

ISSN 0134–9635

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Международный
научно-технический сборник

Выпуск 38

Минск
БНТУ
2023

УДК [531+621.01:531.8](082)
ББК 22.21я43
30.12я43
Т38

РЕДАКЦИЯ СБОРНИКА

Президиум редакции:

С. В. Харитончик, А. М. Малярович, В. М. Трепачко, А. И. Сафонов,
В. В. Можаровский, С. А. Чижик, М. А. Журавков, Ю. М. Плескачевский,
С. С. Щербаков

Редакционная коллегия:

Ю. В. Василевич (председатель, главный редактор), В. А. Чигарев (зам. председателя,
уч. секретарь), Т. Н. Микулик (редактор), В. А. Акимов, (электронный макет,
компьютерная верстка)

Адрес редакции:

220013, Минск, проспект Независимости, 65
БНТУ, кафедра «Теоретическая механика и механика материалов»
Тел.: (+375 17) 293 96 47, 292 74 25,
E-mail: smat@bntu.by, tmech@bntu.by

В сборнике представляются научные статьи по общей механике, теоретической и прикладной механике, механике материалов, механики сплошной среды, механике деформируемого твердого тела и смежным вопросам, научно-методические работы преподавателей, научных сотрудников вузов, специалистов исследовательских и научно-технических организаций.

Тематика статей охватывает широкий круг вопросов: общая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости и газа, мехатроника, робототехника, био- и наномеханика, математическое и компьютерное моделирование физических и технических процессов, дифференциальные уравнения и их приложения в механике, конструирование деталей машин и др. Рассматриваются различные подходы к внедрению информационных технологий в преподавании курсов «Теоретическая механика», «Механика материалов», «Мехатроника», «Механика деформируемых тел», «Техническая механика» и др. Излагаются новые точки зрения на преподавание этих курсов в высшей и средней школе.

Взгляды отдельных авторов могут не совпадать с позицией редакции научного издания.

Научно-технический сборник полезен преподавателям высших учебных заведений, научно-инженерным работникам, аспирантам, магистрантам и студентам старших курсов технических вузов.

Издание включено в перечень ВАК Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований.

УДК [531+621.01:531.8](082)
ББК 22.21я43
30.12я43

© Белорусский национальный
технический университет, 2023

РАЗВИТИЕ МЕХАНИКИ В БЕЛАРУСИ: ИСТОРИЧЕСКИЕ ФАКТЫ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ФАКТОРЫ

Плескачевский Ю. М. – член-корреспондент НАН Беларуси

Национальная академия наук Беларуси, Минск

Введение. История развития науки Беларуси в XX и начале XXI веков частично описана в ряде авторитетных академических изданий [1–3]. Однако белорусская историография не содержит публикаций о хронологически верных исторических фактах и важнейших этапах развития механики в нашей стране или на тех территориях, которые прежде входили в другие государства, но сегодня составляют Беларусь [4]. Отдельные публикации об истории развития профильных кафедр или юбилейные издания к знаменательным датам белорусских институтов и университетов содержат ценную, но разрозненную информацию, нуждающуюся в обобщении и систематизации в исторической ретроспективе. В данной работе предпринята первая, не претендующая на полноту и абсолютную хронологичность, попытка восполнить этот пробел. Названные нами определяющие факторы, по существу, в совокупности являются методологией, которая позволяет «препарировать» любое научное направление с целью определения комплексности, цельности и перспективности его развития в стране. Исторические факты излагаются в соответствии с главной целью работы – назвать имена тех ученых и специалистов, чей труд, инициатива, ответственность и способности, проявленные в истекшее столетие, обеспечили нынешнее вполне достойное состояние развития механики в Беларуси. Для истории, чтобы знали и помнили те, кто идет нам на смену.

Исторические предпосылки. Ниже приведен список научно-образовательных учреждений и дат их организации в тех государственных структурах, в которые входили территории сегодняшней Беларуси.

<i>Ягелонский университет в Кракове</i>	– 1364
<i>Виленский университет</i>	– 1579
<i>Львовский университет</i>	– 1661
<i>Санкт-Петербургский университет</i>	– 1724
<i>Московский университет</i>	– 1755
<i>Варшавский университет</i>	– 1816
<i>Киевский университет</i>	– 1833
<i>Горыгорецкий земледельческий институт</i>	– 1848
<i>Киевский политехнический институт</i>	– 1898
<i>Варшавский политехнический институт</i>	– 1898
<i>Белорусский национальный технический университет</i>	– 1920
<i>Белорусский государственный университет</i>	– 1921
<i>Институт белорусской культуры</i>	– 1922
<i>Белорусская Академия наук</i>	– 1928

До середины XIX века ни один город, расположенный на нынешней территории Беларуси, не считался настолько значимым и экономически развитым, чтобы открывать в нем научно-исследовательские институты и высшие учебные заведения. Стремящиеся к знаниям потомки кривичей, радимичей и дреговичей вынуждены были получать образование, выезжая далеко от родных земель. Например, ныне известный восточно-славянский и белорусский первопечатник, философ-гуманист, писатель, ученый-медик и просветитель Франциск Лукич Скорина значится в списках выпускников Ягелонского университета за 1506 г., о чем свидетельствует четкая запись: «Франциск из Полоцка,

литвин». Чтобы подчеркнуть высочайший по тем временам уровень подготовки выпускников Ягелонского университета, достаточно отметить, что его окончили Папа римский Иоанн Павел II, астроном, математик и экономист Николай Коперник, король Польши Ян III Собеский и другие знаменитости.

