МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет
Кафедра «Математические методы в строительстве»

Крушевский Е. А.

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

«Теория вероятностей и математическая статистика»

для специальности 6-05 -0731-01 «Геодезия»

Минск - БНТУ - 2023

Перечень материалов

Теоретическая часть, практическая часть, ответы, контрольные вопросы, контрольные задания, приложения.

Пояснительная записка

Электронный учебно-методический комплекс по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» предназначен для студентов второго курса обучения по специальности 6-05-0731-01 «Геодезия». Объем изучаемого материала дисциплины в соответствии с учебным планом составляет 16 часов лекций и 34 часа практических занятий (очная форма получения высшего образования) и 10 часов лекций и 6 часов практических занятий (заочная форма получения высшего образования).

Целью ЭУМК является скоординировать и оптимизировать работу студентов и преподавателей по изучению предмета «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов специальности 6-05-0731-01 «Геодезия». Систематизировать разделы теоретического, практического материала и материала для проверки и контроля знаний в единый модуль.

Структурирование и подача учебного материала. Материал курса представлен в виде краткого лекционного материала, материала для аудиторной и самостоятельной работы, практических заданий, контрольных вопросов и контрольных заданий по данным разделам. Учебный материал четко разделен по темам курса и излагается в соответствии с типовой программой и в объеме, предусмотренном учебным планом.

Рекомендации по организации работы с ЭУМК. Изучение учебного материала в ЭУМК может быть использовано студентами дневной и заочной форм обучения. Предварительно следует изучить тему лекционного материала, затем прорешать задач соответствующей темы, сверяясь с имеющимися ответами. При выполнении самостоятельной работы использовать примеры, приведенные в теоретической части ЭУМК. В случае появления вопросов при изучении учебного материала необходимо обратиться за консультацией к преподавателю. В конце ЭУМК приведены контрольные вопросы и контрольные задания.

Оглавление

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

§ 1. Случайные события и действия над ними

Пусть некоторый эксперимент при равных начальных условиях может закончиться одним и только одним из исходов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...$ *Их количество может быть конечным или бесконечным. Эти исходы называют элементарными событиями (**элементарными исходами**), а всю их совокупность (множество)* Ω *- **пространством элементарных исходов** (в дальнейшем будем сокращать – ПЭИ). Следует отметить, что в теории вероятностей рассматриваются только такие эксперименты, которые можно повторять произвольное число раз при неизменном комплексе условий.*

*Если ПЭИ состоит из конечного числа элементов, то **случайным событием** (или просто – событием) называется любое подмножество ПЭИ. В этом случае множество всех событий S образует **алгебру событий**, т.е. выполняются аксиомы **конечной аддитивности**:*

1. *Для любого конечного числа событий* $A_1, A_2, ..., A_n$ *их объединение* $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ *также является событием.*

2. *Если подмножество* $A \in S$ *является событием, то его дополнение* $\Omega \backslash A$ *до ПЭИ* Ω *также является событием.*

Если же ПЭИ состоит из бесконечного числа элементов, то случайными событиями называют элементы такой совокупности S подмножеств ПЭИ, которая образует σ ***-алгебру событий.** Это означает, что, вместо аксиомы **1** должна выполняться **аксиома счетной аддитивности** (аксиома **2** не меняется):*

1'. *Для любой последовательности событий* $A_1, A_2, ... \in S$ *их объединение* $A_1 \cup A_2 \cup ...$ *также является событием.*

Из аксиом следует, что если подмножества $A_1, A_2, ...$ *являются событиями, то их пересечение* $A_1 \cap A_2 \cap ...$ *также является событием.*

*В теории вероятностей **пустое множество** Ø (не содержащее ни одного элементарного исхода) также считается событием.*

*События обозначаются большими латинскими буквами A, B, C ..... Говорят, что **событие A произошло**, если эксперимент закончился элементарным исходом* $\omega \in A$*.Среди событий следует выделить **достоверное** событие* Ω *(которое в результате опыта происходит всегда), а также **невозможное** событие Ø – событие, которое в резуль-*

тате опыта не происходит никогда.

Равенство $A=B$ *означает, что события A и B состоят из одних и тех же элементарных исходов.*

Несколько событий в данном опыте называют ***несовместными****, если никакие два из них не могут произойти одновременно. Из этого определения следует, что для пары несовместных событий* $A\cap B=\varnothing$.

В теории вероятностей операцию объединения событий принято называть ***сложением****, т.е.* $A\cup B=A+B$, *операцию пересечения –* ***умножением****, т.е.* $A\cap B=AB$, *а операцию дополнения события A до ПЭИ – переходом к* ***противоположному событию*** *и обозначать* $\overline{A}$, *т.е.* $\Omega\setminus A=\overline{A}$. *Операции сложения и умножения событий связаны между собой законом дистрибутивности, т.е.* $(A+B)\cdot C=AC+BC$ *(события можно выносить за скобки(!)и раскладывать на множители, естественно, с соблюдением всех необходимых правил).*

Событие $A+B$ *наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий A или B.*

Событие AB наступает тогда и только тогда, когда наступают оба события A и B. В частности, для несовместных событий $AB=\varnothing$.

Понятия суммы и произведения двух событий очевидным образом переносятся на случай любого множества событий.

Событие $\overline{A}$ *наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A.*

В теории вероятностей для большей информативности события можно описывать словесно (или символьно) следующим образом: $A=\{\,a>0\,\}$ *(т.е. событие A состоит в том, что в результате опыта некоторая величина a примет положительное значение). Или, с учетом сказанного ранее, AB =* {*одновременно произойдут события A и B*}.

Условившись обозначать наступление события цифрой «1» *и ненаступление – цифрой* «0»*, сумму и произведение двух событий, а также противоположное событие можно определить следующими таблицами (они называются* ***таблицами истинности****)*:

A	*B*	*A+B*	*AB*
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Пример 1. Опыт состоит в бросании игральной кости. Событие A_i, $i=1,\dots,6$ – выпадение *i* очков; событие *A* = {выпадение четного числа

очков}, B = {выпадение нечетного числа очков}, C = {выпадение числа очков, кратного трем}, и D = {выпадение числа очков, большего трех}. Выразите события *A, B, C* и *D* через A_i, $i=1,...,6$.

Решение. Событие A наступает тогда и только тогда, когда наступает или A_2, или A_4, или A_6. Это означает, что $A = A_2 + A_4 + A_6$.

Рассуждая аналогично, имеем:

$$B = A_1 + A_3 + A_5,\ C = A_3 + A_6 \text{ и } D = A_4 + A_5 + A_6.$$

Следующий пример важен для понимания того, как с помощью таблиц истинности устанавливать правильность соотношений между событиями в достаточно сложных случаях.

Пример 2. С помощью таблиц, определяющих $A + B$, $A{\cdot}B$ и $\overline{A}$, доказать равенство $A + \overline{B} = A + \overline{A}{\cdot}\overline{B}$.

Решение. Составляем таблицы истинности для левой и правой частей указанного равенства:

A	B	$\overline{B}$	$A+\overline{B}$
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}{\cdot}\overline{B}$	$A + \overline{A}{\cdot}\overline{B}$
1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Последние столбцы этих таблиц одинаковы, что и ***означает справедливость равенства*** $A + \overline{B} = A + \overline{A}{\cdot}\overline{B}$.

Пример 3. Опыт состоит в том, что стрелок произвел 2 выстрела по мишени. Событие A_i – попадание в мишень при i-м выстреле (i = 1, 2). Выразите через A_1 и A_2: *а)* A – хотя бы одно попадание; *б)* B – два промаха; *в)* C –не больше одного попадания.

Решение. В данном случае пункт *а)* можно решить несколькими способами. Самый естественный (и самый длинный способ) – перечислить все возможные ситуации, а именно:

1) {первый стрелок «попал»} и {второй стрелок «не попал»}, т.е. $A_1 \cdot \overline{A_2}$;

2) {первый стрелок «не попал»} и {второй стрелок «попал»}, т.е. $\overline{A_1} \cdot A_2$;

3) {первый стрелок «попал»} и {второй стрелок «попал»}, т.е. $A_1 \cdot A_2$,

что приводит нас к выражению $A{=}A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2$. Отметим, что полученной выражение, несмотря на свою кажущуюся сложность, весьма практично, т.к. все 3 слагаемые – суть несовместные события, что заметно упрощает подсчет вероятности суммы событий.

С другой стороны, можно записать $A = A_1 + A_2$, что означает – первый стрелок «попал» (A_1) (при этом нас совершенно не заботит второй стрелок) или (сложить) второй стрелок «попал» (A_2) (неважно, что было с первым). Полученные выражения эквивалентны (важное применение Примера 2), т.к. $A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2 = A_1 \cdot (\overline{A_2} + A_2) + \overline{A_1} \cdot A_2 = A_1 + \overline{A_1} \cdot A_2 = A_1 + A_2$. Второе выражение выглядит проще, но считать по нему вероятность события A будет совеем непросто, т.к. события A_1 и A_2 совместны и пренебрежение этим фактом приводит к многочисленным ошибкам.

Пример 4. С помощью таблицы истинности перечислите все случаи наступления и ненаступления события $A \cdot \overline{B} + C$ в зависимости от наступления и ненаступления событий A, B и C.

Решение. Составим таблицу:

A	B	C	$\overline{B}$	$A \cdot \overline{B}$	$A \cdot \overline{B} + C$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	0

Договоримся в дальнейшем не ставить знак умножения (точку), т.е. вместо $A \cdot B$ будем писать AB.

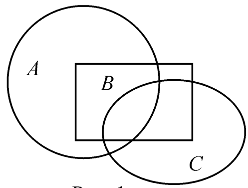


Рис. 1

Пример 5. Пусть A, B и C – события, означающие попадание точки соответственно в области A, B и C (рис.1). Что означает событие $AB+C$?

Решение. События $AB + C$ означает попадание точки в область $(A \cap B) \cup C$, которая на рисунке 2 заштрихована.

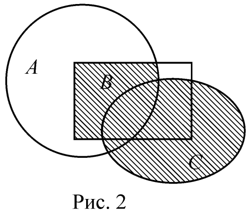


Рис. 2

§ 2. Вероятность случайного события, формула классической вероятности. Формулы сложения вероятностей.

Под вероятностной моделью эксперимента понимается задание тройки (Ω, S, P)*, где* Ω *– ПЭИ, S – алгебра событий, удовлетворяющая аксиомам* ***1-2 (1′-2)*** *(см.* § 1) *и так называемой* ***вероятностной меры P*** *случайных событий. Такую тройку* (Ω, S, P) *называют* ***вероятностным пространством****. Если ПЭИ конечно, т.е.* $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$*, то для определения вероятностной меры P случайных событий должны быть заданы числовые значения* $p(\omega_1), ..., p(\omega_n)$ *для каждого элементарного исхода* ω_k*, удовлетворяющие условиям (это вероятности данных исходов):*

1) все $p(\omega_k) > 0$ ***(условие неотрицательности),***

2) $p(\omega_1) + ... + p(\omega_n) = 1$ ***(условие нормировки).***

*По определению считается, что p(Ø)=*0*, т.е.* ***вероятность невозможного события равна 0****. Вероятности других событий определяются по формуле*

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p(\omega_k), \tag{1}$$

т.е. суммирование ведется для элементарных исходов $\omega_k \in A$*, образующих событие A.*

В результате можно сформулировать (и доказать) ***следующие утверждения****, которые надо знать и уметь ими пользоваться:*

а) $P(\Omega) = 1$ ***(вероятность достоверного события равна 1);***

б) $P(A) \in [0;1]$ *для любого события A;*

в) если $AB = Ø$*, то* $P(A+B) = P(A) + P(B)$ ***(формула сложения для несовместных событий);***

г) если $AB \neq Ø$*, то* $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ ***(формула сложения для совместных событий);***

д) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ***(формула вероятности для противоположного события (очень часто применяется при решении задач!!).***

е) если $A \subset B$*, то* $P(A) \leq P(B)$ *(монотонность вероятности).*

Вопрос об определении вероятности $p(\omega_k)$ *элементарных исходов* ω_k *можно решать статистически. Представим себе, что эксперимент проводится N раз и при этом исход* ω_k *наступает в* N_k *случаях. Тогда отношение*

$$p(\omega_k) = \frac{N_k}{N}$$

называется ***частостью появления исхода*** ω_k *в данной серии испытаний и представляет собой «статистическое» определение вероятности этого исхода.*

Пример 1. Наблюдения показывают, что в среднем среди 1000 новорожденных детей 515 мальчиков. Частость рождения мальчика в такой серии наблюдений равна 0,515.

Пример 2. Французский естествоиспытатель Бюффон (XVIII в.) бросил монету 4040 раз, и при этом герб выпал в 2048 случаях. Следовательно, частость выпадения герба в данной серии испытаний равна:

$$p = \frac{2048}{4040} \approx 0{,}50693\,.$$

Пример 3. Английский математик Карл Пирсон (1857-1936) бросал монету 24000 раз, причем герб выпал 12012 раз. Следовательно, частость выпадения герба в данной серии испытаний равна:

$$p = \frac{12012}{24000} \approx 0{,}5005\,.$$

Примеры 2 и 3 подтверждают естественное предположение о том, что вероятность выпадения герба при одном бросании монеты можно принять равной 0,5.

Другой подход состоит в следующем. Если мы по физическим или логическим соображениям не можем заранее отдать предпочтение ни одному из элементарных исходов, образующих ПЭИ, то естественно принять, что $p(\omega_1) = \ldots = p(\omega_n)$. *С учетом нормировки получаем, что все* $p(\omega_k) = \frac{1}{n}$. *Тогда из формулы (1) следует, что*

$$P(A) = \frac{m_A}{n}\,, \tag{2}$$

где n – число всех элементарных исходов ПЭИ, m_A *– число элементарных исходов, образующих событие A (существует еще термин – число исходов,* ***благоприятствующих наступлению события*** *A).Формулу (2) называют формулой классической вероятности.*

<u>Важное замечание</u>. *При использовании формулы (2) вы должны убедиться, что это законно, т.е. все элементарные исходы равновозможны.*

Пример 4. В урне 10 шаров, из которых 3 белых и 7 черных. Какова вероятность того, что наудачу извлеченный шар из этой урны окажется белым?

Решение. Пусть событие *A* – извлеченный шар белого цвета. Данное испытание имеет 10 равновозможных исходов, из которых для появления события A благоприятны 3. Следовательно, по формуле (2) $P(A) = 0{,}3$.

Пример 5. Натуральные числа от 1 до 20 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания из урны наудачу взята одна карточка. Найти вероятности следующих событий: A = {число на этой карточке – четное}, B = {это число кратно 3}, C = {это число кратно 6}, D = {это число или является четным, или кратно 3}, E = {это число не делится на 6}, F = {это число является степенью 2}, G = {это число или является степенью 2, или кратно 3}?

Решение. Испытание имеет 20 равновозможных элементарных исходов, и, значит, мы можем использовать классическую модель вероятности, т.е. формулу (2). Из них для появления события A благоприятны 10 (т.е. событие A состоит 10 элементарных исходов). Значит, $P(A) = 0{,}5$. Событию B благоприятны 6 исходов (это 3, 6, 9, 12, 15, 18). Значит , $P(B) = 0{,}3$. Далее можно было бы поступать по аналогии, но мы продемонстрируем ***использование действий над событиями и утверждений, касающихся свойств вероятностной меры***. Ясно, что событие $C = A \cdot B$. Следовательно, оно состоит из 3-х исходов, $P(C) = 0{,}15$. Очевидно, $D = A + B$, причем события A и B совместны. Тогда по формуле сложения для совместных событий $P(D) = P(A) + P(B) - P(AB) =$ $= 0{,}5 + 0{,}3 - 0{,}15 = 0{,}65$. Т.к. $E = \bar{C}$, то $P(E) = 1 - P(C) = 0{,}85$. Событию F благоприятны 4 исходов (это 2, 4, 8, 16). Значит , $P(F) = 0{,}2$. Наконец, $G = F + B$, причем события F и B несовместны. Тогда по формуле сложения для несовместных событий $P(G) = P(F) + P(B) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$.

§ 3. Аксиоматика Колмогорова. Геометрическая вероятность.

*Рассмотрим случай ПЭИ с бесконечным числом исходов. Говорят, что на ПЭИ Ω с бесконечным числом исходов задана вероятностная модель, если указано множество S событий (**σ-алгебра событий**), удовлетворяющие аксиомам $1'$-2 (см. § 1) и так называемая вероятностная мера P случайных событий, для которой выполнены аксиомы (аксиоматика А.Н.Колмогорова):*

1. *Каждому событию $A \in S$ поставлено в соответствие **неотрицательное** число $P(A)$, называемое вероятностью события А.*
2. *Если события $A_1, A_2, \ldots$ попарно несовместны, то*
   $p(A_1 + A_2 + \ldots) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots$.
3. $P(\Omega) = 1$ *и* $P(\varnothing) = 0$.

Аксиома 2 – это фактически формула сложения для несовместных событий, которая обязательно имеет место в случае конечного ПЭИ. Утверждения б), г), д) и е), которые мы рассмотрели в § 3 для случая конечного ПЭИ, остаются справедливыми и для бесконечного случая.

*В случае ПЭИ с бесконечным числом исходов аналогом классической модели вероятности является так называемая **геометрическая вероятность**.*

*При геометрическом подходе к определению вероятности в качестве ПЭИ Ω рассматривается произвольное множество конечной лебеговой меры на прямой, плоскости или пространстве (в случае прямой мера – это длина, в случае плоскости мера – это площадь, в случае пространства мера – это объем). Элементарный исход – это произвольная точка из ПЭИ Ω. **Событиями** в этом случае называются **всевозможные измеримые подмножества** (для которых определена мера) ПЭИ Ω. Говорят, что **событие А произошло**, если в результате опыта точка (элементарный исход) попала в подмножество А. **Вероятность события А определяется формулой***

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \tag{1}$$

где $\mu(\Omega)$ обозначает лебегову меру множества Ω, $\mu(A)$ обозначает лебегову меру его подмножества А (лебегова мера (мера Лебега) обобщает понятие объема (или площади, или длины) на случай множеств, более общих, чем множества с гладкими границами). При таком определении событий и их вероятностей все аксиомы А.Н.Колмогорова вы-

полняются.

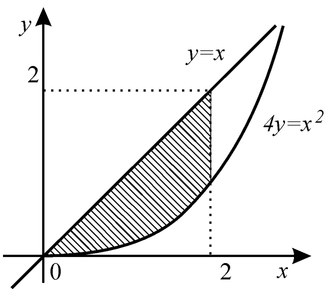
Геометрическую модель вероятностей ***можно применять только в том случае****, если по физическим или логическим соображениям мы не можем заранее отдать предпочтение ни одному из событий* $A \subset \Omega$, *имеющим одну и ту же меру* $\mu(A)$. *Например, пусть опыт состоит в том, что некто делает выстрел по мишени* Ω. *В случае неопытного стрелка для оценки вероятности попадания в какую-нибудь область мишени логично использовать геометрическую модель. Если же стрелок опытный, то естественно, что область, расположенная ближе к центру мишени более предпочтительна, чем область расположенная дальше от центра (так что использование геометрической вероятности здесь незаконно).*

Пример 1. В круг радиуса *R* наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника.

Решение. В данной задаче ПЭИ Ω – круг радиуса *R*, событие *A* – правильный треугольник, вписанный в круг. По теореме синусов его сторона $\frac{a}{\sin 60°} = 2R$, $a = \sqrt{3}R$, а площадь $\mu(A) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$. Тогда искомая вероятность равна по формуле (3):

$$P(A) = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}4135.$$

Пример 2. Из отрезка [0; 2] наудачу выбраны два числа *x* и *y*. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $x^2 \le 4y \le 4x$.



Решение. В данной задаче ПЭИ Ω – квадрат со стороной 2, событие *A* состоит из точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими условию $x^2 \le 4y \le 4x$ (см. рисунок). Интересующее нас событие происходит в том и только в том случае, когда выбранная точка $(x; y)$ окажется в закрашенной фигуре. Следовательно, искомая вероятность равна отношению площади закрашенной фигуры к площади квадрата: $P(A) = \frac{\int_0^2 (x - \frac{1}{4}x^2)dx}{4} = \frac{1}{3}$.

§ 4. Элементы комбинаторики в теории вероятностей.

При использовании классической модели вероятностей в экспериментах с конечным числом исходов ***просто необходимо*** *знать и уметь использовать изложенные ниже факты из комбинаторики – раздела математики, в котором изучаются различные комбинации элементов конечных множеств. Кроме того, эти знания просто полезны для студентов в плане общего развития.*

Правило произведения. *Пусть элемент* x_1 *строки* $(x_1, x_2, ..., x_k)$ *можно выбрать* n_1 *способами, элемент* x_2 *можно выбрать* n_2 *способами, элемент* x_3 *можно выбрать* n_3 *способами и т.д.,* x_k *можно выбрать* n_k *способами. Тогда строку* $(x_1, x_2, ..., x_k)$ *можно выбрать* $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ *способами.*

Полезно представлять себе правило произведения и в такой редакции. Если действие α_1 *можно выполнить* n_1 *способами, действие* α_2 *–* n_2 *способами, и т.д., действие* α_k *–* n_k*, то последовательность действий* $\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k$ *можно выполнить* $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ *способами.*

Пример 1. Сколькими существует четырехзначных чисел, все цифры которых различны?

Решение. Каждому четырехзначному числу можно поставить во взаимно однозначное соответствие строку (x_1, x_2, x_3, x_4), где x_1, x_2, x_3, x_4 – соответственно 1-я, 2-я, 3-я и 4-я цифры. Элемент x_1 этой строки можно выбрать 9-ю способами (любая из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Элемент x_2 можно выбрать также 9-ю способами (теперь можно использовать и цифру 0, но первую выбранную цифру повторить нельзя); элемент x_3 можно выбрать 8-ю способами (уже выбранные первые две цифры повторить нельзя); наконец, элемент x_4 можно выбрать 7-ю способами. Согласно правилу произведения искомое число способов выбора четырехзначного числа с различными цифрами равно: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.

Существуют две схемы выбора m элементов из заданных n элементов: ***без возвращения*** *(когда выбранный элемент не возвращается в исходное множество, а значит, в строке* $(x_1, x_2, ..., x_k)$ *все элементы различны, т.е.* $x_i \neq x_j$ *при* $i \neq j$*), и* ***с возвращением*** *(когда выбранный элемент возвращается в исходное множество и, естественно, в стро-*

ке $(x_1, x_2, ..., x_k)$ могут встречаться одинаковые элементы).

Упорядоченные выборки без повторений. *Пусть X множество, состоящее из n элементов. Тогда любая строка длиной k, $k \le n$, составленная из элементов множества X, которые выбираются без возвращения, называется выборкой без повторений из n элементов по k (штук). Слово «**упорядоченное**» указывает на то, что две выборки считаются различными, если они отличаются друг от друга либо составом элементов, либо **порядком их расположения в строке**. Упорядоченные выборки без повторений называются **размещениями**. Число размещений из n элементов по k обозначают символом A_n^k и вычисляют по формуле* $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$.

Перестановки без повторений. *Если $k = n$, то размещения называются **перестановками** из n элементов. Число всех перестановок из n элементов обозначается символом P_n и вычисляется по формуле* $P_n = A_n^n = n!$.

Пример 2. 10 спортсменов разыгрывают одну золотую, одну серебряную и одну бронзовую медали. Сколькими способами эти медали могут быть распределены между спортсменами?

Решение. Предположим, что спортсмены пронумерованы числами от 1 до 10 и x_1, x_2, x_3 – номера спортсменов, получивших золотую, серебряную и бронзовую медали. Каждому такому распределению медалей соответствует строка (x_1, x_2, x_3), состоящая из различных чисел (номеров спортсменов). Любая такая строка представляет собой упорядоченную (т.к. распределение мест важно!) выборку без возвращения (номера различны), т.е. размещение. Следовательно, число способов распределения медалей равно числу размещений из 10 элементов по 3, т.е. $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Пример 3. Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник произведений Д.Лондона, располагая их в произвольном порядке.

Решение. Число способов расставить 10 книг в произвольном порядке равно числу перестановок из 10 элементов, т.е. $P_{10} = 10! = 3628800$.

Неупорядоченные выборки без повторений. *Пусть множество X состоит из n элементов. Рассмотрим выборки без возвращения из n элементов этого множества по k (штук). Слово «**неупорядоченное**»* *указывает на то, что две выборки считаются различными, только если они отличаются друг от друга составом элементов* ***вне зависимости от порядка их расположения в строке****. Неупорядоченные выборки без повторений называются* ***сочетаниями****. Число сочетаний из n элементов по k обозначают символом C_n^k и вычисляют по формуле*

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{A_n^k}{k!}$. *По определению считается, что* $C_n^0 = 1$.

Отметим, что числа $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}$, C_n^n *являются коэффициентами в разложении бинома Ньютона:*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n a^0 b^n$$

и потому их называют ***биномиальными коэффициентами****.*

Для биномиальных коэффициентов справедливы следующие тождества:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$ *(правило симметрии);*
2. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$ *;*
3. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ *(правило Паскаля).*

Пример 4. Сколькими способами из 10 спортсменов можно отобрать команду из 3 человек? (сравните с примером 3)

Решение. Очевидно, команда из 3 человек является неупорядоченной выборкой без возвращения из 10 элементов по 3, т.е. сочетанием из 10 элементов по 3. Значит, искомое число способов равно $C_{10}^3 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$.

Упорядоченные выборки с повторениями. *Пусть X множество, состоящее из n элементов. Тогда любая строка длиной k (k – любое), составленная из элементов множества X, которые выбираются с возвращением, называется выборкой с повторениями из n элементов по k (штук). Слово «****упорядоченное»,*** *как и ранее****,*** *указывает на то, что две выборки считаются различными, если они отличаются друг от друга либо составом элементов, либо* ***порядком их расположения в строке****. Упорядоченные выборки с повторениями называются* ***размещениями с повторениями****. Число всех таких размещений обозначается символом* $\bar{A}_n^k$ *и вычисляется по формуле* $\bar{A}_n^k = n^k$.

Пример 5. Сколькими существует четырехзначных чисел, в десятичной записи которых нет нуля?

Решение. Четырехзначные числа указанного вида можно рассматривать как строки длиной 4, составленные из элементов множества X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, т.е. как размещения с повторениями из 9 элементов по 4. Следовательно, искомое число способов равно $9^4 = 6561$.

Сочетания с повторениями (неупорядоченные выборки с повторениями). *При такой схеме выбора число сочетаний обозначают символом $\bar{C}_n^k$ и вычисляют по формуле $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.*

Пример 6. Из цифр 2, 4 и 5 составить всевозможные сочетания по две цифры с возвращениями.

Решение. Поскольку выбранные цифры могут повторяться, то число таких сочетаний будет $\bar{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6.$ Действительно, поскольку в данном случае порядок следования элементов в комбинации не имеет значения, то возможны сочетания: {2;2}, {2;4}, {2;5}, {4;4}, {4;5}, {5;5}.

<u>Важное замечание</u>. *Сочетания с повторениями следует весьма осторожно использовать в классической модели вероятностей, т.к. нарушается принцип равновозможности элементарных исходов (см. **§**2).*

*Естественным обобщением неупорядоченных выборок без повторений являются **перестановки с повторениями.** Пусть среди n элементов множества X есть k **различных типов** элементов, причем, количество элементов 1-го типа равно n_1, 2-го типа – n_2, …, k-го типа – n_k (ясно, что $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$), при этом считается, что все элементы одного типа неразличимы. Тогда перестановки из элементов множества X называют перестановками с повторениями. Число всех таких перестановок обозначается символом $P_n(n_1,n_2,...,n_k)$ и вычисляется по формуле $P_n(n_1,n_2,...,n_k) = \dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...\cdot n_k!}$. При $k = 2$ получим $P_n(m,n-m) =$*

$$= \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = C_n^m .$$

Пример *7*. Сколькими способами можно расставить на прямой 3 красных шара, 2 желтых шара и один белый шар (т.е. сколько различных узоров можно получить, используя эти шары)?

Решение. Ясно, что мы имеем дело с перестановками с повторениями, причем $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$. Тогда их количество равно $P_6(3,2,1) = \dfrac{6!}{3!\cdot 2!1!} = 60.$

*Следующие задачи иллюстрируют **использование комбинаторики*** *при решении задач по теории вероятностей. Обращаем внимание, что решения изложены сверхподробно. Поэтому, осознав суть дела, все можно делать покороче.*

Пример 8. Наудачу выбирается трехзначное число, в десятичной записи которого нет нуля. Какова вероятность того, что: а) у выбранного числа ровно две одинаковые цифры, б) у выбранного числа хотя бы две одинаковые цифры?

Решение. Введем в рассмотрение следующие события: A={число имеет ровно две одинаковые цифры}, B={число имеет три одинаковые цифры}, C={все цифры различны}, D={число имеет хотя бы две одинаковые цифры}. Тогда (см. §1) $\bar{A} = B + C$, $D = \bar{C}$.

Теперь построим вероятностную модель. В качестве элементарных исходов будем рассматривать строки (x_1, x_2, x_3), элементы которой принадлежат множеству X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Эти строки являются размещениями с повторениями из 9-ти элементов по 3 (упорядоченная выборка с возвращением). Следовательно, число всех элементарных исходов опыта равно $N = 9^3 = 729$. Ясно, что все исходы равновозможны, и мы имеем право использовать классическую модель вероятности.

Легко понять, что событие B состоит из 9-ти элементарных исходов. Тогда $P(B) = \dfrac{9}{N} = \dfrac{1}{81}$. Событие C состоит только из тех исходов, в которых элементы x_1, x_2, x_3 различны, т.е. строки $(x_1, x_2, x_3) \in C$ являются размещениями из 9-ти элементов по 3 (упорядоченная выборка без возвращения). Тогда количество исходов в событии C равно $m(C) = A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7$, а вероятность $P(C) = \dfrac{m(C)}{N} = \dfrac{56}{81}$. События B и C – несовместны. Тогда по формуле сложения $P(\bar{A}) = P(B) + P(C) = \dfrac{19}{27}$, и $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \dfrac{8}{27}$, $P(D) = 1 - P(C) = \dfrac{25}{81}$.

Пример 9. Из букв слова «ротор», составленного с помощью разрезной азбуки, наудачу последовательно извлекаются 3 буквы и складываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «тор»?

Решение. Чтобы отличать одинаковые буквы друг от друга, снабдим их номерами: $р_1$, $р_2$, $о_1$, $о_2$. Обратим внимание, что при построении вероятностной модели мы считаем элементарные исходы размещениями, а процесс получения элементарного исхода – упорядоченной выборкой без возвращения. Так **следует поступать**, если имеем дело с выборками с повторениями, что иметь право использовать классическую модель вероятности. Тогда общее число элементарных исходов равно $A_5^3 = 60$. Слово «тор» в 4-х случаях: ($то_1р_1$, $то_1р_2$, $то_2р_1$, $то_2р_2$) – иногда число благоприятных исходов имеет смысл посчитать «на пальцах» без привлечения «высокой» теории. Хотя можно было рассуждать и так: первую букву слова «тор» можно выбрать одним способом, вторую – 2-мя, третью – тоже 2-мя. По правилу произведения всего способов 4. Искомая вероятность равна: $P = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$.

Пример 10. В партии из N деталей имеется $n < N$ бракованных. Какова вероятность события A = {среди наудачу отобранных k деталей бракованных будет ровно s, $s \le k$ }?

Решение. Занумеровав детали, видим, что элементарные исходы опыта – строки $(x_1, x_2, ..., x_k)$, состоящие из различных чисел (номеров деталей). Любая такая строка представляет собой неупорядоченную выборку (т.к. распределение номеров неважно, главное различие «брак»-«не брак») без возвращения (номера различны), т.е. сочетания из N элементов по k. Значит, количество всех элементарных исходов равно C_N^k. Для подсчета числа исходов $(x_1, x_2, ..., x_k) \in A$ процесс образования такого исхода разобъем на два действия: 1-е – выбор из n бракованных деталей s штук (это – C_n^s способов), 2-е – выбор из $N – n$ небракованных деталей $k – s$ деталей (это – C_{N-n}^{k-s} способов). По правилу произведения число исходов в событии A равно $C_n^s . C_{N-n}^{k-s}$. Следовательно, искомая вероятность равна $P(A) = \frac{C_n^s C_{N-n}^{k-s}}{C_N^k}$.

Пример 11. Найти вероятность того, что при случайном распределении n одинаковых шаров по n одинаковым ячейкам хотя бы одна ячейка окажется пустой.

Решение. Интересующее нас событие обозначим A. Противоположное ему событие $\bar{A}$ ={в каждой ячейке будет находиться ровно по одному шару}. Заметим, что если в формулировке события присутствуют слова «хотя бы один», то, как правило, **следует изучать противоположное событие**.

Строим ПЭИ. Каждую ячейку будем обозначать как 1, каждый шар – как 0. Тогда элементарным исходом опыта будет строка $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$, каждый элемент которой есть либо 1, либо 0. Поясним: если в первую ячейку попало 3 шара, то между первой и второй единицами будет располагаться три нуля, если во вторую ячейку попало 4 шара, то между второй и третьей единицами будет располагаться 4 нуля и т.д. Т.о. элементарный исход полностью определяется распределением n единиц по $2n$ местам (остальные места займут нули), т.е. строкой $(x_1, x_2, ..., x_n)$, где каждый элемент есть номер места на котором располагается единица. Строка $(x_1, x_2, ..., x_n)$ представляет собой сочетание из $2n$ элементов по n штук (неупорядоченная выборка без возвращения, т.к. все элементы строки различны, а порядок следования номеров неважен – единицы – неразличимы). Следовательно, число всех элементарных исходов рано C_{2n-1}^{n}. Событие $\bar{A}$ состоит из одного исхода – $(101010...10)$. Тогда $P(\bar{A}) = \dfrac{1}{C_{2n-1}^{n}}$ и $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \dfrac{1}{C_{2n-1}^{n}}$. Заметим, что $C_{2n-1}^{n} \to \infty$ при $n \to \infty$ (проверьте!). Следовательно, $P(A) \to 1$ при $n \to \infty$, т.е. при больших n почти наверняка можно ожидать, что хотя бы одна ячейка окажется пустой.

