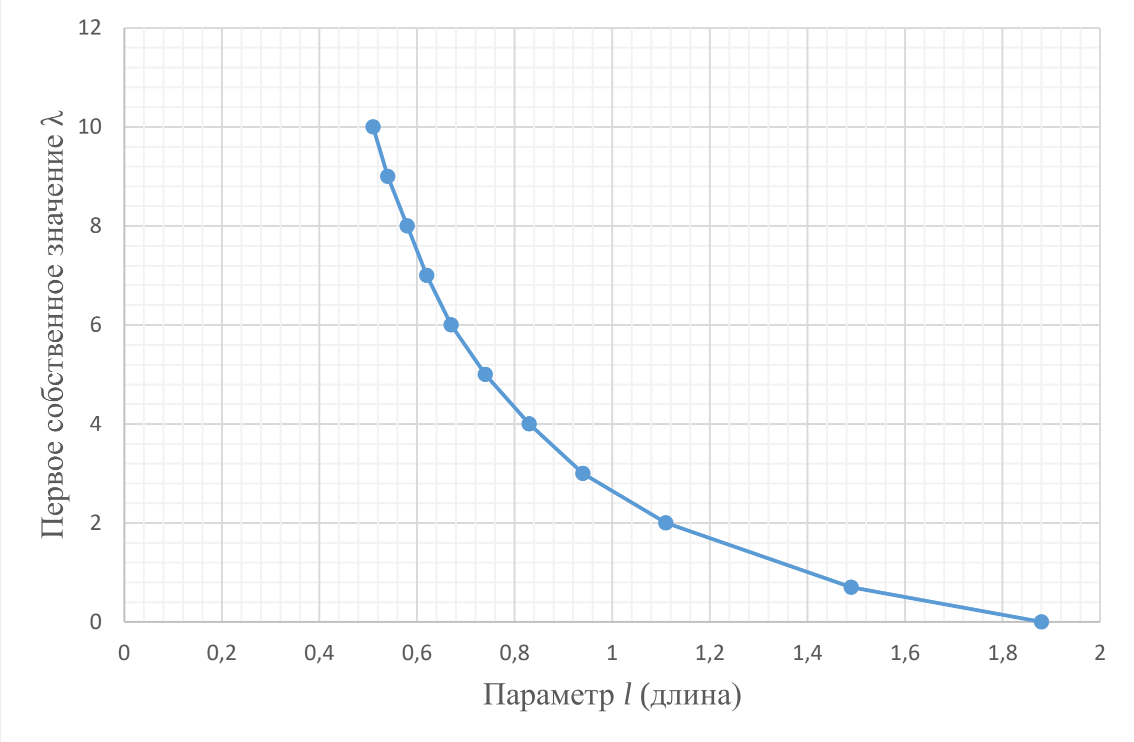

Рис. 1. Зависимость $\lambda(l)$ для конкретной задачи Штурма-Лиувилля

Заметим, что как показано в работе [5], неоднородную задачу (3), (4) можно полностью решить с помощью сведения её к решению ещё двух дополнительных задач Коши.

Литература

1. Тихонов, А. М. Уравнения математической физики: Учеб. пособие/А. М. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 1999.
2. Левитан, Б. М. Введение в спектральную теорию/ Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. – М.: Наука, 1970
3. Арсенин В. Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. -М.: Наука,1966
4. Касти, Дж. Методы погружения в прикладной математике/ Дж. Касти, Р. Калаба: пер. с англ. С. П. Чеботарева М.: Мир, 1976 223 с.

5. Роговцов, Н. Н. Связь между решениями семейств двухточечных краевых задач и задач Коши // Дифференциальные уравнения: - 2008. - №9. - С. 1205-1221.

УДК 519.62

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Сорокин А.Д.
Научный руководитель – Королёва М.Н., ст. преподаватель

В данной статье исследуется применение метода разделения переменных для решения уравнения теплопроводности в цилиндрических координатах. Рассмотрены основные этапы решения задачи, включая нахождение коэффициентов ряда Фурье и определение начальных условий. Приведены численные примеры решения задачи в различных условиях, что позволяет оценить эффективность метода и его применимость в различных практических задачах.

Рассмотрим задачу о распределении тепла в цилиндрическом баке, заполненном разнородной средой с заданной начальной температурой. Пусть r - радиальное расстояние от оси цилиндра, θ - угловая координата, z - координата вдоль оси цилиндра, а $T(r,\theta,z,t)$ - температура в среде в момент времени t.

Тогда с учетом закона Фурье для теплопроводности и теплового баланса участка среды, задачу можно представить в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\kappa\frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q(r,\theta,z,t)$$

где κ - коэффициент теплопроводности, а $Q(r,\theta,z,t)$ - источник тепла, например тепловое излучение.

Для решения этой системы уравнений может использоваться техника ряда Фурье. Предположим, что температура распределена по цилиндрическому баку в виде ряда Фурье:

$$T(r,\theta,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\phi_{nmp}(r)e^{in\theta}e^{imp}e^{-\alpha n^2 t}$$