История развития научной мысли на территориях, являющихся сегодня Республикой Беларусь, тесно связана с прогрессивными изменениями национального самосознания и самоидентификации жителей, без чего невозможна истинная государственность. Например, если в 1506 г. Франциск Скорина позиционировал себя как литвин, то уже через шесть лет после блестящей сдачи экстерном выпускных экзаменов в Падуанском университете (Италия), он считает себя русским, что подтверждает актовая запись университета, датированная 6 ноября 1512 г.: «Молодой человек и вышеупомянутый доктор носит имя Франциск, сын покойного Луки Скорины из Полоцка, русин». При этом следует отметить, что знаменитый труд Франциска Скорины «Библия руска» написана на языке, который сегодня называют старобелорусским. Владевший этим языком как родным сегодня Франциск Скорина считал бы себя белорусом, а вышеуказанный раритет наверняка назвал бы «Біблія беларуская».

Лишь в 1848 г. высший разряд Горыгорецкой земледельческой школы был преобразован в Горыгорецкий земледельческий институт – первое на территории нынешней Беларуси, а в те годы – и всей России, высшее сельскохозяйственное учебное заведение. С установлением Советской власти и обретением относительной политической самостоятельности в 20-х годах XX века в Беларуси стали активно открываться научные и высшие образовательные институты и университеты.

Предтечи. Невозможно установить, кого можно считать первым белорусским механиком. Но безусловно то, что развитию механики в Беларуси в значительной степени способствовали многие ее уроженцы, ученые, просветители, естественноиспытатели, мыслители – те, кто имеют все основания считаться гордостью нашей нации, кого знала и ценила мировая научная общественность [5]. Их жизнь и деятельность – тот фундамент, на котором строилось «здание» современной белорусской науки. Кроме Франциска Скорины, в этом ряду следует назвать следующих: мыслитель и переводчик Василий Тяпинский; ученый-естествоиспытатель, теоретик артиллерии и автор идеи многоступенчатой ракеты Казимир Семенович; писатель, поэт, учитель и книгоиздатель Симеон Полоцкий; астроном, математик и педагог Мартин Почобут-Одляницкий; геолог, минеролог, географ и этнограф, национальный герой Чили Игнатий Домейко; физик и философ Зигмунт Врублевский; ученый-естествоиспытатель Яков Наркевич-Иодко; историк, этнограф и педагог Митрофан Довнар-Запольский и многие другие [5].

Особо следует отметить, возможно, первых белорусских ученых-механиков: Николай Феликсович Ястржембский и Василий Петрович Ермаков [6].



Ястржембский Н. Ф.
(1808(1810?)–1877)



Ермаков В. П.
(1845–1922)

Уроженец именина Борисовщина Речицкого уезда Ястржембский Н. Ф. в 1836 г. окончил Виленский университет. Преподавал в Технологическом институте и Институте Корпуса инженеров путей сообщения (Санкт-Петербург). Впервые ввел курс построения машин в качестве самостоятельной учебной дисциплины. За изданный в 1838 г. «Курс практической механики» уже в 1839 г. удостоен Демидовской премии. В 1846 г. издал «Атлас образцовых механических устройств», а также учебник «Начальные основы общей и прикладной механики».

Математик и механик Ермаков В. П. родился в селе Терюха, которое ныне в Гомельском районе. Окончил физико-математический факультет Киевского университета, позже профессор этого университета. С 1898 г. – заведующий кафедрой высшей математики Киевского политехнического института. За оригинальные исследования в ряде разделов высшей математики и теоретической механики первый из белорусских ученых в 1884 г. избран в члены-корреспонденты Санкт-Петербургской академии наук [6].

Механика в Беларуси в XX веке. Начало развития механики в Беларуси в значительной степени связано с Белорусским политехническим институтом (БПИ), где в 1934 г. была образована первая в Беларуси кафедра теоретической механики (в настоящее время – Белорусский национальный технический университет (БНТУ)). В разные годы кафедрой руководили известные ученые: профессор Столяров Н. А. (1934–1941); к.т.н., доцент Околовский Ф. К. (1945–1954); к.ф.-м.н., доцент Бессонов Н. А. (1954–1957); к.т.н., доцент Ким А. Х. (1957–1958); д.т.н., профессор Татур Г. К. (1958–1963); д.т.н., профессор Ким А. Х. (1963–1978); к.т.н., доцент Аксенович Д. А. (1978–1984); к.т.н., доцент Горбач Н. И. (1984–1991); д.ф.-м.н., профессор Чигарев А. В. (1991–2019). Кафедра неоднократно меняла название и к 2019 г. именовалась кафедрой теоретической механики и мехатроники.

В 1945 г. в БПИ была создана кафедра сопротивления материалов, которую возглавил профессор Кравцов Н. И. С 1948 г. по 1971 г. кафедрой руководил к.т.н., доцент Рудицин М. И. В 1971 г. в БПИ были образованы две кафедры: сопротивление материалов машиностроительного профиля, которую возглавил д.т.н., профессор Жданович Г. М., и сопротивление материалов и теория упругости, ее возглавил д.т.н., профессор Винокуров Е. Ф. С 1998 г. по 2019 г. кафедрой сопротивления материалов машиностроительного профиля БНТУ руководил д.ф.-м.н., профессор Василевич Ю. В.

В 2019 г. вследствие реорганизации кафедр сопротивления материалов машиностроительного профиля и теоретической механики и мехатроники, в порядке совершенствования структуры БНТУ, создана кафедра теоретической механики и механики материалов, которую возглавил профессор Василевич Ю. В. – высокопрофессиональный ученый, известный механик и материаловед, педагог и организатор научных исследований, отличник образования Республики Беларусь. Юрий Владимирович является автором трех монографий, более двухсот научных статей и учебных пособий, имеет патенты и авторские изобретения. Под его руководством защищены одна докторская и четыре кандидатских диссертаций. Результаты научных исследований внедрены в производство и учебный процесс. В 2020 г. Президентом Республики Беларусь награжден медалью Франциска Скорины за высокие достижения в профессиональной деятельности. Основные научные результаты профессора Василевича Ю. В., полученные в 2020 г., внесены в перечень десяти важнейших научных достижений БНТУ. Является главным редактором международного научно-технического журнала «Теоретическая и прикладная механика», включенного в перечень научных изданий Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь, в котором публикуются научные результаты теоретических и экспериментальных исследований в области механики; членом редколлегий авторитетных международных научно-технических периодических изданий; исполнителем и руководителем ряда заданий ГПНИ «Механика, металлургия, диагностика в машиностроении».