§ 5. Условная вероятность. Правила умножения вероятностей. Независимые события.

В дальнейшем предполагается, что мы уже определили ПЭИ и вероятностную модель на нем.

Изученное в §2 понятие вероятности события можно рассматривать как безусловную вероятность (т.е. мы определили вероятностную меру P(A) согласно аксиомам и можем безусловно находить вероятность события). На практике же часто возникают ситуации, когда требуется оценить не безусловную вероятность события, а вероятность его наступления при условии выполнения определенного комплекса условий, например, стало известно о наступлении другого события. В этом случае мы имеем дело с ***условной вероятностью****.*

Определение этого понятия следующее. Пусть $P(A) \neq 0$. ***Условная вероятность*** $P(B/A)$ *наступления события B при условии, что событие A уже наступило равна:*

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \tag{1}$$

Иногда условную вероятность обозначают как $P_A(B)$.

Пример 1*.* Известно, что вероятность того, что строительная конструкция выдерживает нагрузки в течение 10 лет, равна 0,75, а для 20 лет эта вероятность равна 0,6. Найти вероятность, что конструкция, проработавшая 10 лет, проработает еще 10 лет.

Решение. Обозначим *A* = {конструкция проработает 10 лет}, *B* = {конструкция проработает 20 лет}. Нас интересует $P(B/A)$. Т.к. $B \subset A$, то $AB = B$ (см. §1). Тогда $P(AB) = P(B) = 0{,}6$, и по формуле (1) $P(B/A) = \dfrac{0{,}6}{0{,}75} = 0{,}8$.

Из (1) следует ***формула для вычисления вероятности произведения двух событий****:*

$$P(AB) = P(B/A)P(A). \tag{2}$$

Для вычисления вероятности произведения n событий (n > *1*) *служит общая формула:*

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot ... \cdot P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}). \tag{3}$$

Замечание 1*. При решении многих задач нахождение условной вероятности* $P(B/A)$ *по формуле (1) бывает затруднительным. Поэтому* *рекомендуем использовать правило: вычисляя* $P(B/A)$*, предполагаем, что событие A произошло. Для иллюстрации сказанного разберем следующий пример.*

Пример 2. Бросается две игральных кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков рана 10, если известно, что на одной из костей выпала четверка.

Решение. Обозначим A={на одной из костей выпала четверка}, B={сумма выпавших очков рана 10}. Нас интересует $P(B/A)$. Если событие A произошло, то число всех возможных исходов равно 11 (проверьте!), а число исходов благоприятных для наступления события B равно 2 (это – (4,6) и (6,4)). Тогда $P(B/A)=\frac{2}{11}$.

Теперь посмотрим, как бы решалась задача с использованием формулы (1). При бросании 2-х костей всего элементарных исходов 36. Событие A состоит из 11-ти исходов. Тогда $P(A)=11/36$. Событие AB состоит из 2-х исходов. Тогда $P(AB)=1/18$, и $P(B/A)=\frac{1/18}{11/36}=\frac{2}{11}$.

Кстати, безусловная вероятность $P(B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

Далее мы разберем одно из ***ключевых понятий*** *в теории вероятностей –* ***независимые события****.*

События A и B называются ***независимыми****, если*

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{4}$$

Определение (4) иногда называют формулой умножения для независимых событий. Если события A и B независимы, то события $\bar{A}$ *и B, A и* $\bar{B}$, $\bar{A}$ *и* $\bar{B}$ *также являются независимыми.*

События $A_1, A_2, ..., A_n$ *называются* ***независимыми в совокупности****, если*

$$P(A_1\cdot A_2\cdot ...\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot ...\cdot P(A_n). \tag{5}$$

Замечание 2*. Вопрос о независимости событий решается, как правило, исходя из* ***принципа логической или физической независимости****. Если на основании этого принципа можем сделать вывод о независимости событий, то это позволяет нам использовать формулы (4) и (5). Например, если два стрелка делают выстрелы по одной мишени, то естественно считать события независимыми, если же они стреляют друг по другу, то это не так.*

Во многих задачах сложные события, вероятности которых надо *найти, удается выразить в виде комбинации других, более простых событий, вероятности которых либо заданы, либо непосредственно подсчитываются. В таком случае для решения задач можно использовать формулы, выражающие вероятности суммы и произведения событий через вероятности соответствующих слагаемых и сомножителей.*

Пример 3. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, а для второго – 0,6. Стрелки независимо друг от друга делают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один из стрелков?

Решение. Введем обозначения: событие A = {попадание первого стрелка}, событие B = {попадание второго стрелка}, событие C = {попадание хотя бы одного из стрелков}. Тогда, очевидно $C = A + B$, причем события A и B совместны. Следовательно, по формуле сложения для совместных событий (см. §1) $P(C) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Т.к. события A и B независимы, то по формуле (4) $P(AB) = P(A)P(B)$. Наконец, учитывая, что $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}6$, получаем: $P(C) = 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}92$.

Очень полезно при решении задач следующее утверждение: если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, то

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) &= 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n) = \\ &= 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n)) \end{aligned} \qquad (6)$$

Эта формула имеет название: ***вероятность появления хотя бы одного из событий, независимых в совокупности***. В частности ее применение в предыдущей задаче сразу дает результат:

$$P(C) = 1 - (1 - 0{,}8)(1 - 0{,}6) = 0{,}92.$$

Пример 4. Устройство содержит три сигнализатора, работающих независимо. При аварии первый из них срабатывает с вероятностью 0,7, второй – с вероятностью 0,8, третий – 0,9. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Решение. Рассмотрим события A_i = {сработает i-й сигнализатор}, (i = 1, 2, 3), A = {сработает только один сигнализатор}. Тогда мы имеем равенство $A = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3$. Так как слагаемые правой части этого равенства попарно несовместны, то по формуле сложения вероятностей имеем: $P(A) = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) + P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)$. Наконец, учитывая независимость событий A_1, A_2, A_3, по формуле (5) получаем:

$P(A)=0{,}7\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1+0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1=0{,}092$.

Следующий пример иллюстрирует возможности применения формулы (3).

Пример 5. В команде из 12 спортсменов 5 мастеров спорта. По жеребьевке из команды выбирают 3 спортсменов. Какова вероятность того, что все выбранные спортсмены являются мастерами спорта?

Решение. Рассмотрим 2 способа решения, из которых первый состоит в непосредственном подсчете искомой вероятности по классической схеме, а второй – в применении формулы (3).

Первый способ. Представим себе урну, в которой 5 красных и 7 белых шаров. Красные шары соответствуют мастерам спорта, а белые – остальным спортсменам. Из этой урны наудачу извлекаются 3 шара, и пусть событие A состоит в появлении 3 красных шаров. Тогда искомая вероятность равна: $P(A)=\dfrac{C_5^3}{C_{12}^3}=\dfrac{1}{22}$.

Второй способ. Из урны последовательно без возвращения извлекаются 3 шара. Рассмотрим события: A_1 = {первый шар красный}, A_2 = {второй красный}, A_3 = {третий красный} и A = {все 3 шара красные}. Тогда $A = A_1A_2A_3$ и по формуле (3) при $n = 3$ имеем (помним о замечании 1 !!!): $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)=\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{4}{11}\cdot\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{22}$.

Пример 6. Прибор состоит из n однотипных элементов, работающих независимо друг от друга. ***Надежность (вероятность безотказной работы)*** каждого элемента равна 0,8. Прибор работает, если работает хотя бы один из этих элементов. Какое минимальное значение может принимать n, чтобы надежность прибора была бы не менее 0,999?

Решение. Рассмотрим события A_i = {работает i-й элемент}, (i = 1, 2, …, n), A = {работает прибор}. Тогда мы имеем равенство: $A=A_1+A_2+...+A_n$. События A_i независимы и $P(A_i)=0{,}8$. Тогда по формуле (6) $P(A)=1-(0{,}2)^n$. Теперь, чтобы найти n, решаем неравенство $1-(0{,}2)^n\geq 0{,}999$, т.е. $(0{,}2)^n\leq 0{,}001$. Нетрудно проверить, что минимальное (натуральное) значение n, удовлетворяющее этому неравенству это $n=5$.

§ 6. Формула полной вероятности и формула Байеса.

В дальнейшем опять предполагается, что мы уже определили ПЭИ Ω *и вероятностную модель на нем.*

Говорят, что события $H_1, H_2, ..., H_n$ *образуют* ***полную группу несовместных событий****, если они попарно несовместны (т.е. никакие два из них не могут произойти одновременно) и* $H_1 + H_2 + ... + H_n = \Omega$ *(т.е. одно из них обязательно произойдет в результате опыта).*

Из аксиом вероятности следует, что события образуют полную группу несовместных событий тогда и только тогда, когда $P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1$. *Если события* $H_1, H_2, ..., H_n$ *образуют полную группу несовместных событий, то вероятность наступления любого события A можно найти по формуле:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i). \qquad (1)$$

Формула (1) носит название ***формулы полной вероятности (ФПВ)****. Она применяется, как правило, если не известна информация об условиях, предшествующих наступлению события A. В связи с этим события* $H_1, H_2, ..., H_n$ *называют* ***гипотезами*** *(или* ***полной группой гипотез****), а* $P(A/H_i)$ *– вероятностями наступления события A при условии выполнения гипотезы* H_i.

Пример 1. В первой урне 2 белых и 6 черных шаров, а во второй – 4 белых и 2 черных. Из первой урны наудачу взяли 2 шара и переложили во вторую, после чего из второй урны наудачу взяли один шар. Какова вероятность события *A* = {этот шар белого цвета}?

Решение. В данном случае нам не известна информация об условиях, предшествующих наступлению события *A*. В связи с этим введем в рассмотрение гипотезы: H_1 – из первой урны во вторую переложили 2 белых шара; H_2 – из первой во вторую переложили 2 разноцветных шара; H_3 – из первой во вторую переложили 2 черных шара.

Вероятности гипотез H_i и условные вероятности $P(A/H_i)$ вычисляем по классической схеме:

$$P(H_1) = \frac{C_2^2}{C_8^2} = \frac{1}{28}, P(H_2) = \frac{C_2^1 C_6^1}{C_8^2} = \frac{12}{28}, P(H_3) = \frac{C_6^2}{C_8^2} = \frac{15}{28};$$

$$P(A/H_1)=\frac{3}{4}, P(A/H_2)=\frac{5}{8}, P(A/H_3)=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $P(A)=\frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4}+\frac{12}{28}\cdot\frac{5}{8}+\frac{15}{28}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{16}.$

Если стало известно, что некоторое событие А произошло, то вероятность гипотезы H_j *из полной группы гипотез* $H_1, H_2, ..., H_n$ *можно пересчитать по* ***формуле Байеса****:*

$$P(H_j/A)=\frac{P(H_j)P(A/H_j)}{P(A)}, \qquad (2)$$

где $P(A)$ *вычисляется по ФПВ. В связи с этим вероятность* $P(H_j/A)$ *называют* ***апостериорной*** *вероятностью гипотезы (a posteriori – после опыта), а саму формулу* (2) *–* ***формулой апостериорной вероятности****. Вероятности же* $P(H_j)$ *называют априорными вероятностями гипотез (a priori – до опыта).*

Пример 2. 4 стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятности попадания для данных стрелков равны соответственно 0,4; 0,6; 0,7 и 0,8. После стрельбы в мишени обнаружены 3 пробоины. Найти вероятность того, что промахнулся четвертый стрелок

Решение. Рассмотрим следующие события: A = {в мишени три пробоины}, A_i = {i-й стрелок попал}, i = 1,2,3,4. Введем в рассмотрение гипотезы: H_1 – первые три стрелка попали, 4-й промахнулся, H_2 – попали 1-й, 2-й и 4-й стрелки, 3-й промахнулся, H_3 – попали 1-й, 3-й и 4-й стрелки, 2-й промахнулся, H_4 – попали 2-й, 3-й и 4-й стрелки, 1-й промахнулся, H_5 – все остальные варианты попаданий. Тогда $H_1 = A_1A_2A_3\bar{A}_4$, $H_2 = A_1A_2A_4\bar{A}_3$, $H_3 = A_1A_3A_4\bar{A}_2$, $H_4 = A_2A_3A_4\bar{A}_1$,

$$P(H_1)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(\bar{A}_4)=0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}0336,$$

$$P(H_2)=P(A_1)P(A_2)P(A_4)P(\bar{A}_3)=0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3=0{,}0504,$$

$$P(H_3)=P(A_1)P(A_3)P(A_4)P(\bar{A}_2)=0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}0896,$$

$$P(H_4)=P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(\bar{A}_1)=0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}2016.$$

Очевидно, что $P(A/H_i)=1$, i = 1,2,3,4, и $P(A/H_5)=0$. По формуле (1) $P(A)=0{,}0336+0{,}0504+0{,}0896+0{,}2016=0{,}3752$. Искомую вероятность находим по формуле (2) $P(H_1/A)=\frac{0,0336}{0,3752}=0,08955$.

Для эффективного использования формул (1)-(2) требуется хорошее владение материалом, изученным в предыдущих параграфах. Это демонстрирует следующий пример.

Пример 3. За некоторый промежуток времени амеба может погибнуть с вероятностью 0,2, выжить с вероятностью 0,3 и разделиться на 2 с вероятностью 0,5. В следующий такой же промежуток времени с каждой амебой независимо от ее «происхождения» происходит то же самое. Сколько амеб и с какими вероятностями может существовать к концу второго промежутка времени?

Решение. Очевидно, к концу 2го промежутка времени амеб будет от 0 (первая амеба сразу «умерла») до 4 (дважды разделилась). Выделим полную группу событий: H_1 - первая амеба умерла, $P(H_1)=0,2$, H_2 - первая амеба выжила, $P(H_2)=0,3$, и H_3 - первая амеба разделилась, $P(H_3)=0,5$. Пусть n – число амеб к концу 2го промежутка времени, и A_n - соответствующие события, $n=\overline{1,4}$.

Тогда $P(A_0/H_1)=1$, $P(A_0/H_2)=0,2$ (выжившая на первом этапе амеба далее погибла). $P(A_0/H_3)=0,2\cdot 0,2=0,04$ (обе амебы погибли), отсюда по ФПВ $P(A_0)=0,28$.

Рассмотрим еще подробно случай n = 2. Очевидно, $P(A_2/H_1)=0$, $P(A_2/H_2)=0,5$ (выжившая амёба просто обязана разделиться на две), $P(A_2/H_3)=0,2\cdot 0,5+0,5\cdot 0,2+0,3\cdot 0,3=0,29$ (первая, из разделившихся на первом этапе, погибла, вторая – разделилась, либо обратная ситуация, либо обе выжили), отсюда по ФПВ $P(A_2)=0,295$.

Аналогично, $P(A_1)=0,15$, $P(A_3)=0,15$, $P(A_4)=0,125$ (проведите выкладки самостоятельно!).

§ 7. Схема и формула Бернулли. Производящая функция

В вероятностной схеме Бернулли рассматривается последовательность n ***независимых опытов*** $U_1, U_2, ..., U_n$, *удовлетворяющих двум условиям:*

а) каждый опыт может завершиться только ***одним из 2-х исходов*** *– наступление некоторого события А (такой исход принято называть «успехом») или ненаступление этого события, т.е. наступление события* $\overline{A}$ *(такой исход принято называть «неудачей»).*

Б) вероятность наступление события А в каждом опыте одна и та же $p = P(A)$, ***она не зависит*** *от результатов предыдущих опытов. Величину р называют вероятностью «успеха», а величину* $q = 1 - p$ *- вероятностью «неудачи».*

Пример 1. В урне имеется 10 белых и 10 черных шаров. Случайным образом из урны достают 3 шара. Можно ли отнести этот эксперимент к схеме Бернулли, если: а) шары достаются без возвращения, б) шары достаются с возвращением?

Решение. Итак, производится три опыта, каждый из которых может завершиться либо появлением белого шара («успех»), либо черного шара («неудача»), т.е. первое требование выполнено. Но в ситуации, когда шары не возвращаются, вероятность «успеха» в 1-ом опыте равна 0,5 (используем классическую модель), а во 2-ом опыте вероятность «успеха» зависит от результата 1-го опыта: если первый опыт завершился «успехом», то вероятность «успеха» во 2-ом опыте равна $9/19$, а если «неудачей», то вероятность «успеха» во 2-ом опыте равна $10/19$. Это говорит о том, что второе требование в данном случае не выполнена, и эксперимент не может рассматриваться как схема Бернулли. Если же шары достаются с возвращением, то вероятность «успеха» во всех 3-х опытах равна 0,5, и мы имеем дело со схемой Бернулли.

Итак, схема Бернулли определяется понятиями «успех»-«неудача» и двумя числовыми параметрами – число независимых опытов n и вероятностью «успеха» p.

В рамках схемы Бернулли рассматриваются ***прямые и обратные*** *задачи. К прямым задачам относятся следующие задачи.* ***Заданы значения*** *n и p. Требуется найти:*

1) вероятность $P_n(k),\ k = 0,1,2,...,n$, *того, что ровно k опытов из n проведенных закончатся «успехом».*

2) вероятность $P_n(k_1, k_2)$, $0 \le k_1 \le k_2 \le n$, *того, что при проведении n опытов число «успехов» будет заключено между числами* k_1 *и* k_2.

3) наиболее вероятное число «успехов» m (его еще называют наиве-

роятнейшим числом «успехов»).

Первая задача решается с помощью ***формулы Бернулли****:*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \,. \tag{1}$$

Для решения 2-й задачи используем формулу Бернулли и правило сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_n(k_1, k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} P_n(i) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i} \,. \tag{2}$$

Для нахождения наиболее вероятного числа успехов m используется неравенство

$$np - q \le m \le np + p. \tag{3}$$

Пример 2. Некоторая конструкция состоит из 6-ти независимо работающих однотипных узлов. Надежность (вероятность безотказной работы) каждого из узлов равна 0,8. Для устойчивой работы конструкции необходимо, чтобы безотказно работали как минимум два узла. Найти надежность данной конструкции.

Решение. В данном случае мы имеем дело со схемой Бернулли, в которой «успех» – надежная работа одного узла, вероятность «успеха» $p = 0{,}8$ (соответственно, вероятность «неудачи» $q = 0{,}2$), число опытов $n = 6$. Рассмотрим событие $B = \{$конструкция надежна$\}$. Тогда $P(B) = P_6(2;6)$. Но сразу формулой (2) мы пользоваться не будем, это – очень нерационально. Найдем вероятность противоположного события $P(\bar{B}) = P_6(0;1) = P_6(0) + P_6(1) = 0{,}2^6 + 6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^5 = 0{,}2^5(0{,}2 + 4{,}8) = 0{,}0016$. Тогда надежность конструкции равна $P(B) = 1 - 0{,}0016 = 0{,}9984$.

Пример 3. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна 0,8 и не зависит от номера выстрела. Найти наиболее вероятное число попаданий в мишень при 5 выстрелах и соответствующую этому числу вероятность.

Решение. В данном случае мы имеем дело со схемой Бернулли, в которой «успех» – попадание в мишень, вероятность «успеха» $p = 0{,}8$ (соответственно, вероятность «неудачи» $q = 0{,}2$), число опытов $n = 5$. Далее используем неравенство (3): $5 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \le m \le 5 \cdot 0{,}8 + 0{,}8$. Т.к. m – целое число, то $m = 4$. Нужную вероятность $P_5(4)$ находим по формуле Бернулли: $P_5(4) = C_5^4 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096$.

К обратным задачам схемы Бернулли можно отнести следующие задачи. ***Задано*** *одно из значений n или p, и одна из вероятностей* $P_n(k)$

или $P_n(k_1,k_2)$. *Требуется найти недостающее из значений n или p.*

Пример 4. Какое минимальное число независимых опытов достаточно провести, чтобы с вероятностью, не меньшей, чем 0,99, можно было бы ожидать наступления «успеха» хотя бы один раз, если вероятность «успеха» в одном опыте равна 0,6?

Решение. В данном случае мы имеем дело со схемой Бернулли с вероятностью «успеха» $p = 0{,}6$ (и, значит, вероятность «неудачи» $q = 0{,}4$). Требуется найти число опытов. По условию $P_n(1;n) \geq 0{,}99$. Т.к. $1 - P_n(1;n) = P_n(0) = q^n = 0{,}4^n$, то для нахождения n имеем неравенство $0{,}4^n \leq 0{,}01$, откуда $n \geq \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}4} = 5{,}026$. Значит, минимальное $n = 6$.

Пример 5. Некоторая конструкция состоит из 5-ми независимо работающих однотипных узлов. Надежность (вероятность безотказной работы) каждого из узлов равна *p*. Для устойчивой работы конструкции необходимо, чтобы безотказно работали как минимум четыре узла. При каком значении *p* надежность данной конструкции будет не менее 0,96.

Решение. В данном случае мы имеем дело со схемой Бернулли, в которой «успех» – надежная работа одного узла, число опытов $n = 5$. Рассмотрим событие B = {конструкция надежна}. Тогда $P(B) = P_6(4;5) = 5p^4q + p^5 \geq 0{,}96$, $p^4(5q + p) \geq 0{,}96$. Проверкой убеждаемся, что подходит значение $p = 0{,}94$, а значение $p = 0{,}93$ не подходит.

Обобщение схемы Бернулли достигается при помощи понятия ***производящей функции****. Пусть проводится n независимых опытов, в каждом из которых* ***одно и то же*** *событие A может произойти с разными вероятностями p_1, ..., p_n (вероятности «успеха») или не произойти с вероятностями $q_1 = 1 - p_1$, ..., $q_n = 1 - p_n$ (вероятности «неуспеха»). Как и раньше обозначим через $P_n(k)$ вероятность появления события A в n испытаниях k раз.* ***Производящей функцией для вероятностей*** *$P_n(k)$ называют функцию*

$$G_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(p_k x + 1 - p_k) = \prod_{k=1}^{n}(p_k x + q_k), \tag{4}$$

при этом $P_n(k)$ является коэффициентом при x^k в разложении производящей функции по степеням переменной x (это конечное разложение!). Формула Бернулли при этом получится, если $p_1 = p_2 = ... = p_n$. Очевидно, что должно выполняться условия «нормировки» $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$.

Пример 7. Вычислительное устройство состоит из трех независимо работающих элементов, вероятности безотказной работы которых в течение суток соответственно равны $p_1=0{,}9$, $p_2=0{,}8$ и $p_3=0{,}6$. Найти вероятности того, что в течение суток будут безотказно работать: *а)* все элементы ($P_3(3)$); *б)* два элемента ($P_3(2)=$); *в)* один элемент ($P_3(1)$); *г)* ни один из элементов ($P_3(0)$).

Решение. Соответствующие вероятности отказов в работе равны $q_1=0{,}1$, $q_2=0{,}2$, $q_3=0{,}4$. Составим производящую функцию и преобразуем ее: $G_3(x)=(0{,}9x+0{,}1)(0{,}8x+0{,}2)(0{,}6x+0{,}4)=0{,}432x^3+0{,}444x^2+0{,}116x+0{,}008$. Тогда $P_3(3)=0{,}432$, $P_3(2)=0{,}444$, $P_3(1)=0{,}116$, $P_3(0)=0{,}008$. Контроль вычислений; $0{,}432+0{,}444+0{,}116+0{,}008=1$.

Еще одно обобщение схемы Бернулли связано с понятием перестановки с повторениями (см. §4). Пусть производится n независимых опытов, каждый из которых имеет m ($m\geq 2$) *попарно несовместных и единственно возможных исходов* $A_1, A_2, ..., A_m$ *с вероятностями появления этих исходов* $p_1=P(A_1)$, ..., $p_m=P(A_m)$, *одинаковыми во всех опытах (ясно, что должно выполняться равенство* $p_1+p_2+...+p_m=1$*). Для неотрицательных чисел* $k_1, k_2, ..., k_m$, *удовлетворяющих условию* $k_1+k_2+...+k_m=n$, *обозначим через* $P_n(k_1, k_2, ..., k_m)$ *вероятность того, что в n опытах исход* A_i *наступит* k_i *раз,* $i=\overline{1,m}$. *Тогда справедлива формула* ***(полиномиальная схема)***

$$P_n(k_1, k_2, ..., k_m)=\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot ...\cdot k_m!}p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot ...\cdot p_m^{k_m} \qquad (5)$$

Формула (4) *является обобщением формулы Бернулли на случай, когда каждый из независимых опытов* $U_1, U_2, ..., U_n$ *имеет m возможных исходов* ($m\geq 2$). *Вероятности* $P_n(k_1, k_2, ..., k_m)$ *называют* ***полиномиальными***.

Пример 8. Мишень состоит из 3 попарно непересекающихся зон. При одном выстреле по мишени вероятность попадания в первую зону для данного стрелка равна 0,5. Для второй и третьей зон эта вероятность равна соответственно 0,3 и 0,2. Стрелок произвел 6 выстрелов по мишени. Найдите вероятность того, что при этом окажется 3 попадания в первую зону, 2 попадания во вторую и одно попадание в третью зону.

Решение состоит в непосредственном применении формулы (4):
$P_6(3,2,1)=\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}0{,}5^3\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}2^1=0{,}135$.

§ 8. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Функции Лапласа.

Рассматривается схема Бернулли, состоящая из n независимых опытов, с вероятностью «успеха» p (и, соответственно, вероятностью «неудачи» q). Решение задач, связанных со схемой Бернулли, с использованием формул (1) *и* (2) *(см.* § 6) *при больших значениях n является делом весьма затруднительным, т.к. приходится считать весьма громоздкие выражения* $C_n^k p^k q^{n-k}$. *Поэтому необходимо знать и уметь использовать так называемые предельные теоремы в схеме Бернулли, позволяющие находить приближенные значения соответствующих вероятностей. Формулировки приведены в виде, удобном для решения задач.*

Локальная предельная теорема. *При больших n имеет место приближенное равенство*

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \tag{1}$$

где $x = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. *Функция* $\varphi(x)$ *называется* ***малой функцией Лапласа***. *Отметим некоторые ее очевидные свойства: функция четная, монотонно убывает до* 0 *на промежутке* $[0;+\infty)$, $\varphi(x) < 0{,}001$ *при* $x \geq 3{,}5$. *Для значений этой функции составлены таблицы значений, но эти значения можно найти, используя калькулятор (и не забывать при этом про указанные свойства).*

Интегральная предельная теорема *(теорема Муавра-Лапласа). При больших n имеет место приближенное равенство*

$$P_n(k_1;k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{2}$$

где $x_i = \dfrac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$, $i = 1{,}2$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. *Функция* $\Phi(x)$ *называется* ***большой функцией Лапласа.***

Известно, что данный интеграл не вычисляется в явном виде. Поэтому, для значений большой функции Лапласа составлены таблицы (см. приложение в конце задачника). При этом надо знать некоторые ее свойства: функция монотонно возрастает от 0 *до* 1 *на промежутке* $(-\infty;+\infty)$, $\Phi(0) = 0{,}5$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, $\Phi(x) \approx 1$ *и* $\Phi(-x) \approx 0$ *при* $x \geq 3{,}5$, *причем погрешность составляет менее* $0{,}0002$. *В связи с указанными свойствами таблицы значений функции* $\Phi(x)$ *обычно составлены только для* $x \in [0;3{,}5]$.

Часто вместо большой функции Лапласа используют так называе-

мую ***модифицированную функцию Лапласа*** $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, *которая связана с большой функцией Лапласа равенством* $\Phi(x)=\Phi_0(x)+0{,}5$ *(что говорит о том, что в формуле* (2) *можно использовать функцию* $\Phi_0(x)$*). Функция* $\Phi_0(x)$ *обладает следующими свойствами: функция* ***нечетная*** *(т.е.* $\Phi_0(-x)=-\Phi_0(x)$*), функция монотонно возрастает от* $-0{,}5$ *до* $0{,}5$ *на промежутке* $(-\infty;+\infty)$, $\Phi_0(0)=0$, $\Phi_0(x)\approx 0{,}5$ *при* $x\geq 3{,}5$, *причем погрешность составляет менее* $0{,}0002$.

***Замечание**. Формулы* (1) *и* (2) *дает приемлемые результаты при* $npq>10$, *в ином случаем можно получить большую погрешность.*

Пример 1. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найдите вероятность того, что из 100 покупателей обувь этого размера понадобится: а) 40 покупателям, б) не более 24 покупателям.

Решение. В данном случае мы имеем дело со схемой Бернулли, в которой «успех» – покупка обуви 41-го размера, вероятность «успеха» $p=0{,}2$ (соответственно, вероятность «неудачи» $q=0{,}8$). Находим $npq=16>10$, что дает нам основание использовать теоремы (1) и (2). Для ответа на 1-й вопрос используем формулу (1): $x=\frac{40-20}{4}=5$, $P_{100}(40)\approx\frac{1}{4}\varphi(5)\approx 0{,}00025\approx 0$, т.е. покупка обуви 41-го размера 40 покупателями – событие практически невероятное. Для ответа на 2-й вопрос используем формулу (2): $x_1=\frac{0-20}{4}=-5$, $x_2=\frac{24-20}{4}=1$, $P_{100}(0;24)\approx\Phi(1)-\Phi(-5)=0{,}8413-0=0{,}8413$. Значение $\Phi(1)$ найдено по таблице, $\Phi(-5)$ – согласно свойствам большой функции Лапласа. Кстати, такого рода задачи можно рассматривать как простейшие задачи прогнозирования необходимого количества складских запасов.

***Пример 2**.* (составление элементарного бизнес-плана страховой компании). Согласно статистическим данным, вероятность того, что автомобиль попадет в аварию в течение года, равна 0,006. Некоторая страховая компания имеет 10000 клиентов, которые ежегодно делают взнос s у.е.. В случае аварии кампания выплачивает клиенту 3000 у.е.. Какое минимальное значение взноса s следует установить компании, чтобы с вероятностью не менее 0,99 гарантировать себе доход не менее 250000 у.е.?

Решение. В данном случае мы имеем дело с обратной задачей в схеме

Бернулли, в которой «успех» – попадание автомобиля в аварию, вероятность «успеха» $p = 0{,}006$ (соответственно, вероятность «неудачи» $q = 0{,}994$), число опытов $n = 10000$. Находим $npq = 59{,}64 > 10$, что дает нам основание использовать теорему (2). Обозначим через m количество аварий клиентов за год (число «успехов»). Рассмотрим событие B = $\{10000s - 3000m \geq 250000\}$, состоящее в том, что компания за год получит доход не менее 250000 у.е. По условию $P(B) \geq 0{,}99$. Преобразуем:

$$P(B) = P(10000s - 3000m \geq 250000) = P(3m \leq 10s - 250) = P\left(m \leq \frac{10s - 250}{3}\right) =$$

$= P_{10000}\left(0; \frac{10s - 250}{3}\right)$. Применяем формулу (2): $x_1 = \frac{0 - 60}{\sqrt{59{,}64}} = -7{,}77$,

$x_2 = \frac{\frac{10s - 250}{3} - 60}{\sqrt{59{,}64}} = 0{,}432s - 18{,}56$, $\quad P(B) \approx \Phi(x_2) - \Phi(-7{,}77) = \Phi(x_2)$.

Значит, $\Phi(x_2) \geq 0{,}99$. С помощью таблицы значений большой функции Лапласа находим $x_2 \geq 2{,}33$. Тогда $0{,}432s - 18{,}56 \geq 2{,}33$, $s \geq \frac{20{,}89}{0{,}432} = 48{,}36$, т.е. $s = 48{,}36$.

Теорема Пуассона *(вероятность появления редких событий). При больших n и малых p (или малых q) справедлива формула*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np. \tag{3}$$

Замечание*. Формула (3), как правило, применяется если* $n > 100$ *и* $npq \leq 10$*, слова редкие события означают, что либо «успех», либо «неудача» происходят редко, т.е. либо p, либо q мало.*

Пример 3. МиниАТС обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию равна 0,01. Найдите вероятности следующих событий: а) в течение часа 3 абонента позвонят на станцию; в) в течение часа не менее 2 абонентов позвонят на станцию.

Решение. В данной задаче мы имеем дело со схемой Бернулли, в которой «успех» – звонок абонента на АТС, вероятность «успеха» $p = 0{,}01$ (и, значит, вероятность «неудачи» $q = 0{,}99$), число опытов $n = 400$. Т.к. $npq = 3{,}96 < 10$, то формулами (1) и (2) пользоваться не можем. Будем использовать теорему Пуассона. Тогда: $\lambda = 4$,

$P_{400}(3) \approx \frac{4^3 \cdot e^{-4}}{3!} = 0{,}1954$, $P_{400}(2;400) = 1 - P_{400}(0;1) = 1 - P_{400}(0) - P_{400}(1) \approx$
$\approx 1 - 0{,}0183 - 0{,}0733 = 0{,}9084$.

§ 9. Случайные величины (с.в.). Функция распределения с.в. Дискретные с.в.

Пусть мы определили ПЭИ Ω *и вероятностную модель на нем, т.е. указали множество S событий, удовлетворяющие аксиомам 1-2* (*см.* § 1) *и так называемую вероятностную меру P случайных событий, для которой выполнены аксиомы 1-3* (*см.* § 2).

Случайной величиной (общепринятое сокращение – с.в.) называется любая ***измеримая*** *функция со значениями на числовой прямой* $\mathbb{R}$, *аргументами которой служат элементарные исходы* $\omega \in \Omega$. *Обозначают с.в. либо малыми греческими буквами* ξ, η, *либо большими латинскими* X, Y, Z. *Итак, прежде всего с.в.* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$. *Слово «измеримая» означает, что для любого множества* $M \subseteq \mathbb{R}$, *которое является либо интервалом, либо полуинтервалом, либо отрезком, множество* $A_M = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in M\}$ *является событием, т.е.* $A_M \in S$.