Кафедра теоретической механики и механики материалов БНТУ, как следует из вышеизложенного, имеет большую историю, свидетельствующую о большой научно-педагогической деятельности двух коллективов-тружеников вышеназванных кафедр, обеспечивающих качественное обучение студентов и выпуск востребованных инженерно-технических кадров за многие десятилетия работы. Сегодня кафедра укомплектована высококвалифицированными работниками, среди которых доктора и кандидаты наук, профессора и доценты, имеющими большой стаж научно-педагогической работы. При кафедре функционируют магистратура, аспирантура и докторантура по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. Кафедра обеспечивает работу Совета по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по отраслям науки – физико-математические и технические. Более десяти лет советом руководит Василевич Ю. В., за эти годы в совете защищено 3 докторских и 15 кандидатских диссертаций (см. ниже).

Важным для развития механики в стране стал 1937 г., когда в Белорусском государственном университете (БГУ) была создана кафедра теоретической механики. Первым заведующим кафедрой стал профессор Столяров Н. А., который одновременно возглавлял профильную кафедру по механике в БПИ (см. выше). Во время Великой Отечественной войны Белгосуниверситет находился в эвакуации и кафедра была временно закрыта. Воссоздана кафедра лишь в 1962 г. и ее по 1970 г. возглавлял доцент Чепинога М. М. Научные интересы Чепиноги М. М. были весьма обширны: динамика вязкой несжимаемой жидкости, теория волн, теория фильтрации, гидродинамическая теория смазки. Им внесен значительный вклад в разработку методов решения задач о движении реологических сложных сред с неклассическими граничными условиями, получены новые результаты в теории волн цунами, решен ряд практических важных задач гидродинамической теории смазки.

Основным направлением научных исследований кафедры в этот период было построение аналитических решений краевых задач механики сплошной среды.

Дальнейшее развитие механики в БГУ связано с образованием механико-математического факультета и с приездом в Беларусь крупных ученых-механиков, профессоров Львовского государственного университета имени И. Франко – Прусова И. А. и Мартыненко М. Д.



Прусов И. А.
(1919–1994)



Мартыненко М. Д.
(1937–2011)

Профессор Прусов И. А. родился в деревне Березовка, ныне Славгородского района Могилевской области. Он виднейший ученый в области теории упругости анизотропных сред, теории функций комплексного переменного и других разделов математики и механики. Разработанные ученым термоупругие комплексные потенциалы, позволяющие получать наиболее простые и эффективные решения основных граничных задач анизотропных сред, широко используются в научных исследованиях и практических приложениях во многих научных школах государств СНГ. Руководил кафедрой теоретической механики с 1970 г. по 1986 г. 30 июня 2022 г. в БГУ на механико-математическом факультете в честь ученого-механика Прусова И. А. открылась именная аудитория, что позволит увековечить память об авторитетном исследователе. Эту практику следует приветствовать и распространять. Творческое наследие Прусова И. А., безусловно, требует отдельного детального анализа и последующего развития. Среди учеников профессора – 20 докторов и кандидатов наук.

Уроженец села Крупское Брагинского района Гомельской области Мартыненко М. Д., крупный математик и механик-теоретик, работая профессором кафедры теоретической механики БГУ с 1970 г. по 2011 г., значительное внимание уделял подготовке научных кадров. Многие нынешние белорусские доктора и кандидаты физико-математических наук считают себя учениками Михаила Дмитриевича.

Вклад профессоров Прусова И. А. и Мартыненко М. Д. в дело подготовки белорусских ученых-механиков трудно переоценить.

В последующие четырнадцать лет, с 1986 г. по 1999 г., возглавлял кафедру доцент Козловский Н. И., с 1987 г. кафедра получила новое название – кафедра теоретической механики и робототехники, в связи с введением на кафедре новых специализаций: робототехника, теория управления.

С 1999 г. по настоящее время кафедрой руководит известный ученый-геомеханик, видный специалист в области компьютерной механики профессор Журавков М. А. В 2001 г. кафедра вновь переименована: кафедра теоретической и прикладной механики. При кафедре создана и активно работает (с июня 2002 г.) научно-исследовательская Лаборатория прикладной механики (научный руководитель профессор Журавков М. А.). В лаборатории выполняется большое число прикладных работ с предприятиями и организациями Беларуси и России по различным направлениям механики машин, геомеханики, IT-технологиям. Следует отметить, что в выполнении прикладных научных исследований активное участие принимают студенты, магистранты и аспиранты кафедры и вышеназванного факультета.

Для более эффективного обеспечения учебного процесса, выполнения самостоятельной и научно-исследовательской работы студентами в декабре 2000 г. при кафедре создана учебная лаборатория компьютерной механики.

Сегодня в рамках специальности «механика» производится подготовка специалистов по различным направлениям современной механики и использования информационных технологий в механике. Обучение на кафедре ведется по следующим специализациям и направлениям современной механики: фундаментальные и прикладные проблемы механики сплошных сред; САПР и робототехника в механике; компьютерная механика.

Кафедра теоретической и прикладной механики БГУ является единственной в Беларуси, где готовятся механики с глубокой математической подготовкой. Выпускники кафедры востребованы в учреждениях науки и высшей школы, а также успешно трудятся на промышленных предприятиях, в проектных и конструкторских бюро.

Хронологически следующей научной школой механиков, получившей заметное развитие в Беларуси, стал Белорусский институт инженеров железнодорожного транспорта (ныне Белорусский государственный университет транспорта (БелГУТ)). Практически одновременно с открытием в 1953 г. названного института была образована

кафедра теоретической механики и сопротивления материалов, первым руководителем которой стал д.т.н., профессор Карякин Н. И., прежде работавший в Томском электромеханическом институте инженеров железнодорожного транспорта [6]. В последующие годы кафедрой руководили известные ученые: к.ф.-м.н., доцент Довнорович В. И. (1954–1963, с 1960 г. – кафедра технической механики); к.т.н., доцент Орлов В. А. (1963–1973); к.т.н., доцент Горский В. М. (1973–1974); к.т.н., доцент Дубко А. Н. (1974–1976); к.т.н., доцент Савельев В. Г. (1976–1980, с 1979 г. – кафедра теоретической механики); к.т.н., доцент Беньковский Д. Д. (1980–1986, с 1980 г. – кафедра теоретической и прикладной механики); к.т.н., доцент Горский В. М. (1986–1992); д.х.н., профессор Рогачев А. В. (с февраля по июль 1992); д.т.н., профессор Щербаков С. В. (1992–1994, с 1992 г. – кафедра теории механизмов, деталей машин и прикладной механики); д.т.н., профессор, член-корреспондент Плескачевский Ю. М. (1995–1997, с 1995 г. – кафедра технической физики и теоретической механики); к.т.н., доцент Ефремова З. Г. (1997–2002); к.т.н., доцент Заворотный А. В. (2002–2008); д.т.н., профессор Шимановский А. О. (с 2008 по наст. время). За период с 1995 г. по настоящее время на кафедре сформировалась научно-педагогическая школа в области компьютерного и математического моделирования динамики и прочности машин и строительных конструкций [7]. Сотрудниками, докторантами и аспирантами кафедры только за последние 10 лет защищены 2 докторские и 5 кандидатских диссертаций. Всего при научном консультировании и под научным руководством члена-корреспондента Плескачевского Ю. М. успешно защищено 8 докторских и 13 кандидатских диссертаций по техническим и физико-математическим наукам, им подготовлено 10 магистров технических наук, 30 дипломников ученого стали инженерами-электромеханиками. В настоящее время продолжателем традиций вышеназванной научной школы является ученик Плескачевского Ю. М. профессор Шимановский А. О.

По инициативе и под редакцией профессора Шимановского А. О. при БелГУТе издается сборник научных трудов «Механика. Исследования и инновации», который включен в перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования диссертационных исследований по направлениями: механика и машиностроение (по технической отрасли науки) и механика (по физико-математической отрасли науки).

Основные научные результаты, полученные в последние годы сотрудниками кафедры, включают: разработку методов моделирования цистерн с жидкостью, основанных на их представлении в виде единой системы «транспортное средство – перевозимая жидкость»; обоснование возможности регулирования частот форм собственных колебаний рамных строительных конструкций, что дает возможность в здании с виброактивным оборудованием отстраивать каждую его часть от резонансов; создание методики моделирования композитных материалов, позволяющей учитывать контактные взаимодействия между матрицей и армирующими элементами. Созданные методы моделирования динамики и напряженно-деформированного состояния цистерн с жидкостью используются на ряде предприятий Беларуси.

Заслуживает отдельного упоминания публикация [8], в которой описана история кафедры технической физики и теоретической механики БелГУТа за 55 ее работы. Подобных публикаций по истории других белорусских кафедр и лабораторий по механике явно недостаточно.

До недавнего времени в БелГУТе функционировала кафедра строительной механики, которую с 1986 г. по 2022 г. возглавлял известный ученый-механик д.ф.-м.н., профессор Старовойтов Э. И. (см. ниже). С сентября 2022 г. кафедра укрупнена и называется «кафедра строительной механики, геотехники и строительных конструкций», которой заведует ученик Эдуарда Ивановича д.ф.-м.н., профессор Леоненко Д. В.

В БелГУТе сложились и успешно развиваются также научные школы в области механики деформируемого твердого тела, механики и тепловой динамики фрикционного контакта, динамики и прочности машин, строительных конструкций. Кроме вышеназванных ученых, в успехи и достижения этих научных школ существенный вклад вносили и продолжают (в разные годы) вносить профессора Богданович А. В., Богданович П. Н., Сосновский Л. А., Пулято А. В., Щербаков С. С., Яровая А. В.

К гомельским школам механиков следует отнести также профессоров Можаровского В. В., Ставрова В. П., Тарикова Г. П., прежде работавших и продолжающих трудиться в Гомельском государственном университете имени Ф. Скорины и Гомельском государственном техническом университете имени П. О. Сухого.

Следующей исторически корректной датой развития механики в Беларуси следует считать 1959 г., когда под руководством доцента Белого В. А. (академик с 1972 г.) был создан Гомельский филиал лаборатории прочности и долговечности деталей машин Института машиноведения и автоматизации АН БССР, а затем – Лаборатория технической механики Института математики и вычислительной техники АН БССР (1960 г.). Распоряжением Совета Министров БССР от 30.12.1963 г. на базе Лаборатории технической механики образована первая на Гомельщине самостоятельная академическая организация – Отдел механики полимеров АН БССР. Следующим шагом стало преобразование в 1969 г. Отдела в Институт механики металлополимерных систем АН БССР (ИММС). Этот институт до 17 декабря 1992 г. и после 17 мая 2006 г. (см. ниже) был и остается единственным в стране научным учреждением, в названии которого присутствует термин «механика». На протяжении истекших десятилетий институтом руководили известные ученые: академик Белый В. А. (1969–1979), академик Свириденко А. И. (1979–1991), член-корреспондент Плещачевский Ю. М. (1991–2002), академик Мышкин Н. К. (2002–2017). В настоящее время Институтом руководит член-корреспондент Григорьев А. Я. Каждый из названных руководителей в той или иной мере способствовали развитию механики в Беларуси.