Замечание. *Множество* A_M *представляет собой совокупность всех тех элементарных исходов, для которых значение с.в.* $\xi(\omega)$ *попадет во множество M.*

Из определения следует, что если задана с.в. ξ, *то любому множеству* $M \subseteq \mathbb{R}$ *указанного выше типа, можно поставить в соответствие вероятность* $P(\xi \in M) = P(A_M)$ *того, что в результате эксперимента значение с.в. попадет во множество M. Например,* $P(\xi < a)$ *есть вероятность того, что с.в. примет значение меньшее, чем а. При этом говорят, что с.в.* ξ ***порождает некоторое распределение вероятности на числовой прямой***. *Теория вероятностей изучает с.в. с точки зрения того, какое распределение вероятностей они порождают на числовой прямой, вне зависимости от ПЭИ* Ω. *Поэтому, вместо* $\xi(\omega)$ *обычно пишут просто* ξ *(без указания аргумента).*

Распределение вероятностей, которое порождает с.в. ξ *на числовой прямой можно описать с помощью* ***функции распределения***. *Она определяется по формуле*

$$F_\xi(x) = P(\xi < x), \; x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Функция распределения любой с.в. ξ *обладает следующими свойствами:*

1) $0 \le F_\xi(x) \le 1$ *при любом* $x \in \mathbb{R}$.

2) функция $F_\xi(x)$ *является монотонно неубывающей.*

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x)=0$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x)=1$.

4) функция непрерывна слева, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} F_\xi(x)=F_\xi(x_0)$, $\forall x_0\in\mathbb{R}$.

Обратно, только функции, удовлетворяющие свойствам 1-4, ***могут быть функциями распределения какой-либо с.в.*** ξ. *Из определения* (1) *и указанных свойств, в частности, следуют формулы:*

$$P(\xi\ge a)=1-F_\xi(a),\ P(\xi\le a)=\lim_{x\to a+0} F_\xi(x),\ P(\xi=a)=\lim_{x\to a+0} F_\xi(x)-F_\xi(a). \quad (2)$$

Эти равенства и пример 1 показывают, что если мы знаем функцию распределения с.в., то мы знаем распределение вероятности, которое она порождает на числовой прямой. Т.е., с точки зрения теории вероятностей, чтобы задать некоторую с.в. ξ, *надо задать ее функцию распределения.*

Две с.в. ξ *и* η *называются* ***равными (одинаково распределенными)****, если равны их функции распределения.*

Пример 1. При каких значениях параметров a и b указанные функции являются функциями распределения какой-либо с.в.:

а) $F(x)=a+b\operatorname{arcctg}x$, *б)* $F(x)=a+b\sin x$?

Решение. *А)* Потребуем выполнения свойства 3: $0=\lim\limits_{x\to-\infty}F_\xi(x)=$

$$=\lim_{x\to-\infty}(a+b\operatorname{arcctg}x)=a-b\frac{\pi}{2},\qquad 1=\lim_{x\to\infty}F_\xi(x)=\lim_{x\to\infty}(a+b\operatorname{arcctg}x)=a+b\frac{\pi}{2}.$$

Складывая два равенства, получаем: $2a=1$, $a=0{,}5$. Вычитая из 2-го равенства 1-е, получаем: $b\pi=1$, $b=1/\pi$. Функция $F(x)=0{,}5+\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}x$, очевидно, удовлетворяет свойствам 1-4 функции распределения (что следует из свойств функции $y=\operatorname{arcctg}x$).

Б) в этом случае нельзя подобрать параметры a и b нужным образом, т.к., если $b\ne 0$, то функция является периодической (нарушается свойство 2), а если же $b=0$, то не выполняется свойство 3.

Множество элементов называется ***счетным****, если можно установить взаимно однозначное соответствие между его элементами и натуральными числами, т.е. их можно занумеровать.*

С.в. ξ *называется* ***дискретной*** (далее – *ДСВ*)*, если множество ее возможных значений является либо конечным, либо счетным. Если множество возможных значений с.в. является конечным, то она назы-*

*вается **простой**. Чтобы задать ДСВ* ξ*, надо указать ее **закон распределения** – таблицу значений, в верхней части которой указываются возможные значения с.в., а в нижней части – вероятности того, что с.в. примет эти значения:*

ξ	x_1	x_2	…	x_k	…
p	p_1	p_2	…	p_k	…

Здесь $p_i = P(\xi = x_i)$*, причем* $p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots = 1$*. Значения* x_i *следует располагать **в порядке возрастания** (если это возможно).*

Если простая с.в. задана указанной выше таблицей, x_1 *– ее минимальное значение,* x_k *– ее максимальное значение, то ее функцию распределения (в соответствии с определением* (1)*) можно найти по формуле:*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ \sum\limits_{i: x_i < x} p_i, & x \in (x_1; x_k] \\ 1, & x > x_k \end{cases}, \tag{3}$$

где суммирование ведется по тем индексам i, для которых $x_i < x$*. Функция, определенная равенством* (3)*, обладает рядом свойств, которые полезно использовать при решении задач:*

а) функция – кусочно-постоянна, т.е. ее значения не меняются на каждом полуинтервале $(x_i; x_{i+1}]$*,*

б) функция – кусочно-непрерывна (непрерывна слева), причем точками разрыва служат только точки $x_1, \ldots, x_k$*,*

с) в каждой такой точке x_i *она испытывает скачек на величину* p_i*.*

Пример 2. По мишени производится 3 независимых выстрела с вероятностью попадания при каждом выстреле *p* = 0,8. Требуется: а) найти функцию распределения с.в. ξ, равной числу попаданий в мишень; б) найти вероятности событий: $1 \le \xi \le 2$; $\xi > 2$.

Решение. Возможные значения с.в. ξ в порядке возрастания: 0, 1, 2, 3. Значит, она является дискретной (и даже простой). Находим ее закон распределения. Соответствующие вероятности вычисляем по формуле Бернулли:

$p_0 = P(\xi = 0) = C_3^0 0{,}8^0 0{,}2^3 = 0{,}008$, $p_1 = P(\xi = 1) = C_3^1 0{,}8^1 0{,}2^2 = 0{,}096$,

$p_2 = P(\xi = 2) = C_3^2 0{,}8^2 0{,}2^1 = 0{,}384$, $p_3 = P(\xi = 3) = C_3^3 0{,}8^3 0{,}2^0 = 0{,}512$.

Для контроля замечаем, что $p_0+p_1+p_2+p_3=1$. Тогда закон распределения

ξ	0	1	2	3
p	0,008	0,096	0,384	0,512

Функцию распределения находим по формуле (3):

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ 0,008, x\in(0;1]\\ 0,104, x\in(1;2]\\ 0,488, x\in(2;3]\\ 1,\quad x>3\end{cases}.$$

Далее, $P(1\le\xi\le 2)=p_1+p_2=0,48$, $P(\xi>2)=p_3=0,512$.

Пример 3. Функция распределения простой с.в. ξ имеет вид: $F_\xi(x)=\begin{cases}0, x\le 1\\ 1/6, x\in(1;3]\\ 0,5, x\in(3;4]\\ 1,\quad x>4\end{cases}$. Найти: *а)* ее закон распределения, *б)* $P(\xi>2)$.

Решение. Согласно свойствам функции распределения простой с.в. расположим возможные значения заданной с.в. ξ в порядке возрастания: 1, 3, 4. Далее: $p_1=P(\xi=1)=1/6$, $p_3=P(\xi=3)=0,5-1/6=1/3$, $p_4=P(\xi=4)=1-0,5=0,5$. Тогда закон распределения

ξ	1	3	4
p	1/6	1/3	0,5

Далее, $P(\xi>2)=p_3+p_4=5/6$.

§ 10. Непрерывные с.в. Плотность вероятности.

С.в. ξ ***с функцией распределения*** $F_\xi(x)$ *называется* ***непрерывной (абсолютно непрерывной)****, если существует такая неотрицательная интегрируемая на числовой прямой функция* $p_\xi(x)$*, что для любого* $x \in \mathbb{R}$ *выполняется равенство*

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt \qquad (1)$$

Такая функция $p_\xi(x)$ *называется* ***плотностью распределения*** *с.в.* ξ*. Из этого определения следует, что функция распределения* $F_\xi(x)$ *непрерывной с.в. и кроме общих свойств 1-4 (см. §8) обладает* ***дополнительными свойствами****:*

а) эта функция непрерывна для любого $x \in \mathbb{R}$*,*

б) $P(a \le \xi < b) = P(a < \xi \le b) = P(a \le \xi \le b) = P(a < \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$,

в) $F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b p_\xi(x)dx$.

Отсюда, в частности следует, $P(\xi = x) = 0$ *для любого* $x \in \mathbb{R}$*, а множество ее возможных значений может представлять собой либо отрезок, либо полуинтервал, либо интервал (в частности, это может быть вся числовая прямая), либо объединение этих множеств.*

Далее, из свойств определенного интеграла и формулы (1) *следует, что при изменении плотности распределения* $p_\xi(x)$ ***в конечном или счетном числе точек*** *функция распределения* $F_\xi(x)$ ***не изменяется****!*

Резюмируем: плотность распределения $p_\xi(x)$ *любой непрерывной с.в.* ξ *обладает следующими свойствами:*

а) эта функция неотрицательна и интегрируема на всей числовой прямой,

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1$, (2)

в) в точках непрерывности функции $p_\xi(x)$ *имеет место равенство*

$$p_\xi(x) = \frac{dF_\xi}{dx} . \qquad (3)$$

Обратно, любая функция $p(x)$*, удовлетворяющая свойствам а) и б), служит плотностью некоторой непрерывной с.в.* ξ*, функция распределения которой определяется равенством* (1)*. Равенства* (2) *и* (3) *показывают, что для дискретной с.в. плотность распределения не определена, а ее дискретным аналогом является таблица значений дискретной с.в.!*

Замечание 1*. С учетом равенств* (1) *и* (3)*, плотность распределения называют* ***дифференциальной функцией распределения (плотностью вероятности)****, а саму функцию распределения –* ***интегральной функцией распределения****.*

Замечание 2*. Чтобы полностью определить непрерывную с.в.,* ***надо задать ее плотность распределения****. Две непрерывные с.в.* ξ *и* η *являются* ***равными (одинаково распределенными)****, если равны их плотности распределения (за исключением, может быть, конечного или счетного числа точек).*

Замечание 3*. Свойствам плотности распределения и функции распределения с геометрической точки зрения можно дать следующую интерпретацию: площадь фигуры, ограниченной графиком плотности и осью Ох равна* 1*, вероятность* $P(a<\xi<b)$ *равна площади фигуры, ограниченной графиком плотности, осью Ох и прямыми* $x=a$ *и* $x=b$.

Если плотность вероятности $p_\xi(x)$ *непрерывной с.в.* ξ *имеет вид* $p_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\notin(a;b)\\ f(x), & x\in(a;b)\end{cases}$*, то говорят, что эта с.в. сосредоточена на интервале* $(a;b)$*. Это обосновывается тем, что вероятность того, что значение с.в. попадет вне данного интервала, равна* 0*. В этом случае функцию распределения с.в.* ξ *можно найти так:*

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \int\limits_a^x f(t)dt, & x\in[a;b]\\ 1, & x\ge b\end{cases}. \qquad (4)$$

Пример 1. Известно, что плотность вероятности $p_\xi(x)$ непрерывной с.в. ξ имеет вид $p_\xi(x)=\begin{cases}0, x\notin(0;2)\\ ax^2, x\in(0;2)\end{cases}$. Найти параметр *a*, функцию распределения $F_\xi(x)$ и вероятность события $-1<\xi\le1$.

Решение. Для нахождения параметра *a* потребуем выполнения свойства (2): $1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx=\int\limits_0^2 ax^2dx=a\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{8a}{3}$, $a=\frac{3}{8}$. Для нахождения функции распределения используем (4): $F_\xi(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ \frac{x^3}{8},\ x\in[0;2]\\ 1,\ x\ge 2\end{cases}$. И, наконец, $P(-1<\xi\le 1)=F_\xi(1)-F_\xi(-1)=1/8$.

Пример 2. Известно, что функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывной с.в. ξ имеет вид $F_\xi(x)=\begin{cases}\frac{a}{x}\ ,\ x\le -1\\ b,\ x>-1\end{cases}$. Найти параметры a и b, плотность вероятности $p_\xi(x)$ и вероятности событий: – 3 ≤ ξ ≤ 2; ξ > – 2.

Решение. Находим параметр b: $1=\lim\limits_{x\to\infty}F_\xi(x)=b$. Далее используем свойства функции распределения непрерывной с.в.: предел справа $F_\xi(-1+0)=1$ равен пределу слева $F_\xi(-1-0)=-a$, тогда $a=-1$. Для нахождения плотности вероятности используем (3):

$p_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2},\ x<-1\\ 0,\ x>-1\end{cases}$. Теперь находим вероятности:

$P(\xi>-2)=F_\xi(+\infty)-F_\xi(-2)=1-0{,}5=0{,}5$,

$P(-3\le\xi\le 2)=F_\xi(2)-F_\xi(-3)=1-1/3=2/3$.

§ 11. Независимые с.в. Действия над с.в. Функции от с.в.

Две с.в. ξ *и* η *называются* ***независимыми****, если для любых множеств* $M, A \subseteq \mathbb{R}$*, которые являются либо интервалами, либо полуинтервалами, либо отрезками выполняется равенство*

$$P(\xi \in M; \eta \in A) = P(\xi \in M) \cdot P(\eta \in A), \tag{1}$$

где $P(\xi \in M; \eta \in A)$ *есть вероятность одновременного наступления событий* $\{\xi \in M\}$ *и* $\{\eta \in A\}$*. Аналогично определяется независимости большего числа с.в.*

Для дискретных с.в. это определение можно переформулировать так: для любого x_i *из множества возможных значений дискретной с.в.* ξ *и для любого* y_j *из множества возможных значений дискретной с.в.* η *должно выполняться равенство*

$$P(\xi = x_i; \eta = y_j) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j). \tag{2}$$

Отсюда, в частности следует, что для любого числа z для независимых дискретных с.в. ξ *и* η *справедливы формулы:*

1) $$P(\xi + \eta = z) = \sum_{i,j: x_i + y_j = z} P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j), \tag{3}$$

2) $$P(\xi \cdot \eta = z) = \sum_{i,j: x_i \cdot y_j = z} P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j). \tag{4}$$

Так же, как и в §4 сделаем следующее

Замечание 1*. Вопрос о независимости с.в., как правило, решается исходя из* ***принципа логической или физической независимости*** *(например, если с.в.* ξ *и* η *возникли в независимо проводимых экспериментах, т.е. областью их определения служат различные ПЭИ), или оговаривается a priori. Если на основании этого принципа можем сделать вывод о независимости с.в., то это позволяет нам использовать формулу* (1).

Пример 1. Независимые дискретные с.в. ξ *и* η заданы законами распределения (в данном случае независимость с.в. оговаривается a priori):

ξ	1	3	4
p	1/6	1/3	½

η	1	3
p	1/3	2/3

Найти вероятность $P(\xi > \eta)$ того, что с.в. ξ примет значение большее, чем значение, которое примет с.в. η.

Решение. Т.к. с.в независимы, то, используя (2), получаем:

$$P(\xi > \eta) = P(\xi = 3; \eta = 1) + P(\xi = 4; \eta = 1) + P(\xi = 4; \eta = 3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{11}{18}.$$

Над с.в. можно совершать арифметические операции, которые определяются следующим образом. Если в результата опыта с.в. ξ *примет значение x, а с.в.* η *– значение y, то с.в.* $\xi + \eta$ *примет значение* $x + y$*, с.в.* $\xi \cdot \eta$ *примет значение* $x \cdot y$*, с.в.* ξ / η *примет значение* x / y*, а с.в.* $\alpha \cdot \xi$*, где* $\alpha \in \mathbb{R}$*, – значение* $\alpha \cdot x$.

Результатом сложения (умножения, деления) дискретных с.в. является также дискретная с.в. Ее закон распределения в случае операций над независимыми с.в. находится следующим образом. Пусть дискретная с.в. ξ *имеет возможные значения* $x_1, x_2, \ldots$*, а дискретная с.в.* η *имеет возможные значения* $y_1, y_2, \ldots$*, причем эти с.в. – независимы. Тогда сумма* $\xi + \eta$ *(произведение* $\xi \cdot \eta$*) имеет возможные значения* $z = x_i + y_j$ *(*$z = x_i \cdot y_j$*),* $i = 1, 2, \ldots$*,* $j = 1, 2, \ldots$*, а соответствующие вероятности находятся по формуле* (3) *(для произведения – по формуле* (4)*). Случай деления рассматривается аналогично.*

Пример 2. Найти законы распределения для с.в. $\xi + \eta$ и $\xi \cdot \eta$, если независимые дискретные с.в. ξ и η заданы законами распределения, указанными в примере 1.

Решение. Возможные значения с.в. $\xi + \eta$ в порядке возрастания: 2, 4, 5, 6, 7. По формуле (3) находим:

$$P(\xi + \eta = 2) = P(\xi = 1)P(\eta = 1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{18},$$

$$P(\xi + \eta = 4) = P(\xi = 1)P(\eta = 3) + P(\xi = 3)P(\eta = 1) = \frac{2}{9},$$

$$P(\xi + \eta = 5) = P(\xi = 4)P(\eta = 1) = \frac{1}{6}, \; P(\xi + \eta = 6) = P(\xi = 3)P(\eta = 3) = \frac{2}{9}$$

$P(\xi + \eta = 7) = P(\xi = 4)P(\eta = 3) = \dfrac{1}{3}$. Т.о., закон распределения с.в. $\xi + \eta$:

$\xi + \eta$	2	4	5	6	7
p	1/18	2/9	1/6	2/9	1/3

Возможные значения с.в. $\xi \cdot \eta$ в порядке возрастания: 1, 3, 4, 9, 12. По формуле (4) находим: $P(\xi \cdot \eta = 1) = P(\xi = 1)P(\eta = 1) = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{18}$,

$P(\xi+\eta=3)=P(\xi=1)P(\eta=3)+P(\xi=3)P(\eta=1)=\dfrac{2}{9}$

$P(\xi+\eta=4)=P(\xi=4)P(\eta=1)=\dfrac{1}{6}$, $P(\xi+\eta=9)=P(\xi=3)P(\eta=3)=\dfrac{2}{9}$,

$P(\xi+\eta=12)=P(\xi=4)P(\eta=3)=\dfrac{1}{3}$. Т.о., закон распределения с.в. $\xi\cdot\eta$:

$\xi\cdot\eta$	1	3	4	9	12
p	1/18	2/9	1/6	2/9	1/3

Если ξ и η – непрерывные независимые с.в. с плотностями распределения $p_\xi(x)$ и $p_\eta(x)$, то с.в. $\xi+\eta$ также является непрерывной, а ее плотность распределения находится по формуле

$$p_{\xi+\eta}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_\xi(s)p_\eta(x-s)ds \qquad (5)$$

Интеграл в правой части этой формулы называется ***сверткой функций*** *$p_\xi(x)$ и $p_\eta(x)$.*

Если ξ и η – непрерывные независимые с.в. с плотностями распределения $p_\xi(x)$ и $p_\eta(x)$, то с.в. $\xi\cdot\eta$ также является непрерывной, а ее функция распределения находится по формуле

$$F_{\xi\cdot\eta}(x)=\iint\limits_{zy<x}p_\xi(y)p_\eta(z)dydz\ ,$$

где двойной интеграл берется по области, которая задается неравенством $zy<x$. Эту формулу можно преобразовать так:

$$F_{\xi\cdot\eta}(x)=\int_{0}^{+\infty}p_\xi(y)dy\int_{-\infty}^{x/y}p_\eta(z)dz+\int_{-\infty}^{0}p_\xi(y)dy\int_{x/y}^{+\infty}p_\eta(z)dz. \qquad (6)$$

Пример 3. Независимые непрерывные с.в. ξ и η заданы плотностями распределения: $p_\xi(x)=\begin{cases}0, x\notin[a;b]\\ \dfrac{1}{b-a}, x\in[a;b]\end{cases}$ (с.в. с такой плотностью распределения называется равномерно распределенной на отрезке $[a;b]$), $p_\eta(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ e^{-x}, x>0\end{cases}$. Найти плотность $p_{\xi+\eta}(x)$.

Решение. Находим функцию распределения $F_\eta(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ 1-e^{-x}, x>0\end{cases}$.

Далее используем (5): $p_{\xi+\eta}(x)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b p_\eta(x-s)ds$. Делаем в интеграле замену $x-s=t$: $p_{\xi+\eta}(x)=-\frac{1}{b-a}\int\limits_{x-a}^{x-b} p_\eta(t)dt=\frac{1}{b-a}\Big(F_\eta(x-a)-F_\eta(x-b)\Big)=$

$$=\begin{cases}0, x\le a\\ \frac{1}{b-a}(1-e^{a-x}), x\in[a;b]\\ \frac{1}{b-a}(e^{b-x}-e^{a-x}), x>b\end{cases}.$$

Пример 4. Независимые непрерывные с.в. ξ и η заданы плотностями распределения: $p_\xi(x)=\begin{cases}0, x\notin[0;1]\\1, x\in[0;1]\end{cases}$ и $p_\eta(x)=\begin{cases}0, x\notin[1;2]\\1, x\in[1;2]\end{cases}$. Найти функцию распределения $F_{\xi\cdot\eta}(x)$ и плотность $p_{\xi\cdot\eta}(x)$.

Решение. Находим функцию распределения $F_\eta(x)=\begin{cases}0, x<1\\ x-1, x\in[1;2]\\ 1, x>2\end{cases}$.

Далее используем (6): $F_{\xi\cdot\eta}(x)=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\infty}^{x/y} p_\eta(z)dz$. Тогда $F_{\xi\cdot\eta}(x)=0$ при $x<0$, т.к. $p_\eta(z)=0$ при $z<0$. Пусть $x\ge 0$. Тогда $F_{\xi\cdot\eta}(x)=\int\limits_0^1 F_\eta\left(\frac{x}{y}\right)dy$.

После замены $\frac{x}{y}=t$ в интеграле имеем: $F_{\xi\cdot\eta}(x)=x\int\limits_x^{+\infty}\frac{F_\eta(t)}{t^2}dt$. При $x>2$ получаем : $F_{\xi\cdot\eta}(x)=x\int\limits_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt=1$. Если $x\in[1;2]$, то

$$F_{\xi\cdot\eta}(x)=x\int\limits_2^{+\infty}\frac{F_\eta(t)}{t^2}dt+x\int\limits_x^2\frac{F_\eta(t)}{t^2}dt=x\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt+x\int\limits_x^2\frac{t-1}{t^2}dt=x+x\ln\frac{2}{x}-1$$

Если же $0\le x\le 1$, то

$$F_{\xi\cdot\eta}(x)=x\int\limits_2^{+\infty}\frac{F_\eta(t)}{t^2}dt+x\int\limits_1^2\frac{F_\eta(t)}{t^2}dt+x\int\limits_x^1\frac{F_\eta(t)}{t^2}dt=x\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt+x\int\limits_1^2\frac{t-1}{t^2}dt=x\ln 2.$$

Итак, $F_{\xi\cdot\eta}(x)=\begin{cases}0, x<0\\ x\ln 2, x\in[0;1)\\ x+x\ln\frac{2}{x}-1, x\in[1;2]\\ 1, x>2\end{cases}$, $p_{\xi\cdot\eta}(x)=\frac{dF_{\xi\cdot\eta}(x)}{dx}=\begin{cases}0, x<0\\ \ln 2, x\in[0;1)\\ \ln\frac{2}{x}, x\in[1;2]\\ 0, x>2\end{cases}$.

Если ξ *– непрерывная с.в. с функцией распределения* $F_\xi(x)$ *и плотностью распределения* $p_\xi(x)$*, то для с.в.* $\eta = \alpha\cdot\xi$*, где* $\alpha > 0$*,*

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\alpha\xi < x) = P\left(\xi < \frac{x}{\alpha}\right) = F_\xi\left(\frac{x}{\alpha}\right),$$

$$p_\eta(x) = \frac{dF_\eta(x)}{dx} = \frac{dF_\xi\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{dx} = \frac{1}{\alpha}p_\xi\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Понятие ***функции от с.в.*** *определяется следующим образом. Пусть функция* $y = \varphi(x)$ *определена в каждой точке из множества возможных значений с.в.* ξ*. Тогда, если с.в.* ξ *принимает значение* x_0*, то с.в.* $\eta = \varphi(\xi)$ *принимает значение* $\varphi(x_0)$*. Более конкретно для дискретных с.в.: если дискретная с.в.* ξ *имеет возможные значения* $x_1, x_2, \ldots$*, то с.в.* $\eta = \varphi(\xi)$ *также является дискретной с возможными значениями* $z = \varphi(x_i)$*,* $i = 1, 2, \ldots$*, а соответствующие вероятности находятся по формуле*

$$P(\varphi(\xi) = z) = \sum_{i:\varphi(x_i)=z} P(\xi = x_i) \qquad (7)$$

Пример 5. Найти закон распределения для с.в. $\eta = \sin\frac{\pi\xi}{4}$, если дискретная с.в. ξ задана законом распределения, указанном в примере 1.

Решение. Возможные значения с.в. $\eta = \sin\frac{\pi\xi}{4}$ в порядке возрастания: 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. По формуле (7) находим: $P(\eta = 0) = P(\xi = 4) = \frac{1}{2}$, $P\left(\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = P(\xi = 1) + P(\xi = 3) = \frac{1}{2}$. Т.о., закон распределения с.в. $\xi + \eta$:

η	0	$\sqrt{2}/2$
p	½	½

Если ξ *– непрерывная с.в. с функцией распределения* $F_\xi(x)$ *и плотностью распределения* $p_\xi(x)$*, а функция* $y = \varphi(x)$ *– непрерывно-дифференцируема, то с.в.* $\eta = \varphi(\xi)$ *также является непрерывной. Ее функцию распределения во многих случаях можно найти, исходя из равенства* $F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\varphi(\xi) < x)$.

Пример 6. Заданы: функция распределения $F_\xi(x)$ и плотностью распределения $p_\xi(x)$ непрерывной с.в. ξ и функция $\varphi(x) = x^2$. Чему равны функция распределения и плотностью распределения с.в. $\eta = \xi^2$?

Решение.

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\xi^2 < x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ -\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}, x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x}), x > 0 \end{cases},$$

$$p_\eta(x) = \frac{dF_\eta(x)}{dx} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(p_\xi(\sqrt{x}) + p_\xi(-\sqrt{x})\right), x > 0 \end{cases}.$$

§ 12. Числовые характеристики с.в.

В этом параграфе мы изучаем наиболее важные числовые характеристики с.в. – математическое ожидание (далее используем сокращение ***м.о.****), дисперсию и среднеквадратическое отклонение.*

Если дискретная с.в. ξ *задана законом распределения*

ξ	x_1	x_2	...	x_k	...
P	p_1	p_2	...	p_k	...

то числовая величина

$$M\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_k p_k + ... = \sum_i x_i \cdot p_i \,. \qquad (1)$$

называется ее ***математическим ожиданием*** *(среднее возможное значение с.в.). В случае, когда число возможных значений с.в. бесконечно, то в определении (1) подразумевается, что ряд сходится абсолютно. Если непрерывная с.в.* ξ *задана плотностью распределения* $p_\xi(x)$, *то ее м.о. определяется по формуле*

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_\xi(x)dx \,, \qquad (2)$$

при условии, что несобственный интеграл сходится абсолютно. В случае сложных выражений при записи м.о. используются квадратные скобки. Например, $M[\xi + \eta]$, $M[\xi \cdot \eta]$.

Замечание 1*. При решении задач полезно знать, что если график плотности непрерывной с.в.* ξ *имеет ось симметрии* $x = a$, *то* $M\xi = a$.

Свойства математического ожидания:

1. *Если с.в.* $\xi = c$ *постоянная (это означает, что* $P(\xi = c) = 1$*), то* $M\xi = c$.

2. $M[c \cdot \xi] = c \cdot M\xi$ *для любой константы с.*

3. $M[\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n] = M\xi_1 + M\xi_2 + ... + M\xi_n$ ***для любых*** *с.в.* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$.

4. *Если с.в.* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ *.–* ***независимы****, то* $M[\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot ... \cdot \xi_n] = M\xi_1 \cdot M\xi_2 \cdot ... \cdot M\xi_n$.

Если дискретная с.в. ξ *имеет закон распределения, указанный выше, и* $\eta = \varphi(\xi)$ *– функция от этой с.в., то*

$$M\eta = M[\varphi(\xi)] = \sum_i \varphi(x_i)\cdot p_i \tag{3}$$

при условии, что ряд сходится абсолютно. Если непрерывная с.в. ξ *задана плотностью распределения* $p_\xi(x)$, *то справедлив также интегральный аналог формулы* (3)*:*

$$M[\varphi(\xi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\cdot p_\xi(x)dx \tag{4}$$

при условии, что интеграл в правой части сходится абсолютно.

Пример 1. Дискретная с.в. ξ имеет закон распределения (распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$)

ξ	0	1	2	...	k	...
p	p_0	p_1	p_2	...	p_k	...

где $p_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$. Найти $M\xi$ и $M\xi^2$.

Решение. Используем (1): $M\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$ $= \lambda\cdot e^{-\lambda}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^n}{n!} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = \lambda$. Далее используем (3): $M\xi^2 =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right) =$$

$$= \lambda\cdot e^{-\lambda}\left(\lambda\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{\lambda}\right) = \lambda\cdot e^{-\lambda}(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda.$$

Пример 2. Непрерывная с.в. ξ имеет плотность распределения (экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$) $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}, x \ge 0 \end{cases}$. Найти $M\xi$ и $M\xi^2$.

Решение. Используем (2): $M\xi = \lambda\cdot\int\limits_0^{+\infty} x\cdot e^{-\lambda x}dx = \lambda\cdot\left(-\dfrac{1}{\lambda}x\cdot e^{-\lambda x} - \right.$ $\left.-\dfrac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^{+\infty} = \dfrac{1}{\lambda}$. Далее используем (3): $M\xi^2 = \lambda\cdot\int\limits_0^{+\infty} x^2\cdot e^{-\lambda x}dx =$

$$= \lambda\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}x^2\cdot e^{-\lambda x} - \frac{2}{\lambda^2}xe^{-\lambda x} - \frac{2}{\lambda^3}e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Пример 3. Непрерывная с.в. ξ имеет плотность распределения (распределение Коши) $p_\xi(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти $M\xi$.

Решение. $M\xi=\dfrac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}dx$, но этот интеграл абсолютно не сходится. Поэтому для данной с.в. $M\xi$ не существует.

Дисперсией *с.в. ξ называется число (которое является мерой разброса значений с.в. относительно ее м.о.)*

$$D\xi=M\left[(\xi-M\xi)^2\right], \tag{5}$$

то есть это м.о. от случайной величины $(\xi-M\xi)^2$. При конкретных вычислениях пользоваться формулой (5) *нерационально. Поэтому надо знать и уметь использовать формулу*

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2. \tag{6}$$

Число, которое определяется формулой $\sigma_\xi=\sqrt{D\xi}$, называется ***среднеквадратическим отклонением*** *с.в. ξ (стандартным отклонением).*

Свойства дисперсии и среднеквадратического отклонения:

1. Для любой с.в. ξ ее дисперсия $D\xi\ge 0$, причем $D\xi=0$ тогда и только тогда, когда с.в. $\xi=c$ постоянная.

2. $D[c\cdot\xi]=c^2\cdot D\xi$ и *$\sigma_{c\cdot\xi}=|c|\cdot\sigma_\xi$ для любой константы с.*

3. Если с.в. $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ ***независимы****, то $D[\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n]=$ $=D\xi_1+D\xi_2+\ldots+D\xi_n$.*

Пример 4. Найти $D\xi$ пуассоновской с.в. ξ (см. пример 1).

Решение. Используем (6) и результаты примера 1: $D\xi=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$.

Пример 5. Найти $D\xi$ и σ_ξ экспоненциально распределенной с.в. ξ (см. пример 2).

Решение. Используем (6) и результаты примера 2: $D\xi=\dfrac{2}{\lambda^2}-\dfrac{1}{\lambda^2}=\dfrac{1}{\lambda^2}$, $\sigma_\xi=\dfrac{1}{\lambda}$.

Следующий пример показывает, как использовать свойства м.о. и дисперсии с.в.

Пример 6. Рабочий обслуживает 4 независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,7, для второго – 0,75, для третьего – 0,8, для четвертого – 0,9. *ДСВ* ξ равна числу станков, которые не потребуют внимания рабочего. Найти $M\xi$ и $D\xi$.

Решение. Разберем два способа решения этой задачи. 1-й способ (нерациональный!). Напишем закон распределения с.в. ξ (мы приведем только результат, читателю рекомендуем сделать это самостоятельно):

ξ	0	1	2	3	4
p	0,0015	0,0275	0,1685	0,4245	0,378

Используем формулы (1), (3) и (6):

$M\xi = 1\cdot 0{,}0275 + 2\cdot 0{,}1685 + 3\cdot 0{,}4245 + 4\cdot 0{,}378 = 3{,}15$;

$M\xi^2 = 1^2\cdot 0{,}0275 + 2^2\cdot 0{,}1685 + 3^2\cdot 0{,}4245 + 4^2\cdot 0{,}378 = 10{,}57$;

$D\xi = 10{,}57 - 3{,}15^2 = 0{,}6475$.

2-й способ. Рассмотрим 4 независимых (по условию) ДСВ ξ_1, ξ_2, ξ_3 и ξ_4, которые определяются так: $\xi_k = 1$, если *k*-й станок не потребовал внимания рабочего, и $\xi_k = 0$ в противном случае, здесь $k = 1,\ldots,4$. Ясно, что $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$. Легко посчитать, что $M\xi_1 = 0{,}7$, $D\xi_1 = 0{,}7 - 0{,}49 = 0{,}21$, $M\xi_2 = 0{,}75$, $D\xi_2 = 0{,}75 - 0{,}75^2 = 0{,}1875$, $M\xi_3 = 0{,}8$, $D\xi_3 = 0{,}8 - 0{,}64 = 0{,}16$, $M\xi_4 = 0{,}9$, $D\xi_4 = 0{,}9 - 0{,}81 = 0{,}09$. Тогда $M[\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4] = 0{,}7 + 0{,}75 + 0{,}8 + 0{,}9 = 3{,}15$, $D[\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4] = = 0{,}21 + 0{,}1875 + 0{,}16 + 0{,}09 = 0{,}6475$.

Квантилью *распределения с.в.* ξ *порядка p, где* $0 < p < 1$*, называется такое число* u_p*, что* $P(\xi < u_p) = p$. *Это понятие используется в математической статистике. Из определения следует, что квантиль распределения есть решение уравнения* $F_\xi(u_p) = p$*, где* $F_\xi(x)$ *– функция распределения с.в.* ξ. *Квантиль* $u_{0,5}$ *называется* ***медианой*** *распределения с.в.* ξ.

Замечание 2*. Если график плотности непрерывной с.в.* ξ *имеет ось симметрии* $x = a$*, то* $u_{0,5} = a$.

§ 13. Основные законы распределения с.в.

В этом параграфе приводятся основные законы распределения дискретных и непрерывных с.в., а также их характеристики – математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение.

1. Биномиальный закон распределения.

Говорят, что дискретная с.в. ξ *имеет биномиальное распределение с параметрами* $0 < p < 1$ *и* $n \in \mathbb{N}$, *если ее закон распределения имеет вид:*

ξ	0	1	…	m	…	n
p	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	p^n

где $q = 1 - p$. *Вспоминая §7, отметим, что данная ДСВ есть число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p.*

Математическое ожидание (М.о). с.в. ξ, *распределенной по биномиальному закону, можно найти по формуле*

$$M\xi = np, \tag{1}$$

а дисперсию – по формуле

$$D\xi = npq. \tag{2}$$

Пример 1. В магазин поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2:3. Куплено 4 пары обуви. Найти закон распределения числа купленных пар обуви, изготовленной первой фабрикой. Найти м,о. и среднеквадратическое отклонение этой с.в.

Решение. Вероятность того, что случайно выбранная пара обуви изготовлена на первой фабрике, равна 0,4. Случайная величина ξ - число пар обуви среди четырех, изготовленных на первой фабрике, имеет биномиальный закон распределения. Ряд распределения можно записать в виде:

ξ	0	1	2	3	4
p	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

По формулам (1) и (2) найдем м.о. и дисперсию с.в. ξ: $M\xi = np = 4 \cdot 0{,}4 = 1{,}6$, $D\xi = npq = 4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}96$. Среднеквадратическое отклонение будет равно $\sqrt{D\xi} = \sqrt{0{,}96} \approx 0{,}98$.

Биномиальный закон распределения широко используется в теории и практике статистического контроля качества продукции, при описании функционирования систем массового обслуживания, в теории стрельбы и других областях.

2. Распределение Пуассона.

Говорят, что дискретная с.в. ξ *распределена по закону Пуассона с параметром* $\lambda > 0$, *если ее закон распределения имеет вид*

ξ	0	1	2	...	m	...
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...

М. о. и дисперсия с.в. ξ, *распределенной по закону Пуассона с параметром* $\lambda > 0$, *совпадают и равны параметру* λ *т.е.*

$$M\xi = D\xi = \lambda . \qquad (3)$$

При достаточно больших значениях n *(вообще при* $n \to \infty$*) и малых значениях* p *(*$p \to 0$*) при условии, что произведение* np *является постоянной величиной (*$np \to \lambda = const$*) закон распределения Пуассона является предельным случаем биномиального закона, т. е. вероятность наступления события* $P(\xi_{бином} = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \to \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ *при* $n \to \infty$ *(см. § 8, теорема Пуассона).*

Распределение Пуассона используется в теории массового обслуживания, где рассматриваются случайные появления требований (например, появление посетителей в кафе, машин на автозаправке и т.п.). Эти потоки требований должны удовлетворять условиям а) он – стационарный, т.е. вероятность появления определенного числа требований на временном участке зависит только от длины этого участка; б) он – ординарный, т.е. вероятность появления двух и более требований, попадающих на один и тот же малый промежуток времени, мала по сравнению с вероятностью появления одного требования; в) поток требований является потоком без последействия, т.е. для любых двух непересекающихся участков времени число требований, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько требований попало на другой. Такие потоки требований называются ***простейшими или пуассоновскими****. Для простейшего потока с.в.* ξ *числа поступления требований* *за время t распределена по закону Пуассона с параметром* $\lambda \cdot t$ *, где* λ *- среднее число требований за единицу времени (плотность потока требований).*

Пример 2. При движении по проселочной дороге автомобиль испытывает в среднем 60 толчков в течение 1 часа. Какова вероятность того, что за 30 секунд не будет ни одного толчка?

Решение. Число толчков в течение времени t является ДСВ ξ, распределенной по закону Пуассона с параметром $\lambda = \mu t = 0{,}5$, где $\mu = 1$, а t - время в минутах. Тогда согласно закону распределения получим

$$P(\xi = 0) = \frac{(\lambda)^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda} = e^{-0{,}5} \approx 0{,}61.$$

3. Геометрическое распределение.

Говорят, что ДСВ ξ *имеет геометрическое распределение с параметром* $0 < p < 1$*, если ее закон распределения имеет вид*

ξ	1	2	3	...	m	...
p	p	pq	pq^2	$\cdots$	pq^{m-1}	...

Данная ДСВ есть представляет собой число m *испытаний, проведенных по схеме Бернулли, с вероятностью* p *наступления события в каждом испытании до первого положительного исхода.*

М. о. с.в. ξ*, имеющей геометрическое распределение с параметром* p*, равно*

$$M\xi = \frac{1}{p}, \qquad (4)$$

а ее дисперсия

$$D\xi = \frac{q}{p^2}. \qquad (5)$$

Пример 3. Проводится проверка большой партии деталей до обнаружения бракованной. Составить закон распределения числа проверенных деталей. Найти его математическое ожидание и дисперсию, если известно, что вероятность брака для каждой детали равна 0,1.

Решение. Пусть с.в. ξ - число проверенных деталей до обнаружения бракованной. Она имеет геометрическое распределение с параметром $p = 0{,}1$. Тогда ее закон распределения имеет вид:

ξ	1	2	3	4	…	m	…
p	0,1	0,09	0,081	0,0729	…	$0{,}9^m \cdot 0{,}1$	…

Используя соотношения (4) и (5), находим м.о. и дисперсию:

$$M\xi = 10\,,\ D\xi = 90.$$

4. Равномерный закон распределения.

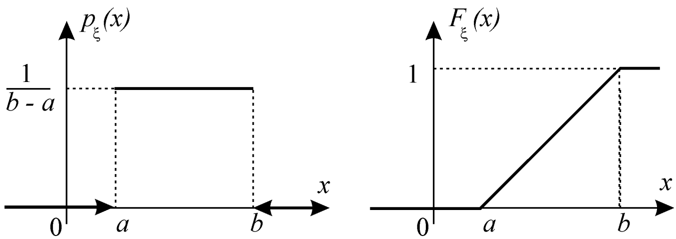
Говорят, что непрерывная случайная величина ξ *распределена по равномерному закону на отрезке* $[a,b]$, *если ее плотность вероятности* $p_\xi(x)$ *имеет вид*

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } a \le x \le b, \\ 0, & \text{при } x < a,\ x > b. \end{cases} \qquad (6)$$

Функция распределения данной с.в. имеет вид:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{при } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при } a \le x \le b, \\ 1, & \text{при } x > b. \end{cases} \qquad (7)$$

Графики этих функций приведены ниже:



М.о. НСВ ξ, *распределенной по равномерному закону на отрезке* $[a,b]$, *равно*

$$M\xi = \frac{a+b}{2}\,, \qquad (8)$$

а дисперсия

$$D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (9)$$

Равномерный закон распределения используется при анализе ошибок округления в числовых расчетах (например, ошибка округления числа до целого распределена равномерно на отрезке $[-0{,}5;\ 0{,}5]$*), в ряде задач массового обслуживания. Равномерное распределение на отрезке* $[0;1]$ *используется при моделировании с.в. на компьютере. А именно, если задано число* $x_0 \in (0{,}01; 0{,}99)$ *и простое число* $p > 100$*, то формула* $x_n = \{p \cdot x_{n-1}\}$*, где* $\{a\}$ *обозначает дробную часть числа, задает последовательность чисел, равномерно распределенных на отрезке* $[0;1]$*. Числа* x_0 *и р называются базой моделирования (ее надо менять, чтобы получить последовательность, действительно имеющую равномерное распределение на отрезке* $[0;1]$*, иначе ошибки округления приводят к появлению периодической последовательности чисел). Далее используем теорему: если* $F_\xi(x)$ *- функция распределения с.в.* ξ*, то с.в.* $\eta = F_\xi^{-1}(\zeta)$*, где* ζ *- равномерно распределенная с.в. на отрезке* $[0;1]$ *с.в., имеет то же распределение, что и с.в.* ξ*. Т.о. получив последовательность чисел* $x_1, x_2, \ldots$*, равномерно распределенных на отрезке* $[0;1]$*, мы находим последовательность чисел* $y_n = F_\xi^{-1}(x_n)$*, которая имеет распределение такое же, как и с.в.* ξ*.*

Пример 4. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ему придется ждать не больше полминуты. Найти математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение времени ожидания поезда.

Решение. Пусть ξ - с.в. времени ожидания поезда. Она распределена по равномерному закону на временном (в минутах) отрезке $[0;2]$ с плотностью распределения $p_\xi(x) = \frac{1}{2}.$ Вероятность того, что пассажиру придется ждать не более полминуты равна $P(\xi \le 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} 0{,}5dx = \frac{1}{4}.$ По формулам (8) и (9) находим $M\xi = 1$, $D\xi = \frac{1}{3}.$ Среднее квадратическое отклонение равно $\sqrt{D\xi} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58.$

5. Показательный закон распределения.

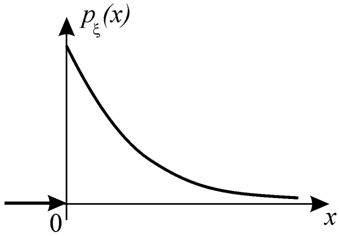
Непрерывная случайная величина ξ *имеет показательный (экспоненциальный) закон распределения с параметром* λ, *если ее плотность вероятности* $p_\xi(x)$ *имеет вид:*

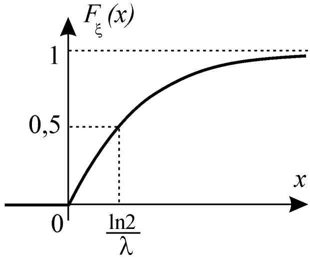
$$p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } x \geq 0, \\ 0 \quad, \text{ если } x < 0. \end{cases} \tag{13}$$

Функция распределения данной с.в. имеет вид:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ , если } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, \text{ если } x \geq 0. \end{cases} \tag{14}$$

Графики этих функций приведены ниже:





Математическое ожидание с.в. ξ, *распределенной по показательному закону, равно*

$$M\xi = \frac{1}{\lambda}, \tag{15}$$

а дисперсия

$$D\xi = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{16}$$

Показательное распределение является одним из основных распределений, используемых в теории массового обслуживания и теории надежности. А именно, $P(t_{обсл} < t) = 1 - e^{-\lambda t}$, *т.е. вероятность того, что время обслуживания (или время службы прибора, конструкции) меньше времени t, находится с использованием функции распределения показательного закона (параметр* λ *определяет интенсивность обслуживания или службы, прибора, конструкции, т.е. среднее число требований, проходящих через систему в единицу времени).*

Пример 5. Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина ξ, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней. Найти плотность вероятности, функцию распределения и среднеквадратическое отклонение с.в. ξ.

Решение. По условию математическое ожидание (среднее возможное значение) $M\xi = \frac{1}{\lambda} = 15,$ откуда $\lambda = \frac{1}{15}.$ Подставив полученное значение параметра λ в соотношения (13) и (14), получим функцию плотности вероятности и функцию распределения с.в. ξ. Искомую вероятность $P(\xi \geq 20)$ можно было бы найти, интегрируя функцию плотности вероятности, т. е. $P(\xi \geq 20) = \int\limits_{20}^{+\infty} \frac{1}{15} e^{-\frac{1}{15}x} dx,$ но легче это сделать, используя функцию распределения:

$$P(\xi \geq 20) = 1 - P(\xi < 20) = 1 - F_{\xi}(20) = 1 - (1 - e^{-\frac{20}{15}}) = e^{-\frac{4}{3}} \approx 0{,}264.$$

Среднеквадратическое отклонение $\sqrt{D\xi} = M\xi = 15.$

6. Нормальный закон распределения.

Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике. Главной особенностью, которая выделяет его среди других законов, является то, что он выступает в роли предельного закона, к которому приближаются другие законы распределения при часто встречающихся типичных условиях.

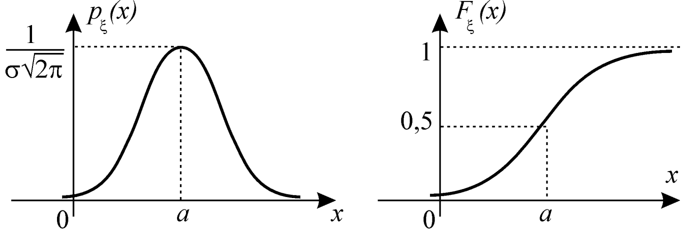
Непрерывная случайная величина ξ *имеет нормальный закон распределения (закон распределения Гаусса) с параметрами* a *и* σ^2*, если ее плотность вероятности имеет вид:*

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{17}$$

Функция распределения нормальной с.в. ξ *имеет вид:*

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \tag{18}$$

Графики этих функций приведены ниже:



Математическое ожидание нормальной с.в. ξ *равно параметру* a *этого закона, т.е.*

$$M\xi = a, \tag{19}$$

А ее дисперсия – параметру σ^2*, т.е.*

$$D\xi = \sigma^2. \tag{20}$$

Весьма полезными будут следующие свойства с.в. ξ*, распределенной по нормальному закону.*

2. *Вероятность попадания значений с.в.* ξ *в промежуток* $[x_1; x_2]$ *равна*

$$P(x_1 \le \xi \le x_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \Phi_0(t_2) - \Phi_0(t_1), \tag{21}$$

где $t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma}$, $t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma}$, $\Phi(x)$ *- большая функция Лапласа (*$\Phi_0(x)$ *- модифицированная функция Лапласа), описанная в §8. Значения функции* $\Phi_0(x)$ *можно найти в таблице 1 в конце книги.*

2. Вероятность того, что отклонение значения нормально распределенной с.в. ξ *от математического ожидания не превысит величину* $\Delta > 0$*, равна*

$$P(|\xi - a| \le \Delta) \approx 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi_0\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right). \tag{22}$$

*Отсюда, в частности, вытекает так называемое “**правило трех сигм**”: если с.в.* ξ *имеет нормальный закон распределения с параметрами* a *и* σ^2*, то практически достоверно, что ее значения заключены в интервале* $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$*, т.е.*

$$P(|\xi - a| \le 3\sigma) = 2\Phi_0(3) \approx 0{,}9973.$$

Если $a=0$, $\sigma=1$, *то говорят, что нормальная с.в.* ξ *имеет* ***стандартное нормальное распределение*** $N(0;1)$. *В этом случае функция распределения (18) и плотность распределения (17) значительно упрощаются.*

Пример 6. Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная с.в. ξ с параметрами $a=173$, $\sigma=6$. Найти выражение плотности вероятности и функции распределения с.в. ξ, а также доли костюмов 4-го роста (176–182 см.), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы.

Решение. По формулам (17) и (18) , получим

$$p_\xi(x)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-173)^2}{72}}\ ;\ \ F_\xi(x)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-173)^2}{72}}dx\ .$$

Долю костюмов 4-го роста в общем объеме производства находим по формуле (21) $P(176\le\xi\le182)=\Phi_0(1{,}5)-\Phi_0(0{,}5)\approx0{,}4332-0{,}1915\approx0{,}2417$.

§ 14. Неравенство Чебышева и закон больших чисел.

Как мы видели ранее, основными понятиями теории вероятностей являются понятия ***случайного события и случайной величины****. При этом предсказать заранее результат эксперимента, т.е. появление (или не появление) какого-либо события или определенное значение, которое приняла случайная величина, невозможно, так как исход эксперимента зависит от многих случайных причин, не поддающихся учету.*

Однако при многократном повторении эксперимента наблюдаются закономерности, свойственные массовым случайным явлениям. Эти закономерности обладают свойством определенной ***устойчивости****. Смысл этого свойства состоит в том, что конкретные особенности каждого отдельного случайного явления почти не сказываются на среднем результате большой массы подобных явлений, а характеристики случайных событий и случайных величин, наблюдаемых в испытаниях, при неограниченном увеличении числа испытаний становятся* ***практически не случайными****.*

Пусть производится большая серия однотипных опытов со случайным исходом. Однако, несмотря на это, средний результат всей серии опытов утрачивает случайный характер и становится закономерным.

Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное воздействие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название ***закона больших чисел****.*

Под законом больших чисел не следует понимать какой-то один общий закон, связанный с большими числами. Закон больших чисел – это обобщенное название нескольких теорем, из которых следует, что при неограниченном увеличении числа экспериментов средние величины стремятся к некоторым постоянным значениям. Иначе говоря, общий смысл закона больших чисел – совместное действие большого числа случайных факторов приводит к результату, почти не зависящему от случая.

К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли. Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли – простейшим.

Лемма Чебышева (1-е неравенство Чебышева). *Если случайная величина ξ, для которой существует математическое ожидание $M[\xi]$, может принимать только неотрицательные значения, то для любого положительного числа α имеет место неравенство*

$$p(\xi \geq \alpha) \leq \frac{M[\xi]}{\alpha}, \tag{1}$$

Пример 1. Оцените вероятность того, что при 3600 независимых бросаниях игральной кости число появлений 6 очков будет не меньше 900.

Решение. Пусть ξ – число выпадений шестерок. Она имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 3600$ и $p = 1/6$. Тогда $M\xi = np$ = 3600 · 1/6 = 600. Воспользуемся теперь неравенством (1) при α = 900: $p(x \geq 900) \leq \frac{600}{900} = \frac{2}{3}$.

Неравенство Чебышева (2-е неравенство Чебышева). *Если* ξ *– случайная величина с математическим ожиданием* $M[\xi]$ *и дисперсией* $D[\xi]$, *то для любого положительного* ε *имеет место неравенство*

$$p(|\xi - M[\xi]| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D[\xi]}{\varepsilon^2}. \qquad (2)$$

Пример 2. Устройство состоит из 100 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,03. Оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом (математическом ожиданием) отказов за время T окажется: *а*) меньше двух; *б*) не меньше двух.

Решение. *А*) Обозначим через ξ число элементов, отказавших за время T. Тогда $M[\xi] = np$ = 100 · 0,03 = 3 и $D[\xi] = npq$ = = 100 · 0,03 · 0,97 = 2,91. Воспользуемся неравенством Чебышева, получим $p(|\xi - 3| < 2) \geq 1 - \frac{2{,}91}{4} \approx 0{,}27$. *Б*) События $|\xi - 3| < 2$ и $|\xi - 3| \geq 2$ противоположны, поэтому сумма их вероятностей равна единице. Следовательно, $p(|\xi - 3| \geq 2) \geq 1 - 0{,}27 = 0{,}73$.

Пример 3. Оценить вероятность события $|\xi - M[\xi]| < 3\sigma$, где σ - среднее квадратичное отклонение случайной величины X.

Решение. Полагая $\varepsilon = 3\sigma$, получим в правой части неравенства число $1 - \frac{D[\xi]}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Таким образом, вероятность события $|\xi - M[\xi]| < 3\sigma$ не меньше, чем $\frac{8}{9}$. В действительности же для подавляющего большинства встречающихся на практике случайных величин эта вероятность значительно ближе к единице.

Второе неравенство Чебышева можно обобщить следующим образом:

Теорема Чебышева. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ *- последовательность независимых случайных величин с одним и тем же математическим ожиданием M и дисперсиями, ограниченными одной и той же кон-*

стантой с. Тогда для любого положительного числа ε *имеет место предельное равенство*

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - m\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (3)$$

Теорема Чебышева справедлива как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин. В ней утверждается, что если рассматривается достаточно большое число независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым.

В частности, для схемы Бернулли это обобщение примет вид: пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых с вероятностью p может наступить некоторое событие A, и пусть ξ_n *– случайная величина, равная числу наступлений события A в этих n опытах. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *имеет место неравенство*

$$p\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}. \qquad (4)$$

Это в свою очередь дает, что для любого $\varepsilon > 0$ *имеет место предельное равенство (**теорема Бернулли, или закон больших чисел в форме Бернулли)*** $\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$

Замечание 1. *Теорема Бернулли объясняет, почему относительная частота появления случайного события при достаточно большом числе испытаний обладает свойством устойчивости и оправдывает статистическое определение вероятности (см. §2). Эта теорема, доказанная Якобом Бернулли (опубликована в 1713 г.), положила начало теории вероятностей как науке. Доказательство Бернулли было сложным, простое доказательство было дано П.Л. Чебышевым в 1846 г.*

Пример 4. Оценить вероятность того, что при подбрасывании игральной кости 300 раз относительная частота появления шести очков отклонится от вероятности этого события не более чем на 0,01.

Решение. Для оценки вероятности события $\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{6}\right| \leq 0{,}01\right)$ применим неравенство (6) при $n = 300$, $p = 1/6$, $q = 5/6$, $\varepsilon = 0{,}06$

$$p\left(\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{6}\right|\le 0{,}01\right)\ge 1-\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{300\cdot(0{,}05)^2}\approx 0{,}815\,.$$

Пример 5. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,1. Найти вероятность того, что среди 200 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 10 до 30 деталей.

Решение. Воспользуемся неравенством Чебышева, определив $M[\xi]$ и ε: $M[\xi] = np = 200\cdot 0{,}1 = 20$ и $|\xi-20|\le\varepsilon, 20-\varepsilon\le\xi\le 20+\varepsilon$, откуда $\varepsilon = 10$. Следовательно, $p(|\xi-20|\le 10)\ge 1-\frac{200\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}{10^2}=0{,}82$.

Теорему Чебышева можно сформулировать в несколько более общем виде:

Обобщенная теорема Чебышева. *Пусть* $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots$ *- последовательность независимых случайных величин с математическими ожиданиями* $M[\xi_1] = m_1$, $M[\xi_2] = m_2,\dots$ *и дисперсиями, ограниченными одной и той же постоянной с. Тогда для любого положительного числа* ε *имеет место предельное равенство*

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k-m_k\right)\right|<\varepsilon\right)=1. \qquad (5)$$

Пример 6. Оцените вероятность того, что при 3600 независимых бросаниях игральной кости число появлений 6 очков будет не меньше 900.

Решение. Пусть ξ - число появлений 6 очков при 3600 бросаниях кости. Тогда $M[\xi] = 3600\cdot\frac{1}{6} = 600$. Воспользуемся теперь неравенством (1) при $\alpha = 900$: $p(x\ge 900)\le\frac{600}{900}=\frac{2}{3}$.

Пример 7. Оцените вероятность того, что частота появления шестерки в 10000 независимых бросаниях игральной кости отклонится от вероятности появления шестерки по абсолютной величине меньше чем на 0,01.

Решение. Используем неравенство (4) при $n = 10000$, $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$.

Тогда $p\left(\left|\frac{V_{10000}}{10000}-\frac{1}{6}\right|<0{,}01\right)\ge 1-\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{10000\cdot 0{,}01^2}\approx 0{,}86.$

Пример 8. Вероятность наступления события A в каждом из 1000 независимых опытов равна 0,8. Найдите вероятность того, что число наступлений события A в этих 1000 опытах отклонится от своего математического ожидания по абсолютной величине меньше чем на 50.

Решение. Пусть ξ - число наступлений события A в указанных 1000 опытах. Тогда $M[\xi] = 1000 \cdot 0{,}8 = 800$ и $D[\xi] = 1000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 160$. Теперь неравенство (2) дает: $p(|\xi - 800| < 50) \geq 1 - \frac{160}{2500} = 0{,}936.$

Пример 9. Дисперсия каждой из 1000 независимых случайных величин ξ_k (k = 1, 2,…, 1000) равна 4. Оцените вероятность того, что отклонение средней арифметической этих величин от средней арифметической их математических ожиданий по абсолютной величине не превзойдет 0,1.

Решение. Согласно неравенству (4) при $c = 4$ и $\varepsilon = 0{,}1$ имеем:

$$p\left(\left|\frac{1}{1000}\sum_{k=1}^{1000}\left(\xi_k - m_k\right)\right| < 0{,}1\right) \geq 1 - \frac{4}{1000 \cdot 0{,}1^2} = 0{,}6.$$

Следующая теорема имеет важное практическое и методологическое значение.

Центральная предельная теорема. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ *- последовательность одинаково распределенных независимых с.в. (отсюда следует, что* $M\xi_k = m$ *и* $D\xi_k = \sigma^2$ *для любого номера k), то для любого* $x \in \mathbb{R}$ *выполняется равенство* $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + ..., \xi_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x)$ *,*

где $\Phi(x)$ *- большая функция Лапласа (см. §8).*

Замечание 2. *Эта теорема верна и при более слабых предположениях относительно последовательности с.в.*

Замечание 3. *Если обозначить* $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ..., \xi_n$, *то из данной теоремы следует, что*

$$P(y < S_n < x) \approx \Phi\left(\frac{x - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{y - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \qquad (6)$$

при достаточно больших n, откуда, в частности, следует интегральная теорема Лапласа.

Замечание 4. *С учетом центральной предельной теоремы неравенство (4) можно записать так:*

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right), \qquad (7)$$

где $\Phi_0(x)$ - модифицированная функция Лапласа (см. §8).

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Случайные события и действия над ними.

1.1. Опыт состоит в том, что стрелок произвел 3 выстрела по мишени. Событие A_i – попадание в мишень при i-м выстреле (i = 1, 2,3). Выразите через A_1, A_2 и A_3 следующие события:

а) A – хотя бы одно попадание (сделайте это несколькими способами!);
б) B – три промаха; *в)* C – три попадания; *г)* D – хотя бы один промах;
д) E – не меньше двух попаданий; *е)* F – не больше одного попадания.

1.2. Опыт состоит в бросании трех монет. Пусть монеты занумерованы и события $Г_1$, $Г_2$ и $Г_3$ означают выпадение герба соответственно на первой, второй и третьей монетах. Выразите через $Г_1$, $Г_2$ и $Г_3$ следующие события:

а) A – выпадение одного герба и двух цифр;
б) B – выпадение не более одного герба;
в) C – число выпавших гербов меньше числа выпавших цифр;
г) D – выпадение хотя бы двух гербов;
д) E – на первой монете выпал герб, а на остальных – цифры;
е) F – на первой монете выпала цифра и хотя бы на одной из остальных выпал герб.

1.3. Пусть A, B и C – произвольные события. Составьте таблицы истинности для следующих событий: $\overline{A}BC$, $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$, $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$, $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$.

1.4. Перечислите все случаи наступления и ненаступления следующих событий в зависимости от наступления или ненаступления входящих в них событий A, B и C *(составьте таблицы истинности):*

$$A\cdot\overline{B}+C\ ;\ \overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{C}\ ;\ A+B\cdot C\ ;\ (A+B)\cdot C\ ;\ A\cdot(\overline{B}+C)$$

1.5. С помощью таблиц истинности докажите следующие равенства (это весьма важные свойства операции над событиями, особенно 6)):

1) $A + A = A,\ AA = A$; 2) $A + B = B + A,\ AB = BA$;
3) $A + \varnothing = A,\ A\varnothing = \varnothing,\ A + \Omega = \Omega,\ A\Omega = A;$
4) $(A + B) + C = A + (B + C),\ (AB)C = A(BC)$;
5) $(A + B)C = AC + BC,\ A + BC = (A + B)(A + C)$;
6) $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B},\ \overline{AB} = \overline{A}+\overline{B},\ A + \overline{A} = \Omega,\ A\overline{A} = \varnothing.$

1.6. Используя свойства операций (см. задачу 1.5), докажите равенства:

а) $\overline{\overline{A}+\overline{B}} = AB$; *б)* $\overline{\overline{A}\,\overline{B}} = A + B$; *в)* $A\overline{B} + \overline{A}B = (A + B)\,\overline{AB}$;

г) $A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A}C + ABC = A + B + C$; *д)* $A \cdot \overline{AB} + B = A + B$.

1.7. Докажите достоверность следующих событий:

а) $(A + B)(A + \overline{B}) + (\overline{A} + B)(\overline{A} + \overline{B})$;
б) $(A + B)(\overline{A} + B) + (A + \overline{B})(\overline{A} + \overline{B})$.

1.8. Упростите выражения:

а) $(A + B)(A + \overline{B})$; *б)* $(A + B)(\overline{A} + B) + (A + \overline{B})$.

1.9. Докажите равенства:

а) $\overline{A+B+C} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$; *б)* $\overline{ABC} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$.

Для успешного решения задач 1.1.11 – 1.1.12 *напомним, что условие* $A \subset B$ *означает, что все элементарные исходы, входящие в событие A входят и в событие B. Используйте графические представления, как в примере 4.*

1.10. Установите, какие из следующих утверждений истинны:

а) $ABC \subset AB + AC + BC$; б) $A\overline{B}C \subset A + B$;
в) $AB + AC + BC \subset A + B + C$; г) $(A + B)\overline{C} \subset A + B\overline{C}$.

1.11. Докажите следующие утверждения:

а) $B \subset A \Rightarrow A\overline{B} + B = A$; *б)* $AB = \varnothing \Rightarrow (A + B)\overline{B} = A$;

в) $A \subset B \Rightarrow AC \subset BC$; *г)* $BC = \varnothing \Rightarrow \overline{B}\,\overline{C} + C = \overline{B}$;

д) $A\overline{B} + \overline{A}B = \overline{C}D + C\overline{D} \Rightarrow \overline{A}C + A\overline{C} = B\overline{D} + B\overline{D}$;

е) $(\overline{A+B})C = \overline{A}C + \overline{B}C \Rightarrow AC = BC$;

1.12. Прибор состоит из 2 блоков I типа и 3 блоков II типа. Событие A_k (k = 1,2) – исправен k-й блок I типа; B_i (i = 1, 2, 3) – исправен i-й блок II типа. Прибор работает, если исправен хотя бы один блок I типа и не менее 2 блоков II типа. Выразите событие C, означающее работу прибора, через A_k и B_i.

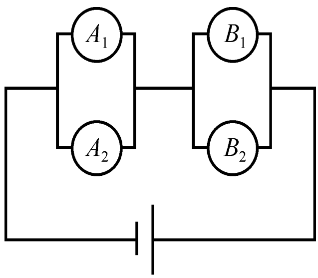


Рис. 3

1.13. Судно имеет одно рулевое устройство, 4 котла и 2 турбины. Событие A означает исправность рулевого устройства, B_k (k = 1, 2, 3, 4) – исправность k-го котла и C_i (i = 1,2) – исправность i-й турбины; событие D – судно управляемое, что будет, когда исправны рулевое устройство, хотя бы один котел и хотя бы одна турбина. Выразите D и $\overline{D}$ через A, B_k и C_i.

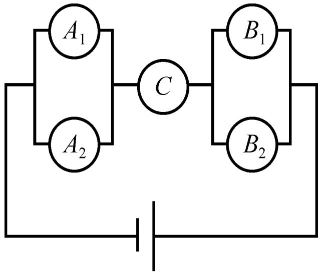


Рис. 4

1.14. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рисунке 3. Выход из строя элемента A_k (k = 1,2) событие A_k, а элемента B_i (i = 1,2) – событие B_i. Запишите события C и $\overline{C}$, если C означает разрыв цепи.

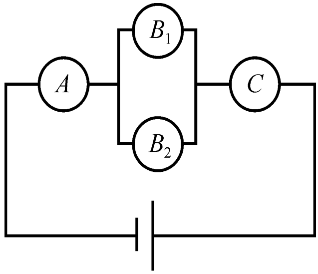


Рис. 5

1.15. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рисунке 4. Выход из строя элемента A_k (k = 1,2) – событие A_k, элемента C – событие C и элемента B_i (i = 1,2) – событие B_i. Запишите события D и $\overline{D}$, если D – разрыв цепи.

1.16. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рисунке 5. Выход из строя элемента A – событие A, элемента B_k (i = 1,2) – событие B_k и элемента C – событие C. Запишите события D и $\overline{D}$, если D – разрыв цепи.

1.17. Производятся наблюдения за группой, состоящей из четырех однородных объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен или не обнаружен. Рассматриваются события:

A – обнаружен ровно один из 4 объектов;
B – обнаружен хотя бы один из объектов;
C – обнаружено не менее 2 объектов;
D – обнаружено ровно 2 объекта;
E – обнаружено ровно 3 объекта; F – обнаружены все 4 объекта.

Укажите, в чем состоят события:

1) $A + B$; 2) AB; 3) $B + C$; 4) CD; 5) $E + F$.

1.18. Событие A = {хотя бы одно из имеющихся четырех изделий бракованное}, событие B = {бракованных изделий среди них не менее двух}. Чему равно событие: *а)* $A+B$; *б)* $A \cdot B$; *в)* $\overline{A} \cdot \overline{B}$?

1.19. Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события:

A – выпадение герба на первой монете;
B – выпадение цифры на первой монете;
C – выпадение герба на второй монете;

D – выпадение цифры на второй монете;
E – выпадение хотя бы одного герба;
F – выпадение хотя бы одной цифры;
G – выпадение одного герба и одной цифры;
H – невыпадение ни одного герба;
K – выпадение двух гербов.

Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события: 1) $A+C$; 2) AC; 3) EF; 4) $G+E$; 5) GE; 6) BD; 7) $E+K$?

2. Вероятность случайного события, формула классической вероятности. Формулы сложения вероятностей.

2.1. Отдел технического контроля обнаружил 5 бракованных изделий в партии из 1000 изделий. Найти частость изготовления бракованных изделий.

2.2. Для выяснения качества семян было отобрано и высеяно в лабораторных условиях 1000 штук. 980 семян дали нормальный всход. Найти частость нормального всхода семян.

2.3. Бросаются две монеты. Какова вероятность того, что герб выпадет хотя бы на одной из них?

2.4. В ящике находятся катушки четырех цветов, среди которых белого цвета 50%, красного – 20%, зеленого – 20% и синего – 10%. Какова вероятность того, что взятая наудачу катушка окажется зеленой или синей?

2.5. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет 5 очков.

2.6. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что это число некратное 5?

2.7. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что это число окажется нетривиальным делителем 20?

2.8. Наудачу выбрана кость домино из полного набора. Какова вероятность того, что сумма очков на выбранной кости равна 5?

2.9. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.

2.10. В урне a белых и b черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу извлеченный шар из этой урны окажется белым?

2.11. В урне a белых и b черных шаров. Из этой урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Какова вероятность того, что этот шар также белый?

2.12. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе цифры различны?

2.13. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 100. Какова вероятность того, что выбранное число при делении на 8 дает в остатке 2?

2.14. Какова вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число является простым и сумма его цифр равна 5?

2.15. Из 9-ти занумерованных цифрами от 1 до 9 карточек случайно без возвращения выбираются пять. Их номера записываются как цифры пятизначного числа. Какова вероятность, что это число четное?

2.16. Из множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ наудачу выбрано число q, после чего составлено уравнение $x^2 + 4x + q = 0$. Какова вероятность того, что корни этого уравнения окажутся: *а)* действительными числами; *б)* рациональными числами; *в)* действительными иррациональными числами?

2.17. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что оно простое и имеет вид: *а)* $6x+1$; *б)* $5x+3$; *в)* $6x+5$?

2.18. Пусть $P_{n.k}$ вероятность того, что случайно выбранное число из множества $\{1, 2, 3,\ldots, n\}$ делится на фиксированное натуральное число k. Найти предел этой вероятности при $n \to \infty$.

2.19. Из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ случайно выбирается число a. Пусть P_n – вероятность того, что число a^2-1 делится на 10. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

2.20. Из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ случайно выбирается число a. Пусть P_n – вероятность того, что число $2a+1$ делится на 5. Найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$.

2.21. Игральная кость бросается дважды. Пусть a – число очков, выпавшее при первом бросании, b – число очков, выпавшее при втором бросании. Найдите вероятности следующих событий: $\{a \neq b\}$, $\{a < b\}$, $\{2a = b\}$, $\{a^2 = b\}$.

2.22. Игральная кость бросается трижды. Пусть x – сумма очков, полученных при всех бросаниях. Что более вероятно: $x = 12$ или $x = 11$?

2.23. На две наудачу выбранные клетки шахматной доски поставлены два разноцветных слона. Какова вероятность того, что слоны бьют друг друга?

2.24. На две наудачу выбранные клетки шахматной доски поставлены два разноцветных ферзя. Найдите вероятность того, что ферзи не бьют друг друга.

3. Аксиоматическая и геометрическая вероятность.

3.1. Точка брошена в круг радиуса R. Найдите вероятность того, что она попадает внутрь данного вписанного этот круг квадрата.

3.2. В квадрат с вершинами в точках (0;0), (0;1), (1;1), (1;0) наудачу брошена точка $(x;y)$. Найдите вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y<2x$.

3.3. Расстояние от пункта A до B автобус проходит за 2 мин, а пешеход – за 15 мин. Интервал движения автобусов 25 мин. Вы подходите в случайный момент времени к пункту A и отправляетесь в B пешком. Найдите вероятность того, что в пути вас догонит очередной автобус.

3.4. На отрезок AB длиной 12 см наугад ставят точку M. Найдите вероятность того, что площадь квадрата, построенного на отрезке AM, будет заключена между 36 см^2 и 81 см^2.

3.5. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r<a$. Найдите вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

3.6. На паркет, составленный из правильных треугольников со стороной a, случайно брошена монета радиуса $r<\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$. Найдите вероятность того, что монета не заденет границы ни одного из треугольников.

3.7. Числа c и q наудачу выбираются из интервала (0; 1). Найдите вероятность того, что корни уравнения $x^2+cx+q=0$ окажутся действительными числами.

3.8. Числа c и q наудачу выбираются из интервала (–1; 1). Найдите вероятность того, что корни уравнения $x^2+cx+q=0$: *а)* действительные; *б)* комплексные; *в)* положительные; *г)* разных знаков; *д)* одного знака.

3.9. Стержень длины a наудачу разломан на 3 части. Найдите вероятность того, что длина каждой части окажется больше $\frac{a}{4}$.

3.10. Найдите вероятность того, что сумма двух наудачу взятых чисел из отрезка [–1;1] больше нуля, а их произведение отрицательно.

3.11. На плоскости заданы окружность радиуса R и точка A, находящаяся на расстоянии d ($d>R$) от центра окружности. Найдите вероятность того, что: а) прямая, проведенная случайным образом через точку A пересечет окружность; б) луч, проведенный случайным образом из точки A, пересечет окружность.

3.12. (Задача о встрече). Два лица договорились встретиться в определенном месте между 12 и 13 ч, причем каждый пришедший на свидание ждет другого в течение 20 мин, после чего уходит. Найдите вероятность встречи этих лиц, если каждый из них приходит на свидание в случайный момент времени, не согласованный с моментом прихода другого.

3.13. (Задача Бюффона). Плоскость разграфлена параллельными прямыми, расстояние между которыми равно $2a$. На эту плоскость наудачу брошена игла длиной 2ℓ ($\ell < a$). Найдите вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

3.14. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов равновозможно в течение данных суток. Найдите вероятность того, что одному из пароходов придется ждать освобождения причала, если время стоянки первого парохода 1 ч, а второго – 2 ч.

3.15. На окружность радиуса R наудачу поставлены три точки A, B, C. Найдите вероятность того, что треугольник ABC остроугольный.

3.16. В квадрат со стороной a брошена точка A. Найдите вероятность того, что расстояние от точки A до ближайшей стороны квадрата меньше, чем расстояние от A до ближайшей диагонали.

3.17. Числа a и b наудачу выбираются из интервала (0;1). Пусть S – число действительных корней многочлена $f_{a,b}(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x + b$. Найдите вероятности: *а)* $P(S=1)$; *б)* $P(S=3)$.

3.18. Найти вероятность того, что три числа, случайно выбранные из интервала (0; 1), могут являться сторонами треугольника.

4. Элементы комбинаторики в теории вероятностей.

4.1. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно сделать конверт с маркой для посылки письма?

4.2. Сколько словарей надо иметь, чтобы можно было непосредственно выполнить переводы с любого из 5 языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского – на любой другой из этих 5 языков?

4.3. У одного студента 5 книг, у другого – 9. Все книги различные. Сколькими способами студенты могут произвести обмен: *а)* одной книги на книгу? *б)* 2 книги на 2 книги?

4.4. На вершину горы ведут 5 тропинок. Сколькими способами турист может подняться в гору и потом спуститься с нее? Решите эту задачу с дополнительным условием: подъем и спуск должны происходить по разным тропинкам.

4.5. Имеются 3 письма, каждое из которых можно послать по 6 различным адресам. Сколькими способами можно осуществить рассылку писем, если: *а)* никакие 2 письма не посылать по одному адресу; *б)* по одному адресу можно посылать более одного письма.

4.6 В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человек при условии, что все они должны ехать в различных вагонах и *а)* распределение – упорядоченное; *б)* распределение – неупорядоченное?

4.7. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются всевозможные числа, каждое из которых состоит не более чем из 3 цифр. Сколько таких чисел можно составить, если: *а)* повторение цифр в числах не разрешается; *б)* разрешается повторение цифр?

4.8. Разыгрывается комплект медалей среди 10 равных по силам спортсменов. Сколько существует различных вариантов распределения медалей в этой группе спортсменов?

4.9. В группе 9 человек. Сколько существует различных вариантов распределения этих людей по 3-м подгруппам из 3-х человек?

4.10. Сколько существует различных автомобильных номеров данной серии, которые состоят из 4-х цифр, если: *а)* все цифры различны; *б)* имеется хотя бы две одинаковые цифры; *в)* имеется ровно две одинаковые цифры?

4.11. Три дороги соединяют города А и В, четыре дороги соединяют города В и С. Сколькими способами можно совершить поездку из А в С через В и вернуться в А также через В?

4.12. Сколькими способами можно расставить на полке семь различных книг, если: *а)* две определенные книги должны стоять рядом; *б)* эти две книги не должны стоять рядом (распределение считать упорядоченным)?

4.13. На окружности выбрано 10 точек. *а)* Сколько можно провести хорд с концами в этих точках? *б)* Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

4.14. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую – 5 и в третью – 12. Сколькими способами это можно сделать?

4.15. Для участия в команде тренер отбирает пять мальчиков из десяти. Сколькими способами он может сформировать команду, если два определенных мальчика должны войти в команду?

4.16. Сколько шестизначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если каждое число должно состоять из трех четных и трех нечетных цифр, причем никакая цифра не входит в число более одного раза?

4.17. Восемь человек должны сесть в два автомобиля, причем в каждом должно быть по крайней мере три человека. Сколькими способами они могут это сделать?

4.18. Сколько различных чисел можно получить, переставляя цифры числа 2 233 344 455?

4.19. Сколькими способами можно в строчку написать шесть плюсов и четыре минуса?

4.20. Имеется 20 наименований товаров. Сколькими способами их можно распределить по трем магазинам, если известно, что в первый магазин должно быть доставлено восемь наименований, во второй – семь наименований и в третий – пять наименований товаров?

4.21. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Считая, что номер 00000 возможен, найдите вероятность того, что в нем:

а) все цифры различные; *б)* все цифры нечетные.

4.22. В урне 4 белых и 2 черных шара. Из этой урны наудачу извлечены 2 шара. Какова вероятность того, что эти шары разного цвета?

4.23. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из этой урны наудачу извлекли 5 шаров. Какова вероятность того, что 2 из них белые, а 3 черные?

4.24. В урне a белых и b черных шаров. Из этой урны наудачу извлекают 2 шара. Какова вероятность того, что эти шары одного цвета?

4.25. Какова вероятность того, что номер встречной машины содержит только две одинаковые цифры, равные 0 (считаем, что номер 0000 невозможен)?

4.26. В некоторый день недели во всех классах школы должно быть по 6 уроков. В этот день случайным образом ставятся в расписание 3 урока одного учителя и 2 урока другого. Какова вероятность того, что эти учителя не будут одновременно заняты?

4.27. 10 человек случайным образом рассаживаются на десятиместную скамейку. Какова вероятность того, что 2 определенных лица окажутся рядом? Как изменится вероятность, если они садятся за круглый стол?

4.28. В урне 10 шаров, из которых 2 белых, 3 черных и 5 синих. Наудачу извлечены 3 шара. Какова вероятность того, что все 3 шара разного цвета?

4.29. Три человека произвольно размещаются в 5 вагонах метро. Какова вероятность того, что: а) все они зайдут в один вагон; б) все они зайдут в третий вагон; в) все они окажутся в разных вагонах.

4.30. На 10 карточках написаны буквы «а», «а», «а», «м», «м», «т», «т», «е», «и», «к». После тщательного перемешивания карточки раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «математика»?

4.31. Игральная кость брошена 3 раза. Какова вероятность того, что при этом все выпавшие грани различны?

4.32. В урне 5 белых и 5 черных шаров. Из этой урны последовательно извлечены все шары по одному и разложены в ряд. Какова вероятность того, что цвета шаров чередуются?

4.33. В лифт 9-ти этажного дома входят 4 человека. Какова вероятность того, что они выйдут на разных этажах?

4.34. На пятиместную скамейку случайным образом садится 5 человек. Какова вероятность того, что 3 определенных лица окажутся рядом?

4.35. В урне 10 шаров. Вероятность того, что 2 извлеченных шара окажутся белыми, равна 2/15. Сколько в урне белых шаров?

4.36. В урне n белых и m черных шаров. Наудачу извлечены k шаров ($k > m$). Какова вероятность того, что в урне остались одни белые шары?

4.37. Из урны, содержащей N шаров, N раз извлекают по одному шару, каждый раз возвращая извлеченный шар. Какова вероятность того, что все шары извлекались по одному разу?

4.38. В урне a белых, b черных и c красных шаров. Из этой урны один за другим вынимают без возвращения все шары и записывают их цвета. Найдите вероятность того, что в этом списке белый цвет встретится раньше черного.

4.39. $2n$ команд разбиты на 2 подгруппы по n команд. Найдите вероятность того, что 2 наиболее сильные команды попадут: а) в разные подгруппы; б) в одну подгруппу.

4.40. Владелец одной карточки лотереи «Спортлото» (6 из 49) зачеркивает 6 номеров. Какова вероятность того, что им будет угадано: *а)* все 6 номеров в очередном тираже; *б)* 5 или 6 номеров; *в)* по крайней мере 3 номера?

4.41. Автобусу, в котором четыре пассажира, предстоит сделать 8 остановок. Предполагая, что всевозможные способы распределения пассажиров по остановкам равновозможны, найдите вероятность того, что никакие 2 пассажира не выйдут на одной остановке.

4.42. Из чисел 1, 2, …, N выбирают наудачу r различных чисел ($r \le N$). Найдите вероятность того, что будут выбраны r последовательных чисел.

4.43. Из полной колоды карт (52 листа) извлекают три карты. Какова вероятность, что среди них есть карты одной масти?

4.44. Имеется n шариков, которые случайным образом разбрасываются по m лункам. Найдите вероятность того, что в первую лунку упадет ровно k_1 шариков, во вторую – k_2 шариков и т. д., в m-ю – k_m шариков, если $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

4.45. В условиях предыдущей задачи найдите вероятность того, что в одной из лунок (безразлично в какой) будет k_1 шариков, а в другой – k_2 шариков и т. д., в m-й – k_m шариков (числа $k_1, k_2, \ldots, k_m$ предполагаются различными).

4.46. Из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ последовательно без возвращения выбираются числа x_1 и x_2. Найдите $P(x_2 > x_1)$.

4.47. 10 рукописей разложены по 30 папкам (одна рукопись занимает 3 папки). Найдите вероятность того, что в случайно выброшенных 6 папках не содержится целиком ни одной рукописи.

5. Условная вероятность. Правила умножения вероятностей. Независимые события.

5.1. Два стрелка сделали по одному выстрелу по мишени. Известно, что вероятность попадания в мишень для одного из стрелков равна 0,6, а для другого – 0,7. Найдите вероятность того, что:

а) только один из стрелков попадет в мишень;
б) ни один из стрелков не попадет в мишень;
в) оба стрелка попадут в мишень;
г) хотя бы один из стрелков попадет в мишень.

5.2. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна p, а для второго – 0,7. Известно, что вероятность ровно одного попадания при одном выстреле обоих стрелков равна 0,38. Найдите p.

5.3. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,2. Произведены 3 независимых измерения. Найдите вероятность того, что не более чем в одном измерении допущенная ошибка превысит заданную точность.

5.4. В ящике 10 деталей, среди которых 7 окрашенных. Сборщик наудачу достает 4 детали. Найдите вероятность того, что все взятые детали окрашенные.

5.5. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна $1/7$. Какова вероятность, купив 3 билета, выиграть: *а)* по всем трем билетам; *б)* ни по одному билету; *в)* хотя бы по одному билету?

5.6. Детали проходят 3 операции обработки. Вероятность получения брака на первой операции равна 0,02; на второй – 0,03; на третьей – 0,02. Найдите вероятность получения детали без брака после 3 операций, предполагая, что получения брака на отдельных операциях являются независимыми событиями.

5.7. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при 4 независимых выстрелах равна 0,9984. Найдите вероятность попадания при одном выстреле.

5.8. Среди облигаций займа половина выигрышных. Какое наименьшее количество облигаций надо взять, чтобы быть уверенным в выигрыше хотя бы на одну облигацию с вероятностью, большей 0,95?

5.9. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает ее наудачу. Найдите вероятность того, что ему придется сделать не более, чем 2 неудачные попытки.

5.10. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,2. Произведено 10 выстрелов. Найдите вероятность поражения цели, если для этого достаточно одного попадания.

5.11. Игра проводится до выигрыша одним из двух игроков 2 партий подряд (ничья исключается). Вероятность выигрыша партии каждым из игроков равна 0,5 и не зависит от исходов предыдущих партий. Найдите вероятность того, что игра окончится до 6 партии.

5.12. Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый и второй вопросы билета равны 0,9; на третий – 0,8. Найдите вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить: *а)* на все вопросы; *б)* хотя бы на 2 вопроса.

5.13. В 2 урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем, в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8 и 6. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одного цвета?

5.14. Стрелок стреляет три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найдите вероятность того, что он: а) промахнется все 3 раза; б) попадет хотя бы один раз; в) попадет 2 раза.

5.15. Надежность (вероятность безотказной работы) некоторой конструкции в течение 4 лет равна 0,75, в течение 2 лет – 0,8. Какова вероятность того, что конструкция, проработавшая 2 года, проработает еще 2 года?

5.16. Студент успел подготовить к экзаменам 20 вопросов из 25. Какова вероятность того, что из 3 наудачу выбранных вопросов студент знает не менее 2?

5.17. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 выбирается одна, а из оставшихся – вторая. Найдите вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: *а)* первый раз; *б)* второй раз; *в)* оба раза.

5.18. Какое событие более вероятно: событие A = «при одновременном бросании 4 игральных костей появится хотя бы одна единица» или событие B = «при 24 бросаниях 2 костей появятся хотя бы один раз 2 единицы»?

5.19. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания одного из них. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка (он начинает стрельбу) равна p, а для второго – q ($0 < p < 1$, $0 < q < 1$). Найдите вероятности следующих событий: а) первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй; б) стрельба закончится на третьем выстреле второго стрелка; в) стрельба закончится выстрелом первого стрелка не позже, чем при третьем его выстреле. Найти указанные выше в пунктах а), б) и в) вероятности при $p = 0{,}2$ и $q = 0{,}3$.

5.20. Используя условие предыдущей задачи, найдите вероятность того, что стрельбу завершит второй стрелок.

5.21. Двое поочередно бросают монету, причем выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определите вероятности выигрыша для каждого игрока.

5.22. В урне a белых и b черных шаров. 2 игрока последовательно достают по одному шару, возвращая каждый раз извлеченный шар. Игра продолжается до тех пор, пока кто-нибудь из них не достанет белый шар. Найдите вероятность того, что: а) первым достанет белый шар игрок, начинающий игру; б) первым достанет белый шар второй игрок.

5.23. В урне 2 белых и 4 черных шара. 2 игрока достают из этой урны поочередно по одному шару, не возвращая каждый раз извлеченный шар. Игра продолжается до появления белого шара. Определите вероятность того, что первым достанет белый шар игрок, начинающий игру.

5.24. Трое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше выпадет герб. Определите вероятности выигрыша для каждого из игроков.

5.25. В жюри из 3 человек 2 члена независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью p, а третий для принятия решения бросает монету (окончательное решение выносится большинством голосов). С другой стороны, некий судья принимает правильное решение с вероятностью p. Кто с большей вероятностью принимает правильное решение: жюри или судья?

5.26. В урне n белых и n черных шаров. Все шары из урны извлекаются парами, причем вынутые шары обратно не возвращаются. Какова вероятность того, что все пары будут состоять из разноцветных шаров?

5.27. В студенческой группе 16 юношей и 8 девушек. Какова вероятность того, что при случайном разбиении группы на подгруппы по 3 человека все подгруппы будут состоять из 2-х юношей и 1 девушки?

6. Формула полной вероятности и формула Байеса.

6.1. Курс доллара повышается в течение квартала с вероятностью 0,9 и понижается с вероятностью 0,1. При повышении курса доллара фирма рассчитывает получить прибыль с вероятностью 0,85, а при понижении – с вероятностью 0,5. Найти вероятность того, что фирма получит прибыль.

6.2. Брак в продукции завода вследствие дефекта А составляет 5%, причем среди забракованной по признаку А продукции 6% имеют дефект В, а в продукции, свободной от дефекта А, дефект В составляет 2%. Найдите вероятность наличия у наудачу взятой единицы продукции завода *а*) дефекта А; *б*) дефекта В.

6.3. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый.

6.4. В каждой из 3-х урн по 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найдите вероятность того, что шар, извлеченный затем из третьей урны, окажется белым.

6.5. В группе из 20 стрелков имеются 4 отличных, 10 хороших и 6 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,9, для хорошего – 0,7, для посредственного – 0,5. Найдите вероятность того, что: *а*) наудачу выбранный стрелок попадет в цель; *б*) два наудачу выбранных стрелка попадут в цель.

6.6. В студенческом стройотряде 2 бригады первокурсников и одна – второкурсников. В каждой бригаде первокурсников 5 юношей и 3 девушки, а в бригаде второкурсников 4 юношей и 4 девушки. По жеребьевке из отряда выбрали одну из бригад и из нее одного человека для поездки в город. Какова вероятность того, что: *а*) выбран юноша? *б*) выбранный юноша является первокурсником?

6.7. 60% учащихся в школе – девочки. 80% девочек и 75% мальчиков имеют билеты в театр. В учительскую принесли кем-то потерянный билет. Какова вероятность того, что этот билет принадлежал: *а*) девочке; *б*) мальчику?

6.8. Урна I содержит 3 красных и 1 белый шар, урна II содержит 1 красный и 3 белых шара. Из случайно выбранной урны извлечен шар. Какова вероятность того, что: *а*) вынутый шар красный; *б*) этот красный шар вынимался из I урны.

6.9. На некоторой фабрике машина A производит 40% всей продукции, а машина B – 60%. В среднем 9 единиц из 1000 единиц продукции, произведенных машиной A, оказывается браком, а у машины B – брак 2 единицы из 500. Единица продукции, выбранная случайным образом, оказалась браком. Какова вероятность того, что она произведена на машине B?

6.10. Из 5 стрелков 2 попадают в цель с вероятностью 0,6 и 3 – с вероятностью 0,4. *а*) Что вероятнее: попадет в цель наудачу выбранный стрелок или нет? *б*) Наудачу выбранный стрелок попал в цель. Что вероятнее: принадлежит он к первым двум или к трем последним?

6.11. В урне 15 шаров черного и белого цветов, причем число белых с равной вероятностью может быть равно 0; 1; 2; 3 или 4. Из урны достали без возвращения 5 шаров, и они все оказались черными. Какова вероятность того, что оставшиеся в урне шары тоже черные?

6.12. Для сдачи экзамена студентам было необходимо подготовить 30 вопросов. Из 25 студентов 10 подготовили все вопросы, 8 – 25 вопросов, 5 – 20 вопросов и 2 – 15 вопросов. Вызванный студент ответил на поставленный вопрос. Найдите вероятность того, что этот студент: *а*) подготовил все вопросы; *б*) подготовил только половину вопросов.

6.13. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по шоссе, как 3 : 2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

6.14. Из 20 студентов, пришедших на экзамен, 8 подготовлены отлично, 6 – хорошо, 4 – посредственно и 2 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 40 вопросов. Студент, подготовленный отлично, знает все вопросы, хорошо – 35, посредственно – 25 и плохо – 10 вопросов. Некоторый студент ответил на все 3 вопроса билета. Найдите вероятность того, что он подготовлен: *а*) отлично; *б*) плохо.

6.15. Известно, что 96% выпускаемых заводом изделий отвечает стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98, а нестандартную с вероятностью 0,05. Определите вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, отвечает стандарту.

6.16. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 – с вероятностью 0,7; 4 – с вероятностью 0,6 и 2 – с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок не попал в мишень. К какой группе вероятнее всего принадлежит этот стрелок?

6.17. Имеются 2 урны. В первой 3 белых и 4 черных шара, во второй – 2 белых и 3 черных. Из первой урны наудачу перекладывают во вторую 2 шара, а затем из второй урны извлекают один шар. Какой состав переложенных шаров наиболее вероятен, если шар, извлеченный из второй урны, окажется белым?

6.18. Два охотника одновременно стреляют в цель. Известно, что вероятность попадания у первого охотника равна 0,2, а у второго – 0,6. В результате одного залпа оказалось одно попадание в цель. Чему равна вероятность того, что промахнулся первый охотник?

6.19. В 3-х урнах содержатся белые и черные шары. В первой – 2 белых и 3 черных шара, во второй – 2 белых и 2 черных шара, в третьей – 3 белых и один черный шар. Из первой урны переложен шар во вторую. После этого шар из второй урны переложен в третью. Наконец, из третьей урны шар переложен в первую урну. *а*) Какой новый состав шаров в первой урне представляется наиболее вероятным? *б*) Определите вероятность того, что во всех урнах состав шаров останется без изменения.

6.20. В первой урне находится один белый и 9 черных шаров, а во второй – один черный и 5 белых шаров. Из каждой урны удалили случайным образом по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третью (свободную) урну. Найдите вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

6.21. Имеется n урн, в каждой из которых a белых и b черных шаров. Из первой урны во вторую перекладывается один шар; затем из второй в третью – один шар и т. д., из $(n-1)$–й урны в n-ю перекладывается один шар. Наконец, из последней урны извлекается один шар. Найдите вероятность того, что он белый.

6.22. Имеется 129 монет, причем у одной из них герб с обеих сторон, а остальные монеты обычные. Наугад выбранную монету, не разглядывая, бросают 10 раз, причем при всех бросаниях она падает гербом кверху. Найдите вероятность того, что была выбрана монета с 2 гербами.

6.23. В условиях предыдущей задачи допустим, что выбранная монета падает гербом кверху n раз подряд. При каком n шансы в пользу обычной и «двухгербовой» монеты будут равны?

6.24. Самолет сбрасывает на цель одну бомбу весом 500 кг и две бомбы весом 250 кг. Вероятность попадания «большой» бомбы равна 0,5, а «маленькой бомбы – 0,8. Для поражения цели достаточно попадания одной «большой» бомбы или двух «маленьких». При попадании только одной «маленькой» бомбы цели поражается с вероятностью 0,5. Найти вероятность поражения цели.

6.25. При переливании крови надо учитывать группу крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно перелить кровь любой группы; человеку со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой группой крови можно перелить только кровь первой группы. Среди населения 33,7% имеют первую, 37,5% - вторую, 20,9% - третью и 7,9% - четвертую группу крови. *а*) Найдите вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора; *б*) найдите вероятность того, что переливание крови можно осуществить, если имеются 2 донора.

6.26. События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – попарно несовместные и равновозможные гипотезы, сумма которых равна достоверному событию. Условные вероятности некоторого события A при условии H_i равны: $P(A/H_i)=\frac{i}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если в 2-х независимых испытаниях оба раза реализовалось событие A, то найдите $P(H_i / A_1A_2)$, где A_1 обозначает наступление события A в первом испытании, а A_2 – наступление события A во втором испытании.

6.27. За некоторый промежуток времени некоторая элементарная частица (ЭЧ) может исчезнуть с вероятностью ¼, сохраниться с вероятностью ¼ и разделиться на 2 с вероятностью ½. В следующий такой же промежуток времени с каждой ЭЧ независимо от ее «происхождения» происходит то же самой. Сколько ЭЧ и с какими вероятностями может оказаться концу второго промежутка времени?

6.28. (Задача-шутка). Один властелин, которому наскучил его звездочет со своими ложными предсказаниями, решил казнить его. Однако, будучи добрым повелителем, он решил дать звездочету последний шанс. Ему было велено распределить по 2-м урнам 4 шара: 2 черных и 2 белых. Палач выберет наугад одну из урн и из нее вытащит один шар. Если этот шар будет черным, то звездочета казнят, в противном случае его жизнь будет спасена. Каким образом звездочет должен разместить шары в урнах, чтобы обеспечить себе максимальную вероятность быть спасенным? Чему равна эта вероятность?

7. Схема и формула Бернулли. Производящая функция.

7.1. Какова вероятность того, что при 8 бросаниях монеты герб выпадет 5 раз?

7.2. В семье 5 детей. Найдите вероятность того, что среди детей более двух мальчиков, если вероятность рождения мальчика принять 0,5.

7.3. Найдите наиболее вероятное число выпадения шестерки при 46 бросаниях игральной кости.

7.4. Контрольное задание состоит из 10 вопросов, предусматривающих ответы «да» и «нет». Найдите *а)* наиболее вероятное число правильных ответов, которые даст учащийся, если он станет выбирать ответ по каждому вопросу наудачу; *б)* вероятность наиболее вероятного числа правильных ответов.

7.5. Вероятность изготовления стандартной детали 0,95. Сколько деталей n должно быть в партии, чтобы наиболее вероятное число нестандартных деталей в ней равнялось 55?

7.6. На автобазе имеется 12 автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8. Найдите вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не меньше 8 автомашин.

7.7. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найдите вероятность того, что из 5 первых покупателей обувь этого размера понадобится: *а)* одному; *б)* по крайней мере одному.

7.8. Контрольное задание состоит из 5 вопросов, на каждый из которых дается 4 варианта ответа, причем один из них правильный, а остальные неправильные. Найдите вероятность того, что учащийся, случайно выбирающий ответы, даст: *а)* 3 правильных ответа; *б)* не менее 3 правильных ответов.

7.9. Рабочий обслуживает 12 станков одного типа. Вероятность того, что станок потребует внимания рабочего в течение часа, равна $1/3$. Найдите: *а)* вероятность того, что в течение часа 4 станка потребуют внимания рабочего; *б)* наиболее вероятное число станков, которые потребуют внимание рабочего в течение часа.

7.10. Проведено 5 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании 2 монет. Найдите вероятность того, что ровно в 3 испытаниях появились по 2 герба.

7.11. При передаче сообщения вероятность искажения для каждого знака равна 0,1. Какова вероятность того, что сообщение из 5 знаков: *а)* не будет искажено; *б)* содержит ровно одно искажение; *в)* содержит не более 3 искажений?

7.12. Испытание состоит в бросании 3 игральных костей. Найдите вероятность того, что в 6 независимых испытаниях ровно 2 раза выпадет по 3 единицы.

7.13. Производится $2n$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность «успеха» равна p. Найдите вероятность того, что все испытания с четными номерами закончатся «успехом», а общее число успехов будет равно $n + m \quad (0 \le m \le n)$.

7.14. В круг вписан квадрат. Найдите вероятность того, что среди 4 точек, наудачу брошенных в круг, ровно одна попадет внутрь квадрата.

7.15. В круг вписан правильный треугольник. Найдите вероятность того, что из 5 наудачу брошенных в круг точек ни одна не попадет внутрь указанного треугольника.

7.16. Мишень имеет форму квадрата, в который вписан круг. По мишени наудачу производится 4 независимых выстрела. Какова вероятность получения ровно 3 попадания в круг?

7.17. Опыт состоит в делении заданного отрезка случайным образом на 3 части. Предположим, что производится 6 независимых опытов такого рода. Какова вероятность того, что в 2 случаях из полученных частей отрезка можно составить треугольник?

7.18. Событие B наступает в том и только в том случае, если событие A наступает не менее 3 раз. Определите вероятность наступления события B, если вероятность наступления события A при одном испытании равна 0,3 и произведено: *а)* 5 независимых испытаний; *б)* 7 независимых испытаний.

7.19. Производится 4 независимых опыта, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью 0,3. Событие B наступает с вероятностью 1, если событие A произошло не менее 2 раз; не может наступить, если событие A не имело места, и наступает с вероятностью 0,6, если событие A имело место один раз. Найдите вероятность события B.

7.20. Вероятность хотя бы одного появления события A при 4 независимых испытаниях равна 0,5904. Какова вероятность появления события A в одном испытании, если в каждом опыте эта вероятность одна и та же?

7.21. Игра состоит в набрасывании колец на колышек. Игрок получает 6 колец и бросает их до первого попадания или до полного израсходования колец. Найдите вероятность того, что хотя бы одно кольцо останется не израсходованным, если вероятность попадания при каждом броске равна 0,1.

7.22. 2 баскетболиста делают по 3 броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча в корзину при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Найдите вероятность того, что: *а)* у обоих будет равное количество попаданий; *б)* у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.

7.23. Прибор выходит из строя, если перегорит не менее 5 ламп I типа или не менее 2 ламп II типа. Определите вероятность выхода из строя прибора, если известно, что перегорело 5 ламп, а вероятности перегорания ламп I и II типов равны соответственно 0,7 и 0,3 (выход из строя ламп – события независимые).

7.24. Из ящика, в котором 20 белых и 2 черных шара, n раз извлекаются шары по одному, причем каждый раз шар возвращается. Определите наименьшее значение n, при котором вероятность достать хотя бы один раз черный шар будет больше 0,5.

7.25. 2 шахматиста условились сыграть 10 результативных партий. Вероятность выигрыша каждой отдельной партии первым шахматистом равна $p = 2/3$, а для второго шахматиста эта вероятность равна $q = 1/3$. Чему равны вероятности: *а)* выигрыша всей игры для первого шахматиста; *б)* выигрыша всей игры для второго шахматиста; *в)* ничейного исхода всей игры?

7.26. Игральная кость брошена 6 раз. Найдите вероятность того, что на верхней грани появятся все числа 1,2,3,4,5,6 по одному разу.

7.27. Игральная кость брошена 6 раз. Найдите вероятность того, что на верхней грани 3 раза появится четное число, 2 раза – число 5 и один раз появится 1 или 3.

7.28. Рабочий производит с вероятностью 0,9 годное изделие, с вероятностью 0,09 – изделие с устранимым дефектом и с вероятностью 0,01 – с неустранимым дефектом. Произведено 4 изделия. Найдите вероятность того, что среди них 2 годных и хотя бы одно изделие с устранимым дефектом.