Постановлением Президиума Академии наук Беларуси от 17 декабря 1992 г. был создан Научный центр проблем механики машин (НЦ ПММ) на правах академического института. Организатором и первым директором был академик Высоцкий М. С. В 1995 г. НЦ ПММ выступил инициатором, разработчиком и головной организацией Государственной программы фундаментальных исследований «Механика», а также Государственной научно-технической программы «Белавтотракторостроение» (см. ниже).

В 2000 г. Научный центр проблем механики машин переименован в Государственное научное учреждение «Институт механики машин НАН Беларуси».

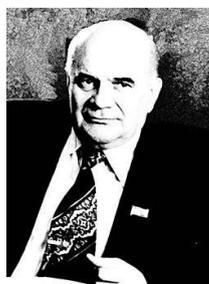
В 2002 г. Институт надежности машин НАН Беларуси и Институт механики машин НАН Беларуси реорганизованы путем слияния в Государственное научное учреждение «Институт механики и надежности машин НАН Беларуси». Директором был назначен д.т.н. Красневский Л. Г. (член-корреспондент с 2004 г.).

Постановлением Президиума НАН Беларуси от 17 мая 2006 г. на базе Института механики и надежности машин НАН Беларуси и Научно-инженерного республиканского унитарного предприятия «Белавтотракторостроение» НАН Беларуси путем их слияния создано Государственное научное учреждение «Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси». Генеральным директором назначен академик Высоцкий М. С.

Механики – персоналии нашего времени. При всей непредсказуемости и нередкой субъективности результатов существующей в Национальной академии наук Беларуси системы выборов, членство в академии остается важным показателем вклада ученого в развитие заявленного научного направления [9]. Первым механиком, избранным в 1972 г. в действительные члены (академики) по специальности «механика металлополимеров», стал Белый В. А. В 1977 г. академиком по специальности «механика

и газодинамика» избран Солоухин Р. И. В этом ряду должна быть и фамилия Высоцкого М. С., который был избран в академики в 1989 г. по специальности «машиностроение», но его личный вклад в создание условий для развития механики в Беларуси, как станет ясно из последующего изложения, весьма высок. В 1991 г. в члены-корреспонденты по специальности «механика металлополимерных систем» избран Плескачевский Ю. М., в то время директор Института механики металлополимерных систем НАН Беларуси (ИММС). Здесь уместно отметить, что с 1991 г. и до наших дней Плескачевский Ю. М. – единственный член-корреспондент, в наименовании специальности которого присутствует термин «механика» [9]. Поэтому все истекшие годы он позиционирует себя ответственным за развитие механики в стране, организовывая конгрессы и конференции по механике, издание профильных журналов, финансирование и выполнение программ различного уровня, лично развивая новые направления механики, участвуя в работе специализированных советов по защитах докторских и кандидатских диссертаций, организуя в ВУЗах и институтах страны новые кафедры и лаборатории по различным разделам теоретической и прикладной механики.

В 1994 г. в действительные члены был избран Коловандин Б. А., ушедший в мир иной в 1998 г., но остающийся до наших дней единственным механиком-теоретиком, академиком в составе НАН Беларуси по специальности «механика».



Белый В. А.



Высоцкий М. С.



Коловандин Б. А.



Солоухин Р. И.



Чижик С. А.



Плескачевский Ю. М.

В 2014 г. в академики был избран Чижик С. А. – ныне Первый заместитель Председателя Президиума НАН Беларуси, мирового уровня ученый в области микро- и наномеханики поверхностей и нанодиагностики.

После 1991 г. вакансии в члены-корреспонденты по специальности «механика» не открывались. В то же время в стране все эти годы были (и большинство продолжают здравствовать) ученые-механики, доктора физико-математических и технических наук, по потенциалу и вкладу в развитие механики вполне достойные этого академического звания. Вот эти имена:

<i>Белоцерковский М. А.</i>	<i>Ким А. Х.</i>	<i>Можаровский В. В.</i>	<i>Старжинский В. Е.</i>
<i>Богданович А. В.</i>	<i>Крушевский Д. Е.</i>	<i>Моисеенко В. И.</i>	<i>Старовойтов Э. И.</i>
<i>Богданович П. Н.</i>	<i>Кукареко В. А.</i>	<i>Немцов А. Б.</i>	<i>Тариков Г. П.</i>
<i>Босьяков С. В.</i>	<i>Куликов И. С.</i>	<i>Петроковец М. И.</i>	<i>Татур Г. К.</i>
<i>Василевич Ю. В.</i>	<i>Леоненко Д. В.</i>	<i>Прусов И. А.</i>	<i>Чигарев А. В.</i>
<i>Вихренко В. С.</i>	<i>Мартыненко М. Д.</i>	<i>Скойбеда А. Т.</i>	<i>Чигарев Ю. В.</i>
<i>Довнорович В. И.</i>	<i>Медведев Д. Г.</i>	<i>Смирнов Г. В.</i>	<i>Шимановский А. О.</i>
<i>Журавков М. А.</i>	<i>Миклашевич И. А.</i>	<i>Сосновский Л. А.</i>	<i>Щербаков С. С.</i>
<i>Ишин Н. Н.</i>	<i>Михасев Г. И.</i>	<i>Ставров В. П.</i>	<i>Яровая А. В.</i>
<i>Кане М. М.</i>			

По-видимому, список не исчерпывающий.