7.29. В электропоезд, состоящий из 6 вагонов, садятся 12 пассажиров, причем выбор каждым пассажиром любого вагона равновозможен. Определите вероятность того, что: *а)* в каждый вагон вошло по 2 человека; *б)* в один вагон никто не вошел, в другой вошел один человек, в 2 вагона – по 2 человека, а в оставшиеся 2 вагона соответственно 3 и 4 человека.

7.30. В круг вписан квадрат. Найдите вероятность того, что из 10 точек, брошенных наудачу независимо одна от другой внутрь круга, 4 попадут в квадрат, 3 – в один сегмент и по одной – в оставшиеся 3 сегмента.

7.31. В урне 3 шара: черный, красный и белый. Из урны шары извлекались по одному 5 раз, причем после каждого извлечения шар возвращался обратно. Найдите вероятность того, что черный и белый шары извлечены не менее чем по 2 раза каждый.

8. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Функции Лапласа.

8.1. Вероятность рождения мальчика примем равной 0,5. Найдите вероятность того, что среди 200 новорожденных детей будет: *а)* 90 мальчиков; *б)* 110 мальчиков; *в)* от 90 до 110 мальчиков.

8.2. Вероятность того, что покупателю требуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найдите вероятность того, что среди 100 покупателей потребуют обувь 41-го размера: *а)* 25 человек; *б)* от 10 до 30 человек; *в)* не более 30 человек; *г)* не менее 35 человек.

8.3. 100 станков работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого из них в течение смены равна 0,8. Найдите вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: *а)* 85 станков; *б)* от 75 до 85 станков.

8.4. Вероятность появления события *A* в каждом из 1500 независимых испытаний равна $p = 0,4$. Найдите вероятность того, что число появлений события A заключено между: *а)* 570 и 630; *б)* 600 и 660.

8.5. Вероятность появления события A в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний n, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие A появится не менее 75 раз?

8.6. Вероятность получения положительного результата в каждом из независимых опытов равна 0,9. Сколько нужно произвести опытов n, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат?

8.7. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия в пути равна 0,0002. Найдите вероятность того, что среди 5000 изделий в пути будет повреждено: *а)* ровно 3 изделия; *б)* ровно одно изделие; *в)* не более 3 изделий; *г)* более 3 изделий.

8.8. Вероятность того, что на странице книги могут оказаться опечатки, равна 0,002. Проверяется книга, содержащая 500 страниц. Найдите вероятность того, что с опечатками окажутся: *а)* 5 страниц; *б)* от 3 до 5 страниц.

8.9. Радиоаппаратура состоит из 1000 микроэлементов. Вероятность отказа каждого элемента в течение суток равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Найдите вероятность отказа: *а)* 2-х элементов; *б)* не менее 2-х элементов за сутки.

8.10. Опыт состоит в бросании игральной кости 600 раз. Оцените вероятность того, что частота выпадения шестерки отклонится от вероятности выпадения шестерки в одном бросании менее чем: *а)* на 0,01; *б)* на 0,02.

8.11. Вероятность наступления некоторого события при одном испытании равна $p = 0,4$. Найдите вероятность того, что при 1000 испытаниях частота наступления этого события отклонится от вероятности $p = 0,4$ не более чем на 0,05.

8.12. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найдите вероятность наиболее вероятного числа бракованных деталей среди наудачу отобранных 100 деталей.

8.13. По мишени произведено 200 независимых выстрелов (при одинаковых условиях), которые дали 116 попаданий. Определите: *а)* какое значение вероятности попадания при одном выстреле более вероятно: 0,5 или $2/3$, если до опыта гипотезы были равновероятны и единственно возможны; *б)* чему равны эти вероятности?

8.14. Для поступления в университет необходимо набрать определенное количество баллов. В среднем с этим справляются 25% абитуриентов. В приемную комиссию поступило 1800 заявлений. Найдите: *а)* вероятность того, что хотя бы 450 из них наберут проходную сумму балов; *б)* сколько заявлений должно поступить в приемную комиссию, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9973, нужную сумму баллов набрали не менее 450 абитуриентов?

8.15. Кандидата в высший орган республики поддерживают 80% населения. В каких пределах с вероятностью 0,95 будет находиться число n проголосовавших за этого кандидата на выборах, если число избирателей равно 1 500 000?

8.16. Завод отправил на базу 10 тысяч стандартных изделий. При транспортировке допускается повреждение 0,02% изделий. Найти вероятность того, что поврежденными окажутся: *а)* ровно 3 изделия; *б)* по крайней мере 3 изделия.

8.17. По результатам проверок налоговой инспекцией установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушения финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных малых предприятий имеют нарушения: *а)* 480 предприятий; *б)* наивероятнейшее число предприятий; *в)* не менее 480; *г)* от 480 до 520.

8.18. Строительная фирма раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам жителей города. Прежний опыт работы показывает, что примерно в одном случае из 2000 следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 100 тысяч листков число заказов будет: *а)* равно 48; *б)* от 45 до 55.

8.19. При обследовании уставных фондов банков установлено, что пятая часть банков имеет уставный фонд свыше 100 млн. у.е. Найти вероятность того, что среди 1800 банков такой уставный капитал имеют: *а)* не менее 300; *б)* от 300 до 400.

8.20. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 800 пассажиров и вероятность такого числа опоздавших.

8.21. Вероятность того, что дилер, торгующий ценными бумагами, продаст их, равна 0,7.Сколько должно быть ценных бумаг, что бы можно было утверждать с вероятностью 0,996, что доля проданных отклоняется от 0,7 по модулю не более, чем на 0,04 ?

8.22. В страховой компании 10 тысяч клиентов. Страховой взнос каждого составляет 500 у.е. При наступлении страхового случая, вероятность которого по оценкам экспертов равна 0,005, страховая компания обязана выплатить клиенту сумму размером 50 тысяч у.е. На какую минимальную прибыль может рассчитывать страховая компания с надежностью 0,95 ?

8.23. В страховой компании 10 тысяч клиентов. Каждый из них, страхуясь от несчастного случая, вносит 500 у.е. Вероятность несчастного случая равна 0,0055, а страховая сумма, выплачиваемая пострадавшему, составляет 50 тысяч у.е. Какова вероятность того, что: *а)* страховая компания потерпит убыток; *б)* на выплату страховых сумм уйдет более половины всех средств, поступивших от клиентов.

9. Случайные величины (с.в.). Функция распределения с.в. Дискретные с.в.

9.1. Пусть задана функция распределения $F_\xi(x)$ с.в. ξ. Выразить через $F_\xi(x)$ вероятности *а)* $P(a \le \xi < b)$, *б)* $P(a < \xi < b)$, *в)* $P(a \le \xi \le b)$ (аналогично формулам (2)).

9.2. При каких значениях параметров a, b и c функция

$F(x) = \begin{cases} a, x \le \pi/2 \\ b\cos x, \pi/2 < x \le \pi \\ c, x > \pi \end{cases}$ является функцией распределения какой-либо с.в.? Сделать чертеж.

9.3. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. *ДСВ* ξ – число промахов. Найдите закон распределения ξ. Постройте ее функцию распределения. Найдите вероятности событий: $\xi < 2$; $\xi \le 3$; $1 < \xi \le 3$.

9.4. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Найдите закон распределения *ДСВ* ξ – числа красных карандашей в выборке. Постройте ее функцию распределения. Найдите вероятность события $0 < \xi \le 2$.

9.5. Дважды брошена игральная кость. *ДСВ* ξ равна разности между числом очков при первом бросании и числом очков при втором бросании. Найдите закон распределения ξ и вероятность события $2 \le \xi \le 4$.

9.6. Бросается игральная кость до первого появления шестерки. С.в. ξ равна количеству бросаний кости. Найдите закон распределения *ДСВ* ξ и вероятность события $\xi \le 5$.

9.7. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка p_1, для второго – p_2. *ДСВ* ξ равна разности между числом попаданий в мишень первым стрелком и числом попаданий в мишень вторым стрелком. Найдите закон распределения ξ.

9.8. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая независимо друг от друга по 2 выстрела. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,6. Найдите закон распределения *ДСВ* ξ, равной общему числу попаданий в мишень.

9.9. Рабочий обслуживает 4 независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,7, для второго – 0,75, для третьего – 0,8, для четвертого – 0,9. Найдите закон распределения *ДСВ* ξ, равной числу станков, которые не потребуют внимания рабочего.

9.10. Мишень состоит из круга № 1 и двух концентрических колец с номерами 2 и 3. Попадание в круг № 1 дает 10 очков, в кольцо № 2 – 5 очков, в кольцо № 3 – (–1) очко. Вероятности попадания в круг № 1 и кольца № 2 и № 3 соответственно равны 0,5; 0,3; 0,2. Найдите закон распределения суммы очков в результате 3 попаданий в мишень.

9.11. Задана функция распределения *ДСВ* ξ

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 2,\\ 0{,}3, & \text{если } 2<x\le 3,\\ 0{,}5, & \text{если } 3<x\le 4,\\ 1, & \text{если } x>4.\end{cases}$$

а) Найдите вероятность события $1\le\xi\le 3$.

б) Найдите закон распределения случайной величины ξ.

9.12. Задана функция распределения *ДСВ* ξ

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 1,\\ 0{,}25, & \text{если } 1<x\le 3,\\ 0{,}4, & \text{если } 3<x\le 4,\\ 0{,}8, & \text{если } 4<x\le 5,\\ 1, & \text{если } x>5.\end{cases}$$

а) Найдите вероятность событий: $\xi=2$ и $2<\xi\le 4$.

б) Составьте закон распределения данной случайной величины.

9.13. Выясните, является ли $F(x)$ функцией распределения случайной величины. Постройте схематически график данной функции.

1) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,\\ 0{,}3, & \text{если } 0<x\le 1,\\ 0{,}5, & \text{если } 1<x\le 2,\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$

2) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,\\ 0{,}3, & \text{если } 0<x\le 1,\\ 0{,}2, & \text{если } 1<x\le 2,\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$

3) $F(x)=\begin{cases}0{,}5e^x, & \text{если } x\le 0,\\ 0{,}8, & \text{если } 0<x\le 1,\\ 1, & \text{если } x>1.\end{cases}$

4) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,\\ 0{,}1x, & \text{если } 0<x\le 5,\\ 0{,}4, & \text{если } 5<x\le 6,\\ 1, & \text{если } x>6;\end{cases}$

5) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1, \\ 0{,}5, & \text{если } 1 < x \le 2, \\ 0{,}25x, & \text{если } 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{если } x > 3; \end{cases}$

9.14. Партия изделий содержит 10% брака. Из партии наудачу берем 5 изделий. Найти закон распределения числа бракованных изделий в выборке и вероятность того, что таких окажется более одного.

9.15. В магазине имеются 10 телевизоров, из которых 4 бракованные. Найти закон распределения числа небракованных телевизоров среди трех выбранных.

9.16. Для рекламы фирма вкладывает в каждую 10-ю единицу продукции приз в 100 долларов. Пусть X – с.в. размера выигрыша при 5 сделанных покупках. Найти закон распределения данной с.в.

9.17. В экзаменационном билете 3 задачи. Вероятность правильного решения студентом первой задачи равна 0,8, второй – 0,6, третьей – 0,4. Найти закон распределения числа правильно решенных задач.

9.18. Пусть X – число выпадений герба при 4-х бросаниях монеты. Найти закон распределения данной случайной величины.

9.19. В ящике лежат n изделий, из которых одно бракованное. Из ящика извлекают изделия одно за другим до тех пор, пока не будет вынуто бракованное изделие. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу вынутых изделий.

10. Непрерывные с.в. Плотность вероятности.

10.1. С.в. ξ имеет плотность вероятности (закон Коши) $p_\xi(x)=\dfrac{c}{x^2+1}$.

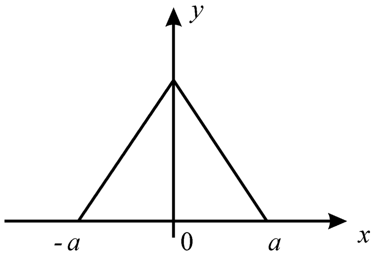
Найдите: *а)* постоянную c; *б)* функцию распределения $F_\xi(x)$; *в)* вероятность события $-1 < \xi < 1$.

10.2. С.в. ξ имеет плотность вероятности $p_\xi(x)=\begin{cases} c\cos x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Найдите: *а)* постоянную c; *б)* функцию распределения $F_\xi(x)$; *в)* вероятность события $|\xi| \le \frac{\pi}{4}$.

10.3. С.в. ξ имеет плотность вероятности $p_\xi(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0,\\ 2h^2xe^{-h^2x^2}, \ x>0.\end{cases}$ (закон Релея). Найдите а) функцию распределения $F_\xi(x)$; б) вероятность события $\xi < 1$.

10.4. С.в. ξ распределена по закону Симпсона (по «закону равнобедренного треугольника»). График плотности указан на рисунке. Напишите выражение для плотности вероятности. Найдите *а)* выражение для плотности вероятности; *б)* функцию распределения; *в)* постройте ее график; *г)* вероятность события $-\frac{a}{2}<\xi<a$ (указание: используйте замечание 3).



10.5. С.в. ξ задана функцией распределения $F_\xi(x)$.

а) Является ли с.в. ξ непрерывной? *б)* Если да, то найдите плотность вероятности $p_\xi(x)$; в) Постройте схематически графики $F_\xi(x)$ и $p_\xi(x)$.

1) $F_\xi(x)=\begin{cases}e^x, \ x\le 0\\ 1, \ x>0\end{cases}$, 2) $F_\xi(x)=\begin{cases}0, \ x\le 1\\ x-1, \ 1<x\le 2\\ 1, \ x>2\end{cases}$,

3) $F_\xi(x)=\begin{cases}0{,}5e^x, \ x\le 0\\ 0{,}8, \ 0<x\le 2\\ 1, \ x>2\end{cases}$, 4) $F_\xi(x)=\begin{cases}0, \ x\le -\frac{\pi}{2}\\ 1+\sin x, \ -\frac{\pi}{2}<x\le 0\\ 1, \ x>0\end{cases}$,

5) $F_\xi(x)=\begin{cases}0, \ x\le 1\\ \ln x, 1<x\le 2\\ 1, \ x>2\end{cases}$, 6) $F_\xi(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0\\ \frac{1}{\pi}(x-0{,}5\sin 2x), 0<x\le \pi\\ 1, \ x>\pi\end{cases}$.

10.6. Точка брошена в круг радиуса R. Вероятность ее попадания в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. Найдите функцию распределения $F_\xi(x)$ и плотность вероятности $p_\xi(x)$ с.в. ξ, равной расстоянию точки до центра круга.

10.7. С.в. ξ имеет функцию распределения указанную в примере 9.2. Найти *а)* значения параметров *a, b* и *c* при условии, что с. в. ξ непрерывна; *б)* $P\left(\xi < \frac{2\pi}{3}\right)$.

10.8. Случайная величина ξ имеет плотность распределения $p_\xi(x) = \frac{6}{11}(x^2 + x + 1)$ при $0 < x < 1$ и $p_\xi(x) = 0$ при $x < 0$ и $x > 1$. Найти вероятность события $0 < \xi < 0{,}5$.

10.9. Может ли функция $p_\xi(x) = \cos x$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $p_\xi(x) = 0$ при $x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ быть плотностью распределения некоторой с.в.?

10.10. Показать, что функция $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 + 3x), & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$ является функцией распределения некоторой непрерывной с.в. ξ. Найти вероятность события $\xi \ge 1$.

10.11. Плотность с. в. ξ задана функцией $p_\xi(x) = \begin{cases} c(1+x)^{-3}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$
Найти: *а)* константу *c*; *б)* вероятность события $-1 < \xi < 1$.

10.12. Задана функция $p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ cxe^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$. При каком значении параметра *c* эта функция будет плотностью распределения некоторой с. в. ξ?

10.13. С.в. ξ имеет плотность распределения $p_\xi(x) = |x| e^{-x^2}$. Чему равна вероятность того, что данная случайная величина примет значение из интервала $(-2; 1)$?

10.14. Функция распределения с. в. ξ имеет вид:
$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}5(1 - \cos x), & 0 < x \le \pi \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$. Найти вероятность того, что в результате 3-х независимых опытов данная с.в. два раза примет значение из интервала $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

10.15. Непрерывная с.в. ξ задана функцией распределения $F_{\xi}(x)$. Найти значения параметров *a, b* и *c* и плотность распределения вероятностей данной случайной величины, если:

$$а)\ F_{\xi}(x)=\begin{cases} a,\ x\le 0\\ bx^2,0<x\le 1;\\ c,\ x>1\end{cases}\quad б)\ F_{\xi}(x)=\begin{cases} a,\ x\le 1\\ b(x^2-x),1<x\le 2\\ c,\ x>2\end{cases}.$$

10.16. Функция распределения с. в. ξ имеет вид

$F_{\xi}(x)=C_n\int\limits_{-\infty}^{x}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}dt$, $n\in\mathbb{N}$ (распределение Стьюдента). Найти плотность распределения данной с. в. и коэффициент C_2.

10.17. Задана плотность распределения вероятностей с. в. ξ

$p_{\xi}(x)=\begin{cases} C(1-x^2)^{\alpha},\ |x|<1,\\ 0,\ |x|\ge 1.\end{cases}$ (одно из распределений Пирсона). Найти C при различных значениях α: $-0{,}5; 0; 0{,}5$.

11. Независимые с.в. Действия над с.в. Функции от с.в.

11.1. Производится двукратное подбрасывание правильной монеты, с.в. ξ – количество выпавших гербов, с.в. η равна 1, если выпала хотя бы одна цифра, в противном случае она равна 0. Являются ли эти с.в. независимыми?

11.2. Монета брошена 3 раза. Пусть ξ – число выпадений герба, а η – число выпадений цифры. Являются ли эти с.в. независимыми? Чему равна сумма $\xi+\eta$?

11.3. Пусть дискретные с.в. ξ и η независимы и одинаково распределены, причем $P(\xi=1)=p>0$, $P(\xi=0)=1-p>0$. Введем новую с.в. ϑ по правилу: $\vartheta=0$ при $\xi+\eta$ – четном и $\vartheta=1$ при $\xi+\eta$ – нечетном. При каком значении *p* величины ξ и ϑ независимы?

11.4. Пусть ξ – непрерывная с.в. с функцией распределения $F_{\xi}(x)$ и плотностью распределения $p_{\xi}(x)$. Чему равны функция распределения и плотность распределения с.в. $\eta=\alpha\cdot\xi$, где $\alpha<0$?

11.5. Случайная величина η имеет закон распределения, заданный в виде таблицы

η	0,1	0,2	0,3	0,4
p	0,2	0,4	0,3	0,1

Найти закон распределения с. в. $\xi = 5\eta - 1$.

11.6. Заданы законы распределения двух независимых дискретных с. в. ξ и η

ξ	–1	0	1
p	0,4	0,2	0,4

η	0	1	2	3
p	0,2	0,4	0,3	0,1

Найти закон распределения с. в. $\omega = \eta - \xi$.

11.7. Заданы законы распределения с. в. ξ и η - прибылей двух филиалов фирмы в виде таблиц

ξ	0	50	100
p	0,3	0,5	0,2

η	0	100	200
p	0,2	0,5	0,3

Составить закон распределения суммарной прибыли фирмы $\omega = \xi + \eta$.

11.8. Заданы законы распределения двух независимых дискретных с. в.: ξ - объема товаров, произведенных некоторой фирмой, и η - стоимости единицы продукции

ξ	50	100	200
p	0,3	0,5	0,2

η	1	2	4
p	0,7	0,2	0,1

Найти закон распределения с. в. выручки от продажи $\delta = \xi \cdot \eta$.

11.9. Две независимые дискретные с. в. ξ и η имеют один и тот же закон распределения

ξ, η	–1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти $p = P(\xi > \eta)$.

11.10. Заданы законы распределения двух независимых дискретных с. в. ξ и η:

ξ	2	4	6
p	0,3	0,5	0,2

η	1	2
p	0,5	0,5

Найти закон распределения с.в. $\omega = \dfrac{\xi}{\eta}$.

11.11. Дискретная с. в. ξ имеет закон распределения

ξ	0	1	2	3
p	0,1	0,3	0,4	0,2

Составить закон распределения с. в. $\eta = \sin(\frac{\pi}{2}\xi) + 1$.

11.12. Заданы независимые дискретные с.в. ξ и η:

ξ	–1	0	1
p	0,3	0,2	0,5

η	0	1	2	3
p	0,2	0,4	0,3	0,1

Найти законы распределения с.в. $\xi + \eta$, $\xi \cdot \eta$, $\xi^2 + \eta^2$.

11.13. 2 стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же мишени. Первый попадает в мишень с вероятностью 0,4 и имеет 3 патрона в запасе, а второй – с вероятностью 0,6 и имеет 2 патрона в запасе. Каждый из стрелков стреляет или до первого попадания в мишень, или до израсходования всех патронов. Пусть ξ – число патронов, израсходованных первым стрелком, а η – число патронов, израсходованных вторым. Найдите законы распределения $\xi + \eta$, $\dfrac{\xi}{\eta}$.

11.14. Задана $F_\xi(x)$ – функция распределения с. в. ξ. Найти функцию распределения с. в. $\eta = a\xi + b,\ a > 0$.

11.15. С.в. ξ задана функцией распределения $F_\xi(x)$. Требуется выразить функцию распределения $F_\eta(x)$ с.в. $\eta = \varphi(\xi)$ через $F_\xi(x)$, если:

а) $\varphi(x) = 3x + 1$; *б)* $\varphi(x) = x^2 - 1$; *в)* $\varphi(x) = e^x$.

11.16. Непрерывная с.в. ξ задана плотностью распределения $p_\xi(x)=\begin{cases}0, x\notin\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]\\ \frac{2}{\pi}, x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]\end{cases}$. Найти плотность вероятности с.в. $\eta=\varphi(\xi)$, если: *а)* $\varphi(x)=\sin x$; *б)* $\varphi(x)=\sin 2x$.

11.17. Непрерывная с.в. ξ задана плотностью распределения (закон Коши) $p_\xi(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти функцию распределения с.в. $\eta=\varphi(\xi)$, если: а) $\varphi(x)=\operatorname{arctg} x$; б) $\varphi(x)=1/x$.

Отв. а) $F_\eta(x)=\begin{cases}0, x\le-\frac{\pi}{2}\\ \frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}, x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\\ 1, x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$; б) $F_\eta(x)=\begin{cases}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, x<0\\ 1-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, x>0\end{cases}$ **??**

11.18. Непрерывная с.в. ξ задана плотностью распределения (показательный закон) $p_\xi(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \alpha e^{-\alpha x}, x>0\end{cases}$, где $\alpha>0$. Найти функцию распределения и плотность вероятности с.в. $\eta=\varphi(\xi)$, если: *а)* $\varphi(x)=\sqrt{x}$; *б)* $\varphi(x)=e^x$.

11.19. Независимые непрерывные с.в. ξ и η имеют одну и ту же плотность распределения: $p(x)=\begin{cases}0, x\notin[0;1]\\ 1, x\in[0;1]\end{cases}$ (равномерное распределение на отрезке $[0;1]$). Найти плотности вероятности с.в. *а)* $\xi+\eta$; *б)* $\xi\cdot\eta$; *в)* $\frac{1}{\eta}$; *г)* $\frac{\xi}{\eta}$.

11.20. Независимые непрерывные с.в. ξ и η имеют плотности распределения: $p_\xi(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \alpha e^{-\alpha x}, x>0\end{cases}$, где $\alpha>0$, и $p_\eta(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \beta e^{-\beta x}, x>0\end{cases}$, где $\beta>0$. Найти плотность вероятности с.в. $\xi+\eta$.

11.21. Независимые непрерывные с.в. ξ и η заданы плотностями распределения: $p_\xi(x)=\begin{cases}0, x\notin[1;3]\\ 0{,}5, x\in[1;3]\end{cases}$ и $p_\eta(x)=\begin{cases}0, x\notin[2;6]\\ 0{,}25, x\in[2;6]\end{cases}$. Найти функцию распределения $F_{\xi\cdot\eta}(x)$ и плотность $p_{\xi\cdot\eta}(x)$.

11.22. Независимые непрерывные с.в. ξ и η заданы плотностями распределения: $p_\xi(x)=\begin{cases}0, x\notin[0;1]\\ 1, x\in[0;1]\end{cases}$, $p_\eta(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \alpha e^{-\alpha x}, x>0\end{cases}$, где $\alpha>0$. Найти плотность $p_{\xi+\eta}(x)$.

11.23. Задана плотность распределения с. в. ξ: $p_\xi(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ 0, & x\notin\left[0,\frac{\pi}{2}\right].\end{cases}$

Найти плотности вероятности с.в.: *а*) $\omega=\sin\xi$, *б)* $\eta=\cos\xi$ и *в)* $\sigma=\mathrm{tg}\,\xi$.

11.24. Случайная величина ξ распределена на всей числовой прямой с плотностью $p_\xi(x)$=$0{,}5e^{-|x|}$. Найти плотность распределения с. в. $\eta=\xi^2$.

12. Числовые характеристики с.в.

12.1. Найти $M\xi$, $D\xi$ и σ_ξ ДСВ, которые описаны в задачах *а)* 9.3, *б)* 9.4, *в)* 9.8, *г)* 9.11, *д)* 9.12, *е)* 9.19.

12.2. Заданы независимые ДСВ ξ и η:

ξ	–1	0	1
p	0,1	0,2	0,5

η	0	1	2	3
p	0,2	0,4	0,3	0,1

Найти $M[\xi+\eta]$, $M[\xi\cdot\eta]$, $M[\xi^2-\eta^2]$.

12.3. С.в. $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ независимы, имеют одно и то же математическое ожидание m и одну и ту же дисперсию σ^2. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение величины $\xi=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$.

12.4. Если $D\xi=d^2$, то чему равны $D[a\xi+b]$ и $\sigma_{a\xi+b}$?

12.5. ДСВ ξ описана в задаче 9.15. Найти $M[3\xi^2+2]$, $M[2^\xi-1]$, $D[3\xi-2]$.

12.6. Даны все возможные значения ДСВ ξ : $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, а также известны $M\xi = 2{,}3$, $M\xi^2 = 5{,}9$. Найдите закон распределения этой с.в.

12.7. ДСВ ξ задана законом распределения

ξ	x_1	1	2
p	p_1	0,5	p_3

Найти x_1, p_1 и p_3, если $M\xi = 1{,}1$ и $D\xi = 0{,}49$.

12.8. Найдите м.о. с.в. ζ, если: *а)* $\zeta = 2\xi - 3\eta$, $M\xi = 3$, $M\eta = 1$;

б) $\zeta = \xi + 3\eta + 1$, $M\xi = 2$, $M\eta = -1$.

12.9. С.в. ξ и η независимы, причем $D\xi = 1$ и $M\eta = 2$. Найдите $D\zeta$, если: $\zeta = 2\xi - 3\eta$; б) $\zeta = 2\xi - \eta - 2$.

12.10. Вероятность наступления события A в одном опыте равна p. С.в. ξ – число наступлений события A в n независимых опытах. Найти $M\xi$ и $D\xi$.

12.11. Два стрелка независимо друг от друга сделали по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна p_1, а для второго – p_2. Найти $M\xi$ и $D\xi$, если с.в. ξ – общее число попаданий в мишень.

12.12. Два стрелка независимо друг от друга сделали по n выстрелов в мишень. Вероятность попадания при каждом выстреле для первого стрелка p_1, а для второго эта вероятность равна p_2. Найти $M\xi$ и $D\xi$, если с.в. ξ – общее число попаданий в мишень.

12.13. Стрелок, имея n патронов в запасе, начинает стрельбу по цели, вероятность попадания в которую при каждом выстреле равна p. Стрельба прекращается после первого попадания в цель или после израсходования всех патронов. Найдите числовые характеристики числа израсходованных патронов.

12.14. Из урны, содержащей m белых и $n - m$ черных шаров, по схеме выбора без возвращения извлекается выборка объемом k. Найти $M\xi$ и $D\xi$, если с.в. ξ – число белых шаров в выборке.

12.15. С.в. ξ может принимать лишь натуральные значения с вероятностями, убывающими по геометрической прогрессии. Выберите первый член и знаменатель прогрессии q так, чтобы математическое ожидание величины ξ было равно 10 и вычислите при этих условиях вероятность $P(\xi \le 10)$.

12.16. В опыте n игральных костей бросают N раз. С.в. ξ – число тех бросаний, в которых появилось m, $m < n$, шестерок. Найдите $M\xi$.

12.17. Из ящика, содержащего 2 белых и 4 черных шара, вынимают 3 шара и перекладывают в другой ящик, где имелось 5 белых шаров. Затем из второго ящика 4 шара перекладывают в первый. Найдите м.о. числа белых шаров, оказавшихся в каждом ящике.

12.18. Независимые непрерывные с.в. ξ и η имеют одну и ту же плотность распределения: $p(x) = \begin{cases} 0, x \notin [0;1] \\ 1, x \in [0;1] \end{cases}$ (равномерное распределение на отрезке $[0;1]$). Найти $M[\xi+\eta]$, $D[\xi+\eta]$, $M[\xi\cdot\eta]$, $D[\xi\cdot\eta]$ и $M\left[\dfrac{\xi}{\eta}\right]$ (Указание: для 4 и 5 пунктов используйте результаты задачи 11.19 *б)* и *г)* соответственно).

12.19. Независимые непрерывные с.в. ξ и η имеют плотности распределения: $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, x > 0 \end{cases}$, где $\alpha > 0$, и $p_\eta(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \beta e^{-\beta x}, x > 0 \end{cases}$, где $\beta > 0$. Найти $M[\xi+\eta]$ и $M[\xi\cdot\eta]$.

12.20. Непрерывная с.в. ξ задана плотностью распределения (распределение Лапласа) $p_\xi(x) = 0{,}5e^{-|x|}$. Найти $P(M\xi - 3\sigma_\xi < \xi < M\xi + 3\sigma_\xi)$.

12.21. Непрерывная с.в. ξ задана плотностью распределения (экспоненциальное распределение с параметром 0,04) $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 0{,}04 \cdot e^{-0{,}04x}, x \ge 0 \end{cases}$. Найти $P\left(|\xi - M\xi| < 3\sigma_\xi\right)$ (Указание: см. примеры 2 и 4 §12).

12.22. Сторона куба есть непрерывная с.в. ξ с плотностью распределения $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \notin \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \cos x, x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$. Найти м.о. объема куба.

12.23. Непрерывная с.в. ξ задана плотностью распределения $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \notin [0;1] \\ 3x^2, x \in [0;1] \end{cases}$. Найти $D[1-2\xi]$.

12.24. Для непрерывной с.в. ξ, заданной в предыдущей задаче, найти квантиль $u_{0,125}$.

12.25. Для непрерывной с.в. ξ, заданной в задаче 12.21, найти квантиль $u_{0,125}$ и медиану распределения с.в.

13. Основные законы распределения с.в.

13.1. Вероятность выигрыша по облигации займа равна 0,1. Составить закон распределения числа выигравших облигаций среди приобретенных 5, а также его математическое ожидание и дисперсию.

13.2. По данным примера 13.1 найти математическое ожидание и дисперсию доли (частости) выигравших облигаций среди приобретенных.

13.3. В магазин поступают 100 изделий первого завода и 200 изделий второго завода. Первый завод выпускает брак в 5% случаев, второй – в 8%. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа качественных изделий, поступивших в магазин.

13.4. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени *t* равна 0,002. Необходимо составить закон распределения числа отказавших элементов за время *t*, найти его математическое ожидание и дисперсию, а также вероятность того, что за время *t* откажет хотя бы один элемент.

13.5. Показать, что если случайная величина ξ распределена по закону Пуассона с параметром λ_1, а с.в. η с параметром λ_2 и они независимы, то случайная величина $\omega = \xi + \eta$ также распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

13.6. Среднее число вызовов на АТС за время $t = 5$ мин. равно 30. Найти вероятность того, что за 1 мин. поступит не более 2-х вызовов.

13.7. Вероятность поражения цели равна 0,05. Производится стрельба по цели до первого попадания. Необходимо составить закон распределения числа сделанных выстрелов, найти его математическое ожидание и дисперсию, а также вероятность того, что для поражения цели потребуется не менее 5 выстрелов.

13.8. Интервал движения троллейбуса равен 15 мин. Какова вероятность того, что пассажир, приходя на остановку троллейбуса в случайный момент времени, будет ожидать транспорт не более 5 мин.? Найти среднее время ожидания.

13.9. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого числа. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение ошибки округления. Определить вероятность того, что ошибка округления меньше 0,4.

13.10. Пусть случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезке $[-1;1]$. Найти вероятность того, что $\min(|\xi|,|\eta|) > \frac{1}{2}$.

13.11. Среднее время безотказной работы прибора равно 80 ч. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения, найти: *а)* выражение его плотности вероятности и функции распределения; *б)* вероятность того, что в течение 100 ч. прибор не выйдет из строя.

13.12. Математическое ожидание показательно распределенной с.в. ξ равно $M\xi = 5$. Найти вероятность $P(\xi < 5)$.

13.13. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 у.е. и средним квадратическим отклонением 0,2 у.е. Найти вероятность того, что цена акции: *а)* не выше 15,3 у.е.; *б)* не ниже 15,4 у.е.; *в)* от 14,9 до 15,3 у.е.

13.14. Цена ценной бумаги распределена по нормальному закону. В течение последнего года 20% рабочих дней она была ниже 88 у.е. , а 75% - выше 90 у.е. Найти: *а)* математическое ожидание и средне квадратическое отклонение цены ценной бумаги; *б)* вероятность того, что в день покупки цена ценной бумаги будет заключена в пределах от 83 до 96 у.е.; *в)* с надежностью 95% определить максимальное отклонение цены ценной бумаги от среднего (прогнозного) значения (по абсолютной величине).

13.15. Расфасовка конфет по коробкам производится автоматически. С.в. массы конфет в коробке распределена по нормальному закону. Средняя масса конфет в коробке равна 540 г. Известно, что 5% коробок имеют массу менее 500 г. Определить процент коробок, масса которых: *а)* менее 470 г.; *б)* от 500 до 550 г.; *в)* более 550 г.; г) отличается от средней не более, чем на 30 г. по абсолютной величине.

13.16. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a = 25$. Вероятность попадания значений с.в. ξ в интервал (10,15) равна 0,09. Чему равна вероятность попадания значений с.в. ξ в интервал: *а)* (35,40); *б)* (30,35)?

13.17. При каких значениях параметров a и b функция $F_{\xi}(x) = 0{,}5 - \Phi_0\left(\frac{x-a}{b}\right)$ может быть функцией распределения некоторой н. с. в. ξ? Выяснить: *а)* распределена ли ξ по нормальному закону; *б)* если «да», то каковы параметры этого нормального распределения; *в)* из какого интервала (1,2) или (2,6) она примет значение с большей вероятностью? (просчитай ответ в п. *в), может там получится какие-то ограничения на параметры)*).

13.18. Текущая цена акции представляет собой нормально распределенную с.в. ξ со средним 100 у.е. и дисперсией 9 у.е. Найти вероятность того, что цена акции будет находиться в пределах от 91 до 109 у.е.

13.19. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $M\xi = 10$. Вероятность попадания ее значений в интервал (5,15) равна 0,8. Найти вероятность попадания ее значений в интервал (9,10).

13.20. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[0;5]$. Найти математическое ожидание квадрата с.в. ξ, т.е. $M\xi^2$.

13.21. Задана нормально распределенная с.в. ξ с параметрами $a = 1$, $\sigma = 2$. Найти вероятности $p_1 = P(|\xi| > 1)$, $p_2 = P(|\xi - 1| < 2)$.

13.22. Линия связи состоит из двух каналов (основного и дублирующего). Моменты отказов каналов являются независимыми, показательно распределенными с.в. ξ и η с параметрами $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}05$. Найти вероятность того, что линия связи будет работать исправно до момента времени $t = 20$.

13.23. Непрерывная с.в. ξ задана функцией распределения $F_\xi(x)=ax+b$, $x \in (-1{,}4)$. Найти a и b.

13.24. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону с параметрами $a = 375$ г., $\sigma = 25$ г. Найти вероятность того, что вес пойманной рыбы будет: *а)* от 300 до 425 г. *б)* больше 300 г.

13.25. При измерении детали получаются ошибки, которые подчиняются нормальному закону с параметрами $a = 0$, $\sigma = 10$. Найти вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей 15 единиц.

13.26. Задана равномерно распределенная с.в. ξ, для которой математическое ожидание $M\xi = 3$ и дисперсия $D\xi = 3$. Найти закон ее распределения.

14. Неравенство Чебышева и закон больших чисел

14.1. Случайная величина ξ может принимать только неотрицательные значения, а ее среднее значение равно 100. С помощью леммы Чебышева оцените снизу вероятность того, что в результате опыта величина ξ примет значение, меньшее 120.

14.2. Среднее значение веса изделия данного вида равно 50 *г*. С помощью леммы Чебышева оцените снизу вероятность того, что наудачу взятое изделие имеет вес меньше 90 *г*.

14.3. Среднее значение скорости ветра у Земли в данной местности равно 20 *м/с*. С помощью леммы Чебышева оцените снизу вероятность того, что при одном наблюдении в данной местности скорость ветра окажется меньше 80 *м/с*.

14.4. Число солнечных дней в году для данной местности является случайной величиной с математическим ожиданием, равным 75. С помощью леммы Чебышева оцените снизу вероятность того, что в следующем году в данной местности окажется меньше 150 солнечных дней.

14.5. Математическое ожидание начальной скорости снаряда равно 500 *м/с*. С помощью леммы Чебышева оцените сверху вероятность того, что при испытании очередного снаряда его начальная скорость окажется не меньше 800 *м/с*.

14.6. Среднее значение начальной скорости снаряда равно 500 *м/с*. Какие начальные скорости снаряда следует ожидать с вероятностью, не меньшей 0,5? (Применить лемму Чебышева).

14.7. Оцените вероятность того, что при 1200 независимых бросаниях игральной кости одно очко выпадает менее 800 раз. (Применить лемму Чебышева).

14.8. Средняя температура в квартире в период отопительного сезона равна 20^0 С, а среднее квадратическое отклонение равно 2^0С. С помощью неравенства Чебышева оцените снизу вероятность того, что температура в квартире отклонится от средней по абсолютной величине менее чем на 4^0С.

14.9. Вероятность рождения девочки приблизительно равна 0,485. Оцените снизу вероятность того, что число девочек среди 3000 новорожденных будет отличаться от математического ожидания этого числа по абсолютной величине менее чем на 55.

14.10. Вероятность получения с конвейера изделия высшего качества равна 0,6. Оцените вероятность того, что среди 600 изделий, полученных с конвейера, содержится от 340 до 380 изделий высшего качества. Оценку произведите, используя: *а*) неравенство Чебышева; *б*) интегральную теорему Лапласа.

14.11. Случайная величина ξ имеет математическое ожидание $M[\xi] = 1$ и дисперсию, равную $D[\xi] = 0{,}04$. С помощью неравенства Чебышева оцените вероятность неравенства $0{,}5 < \xi < 1{,}5$.

14.12. Используя неравенство Чебышева, найдите вероятность того, что частота появления герба при 200 бросаниях монеты отклонится от вероятности не более чем на 0,1. Сравните с вероятностью, полученной с помощью применения интегральной приближенной формулы Лапласа.

14.13. Вероятность некоторого события A в каждом из n независимых испытаний равна $p = 1/3$. Используя неравенство Чебышева, оцените вероятность того, что частота этого события отклонится от его вероятности по абсолютной величине менее чем на 0,01, если будет произведено: *а*) $n = 9000$ испытаний; *б*) $n = 75000$ испытаний. Сравните полученные оценки с результатами применения интегральной теоремы Лапласа.

14.14. Вероятность попадания в цель из данного орудия при каждом выстреле равна $p = 1/3$. Найдите наименьшее число n независимых выстрелов из орудия, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, частота попадания отклонилась по абсолютной величине от его вероятности не более чем 0,01. Решите задачу: *а*) применив неравенство Чебышева; *б*) применив интегральную теорему Лапласа.

14.15. Длина изготавливаемых изделий представляет случайную величину, среднее значение которой равно 90 *см*. Дисперсия этой величины равна 0,0225. Оцените вероятность того, что: *а*) отклонение длины изготовленного изделия от его среднего значения по абсолютной величине не превзойдет 0,4 *см*; *б*) длина изделия выразится числом, заключенным между 89,7 и 90,3 *см*.

14.16. Оцените вероятность того, что отклонение любой случайной величины от ее математического ожидания будет по абсолютной величине: *а*) не более 2 средних квадратических отклонений; *б*) не более 3 средних квадратических отклонений (правило «трех сигм»); в) не более 4 средних квадратических отклонений.

14.17. Дисперсия каждой из 1000 независимых случайных величин равна 4. Оцените вероятность того, что отклонение средней арифметической этих случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий по абсолютной величине окажется меньше чем 0,2.

14.18. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$. Закон распределения с.в. ξ_n имеет вид:

Значения ξ_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$

Вероятности	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$

Применима ли к этой последовательности теорема Чебышева?

14.19. Применим ли закон больших чисел к последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$, если с.в. ξ_n равномерно распределена на отрезке:

а) $[0; n]$; *б*) $[0; \sqrt{n}\,]$; *в*) $\left[1; \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$; *г*) $[0; 1]$?

Ответы

1. Случайные события и действия над ними.

1.1. *а)* $A=A_1+A_2+A_3$; *б)* $B=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$; *в)* $C=A_1\cdot A_2\cdot A_3$; *г)* $D=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}$; *д)* $E=A_1\cdot A_2+A_2\cdot A_3+A_1\cdot A_3$; *е)* $F=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}+\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot\overline{A_3}$;

1.2. *а)* $A=\Gamma_1\cdot\bar{\Gamma}_2\cdot\bar{\Gamma}_3+\bar{\Gamma}_1\cdot\Gamma_2\cdot\bar{\Gamma}_3+\bar{\Gamma}_1\cdot\bar{\Gamma}_2\cdot\Gamma_3$; *б)* $B=\bar{\Gamma}_2\cdot\bar{\Gamma}_3+\bar{\Gamma}_1\cdot\bar{\Gamma}_3+\bar{\Gamma}_1\cdot\bar{\Gamma}_2$; *в)* $C=B$; *г)* $D=\Gamma_1\cdot\Gamma_2+\Gamma_1\cdot\Gamma_3+\Gamma_2\cdot\Gamma_3$; *д)* $E=\Gamma_1\cdot\bar{\Gamma}_2\cdot\bar{\Gamma}_3$; *е)* $F=\bar{\Gamma}_1\cdot(\Gamma_2+\Gamma_3)$.

1.3. Сначала сделаем «расшифровку» полученных событий:
$\overline{A}\cdot B\cdot C$ – первое событие не произошло, а второе и третье произошли; $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$ – ни одно из трех событий не произошло, $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ – хотя бы одно из трех событий не произошло, $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$ – произошло ровно одно из трех событий.

A	B	C	$\overline{A}\cdot B\cdot C$	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0

1.4.

A	B	C	$A\cdot\overline{B}+C$	$\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{C}$	$A+B\cdot C$	$(A+B)\cdot C$	$A\cdot(\overline{B}+C)$
1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0

1.8. *а)* A; *б)* Ω. **1.10.** *а), б), в)* – истины; *г)* – ложно. **1.11**. Указание: используйте диаграммы Эйлера-Венна. **1.12** $C=(A_1+A_2)(B_1B_2+B_2B_3+B_1B_3)$.
1.13. $D=A\cdot(B_1+B_2+B_3+B_4)(C_1+C_2)$; $\bar{D}=\bar{A}+\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3\bar{B}_4+\bar{C}_1\bar{C}_2$.

1.14. $C=A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2$; $\bar{C}=(\bar{A}_1+\bar{A}_2)\cdot(\bar{B}_1+\bar{B}_2)$. **1.15**. $D=A_1\cdot A_2+C+B_1\cdot B_2$; $\bar{D}=(\bar{A}_1+\bar{A}_2)\cdot\bar{C}\cdot(\bar{B}_1+\bar{B}_2)$. **1.16.** $D=A+B_1\cdot B_2+C$; $\bar{D}=\bar{A}\cdot(\bar{B}_1+\bar{B}_2)\cdot\bar{C}$. **1.17.** 1) B; 2) A; 3) B; 4) D; 5) $C\cdot\bar{D}$. **1.18.** *а)* A; *б)* B; *в)* $\bar{A}$. **1.19.** 1) E; 2) K; 3) G; 4) E; 5) G; 6) H; 7) E.

2. Вероятность случайного события, формула классической вероятности. Формулы сложения вероятностей.

2.1. 0,005. **2.2.** 0,98. **2.3.** 0,75. **2.4.** 0,3. **2.5.** 11/36. **2.6.** 0,8. **2.7.** 0,2. **2.8.** 3/28. **2.9.** 0,6. **2.10.** $\frac{a}{a+b}$. **2.11.** $\frac{a-1}{a+b-1}$. **2.12.** 0,9. **2.13.** 0,13. **2.14.** 1/45. **2.15.** 4/9. **2.16.** *а)* 0,5; *б)* 0,3; *в)* 0,2. **2.17.** а) 0,15; б) 0,2; в) 0,15. **2.18.** $1/k$. **2.19.** 0,2. **2.20.** 0,2. **2.21.** 5/6; 5/12; 1/12; 1/18. **2.22.** $P(x=11)>P(x=12)$. **2.23.** 5/36. **2.24.** 23/36.

3. Аксиоматическая и геометрическая вероятность.

3.1. $\frac{2}{\pi}$. **3.2.** 0,75. **3.3.** 0,52. **3.4.** 0,25. **3.5.** $\frac{a-r}{a}$. **3.6.** $\left(\frac{a-2r\sqrt{3}}{a}\right)^2$ **3.7.** 1/12. **3.8.** *а)* 13/24; *б)* 11/24; *в)* 1/48; *г)* 1/2; *д)* 1/6. **3.9.** 1/16. **3.10.** 0,25. **3.11.** *а)* $\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{R}{d}$; *б)* $\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{R}{d}$. **3.12.** 5/9. **3.13.** $\frac{2\ell}{\pi a}$. **3.14.** 0,121. **3.15.** 0,25. **3.16.** $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$. **3.17.** *а)* 5/6; *б)* 1/6. **3.18.** 0,5.

4. Элементы комбинаторики в теории вероятностей.

4.1. 20. **4.2.** 20. **4.3.** *а)* 45; *б)* 360. **4.4.** 25; 20. **4.5.** *а)* 120; *б)* 216. **4.6.** а) 3024; б) 126. **4.7.** *а)* 85; *б)* 155. **4.8.** 720. **4.9.** 280. **4.10.** *а)* 5040; *б)* 4960; *в)* 4320. **4.11.** 144. **4.13.** *а)* 1440; *б)* 3600. **4.13.** *а)* 45; *б)* 120. **4.14.** $C_{20}^3\cdot C_{17}^5=7054320$. **4.15.** 56. **4.16.** 28800. **4.17.** 182. **4.18.** 25200. **4.19.** 210. **4.20.** $C_{20}^8\cdot C_{12}^7$. **4.21.** *а)* 0,3024; *б)* 1/32. **4.22.** 8/15. **4.23.** 5/21. **4.24.** $\frac{a^2+b^2-a-b}{(a+b)(a+b-1)}$. **4.25.** 16/243. **4.26.** 0,2. **4.27.** 0,2; 2/9. **4.28.** 0,25. **4.29.** *а)* 0,04; *б)* 0,08; *в)* 0,48. **4.30.** $\frac{4!}{10!}=\frac{1}{151\,200}$. **4.31.** 5/9. **4.32** 1/126. **4.33.** 105/256. **4.34.** 0,3. **4.35.** 4. **4.36.** C_n^{k-m}/C_{n+m}^k. **4.37.** $N!/N^N$. **4.38.** $\frac{a}{a+b}$. **4.39.** *а)* $\frac{n}{2n-1}$; *б)* $\frac{n-1}{2n-1}$. **4.40.** *а)*

$1/C_{49}^{6}\approx 7{,}2\cdot 10^{-8}$; *б)* $\dfrac{259}{C_{49}^{6}}\approx 1{,}9\cdot 10^{-5}$; *в)* $\dfrac{260624}{C_{49}^{6}}\approx 0{,}0186$. **4.41.** $\dfrac{A_8^4}{8^4}\approx 0{,}41$. **4.42.** $\dfrac{N-r+1}{A_N^r}=\dfrac{(N-r+1)!}{N!}$. **4.43**. $\approx 0{,}602$. **4.44.** $\dfrac{1}{C_{n+n}^{m}}=\dfrac{n!\cdot m!}{(n+m)!}$. **4.45.** $\dfrac{m!}{C_{n+n}^{m}}=\dfrac{n!\cdot (m!)^2}{(n+m)!}$. **4.46.** 0,5. **4.47.** 0,95.

5. Условная вероятность. Правила умножения вероятностей. Независимые события.

5.1. *а)* 0,46; *б)* 0,12; *в)* 0,42; *г)* 0,88. **5.2.** 0,8. **5.3.** 0,896. **5.4.** 1/6. **5.5.** *а)* $\left(\dfrac{1}{7}\right)^5$; *б)* $\left(\dfrac{6}{7}\right)^5$; *в)* $1-\left(\dfrac{6}{7}\right)^5$. **5.6.** 0,932. **5.7.** 0,8. **5.8.** 5. **5.9.** 0,3. **5.10.** 0,8926. **5.11.** 0,9375. **5.12.** *а)* 0,648; *б)* 0,954. **5.13.** 0,323. **5.14.** *а)* 0,024; *б)* 0,976; *в)* 0,452. **5.15.** 0,9375. **5.16.** 209/230. **5. 17.** *а)* 0,6; *б)* 0,6; *в)* 0,3. **5.18.** $P(A)$ = = 0,518; $P(B)$ = 0,491. **5.19.** *а)* $\dfrac{p}{p+q-pq}=\dfrac{5}{11}$; *б)* $(1-p)^3(1-q)^2q=0{,}0753$; *в)* $p\dfrac{1-(1-p)^3(1-q)^3}{1-(1-p)(1-q)}=0{,}37$. **5.20.** $\dfrac{(1-p)q}{p+q-pq}=\dfrac{6}{11}$. **5.21.** Для начавшего игру – 2/3; для второго – 1/3. **5.22.** *а)* $\dfrac{a+b}{a+2b}$; *б)* $\dfrac{b}{a+2b}$. **5.23.** 0,6. **5.24.** Для того, кто бросает первым – 4/7; вторым – 2/7; третьим – 1/7. **5.25.** Вероятность одинакова и равна *p*. **5.26.** $\dfrac{n^2}{C_{2n}^2}\cdot\dfrac{(n-1)^2}{C_{2n-2}^2}\cdot\dfrac{(n-2)^2}{C_{2n-4}^2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2^2}{C_4^2}\cdot\dfrac{1}{C_2^2}=\dfrac{2^n(n!)^2}{(2n)!}$ **. 5.27.** $\dfrac{16!\cdot 8!\cdot 3^8}{24!}\approx 0{,}003$.

6. Формула полной вероятности и формула Байеса.

6.1. 0,815. **6.2.** *а*) 0,022; *б*) 0б024. **6.3.** 0,5. **6.4.** 0,4. **6.5.** *а***)** 0,68; *б*) 0,461. **6.6.** *а*) $\dfrac{7}{12}$; *б*) $\dfrac{5}{7}$. **6.7.** *а*) $\dfrac{8}{13}$; *б*) $\dfrac{5}{13}$. **6.8.** *а*) 0,5; *б*) 0,75. **6.9.** 0,4. **6.10.** *а*) «не попадет в цель»; *б*) равновероятны. **6.11.** $\dfrac{39}{98}$. **6.12.** *а*) 0,476; *б*) 0,048. **6.13.** $\dfrac{3}{7}$. **6.14.** *а*) $\approx$ 0,619; *б*) $\approx$ 0,0019. **6.15.** 0,9989. **6.16.** «ко 2й группе». **6.17** «белый и черный». **6.18.** $\dfrac{6}{7}$. **6.19.** *а*) «исходный»; *б*) $\approx$ 0,336. **6.20.**

$\frac{38}{105}$. **6.21.** $\frac{a}{a+b}$. **6.22.** 0,(8). **6.23.** 7. **6.24.** 0,9. **6.25.** *а*) ≈ 0,574; *б*) ≈ 0,777.

6.26. $p(H_i / A_1 A_2) = \frac{4i^2}{n(n+1)^2}$. **6.27.** 0 с вероятностью 11/32; 1 с вероятностью 1/8; 2 с вероятностью 9/32; 3 с вероятностью 1/8; 4 с вероятностью 1/8. **6.28.** (задача-шутка) в одну урну положить 1 белый шар, а в другую – все остальные шары.

7. Схема и формула Бернулли. Производящая функция.

7.1. $\frac{7}{32}$. **7.2.** 0,5. **7.3.** 7. **7.4.** *а*) 5; *б*) $\frac{63}{256}$. **7.5.** $1099 \le n \le 1119$. **7.6.** 0,9274. **7.7.** *а*) 0,4096; *б*) 0,6723. **7.8.** *а*) $\frac{45}{512} \approx 0{,}088$; *б*) 0,092. **7.9.** *а*) ≈ 0,238; *б*) 4. **7.10.** $\frac{45}{512} \approx 0{,}088$. **7.11.** *а*) 0,59049; *б*) 0,32805; *в*) 0,99954. **7.12.** $\approx 3{,}16 \cdot 10^{-4}$. 7.**13.** $C_n^m p^{n+m}(1-p)^{n-m}$. **7.14.** $\frac{8}{\pi}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)^3 \approx 0{,}12$. **7.15.** $\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^5 \approx 0{,}069$. **7.16.** $(4-\pi)\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \approx 0{,}416$. **7.17** $\frac{15 \cdot 3^4}{4^6} \approx 0{,}297$. **7.18.** *а*) 0,163; *б*) 0,353. **7.19.** 0,595. **7.20.** 0,2. **7.21.** 0,41. **7.22.** *а*) 0,321; *б*) 0,243. **7.23.** 0,634. **7.24.** 8. **7.25.** *а*) 0,7869; *б*) 0,0765; *в*) 0,1366. **7.26.** 0,1543. **7.27.** $\frac{5}{72}$. **7.28.** ≈ 0,04811. **7.29.** *а*) $\frac{12!}{(2!)^6 \cdot 6^{12}} \approx 0{,}00344$; *б*) 0,138.? $3{,}8 \cdot 10^{-4}$.

7.30. $\frac{10!}{4^6 (3!)^2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^4\left(1-\frac{2}{\pi}\right)^6 \approx 0{,}00931$. **7.31.** $\frac{50}{243}$.

8. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Функции Лапласа.

8.1. *а*) 0,0208; *б*) 0,0298; *в*) 0,84. **8.2.** *а*) 0,046; *б*) 0,9938; *в*) 0,9997; *г*) ≈ 0. **8.3.** *а*) 0,04566; *б*) 0,789. **8.4.** *а*) 0,8859; *б*) 0,499. **8.5.** $n \ge 101$. **8.6.** $n \ge 176$. **8.7.** *а*) 0,06131; *б*) 0,3679; *в*) 0,981; *г*) 0,019. **8.8.** *а*) 0,0031; *б*) 0,08. **8.9.** *а*) 0,184; *б*) 0,264. **8.10.** *а*) 0,49; *б*) 0,81. **8.11.** 0,999. **8.12.** 0,45. 8.**13.** *а*) 0,5; *б*) 0,683, 0,317. **8.14.** *а*) ≈ 0,5; *б*) 2035. **8.15.** 1 197 599 < *n* < 1 202 400. **8.16.** *а)* 0,1804; *б)* 0,3233. **8.17.** *а)* 0,0113; *б)* 0,0252; *в)* 0,897; *г)* 0,794. **8.18.** *а)* 0,054; *б)* 0,522. **8.19.** *а)* 0,97; *б)* 0,961. **8.20.** 8; 0,1396. **8.21.** 1089. **8.22.** 1,92 млн.у.е. **8.23.** *а)* 0; *б)* 0,758.

9. Случайные величины (с.в.). Функция распределения с.в. Дискретные с.в.

9.1. *а*) $P(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$; *б*) $P(a < \xi < b) = F_\xi(b) - \lim\limits_{x \to a+0} F_\xi(x)$; *в*) $P(a < \xi < b) = \lim\limits_{x \to b+0} F_\xi(x) - \lim\limits_{x \to a+0} F_\xi(x)$. **9.2.** $a = 0$; $b \in [-1; 0)$; $c = 1$.

9.3.

ξ	0	1	2	3	4
p	0,7	0,21	0,063	0,0189	0,0081

$P(\xi < 2) = 0{,}91$; $P(\xi \le 3) = 0{,}9919$; $P(1 < \xi \le 3) = 0{,}0819$

9.4.

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

$P(0 < \xi \le 2) = \frac{6}{7}$.

9.5.

ξ	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$P(2 \le \xi \le 4) = 0{,}25$.

9.6.

ξ	1	2	3	...	n	...
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$	...	$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$	...

$P(\xi \le 5) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0{,}598$

9.7.

ξ	–1	0	1
p	$q_1 p_2$	$q_1 q_2 + p_1 p_2$	$p_1 q_2$

9.8.

ξ	0	1	2	3	4
p	0,04	0,2	0,37	0,3	0,09

9.9.

ξ	0	1	2	3	4
p	0,0015	0,0275	0,1685	0,4245	0,378

9.10.

ξ	–3	3	8	9	14	15	19	20	25	30
p	0,008	0,036	0,06	0,054	0,18	0,027	0,15	0,135	0,225	0,125

9.11. *а*) 0,5; *б*)

ξ	2	3	4
p	0,3	0,2	0,5

9.12. *а*) $P(\xi = 2) = 0$; $P(2 < \xi \le 4) = 0{,}55$; *б*)

ξ	1	3	4	4
p	0,25	0,15	0,4	0,2

9.13. 1) да; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) да.

9.14.

ξ	0	1	2	3	4	5
p	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

$P(\xi > 1) = 0{,}08146$

9.15.

ξ	0	1	2	3
p	1/6	1/2	3/10	1/30

9.16.

X	0	100	200	300	400	500
p	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

9.17.

ξ	0	1	2	3
p	0,048	0,296	0,464	0,192

9.18.

X	0	1	2	3	4
p	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

9.19.

ξ	1	2	3	…	*n*
p	1/*n*	1/*n*	1/*n*	…	1/*n*

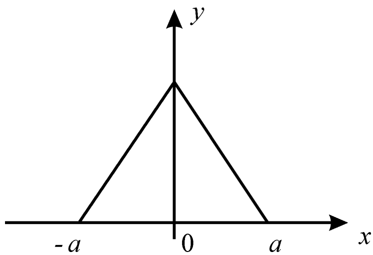
10. Непрерывные с.в. Плотность вероятности.

10.1. *а*) $c = \frac{1}{\pi}$; *б*) $F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$; *в*) 0,5.

10.2. *а*) c = 0,5; *б*) $P(|\xi| \le \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *в*) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < -\pi/2 \\ 0{,}5\sin x + 0{,}5, |x| \le \pi/2 \\ 1, x > \pi/2 \end{cases}$.

10.3. *а*) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 0, \\ 1 - e^{-h^2x^2},\ x > 1. \end{cases}$; *б*) $1 - e^{-h^2}$.

10.4. *а*) $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, |x| > a \\ -\frac{|x|}{a^2} + \frac{1}{a}, |x| \le a \end{cases}$; *б*)



в) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < -a \\ \frac{(x+a)^2}{2a^2}, -a \le x \le 0 \\ 1 - \frac{(x-a)^2}{2a^2}, 0 \le x \le a \\ 1, x \ge a \end{cases}$;

г) $P\left(-\frac{a}{2} < \xi < a\right) = 0{,}875$. **10.5.** Отв. на пункты 1, 2, 4 и 6 ответ «Да»; на пункты 3 и 5 – «Нет»; плотности распределения найти самостоятельно.

10.6. $F_\xi(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 0, \\ \frac{x^2}{R^2},\ 0 < x \le R; \\ 1,\ x > R. \end{cases}$ $p_\xi(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0, \\ \frac{2x}{R^2},\ 0 < x < R. \\ 0,\ x > R. \end{cases}$

10.7. *а*) a = 0; b = –1; c = 1; *б*) 0,5. **10.8.** 4/11. **10.9.** Нет. **10.10.** 0,5. **10.11.** *а*) c = 2; *б*) 0,75. **10.12.** 1. $1 - \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e^4}$. **10.14.** 3/8.

10.15. *а*) a = 0; b = 1; c = 1; $p_\xi(x) = \begin{cases} 0,\ x \notin (0;1) \\ 2x,\ x \in (0;1) \end{cases}$; *б*) a = 0; b = 0,5; c = 1; $p_\xi(x) = \begin{cases} 0,\ x \notin (1;2) \\ x - 0{,}5,\ x \in (1;2) \end{cases}$. **10.16.** $\frac{1}{\pi}$. **10.17.** $C_{-0,5} = \frac{1}{\pi}$, $C_0 = \frac{1}{2}$, $C_{0,5} = \frac{2}{\pi}$.

11. Независимые с.в. Действия над с.в. Функции от с.в.

11.1. Нет. **11.2.** Нет; $\xi+\eta=3$. **11.3.** 0,5. **11.4.** $F_\eta(x)=1-F_\xi(x)$; $p_\eta(x)=\frac{-1}{\alpha}p_\xi(x)$.

11.5.

ξ	–0,5	0	0,5	1
p	0,2	0,4	0,3	0,1

11.6.

$\eta-\xi$	–1	0	1	2	3	4
P	0,08	0,2	0,28	0,26	0,14	0,04

11.7.

$\eta+\xi$	0	50	100	150	200	250	300
P	0,06	0,1	0,19	0,25	0,19	0,15	0,06

11.8.

δ	50	100	200	400	800
p	0,21	0,41	0,27	0,09	0,02

11.9. 0,35.

11.10.

ω	1	2	3	4	6
p	0,15	0,4	0,1	0,25	0,1

11.11.

η	0	1	2
p	0,2	0,5	0,3

11.12.

$\xi+\eta$	–1	0	1	2	3	4
P	0,06	0,16	0,27	0,29	0,17	0,05

$\xi^2+\eta^2$	0	1	2	4	5	9	10
P	0,04	0,24	0,32	0,06	0,24	0,02	0,08

11.13.

$\xi+\eta$	2	3	4	5
p	0,24	0,204	0,312	0,144

ω	0,5	1	1,5	2	3
p	0,16	0,336	0,144	0,144	0,216

11.14. $F_\eta(x)=F_\xi\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$. **11.15.** *а)* $F_\eta(x)=F_\xi\left(\dfrac{x-1}{3}\right)$;

б) $F_\eta(x)=\begin{cases}0, x\le -1\\ F_\xi(\sqrt{x+1})-F_\xi(-\sqrt{x+1}), x>-1\end{cases}$; *в)* $F_\eta(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ F_\xi(\ln x), x>0\end{cases}$.

11.16. *а)* $p_\eta(x)=\begin{cases}0, x\notin\left[-\dfrac{\sqrt2}{2};\dfrac{\sqrt2}{2}\right]\\ \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, x\in\left[-\dfrac{\sqrt2}{2};\dfrac{\sqrt2}{2}\right]\end{cases}$;

б) $F_\eta(x)=\begin{cases}0, x<-1\\ \dfrac{1}{\pi}\arcsin x+\dfrac12, x\in[-1;1]\\ 1, x>1\end{cases}$; $p_\eta(x)=\begin{cases}0, x\notin(-1;1)\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1;1)\end{cases}$.

11.17. *а*) $F_\eta(x)=\begin{cases}0, x\le -\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{x}{\pi}+\dfrac12, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\\ 1, x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$; *б*) $F_\eta(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, x<0\\ 1-\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, x>0\end{cases}$.

11.18. *а*) $F_\eta(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ 1-e^{-\alpha x^2}, x>0\end{cases}$; $p_\eta(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ 2\alpha x e^{-\alpha x^2}, x>0\end{cases}$;

б) $F_\eta(x)=\begin{cases}0, x\le 1\\ 1-x^{-\alpha}, x>1\end{cases}$; $p_\eta(x)=\begin{cases}0, x\le 1\\ \alpha x^{-\alpha-1}, x>1\end{cases}$.

11.19. *а*) $p_{\xi+\eta}(x)=\begin{cases}0, x\notin[0;2]\\ x, x\in[0;1)\\ 2-x, x\in[1;2]\end{cases}$; *б*) $p_{\xi\cdot\eta}(x)=\begin{cases}0, x\notin(0;1]\\ -\ln x, x\in(0;1]\end{cases}$;

в) $p_{\frac{1}{\eta}}(x)=\begin{cases}0, x\le 1\\ \dfrac{1}{x^2}, x>1\end{cases}$; *г*) $p_{\frac{\xi}{\eta}}(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ 0{,}5, x\in(0;1)\\ \dfrac{1}{2x^2}, x\ge 1\end{cases}$.

11.20. если $\alpha\ne\beta$, то $p_{\xi+\eta}(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \dfrac{\alpha\beta\cdot(e^{-\beta x}-e^{-\alpha x})}{\alpha-\beta}, x>0\end{cases}$; если $\alpha=\beta$, то

$p_{\xi+\eta}(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \alpha^2 x\cdot e^{-\alpha x}, x>0\end{cases}$;

11.21. $F_{\xi\cdot\eta}(x)=\begin{cases}0, x\le 2\\ \frac{x}{8}\ln\frac{x}{2}+\frac{2-x}{8}, x\in(2;6]\\ \frac{x}{8}\ln\frac{18}{x}+\frac{x-10}{8}, x\in(6;18]\\ 1, x>18\end{cases}$; $p_{\xi\cdot\eta}(x)=\begin{cases}0, x\notin(2;18]\\ \frac{1}{8}\ln\frac{x}{2}, x\in(2;6]\\ \frac{1}{8}\ln\frac{18}{x}, x\in(6;18]\end{cases}$.

11.22. $p_{\xi+\eta}(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ 1-e^{-\alpha x}, x\in(0;1)\\ e^{-\alpha x}(e^{\alpha}-1), x\ge 1\end{cases}$. **11.23.** *а)* $p_{\omega}(x)=\begin{cases}0, x\notin(0;1)\\ \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, x\in(0;1)\end{cases}$;

б) $p_{\eta}(x)=p_{\omega}(x)$; *в)* $p_{\omega}(x)=\begin{cases}0, x\notin(0;\infty)\\ \dfrac{2}{\pi(1+x^2)}, x\in(0;\infty)\end{cases}$. **11.24.** $p_{\eta}(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}, x>0\end{cases}$.

12. Числовые характеристики с.в.