Белорусские ВУЗы, институты, кафедры, лаборатории, развивающие механику. Как отмечено выше, в этом ряду первыми следует назвать БНТУ, Белгосуниверситет, БелГУТ, Институт механики металлополимерных систем имени В. А. Белого НАН Беларуси, а также Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова НАН Беларуси, ГНПО порошковой металлургии НАН Беларуси. В разные годы в выполнении фундаментальных и прикладных программ и проектов по механике участвовали ученые и специалисты Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого, Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, Белорусского государственного технологического университета, Белорусского государственного аграрного технического университета, Могилевского государственного технологического университета и другие.

В дополнение к вышеизложенному о кафедрах в БНТУ, следует особо отметить период, когда профильной кафедрой по механике на протяжении 28 лет заведовал профессор Чигарев А. В., выдающиеся личные заслуги которого в создании условий для развития механики в стране трудно переоценить. Именно Анатолий Власович является инициатором организации в 1994 г. и первым председателем до сих пор единственного в стране специализированного Совета по защите докторских диссертаций в области механики деформируемого твердого тела. Профессор Чигарев А. В. – инициатор и организатор двух первых Белорусских конгрессов по теоретической и прикладной механике, на протяжении 28 лет являлся главным редактором издающегося на базе БНТУ международного научно-технического сборника «Теоретическая и прикладная механика» (по состоянию на текущее время опубликовано 37 выпусков) и неформальным председателем оргкомитетов ежегодной международной конференции «Моделирование и инжиниринг механических и мехатронных систем» (об этом ниже). Монографии, учебные пособия и учебники профессора Чигарева А. В. – существенный вклад в развитие ряда актуальных разделов механики и подготовку научных и инженерных кадров. Полагаю, это можно сказать о многих вышеназванных ученых-механиках.

Заметный вклад в развитие механики в Беларуси внесен сотрудниками кафедры строительной механики БелГУТа (см. выше). Долгие годы руководивший кафедрой профессор Старовойтов Э. И. проявил инициативу и организовал при БелГУТе специализированный Совет по защите кандидатских диссертаций по специальности «механика деформируемого твердого тела». Эдуард Иванович активно участвует в выполнении актуальных проектов и заданий по линии Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, в том числе международных, а также в рамках Государственных программ научных исследований. Сотрудниками кафедры под руководством профессора Старовойтова Э. И. подготовлено и успешно защищено 2 докторские и 11 кандидатских диссертаций, они активно публикуются в профильных отечественных и зарубежных журналах, регулярно издаются монографии и учебники по различным раз-

делам механики, выступают с докладами на конгрессах и конференциях высокого уровня, имеют прочные научные связи с коллегами – учеными-механиками со многими научными центрами Российской Федерации.

В 2009 г. Плескачевский Ю. М. и профессор Михасев Г. И. внесли тогда ректору Белгосуниверситета профессору Стражеву В. И. предложение об организации в БГУ первой в Беларуси кафедры по развитию исследований и разработок, подготовке кадров в области биомеханики. В итоге была открыта кафедра биомеханики и нанотехнологий, которую возглавил известный ученый-механик профессор Михасев Г. И. Кафедра осуществляет подготовку специалистов 1-ой и 2-ой ступеней высшего образования, в том числе по специализации «биомеханика». В 2009 г. впервые в Беларуси открыта аспирантура по специальности 01.02.08-Биомеханика (отрасль физико-математических наук).

Общемировые тенденции развития техники и технологий, их конкурентоспособность на мировых рынках все в большей степени связаны с уровнем использования микроэлектромеханических систем (МЭМС). Это достаточно новая область приложения сил и возможностей ученых-механиков различных ее разделов. Для подготовки инженеров-электромехаников, способных рассчитывать, проектировать и создавать МЭМСы – технически важные объекты микро- и наноразмерного уровня, в БНТУ по предложению академика Хрусталева Б. М. в 2007 г. создана кафедра микро- и нанотехники, которую организовал, кадрово укрепил, технически оснастил и последующие 14 лет возглавлял Плескачевский Ю. М. За истекшие годы кафедрой подготовлено более 300 инженеров-электромехаников, 7 кандидатов технических и физико-математических наук, 35 магистров. В настоящее время (с 2021 г.) кафедрой заведует академик Чижик С. А. [10].

Сегодня исследования и разработки по проблематике различных разделов механики проводятся в большинстве ВУЗов Беларуси и заслуживают отдельного анализа и обобщения.

В системе Национальной академии наук лишь одно научное подразделение, содержащее в своем названии термин «механика» – это лаборатория механики композитов и биополимеров Института механики металлополимерных систем имени В. А. Белого НАН Беларуси. Лаборатория создана в 1998 г. по инициативе тогда директора названного института Плескачевского Ю. М., который и возглавил новое подразделение. С 2000 г. лабораторией заведует известный специалист в области механики композитов, контактной механики и биомеханики к.т.н., доцент Шилько С. В. О высоком научном уровне проводимых в лаборатории исследований свидетельствуют полученные Плескачевским Ю. М. и Шилько С. В. премии НАН Беларуси (2007 г.), НАН Беларуси и Сибирского отделения Российской АН имени академика В.А.Коптюга (2011 г.), Российской АН и НАН Беларуси (2018 г.), дипломы за монографии по механике Сибирского межрегионального конкурса «Университетская книга-2014», межрегионального конкурса «Книга года: Сибирь-Евразия-2017», Всероссийского с международным участием конкурса имени первопечатника Ивана Федорова (2019 г.).

Развиваемые в Беларуси разделы механики. В вышеуказанных институтах, университетах, на кафедрах и в лабораториях развиваются актуальные разделы теоретической и прикладной механики.

К числу традиционно актуальных можно отнести следующие:

- механика деформируемого твердого тела;
- теоретическая механика;
- механика жидкостей, газа и плазмы;
- механика машин, механизмов и конструкций;
- мехатроника;
- динамика и прочность машин;

- *строительная механика;*
- *механика металлополимерных систем;*
- *геомеханика;*
- *технологическая механика.*

Достаточно новыми и не менее актуальными можно назвать следующие:

- *компьютерная механика;*
- *биомеханика;*
- *электромеханика и механика МЭМС;*
- *микро- и наномеханика;*
- *механика ауксетиков;*
- *механика интеллектуальных (умных) структур и систем;*
- *механика волновых и вибрационных процессов;*
- *механотермодинамика.*

Каждый из вышеуказанных разделов механики соответствующие специалисты смогут «развернуть» так, как это сделал автор для долгие годы возглавляемого им направления «механика металлополимерных систем» [11–12] (рисунок 1).

Ясно, что вышеприведенная градация направлений и разделов механики не исчерпывающая и в значительной степени условна, не претендует на универсальность, но отражает, по нашему мнению, круг научных интересов отдельных вышеназванных ученых и конкретных сложившихся в Беларуси научных коллективов.

Финансирование исследований и разработок в области механики. Первопроходцем грантового финансирования науки в Восточной Европе стал Фонд фундаментальных исследований (ФФИ) Белорусской ССР, основанный в мае 1991 г. как государственно-общественная организация. Инициатором создания ФФИ и первым председателем Совета фонда является академик Роман О. В., первым директором исполнительной дирекции фонда стал Васильев Э. И. Интересы механиков и материаловедов страны в первом составе Совета фонда отстаивал член-корреспондент Плескачевский Ю. М. В апреле 1996 г. ФФИ был преобразован в Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований (БРФФИ) [13]. В условиях характерной для 90-х годов прошлого века финансовой нестабильности, ФФИ, а затем и БРФФИ смогли финансово поддержать работы многих белорусских научных школ, в том числе и в области механики. Например, в рамках ряда проектов БРФФИ под руководством тогда д.т.н. Чижика С. А., проведены комплексные исследования физики и механики поверхностей твердых тел, что впоследствии послужило научной базой формирования в стране новой подотрасли приборостроения – атомно-силовые и сканирующие зондовые микроскопы, которые сегодня успешно эксплуатируются в ряде отечественных и зарубежных промышленных и научных центров, используются в учебном процессе.

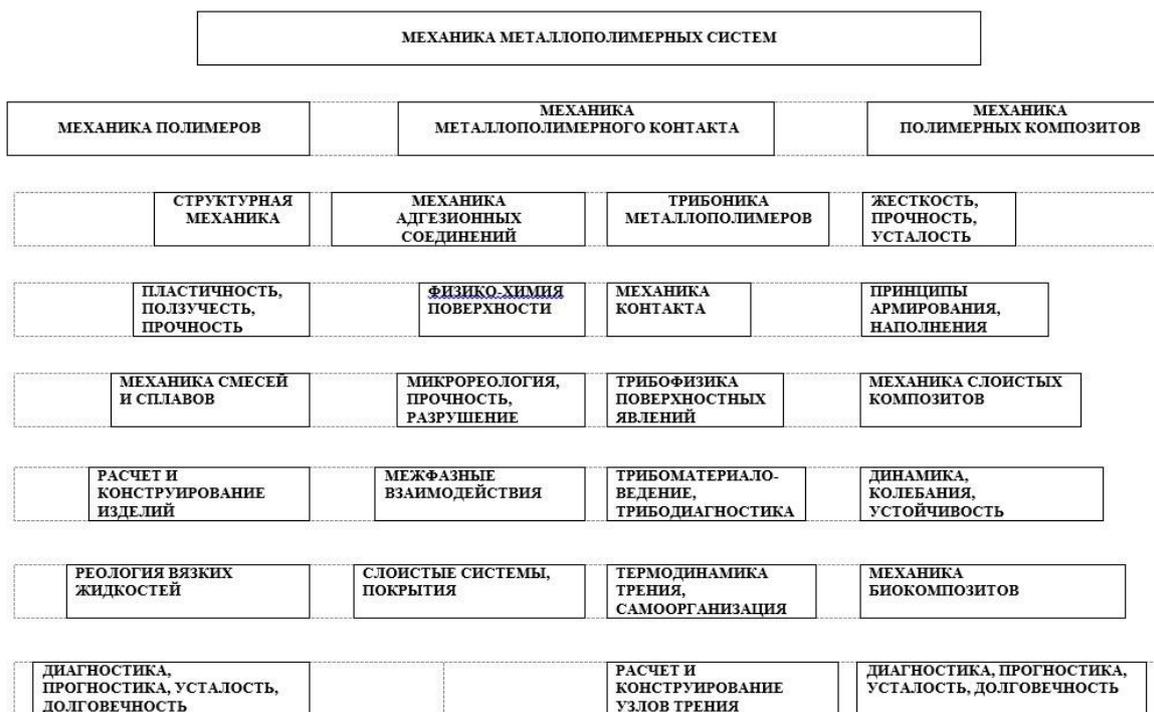


Рис. 1. Структура научного направления «механика металлополимерных систем»

Грантовая поддержка позволила впервые сформировать в Беларуси ряд новых научных направлений (механика ауксетиков и адаптивных материалов, биомеханика сердечно-сосудистой и зубочелюстной систем и др.); профинансировать издание монографий, учебников и технических словарей (например, русско-белорусско-немецко-английский словарь по механике [14]); обеспечить финансово проведение первых, ставших впоследствии традиционными, семинаров и конференций по различным разделам механики (например, Белорусские семинары по сканирующей зондовой микроскопии). Таких примеров немало.

Полагаю, что подробный анализ роли БРФФИ в развитии механики в Беларуси заслуживает отдельной обстоятельной публикации.