12.1. *а)* 0,4251; 0,581; *б)* 12/7; 24/49; *в)* 2,2; 0,98; *г)* 3,2; 0,76; *д)* 3,3; 2,11; *е)* 1,2; 0,45; *ж)* $\frac{(n+1)}{2}$; $\frac{(n^2-1)(4n+3)}{12}$. **12.2.** 1,7; 0,52; –1,9. **12.3.** m, $\frac{\sigma^2}{n}$; $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. **12.4.** a^2d^2, $|ad|$. **12.5.** 8; 22/15; 23,04. **12.6.** $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}5$ **12.7.** $x_1=0$, $p_1=0{,}2$, $p_3=0{,}3$. **12.8.** *а)* $M\zeta=3$; *б)* $M\zeta=0$. **12.9.** *а)* $D\zeta=22$; *б)* $D\zeta=4$. **12.10.** $M\xi=np$; $D\xi=np(1-p)$. **12.11.** $M\xi=p_1+p_2$, $D\xi=p_1(1-p_1)+p_2(1-p_2)$. **12.12.** $M\xi=np_1+np_2$, $D\xi=np_1(1-p_1)+np_2(1-p_2)$. **12.13.** $\frac{1-(1-p)^n}{p}$. **12.14.** $M\xi=k\frac{m}{n}$, $D\xi=k\frac{m}{n}\cdot\frac{n-m}{n}$. **12.15.** $q=0{,}9$, $b_1=0{,}1$, $P(\xi\le 10)=1-0{,}9^{10}\approx 0{,}651$. **12.16.** $N\cdot C_n^m\left(\frac{1}{6}\right)^m\left(\frac{5}{6}\right)^{n-m}$. **12.17.** $M\xi_1=4$; $M\xi_2=3$. **12.18.** $M[\xi+\eta]=1$, $D[\xi+\eta]=1/6$, $M[\xi\cdot\eta]=1/4$, $D[\xi\cdot\eta]=1/9$, $M\left[\frac{\xi}{\eta}\right]$ не существует. **12.19.** $M[\xi+\eta]=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$, $M[\xi\cdot\eta]=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}$. **12.20.** ≈ 0,9856. **12.21.** ≈ 0,982. **12.22.** $\frac{\pi^3}{8}-3\pi+6\approx 0{,}451$. **12.23.** 0,15. **12.24.** $u_{0{,}125}=0{,}5$. **12.25.** $u_{0{,}125}\approx 3{,}34$; $\approx 17{,}33$.

13. Основные законы распределения с.в.

13.1. $P(\xi = m) = C_5^m \cdot 0{,}1^m \cdot 0{,}9^{5-m}$, $m = \overline{0{,}5}$; $M\xi = np = 0{,}5$; $D\xi = npq = 0{,}45$. **13.2.** При $\xi = \dfrac{m}{n}$ $M\xi = 0{,}1; D\xi = 0{,}018$. **13.3.** $M\xi = 279$; $D\xi = 19{,}47$; $\sqrt{D\xi} \approx 4{,}4125$. **13.4.** $P(\xi = m) = 2^m \cdot e^{-2}/m!$, $m = 0{,}1{,}2{,}...$, $M\xi = D\xi = 2$, $P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi = 0) = 0{,}865$. **13.6.** ---- **13.7.** $P(\xi = m) = 0{,}05 \cdot 0{,}95^{m-1}$, $m = 1{,}2{,}...$; $M\xi = \dfrac{1}{p} = 20$; $D\xi = \dfrac{q}{p^2} = 380$; $P(\xi \geq 5) = 1 - P(\xi < 5) = 0{,}8145$.

13.8. ---- **13.9.** $M\xi = 0{,}1$; $D\xi = 0{,}0033$; $\sqrt{D\xi} \approx 0{,}0577$, $P(0 < \xi < 0{,}04) + P(0{,}16 < \xi < 0{,}2) = 0{,}4$. **13.10.** 0,25. **13.11.** *а)* $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0; \\ 0{,}0125 e^{-0{,}0125x}, \text{ при } x \geq 0 \end{cases}$; $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0; \\ 1 - e^{-0{,}0125x} \text{ при } x \geq 0 \end{cases}$. *б)* $P = 1 - F(100) \approx 0{,}286$. **13.12.** $P = F(5) = 1 - e^{-\frac{1}{55}} \approx 0{,}6321$. **13.13.** *а)* $P(\xi < 15{,}3) = F(15{,}3) \approx 0{,}4332$; *б)* $P(\xi \geq 15{,}4) = 1 - P(\xi < 15{,}4) = 1 - F(15{,}4) \approx 0{,}0228$; *в)* $P(14{,}9 \leq \xi \leq 15{,}4) \approx 0{,}6246$. **13.14.** *а)* $M\xi = 98$ *у.е.*; $\sqrt{D\xi} = 12$ *у.е.*; *б)* $P(83 \leq \xi \leq 96) \approx 0{,}331$; *в)* $\Delta = 23{,}52$ *у.е.* **13.15.** *а)* $P(\xi \leq 470) \approx 0{,}002$; *б)* $P(500 \leq \xi \leq 550) \approx 0{,}613$; *в)* $P(\xi > 550) \approx 0{,}341$; *г)* $P(|\xi - 540| \leq 30) \approx 0{,}781$. **13.16.** *а)* $P(35 \leq \xi \leq 40) \approx 0{,}09$; *б)* $P(30 \leq \xi \leq 35) \approx 0{,}15$. **13.17.** Из интервала (1,2), так как $P(1 < \xi < 2) \approx 0{,}3414$, в то время как $P(2 < \xi < 6) \approx 0{,}1586$. **13.18.** $P(91 < \xi < 109) = 2\Phi_0(3) \approx 0{,}9973$. **13.19.** $P(9 < \xi < 10) = \Phi_0(0) + \Phi_0(0{,}258) \approx \approx 0{,}1018$. **13.20.** $M\xi^2 = \dfrac{25}{3}$. **13.21.** $p_1 = 0{,}6587$; $p_2 = 0{,}84$. **13.22.** $p = 0{,}8647$. **13.23.** $a = b = 0{,}2$. **13.24.** *а)* 0,9759; *б)* 0,9987. **13.25.** 0,8664. **13.26.** -----.

14. Неравенство Чебышева и закон больших чисел

14.1. $p(x < 120) \geq \dfrac{1}{6}$. **14.2.** $p(x < 90) \geq \dfrac{4}{9}$. **14.3.** $p(x < 80) \geq 0{,}75$.

14.4. $p(x < 150) \geq 0{,}5$. **14.5.** $p(x \geq 800) \geq 0{,}625$. **14.6.** Меньше 1000 м/с.
14.7. $p(x < 800) \geq 0{,}75$. **14.8.** $p(|T - 20| < 4) \geq 0{,}75$.
14.9. $p(|x - 1455| < 55) \geq 0{,}75$. **14.10.** *а)* $p(340 < x < 380) \geq 0{,}64$;
б) $p(340 < x < 380) \approx 0{,}64$. **14.11.** $p(0{,}5 < x < 1{,}5) \geq 0{,}84$.

14.12. $p\left(\left|\frac{k}{200}-0{,}5\right|<0{,}1\right)\geq 0{,}875$. **14.13.** *а*) $p\left(\left|\frac{k}{9000}-\frac{1}{3}\right|<0{,}01\right)\geq 0{,}75$; $p\left(\left|\frac{k}{9000}-\frac{1}{3}\right|<0{,}01\right)\approx 0{,}956$; *б*) $p\left(\left|\frac{k}{75000}-\frac{1}{3}\right|<0{,}01\right)\geq 0{,}97$; $p\left(\left|\frac{k}{75000}-\frac{1}{3}\right|<0{,}01\right)\approx 1$. **14.14.** *а*) $n \geq 222223$; *б*) $n \geq 14730$.

14.15. *а*) $p(|\,x-90\,|<0{,}4)\geq 0{,}856$; *б*) $p(89{,}6<x<90{,}3)\geq 0{,}75$.
14.16. *а*) 0,75; *б*) 0,889; *в*) 0,9375. **14.17.** $p \geq 0{,}9$. **14.18.** Да.
14.19. *а*) Нет; *б*) нет; *в*) да; *г*) да.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какими могут быть элементарные исходы?
2. Каково может быть количество элементарных исходов?
3. Какова связь между случайным событием и ПЭИ?
4. В каком случае множество элементов называется счетным?
5. Сформулируйте аксиому конечной аддитивности.
6. Для каких ПЭИ возникает сигма алгебра событий?
7. Чем отличается аксиома сигма-аддитивности от аксиомы аддитивности?
8. Пустое множество соответствует какому событию.
9. Всего ли происходит достоверное событие?
10. Какого знака могут быть вероятности элементарных исходов?
11. В каких пределах находится вероятность любого события?
12. Как определяются случайное, достоверное и невозможное события?
13. Дайте определение вероятностного пространства.
14. Что представляет собой дополнение до подмножества алгебры событий является?
15. Как записывается формула вероятности противоположного события?
16. Какое событие получают при сложении произвольного события и события, противоположному ему? А при умножении?
17. Как вводится определение вероятности для дискретного (счетного) пространства элементарных событий?
18. В каким случае можно задать вероятностные меры элементарных исходов задаются?
19. Как вычисляется общее число элементарных исходов при различных видах эксперимента?
20. Сформулируйте правило произведения.
21. Как формулируется классическое определение вероятности?
22. Как формулируется аксиоматическое определение вероятности?
23. Как формулируется геометрическое определение вероятности?
24. Для каких событий справедлива вторая аксиома А.Н.Колмогорова?
25. Для каких ПЭИ используют аксиоматическое определение вероятности?
26. Для каких ПЭИ используют геометрическую вероятность?
27. Что на что делится при статистическом определении вероятности?
28. Как определяются сумма и произведение событий, противоположное событие?
29. Какой операции над множествами соответствует операция сложения событий? А умножения событий?
30. В каких случаях несовместные события не могут произойти одновременно?

31. Запишите формулу вероятности появления хотя бы одного из событий, независимых в совокупности?
32. Если $AB = \varnothing$, то как выглядит формула для вероятности сложения таких событий? А если $AB \neq$?
33. Как вычисляют вероятность произведения двух событий?
34. Как определяется условная вероятность $P(B/A)$?
35. Какие события называются независимыми?
36. В каком случае события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются независимыми в совокупности?
37. В чем заключается зависимость и независимость событий, и как определяется условная зависимость?
38. Как записывается формула вероятности произведения событий, если они независимы, зависимы?
39. Как выглядит общая формула для вычисления вероятности произведения n событий ($n > 1$)?
40. Каковы свойства полной группы несовместных событий.
41. Чем являются вероятности $P(A/H_i)$ из формулы полной вероятности?
42. Что называют апостериорной вероятностью гипотезы?
43. Как записывается формула полной вероятности, формула Байеса?
44. Как записывается и при каких условиях справедлива формула Бернулли?
45. Чему равно наиболее вероятное числа успехов по схеме Бернулли?
46. Что находят в прямых задачам в схеме Бернулли? А в обратных?
47. Каким двум условиям удовлетворяет последовательность независимых испытаний в схеме Бернулли.?
48. При каких условиях вместо формулы Бернулли используют локальную и интегральную формулы Муавра–Лапласа?
49. Что вычисляет выражение $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$?
50. Чему равны вероятности, рассчитанные по полиномиальной схеме?
51. Теоремы Муавра-Лапласа являются предельными теоремами для формулы Байеса или формулы Бернулли?
52. Какими свойствами монотонности обладают функции Лапласа? А четности?
53. Что вычисляет формула Пуассона?
54. Каковы критерии применения теоремы Пуассона в схеме Бернулли?
55. По какой формуле вычисляет вероятности редких явлений?
56. Дайте определение производящей функции, запишите ее выражение.
57. Является ли производящая функция многочленом?
58. Где в выражении для производящей функции находятся вероятности $P_n(k)$?

59. Что называется случайной величиной?
60. Запишите выражение для функции распределения с.в. Каковы ее свойства?
61. Чему равны $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x)$ для функция распределения любой с.в.?
62. Как вычислить $P(\xi=a)$ для любой с.в. через функцию распределения?
63. В каком случае две с.в. ξ и η называются равными (одинаково распределенными)?
64. Как называется таблица значений, в верхней части которой указываются возможные значения с.в., а в нижней части – вероятности того, что с.в. примет эти значения?
65. Каково множество значений для д.с.в.?
66. Что нужно указать, чтобы задать д.с.в.?
67. Что является результатом сложения (умножения, деления) дискретных с.в.?
68. Каковы свойства функции распределения д.с.в.?
69. Как называют с.в. с конечным множеством возможных значений с.в.?
70. Каковы свойства функции распределения н.с.в.?
71. Каковы свойства плотности распределения н.с.в.?
72. Дайте определение н.с.в.
73. Каковы свойства плотности вероятности для н.с.в., которая сосредоточена на интервале $(a;b)$?
74. Чему равна площадь фигуры, ограниченной графиком плотности вероятности и осью *Ox*?
75. Как выглядит условие нормировки плотности распределения н.с.в.?
76. В каком случае существует м.о. для любой н.с.в.?
77. Всегда ли существует м.о. для любой простой д.с.в.?
78. При каких условиях существует дисперсия для любой н.с.в.? А д.с.в.?
79. Какими формулами связаны функция $F_\xi(x)$ и плотность $p_\xi(x)$ распределения н.с.в.?
80. Каким образом полностью определить непрерывную с.в.?
81. Если ξ – н.с.в. с функцией распределения $F_\xi(x)$, то при $\alpha>0$ как запишется функция распределения $F_{\alpha\cdot\xi}(x)$?
82. Если ξ – н.с.в. с плотностью $p_\xi(x)$, то при $\alpha>0$ как запишется плотность распределения $p_{\alpha\cdot\xi}(x)$?
83. Какими свойствами обладает математическое ожидание?

84. Как вычисляется м.о. для д.с.в.? А для н.с.в.?
85. Какими свойствами обладает дисперсия?
86. Для каких c справедлива формула $M[c\cdot\xi]=c\cdot M\xi$?
87. Если существует $D\xi$, то чему равна $D[c\cdot\xi]$, где c - константа?
88. Для каких с.в. справедлива формула $D[\xi_1+...+\xi_n]=D\xi_1+...+D\xi_n$?
89. В чем заключается правило "трех сигм"?
90. Чему равны м.о. и дисперсия для биномиального распределения?
91. Для каких с.в. справедлива формула $M[\xi_1+..+\xi_n]=M\xi_1+..+M\xi_n$?
92. Как определяется биномиальное распределение и чему равны его числовые характеристики?
93. Как определяется пуассоновское распределение и чему равны его числовые характеристики?
94. Как определяется равномерное распределение и чему равны его числовые характеристики?
95. Как определяется нормальное распределение и чему равны его числовые характеристики?
96. Чему равна вероятность того, что отклонение значения нормально распределенной с.в. от математического ожидания не превысит величину $\varepsilon>0$?
97. Как определяется показательное распределение и чему равны его числовые характеристики?
98. Дайте определение независимости двух с.в.
99. Что находят по формуле $P(\xi+\eta=z)=\sum\limits_{x_i+y_j=z}(P(\xi=x_i)\cdot P(\eta=y_j))$? А по такой формуле $P(\xi\cdot\eta=z)=\sum\limits_{x_i\cdot y_j=z}P(\xi=x_i)\cdot P(\eta=y_j)$?
100. Если ξ и η – непрерывные независимые с.в. с плотностями $p_\xi(x)$ и $p_\eta(x)$, то как выглядит плотность плотность с.в. $\xi+\eta$, $\xi\cdot\eta$?
101. Для каких с.в. определено понятие функции от с.в.?
102. Если д.с.в. ξ имеет м.о. $M\xi=\sum\limits_i x_i\cdot p_i$ и $\eta=\varphi(\xi)$, то как вычислить $M\eta$?
103. Если н.с.в. ξ имеет м.о. $M\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\cdot p_\xi(x)dx$ и $\eta=\varphi(\xi)$, то то как вычислить $M\eta$?
104. Что называют квантилью распределения с.в. ξ порядка p, где $0<p<1$?

105. Как определить вероятность попадания нормально распределенной с.в. в заданный интервал, используя таблицу значений функции Лапласа?

106. Если с.в. ξ распределена нормально с параметрами a и σ^2, то чему равна вероятность, что ее значения будут заключены в интервале $(a-3\sigma;a+3\sigma)$?

107. Что такое $N(0;1)$?

108. Что называется медианой распределения с.в. ξ?

109. Как определяется функция одного случайного аргумента и ее числовые характеристики?

110. Как формулируются теоремы Чебышева?

111. Как формулируются теорема Бернулли?

112. Как формулируются центральная предельная теорема?

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Вариант 1

1. Для сообщения об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора-автомата. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,95; второй – 0,9. Найти вероятность того, что при аварии поступит сигнал а) хотя бы от одного сигнализатора; б) только от одного сигнализатора.

2. В цехе работают 25 станков. Из них 10 станков типа А, 8 станков – типа Б, 7 станков – типа В. Вероятность брака при обработке детали на каждом из станков, соответственно, равна 0,02, 0,03, 0,01. Какой процент деталей без брака изготавливается в цехе?

3. Производство дает 1 % брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 2000 изделий выбраковано будет не больше 1 % изделий?

4. Составить закон распределения указанной дискретной случайной величины (СВ) и вычислить ее числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

В урне два белых и три черных шара. Два раза из урны вынимается шар с возвращением первого вынутого шара в урну. СВ X – число вынутых белых шаров.

5. Задана непрерывная СВ X своей функцией распределения $F(x)$. Требуется:

- определить коэффициент A;
- найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
- вычислить математическое ожидание СВ X;
- определить вероятность того, что X примет значение из интервала (a,b).

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ Ax^3, & \text{при } 0 \le x \le 3, \\ 1, & \text{при } x \ge 3. \end{cases} \quad a = 1,\ b = 2.$$

6. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает 10 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону со средним квадратичным отклонением равным 5 мм и математическим ожиданием равным нулю. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

7. В течение года три фирмы могут обанкротиться независимо друг от друга с вероятностями 0,2; 0,3; 0,5. Найти вероятность того, что в конце года 1)обанкротятся ровно две фирмы; 2) хотя бы одна фирма.

Вариант 2

1. Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,7; второй – 0,4; третий – 0,4; четвертый – 0,3. Найти вероятность того, что в течение часа а) хотя бы один станок не потребует внимания рабочего; б) только один станок не потребует внимания рабочего.

2. Вероятности того, что во время работы ЭВМ произойдет сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти, в остальных устройствах, относится как 3 : 2 : 5. Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в оперативной памяти, в остальных устройствах соответственно равны 0,6; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в ЭВМ сбой будет обнаружен.

3. В институте 12000 студентов. Вероятность того, что студент занимается спортом 0,2. Найти вероятность того, что число спортсменов в институте превышает 2500.

4. Составить закон распределения указанной дискретной случайной величины (СВ) и вычислить ее числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Вероятность перевыполнения плана для строительного управления (СУ) 1 равна 0,4, для СУ-2 – 0,5, для СУ-3 – 0,8. СВ X – число СУ, перевыполнивших план.

5. Задана непрерывная СВ X своей функцией распределения $F(x)$. Требуется:

- определить коэффициент A;
- найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
- вычислить математическое ожидание СВ X;
- определить вероятность того, что X примет значение из интервала (a,b).

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1, \\ Ax - 1/3, & \text{при } 1 \le x \le 4, \\ 1, & \text{при } x \ge 4. \end{cases} \quad a = 2,\ b = 5.$$

6. Станок изготавливает деталь, длина которой есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами а = 15 см и σ = 0,2 см. Найти вероятность брака, если допустимые размеры детали (15 $\pm$ 0,3) см.

7. Вероятность аудиторской проверки в течение года для Беларусбанка равна 0,8, а для Приорбанка – 0,9. Найти вероятность того, что в течение года будут проверены 1) оба банка; 2) хотя бы один банк.

Вариант 3

1. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того. Что студент ответит на первый, второй вопрос равны по 0,9; на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить а) на все вопросы; б) по крайней мере на два вопроса билета.

2. Имеются две партии деталей. Известно, что в одной партии все детали удовлетворяют техническим условиям, а в другой – пятая часть деталей недоброкачественная. Деталь, взятая из произвольно выбранной партии, оказалась доброкачественной. Определить вероятность того, что деталь была взята из второй партии.

3. В партии пять приборов. Вероятность безотказной работы каждого составляет 0,8. Найти вероятность того, что при проверке откажут не более двух приборов.

4. Составить закон распределения указанной дискретной случайной величины (СВ) и вычислить ее числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Стрелок имеет четыре патрона и стреляет в цель до первого попадания или полного израсходования патронов. Вероятность попадания при одном выстреле 0,8. СВ X – число израсходованных патронов.

5. Задана непрерывная СВ X своей функцией распределения $F(x)$. Требуется:

- определить коэффициент A;
- найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
- вычислить математическое ожидание СВ X;
- определить вероятность того, что X примет значение из интервала (a,b).

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ A\cos x + 1, & \text{при } 0 \le x \le \pi/2, \\ 1, & \text{при } x \ge \pi/2. \end{cases} \quad a = \pi/3,\ b = \pi.$$

6. Считается, что отклонение длины изготавливаемой детали от стандарта является случайной величиной, распределенной нормально. Какую точность длины изделия можно гарантировать с вероятностью 0,8, если параметры распределения $a = 40$ см; $\sigma = 0{,}4$ см?

7. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу по каждому из трех телеканалов соответственно равна 0,4; 0,6; 0,7. Какова вероятность того, что потребитель увидит рекламу 1) только по одному из каналов; 2) по всем трем каналам.

Вариант 4

1. Для одной бригады вероятность выполнения нормы равна 0,8, для другой – 0,9. Найти вероятность того, что а) обе бригады выполнят норму; б) хотя бы одна бригада выполнит норму.

2. Рабочий обслуживает три станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго – 0,04, для третьего – 0,03. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в три раза больше, чем второго, а третьего – в два раза меньше, чем второго. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной.

3. Вероятность того, что прибор потребует дополнительной регулировки 0,45. Какова вероятность того, что из 500 приборов большая часть не потребует дополнительной регулировки.

4. Составить закон распределения указанной дискретной случайной величины (СВ) и вычислить ее числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Вероятность успешной сдачи первого экзамена для данного студента равна 0,9, второго экзамена – 0,6, третьего – 0,8. СВ X – число сданных экзаменов.

5. Задана непрерывная СВ X своей функцией распределения $F(x)$. Требуется:

- определить коэффициент A;
- найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
- вычислить математическое ожидание СВ X;
- определить вероятность того, что X примет значение из интервала (a,b).

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ A\sin 2x, & \text{при } 0 \le x \le \pi/4, \\ 1, & \text{при } x \ge \pi/4. \end{cases} \quad a = 0,\ b = \pi/6.$$

6. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону с параметром σ = 10 мм. Найти вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей 15 мм.

7. Вероятность получения заказа в текущем году для первой строительной фирмы равна 0,95, для второй – 0,8, для третьей – 0,5. Найти вероятность того, что в текущем году 1) ни одна фирма не получит заказа; 2) две фирмы получат заказ.

Вариант 5

1. Издательство отправляет газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе – 0,95, в третье – 0,8. Найти вероятность того, что а) два отделения получат газеты вовремя, а одно с опозданием; б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

2. Среди поступающих на сборку деталей с первого станка 0,1 % бракованных, со второго – 0,2 %, с третьего – 0,25 %, с четвертого – 0,5 %. Производительности их относятся как 4:3:2:1 соответственно. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на первом станке.

3. Рабочий обслуживает шесть станков. Вероятность того, что станок потребует внимания рабочего в течение часа, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение часа этих требований будет не больше трех.

4. Составить закон распределения указанной дискретной случайной величины (СВ) и вычислить ее числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

В урне имеется четыре шара с номерами от 1 до 4. Одновременно извлекли два шара. СВ X – сумма номеров шаров.

5. Задана непрерывная СВ X своей функцией распределения $F(x)$. Требуется:

- определить коэффициент A;
- найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
- вычислить математическое ожидание СВ X;
- определить вероятность того, что X примет значение из интервала (a,b).

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1, \\ A(x^2 - x), & \text{при } 1 \le x \le 2, \\ 1, & \text{при } x \ge 2. \end{cases} \quad a = 1,\ b = 3.$$

6. Автомат изготавливает подшипники, которые считаются годными, если отклонение X от проектного размера по модулю не превышает 0,77 мм. Каково наиболее вероятное число годных подшипников из 100, если случайная величина X распределена нормально с параметром σ = 0,4 мм?

7. Надежность первой компании в течение времени t оценивается на уровне 95%, второй – 70%, третьей – 80%. Найти вероятность того, что в течение времени t 1) все три компании не станут банкротами; 2) хотя бы две компании станут банкротами.

Вариант 6

1. Игра проводится до выигрыша одним из двух игроков двух партий подряд. Вероятность выигрыша партии первым игроком равна 0,6, вторым – 0,4 (ничьи исключены). Найти вероятность того, что а) игра закончится после двух партий; б) игра закончится до четырех партий.

2. Аппаратура в 80 % случаев работает в нормальном режиме и в 20 % случаев – в аварийном. Вероятность сбоя в нормальном режиме работы (за некоторое время T) равна 0,05; в аварийном – 0,5. Найти вероятность сбоя аппаратуры (за время T).

3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,2. Найти вероятность того, что в результате 500 выстрелов промахов окажется от 410 до 430.

4. Составить закон распределения указанной дискретной случайной величины (СВ) и вычислить ее числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

В партии из восьми деталей шесть стандартных. Наугад взяты две детали. СВ X – число стандартных деталей среди выбранных.

5. Задана непрерывная СВ X своей функцией распределения $F(x)$. Требуется:

- определить коэффициент A;
- найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
- вычислить математическое ожидание СВ X;
- определить вероятность того, что X примет значение из интервала (a,b).

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{A}, & \text{при } 0 \le x \le 3, \\ 1, & \text{при } x \ge 3. \end{cases} \quad a = 5\pi/6,\ b = 3\pi/2.$$

6. Среднее квадратичное отклонение случайной величины, распределенной по нормальному закону, равно 2 см, а математическое ожидание равно 16 см. Найти границы, в которых с вероятностью 0,95 следует ожидать значение случайной величины.

7. Вероятность того, что в течение недели покупатель посетит гипермаркет A, равна 0,85, а гипермаркет B – 0,9. Какова вероятность того, что в течение недели: 1) покупатель посетит оба магазина; 2) только один из них.

Вариант 7

1. Предприятие состоит из трех независимо работающих подразделений. Предполагается, что вероятность их рентабельной работы в течение времени t соответственно равна 0,7; 0,6; 0,8. Найти вероятность того, что в течение времени t рентабельным будет а) только одно предприятие; б) хотя бы одно предприятие.

2. Вероятность для конструкций некоторого производства удовлетворять стандарту 0,95. Предполагается упрощенная система проверки на стандартность, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для конструкций, удовлетворяющих стандарту и 0,04 – для прочих конструкций, Найти вероятность того, что конструкция, признанная при проверке стандартной, действительно является таковой.

3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность наивероятнейшего числа попаданий при пяти выстрелах.

4. Составить закон распределения указанной дискретной случайной величины (СВ) и вычислить ее числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Два шахматиста играют две партии в шахматы. Вероятность для первого шахматиста выиграть первую партию равна 0,4, вторую – 0,6. СВ X – число партий, выигранных первым шахматистом.

5. Задана непрерывная СВ X своей функцией распределения $F(x)$. Требуется:

- определить коэффициент A;
- найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
- вычислить математическое ожидание СВ X;
- определить вероятность того, что X примет значение из интервала (a,b).

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 2, \\ (x-A)^2, & \text{при } 2 \le x \le 3, \\ 1, & \text{при } x \ge 3. \end{cases} \quad a = 2{,}5\,,\ b = 4.$$

6. На станке изготавливаются детали. Длина детали представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, имеет среднее значение 20 см и дисперсию – 0,04 см^2. Найти вероятность того, что длина детали заключена между 19,7 см и 20,3 см.

7. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый, второй и третий вопрос, соответственно, равна 0,92; 0,8 и 0,75. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить 1) на все вопросы; 2) по крайней мере на два вопроса.

Вариант 8

1. Четыре стрелка договорились стрелять по мишени до попадания в определенной последовательности: следующий стрелок производит выстрел лишь в случае промаха предыдущего. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,7, для третьего – 0,8, для четвертого – 0,6. Найти вероятность того, что будет произведено а) не более трех выстрелов; б) четыре выстрела.

2. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 игранных. Для игры наудачу выбирают два мяча и после игры возвращают их обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются еще два мяча. Какова вероятность, что вторая игра будет проводится новыми мячами?

3. Вероятность отклонения размера каждой детали от номинала равна 0,1. Найти вероятность того, что среди 900 деталей не будут иметь отклонения размера от номинала от 790 до 820 деталей.

4. Составить закон распределения указанной дискретной случайной величины (СВ) и вычислить ее числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Испытываются три прибора. Вероятность безотказной работы каждого прибора за время *T* равна 0,6. СВ *X* – число приборов, проработавших безотказно время *T*.

5. Задана непрерывная СВ *X* своей функцией распределения *F(x)*. Требуется:

- определить коэффициент *A*;
- найти плотность распределения вероятностей *f(x)*;
- вычислить математическое ожидание СВ *X*;
- определить вероятность того, что *X* примет значение из интервала *(a,b)*.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 3\pi/4, \\ A\cos 2x, & \text{при } 3\pi/4 \le x \le \pi, \\ 1, & \text{при } x \ge \pi. \end{cases} \quad a = 5\pi/6,\ b = 3\pi/2.$$

6. Рост мужчины является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием равным 174 см и дисперсией равной 49 см^2. Найти вероятность того, что трое наугад выбранных мужчин будут иметь рост от 172 до 180 см.

7. Вероятности того, что сальдо внешней торговли будет положительным для трех стран соответственно равны 0,74; 0,83 и 0,9. Найти вероятности событий: 1) только две страны будут иметь положительное сальдо; 2) все страны будут иметь отрицательное сальдо.

Вариант 9

1. Два шахматиста играют три партии в шахматы. Вероятность выигрыша для первого шахматиста в первой партии – 0,3; во второй – 0,6; в третьей – 0,7. Найти вероятность того, что первый шахматист выиграет а) две партии; б) не менее двух партий.

2. Среди студентов института – 25 % первокурсники, 30 % студентов учатся на втором курсе, на третьем и четвертом курсах учатся 25 % и 20 % соответственно. По данным деканатов известно, что на первом курсе 10 % студентов сдали сессию только на отличные оценки, на втором – 15 %, на третьем – 18 %, на четвертом – 20 % отличников. Наудачу вызванный студент оказался отличником. Какова вероятность, что он третьекурсник?

3. Вероятность того, что изделие – высшего сорта, равна 0,52. Найти вероятность того, что из 1000 изделий половина высшего сорта.

4. Составить закон распределения указанной дискретной случайной величины (СВ) и вычислить ее числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Студент знает 20 вопросов из 25. Билет содержит три вопроса. СВ X – число вопросов данного билета, которые знает студент.

5. Задана непрерывная СВ X своей функцией распределения $F(x)$. Требуется:

- определить коэффициент A;
- найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
- вычислить математическое ожидание СВ X;
- определить вероятность того, что X примет значение из интервала (a,b).

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ A(1-\cos x), & \text{при } 0 \le x \le \pi, \\ 1, & \text{при } x \ge \pi. \end{cases} \quad a = \pi/3, \; b = \pi/2.$$

6. Производят взвешивание вещества без систематических ошибок. Случайная ошибка взвешивания распределена нормально с математическим ожиданием 20 кг и средним квадратичным отклонением 2 кг. Найти вероятность того, что следующее взвешивание отличается от математического ожидания не более чем на 100 г.

7. Строительная отрасль выпускает акции трех видов A, B и C. Вероятности того, что акции через месяц поднимутся в цене соответственно равны 0,85; 0,9; 0,93. Какова вероятность того, что через месяц поднимутся в цене 1) акции только одного вида; 2) акции всех видов.

Вариант 10

1. Прибор комплектуется деталями трех типов. Вероятность того, что поступающие на сборку детали будут высшего сорта, для первого типа равна 0,9, для второго типа – 0,7; для третьего типа – 0,8. Найти вероятность того, что среди деталей прибора будет а) две высшего сорта; б) не менее двух высшего сорта.

2. Станок третью часть своего времени обрабатывает детали типа А, остальную часть детали типа Б. При обработке детали типа А он стоит 10 % времени, а детали типа Б – 5 %. Какова вероятность застать станок стоящим?

3. По каналу связи передается 1000 знаков. Каждый знак может быть искажен независимо от остальных с вероятностью 0,005. Найти вероятность того, что будет искажено не более трех знаков.

4. Составить закон распределения указанной дискретной случайной величины (СВ) и вычислить ее числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

При установившемся технологическом процессе предприятие выпускает 4/5 своих изделий первым сортом и 1/5 вторым сортом. СВ X – число изделий первого сорта из взятых наугад трех.

5. Задана непрерывная СВ X своей функцией распределения $F(x)$. Требуется:

- определить коэффициент A;
- найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
- вычислить математическое ожидание СВ X;
- определить вероятность того, что X примет значение из интервала (a,b).

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1, \\ A(x^3 - x), & \text{при } 1 \le x \le 2, \\ 1, & \text{при } x \ge 2. \end{cases} \quad a = 1{,}2\ ,\ b = 1{,}5.$$

6. Диаметр втулок, изготовленных на заводе, можно считать нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 2,5 см и среднеквадратичным отклонением 0,01 см. В каких границах можно гарантировать величину диаметра втулки, если за вероятность практической достоверности принимается 0,9973?

7. Предприятие состоит из трех независимо работающих подразделений. Предполагается, что вероятность их рентабельной работы за два месяца соответственно равна 0,65; 0,7; 0,82. Найти вероятность того, что в течение двух месяцев рентабельным будет 1) хотя бы одно из подразделений; 2) ровно два подразделения.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9438	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

При использовании данной таблицы следует помнить следующие правила: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, $\Phi(x) \approx 1$ при $x > 3{,}5$ и $\Phi(x) \approx 0$ при

$x < -3{,}5$ (причем погрешность в этих приближенных равенствах менее, чем 10^{-4}). Что касается модифицированной функции Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$, то $\Phi_0(x) = \Phi(x) - 0{,}5$, $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$.

Таблица квантилей стандартизованного нормального распределения N(0, 1)

Квантили u_p стандартизованного нормального распределения $N(0,1)$ (напомним, что квантилью порядка p называется такое число u_p, что $P\left(X < u_p\right) = p$):

p	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
u_p	1,282	1,645	1,96	2,326	2,576	3,09	3,291

При использовании этой таблицы следует помнить следующее правило: $u_{1-p} = -u_p$.