Важным источником финансирования исследований и разработок в области механики были и остаются Государственные программы научных исследований. Начиная с 70-х годов прошлого века Институт механики металлополимерных систем выступал головной организацией по программам фундаментальных исследований, которые в отдельные пятилетки формировались и выполнялись под шифрами «Системы», «Поверхность», «Материал» и содержали значительное количество тем в области механики, исполнителями которых являлись многие академические институты и университеты Республики. Научными координаторами программ в разные годы являлись вышеупомянутые Белый В. А., Свириденко А. И., Плескачевский Ю. М.

Государственные программы с шифром «Механика» впервые стали формироваться в Беларуси с приходом в Академию наук в качестве вице-президента Высоцкого М. С. Именно Михаил Степанович предложил «увязать» в единый комплекс программы фундаментального и научно-технического характера. Приведем их названия полностью:

– Государственная научно-техническая программа «Создать новые модели конкурентоспособных автомобилей, тракторов, дизельных двигателей, выпускаемых ведущими предприятиями машиностроительного комплекса для нужд

республики и экспорта» (шифр – «Белавтотракторостроение») на 1996–2000 годы, а затем и до 2005 года;

– Государственная программа фундаментальных исследований «Развитие теории и расчета мобильных машин на основе идентификации критических состояний динамических конструкций, компьютерного и физического моделирования комплекса воздействий внешней среды, процессов внутренней динамики» (шифр – «Механика») на 1996–2000 годы и на период до 2005 года.

В течение 1996–2000 г. организационная структура выполнения программ совершенствовалась и на следующую пятилетку приобрела вид, представленный на рисунке 2. Это произошло в те годы, когда Совет министров возглавлял д.т.н. Сидорский С. С., Министерство промышленности – д.т.н. Русецкий А. М., Государственный комитет по науке и технологиям – д.т.н. Плескачевский Ю. М., Национальную академию наук – д.э.н. Мясникович М. В., а НИРУП «Белавтотракторостроение» (впоследствии Объединенный институт машиностроения) – д.т.н. Высоцкий М. С. Этим руководителям не надо было доказывать необходимость развития теоретической и прикладной механики как научной базы создания конкурентоспособной продукции машиностроительного комплекса страны.

Государственная программа фундаментальных исследований «Механика» стала научной базой Государственной научно-технической программы «Белавтотракторостроение».

В основном в рамках подобной структуры работы по различным разделам механики финансируются до сих пор. Головной организацией по этим двум программам в наши дни выступает Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси (научный координатор – генеральный директор ОИМ к.т.н., доцент Поддубко С. Н.).

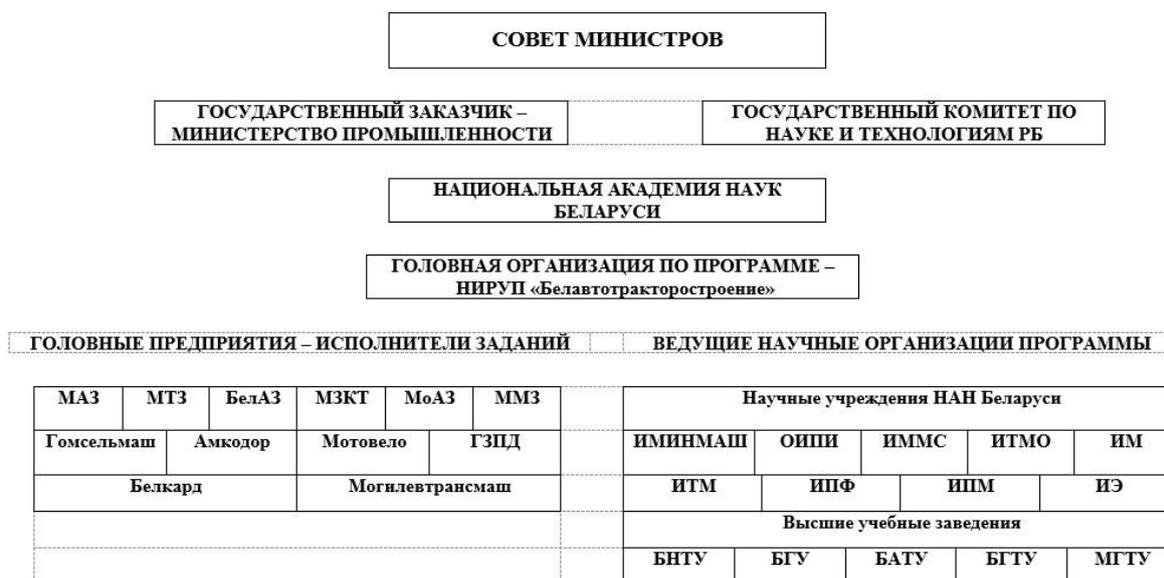


Рис. 2. Организационная структура ГНТП «Белавтотракторостроение» на 2001–2005 годы

Отдельные работы научных коллективов и молодых ученых ежегодно поддерживаются финансово в рамках грантов Президента Республики Беларусь.

Республиканские периодические издания по механике. Следующие основные отечественные журналы и сборники, согласно своему статусу, публикуют результаты исследований в области механики. В скобках указаны организационно-учредители изданий.

- *Механика машин, механизмов и материалов* (издается с 2007 года на базе ОИМ НАН Беларуси);
- *Теоретическая и прикладная механика* (БНТУ);
- *Механика. Исследования и инновации* (БелГУТ);
- *Известия НАН Беларуси, серия физико-математических и физико-технических наук* (НАН Беларуси);
- *Материалы, технологии, инструменты* (издавался с 1996 по 2015 годы на базе ИММС НАН Беларуси);
- *Инженерно-физический журнал* (ИТМО НАН Беларуси);
- *Вестники и известия институтов, университетов, академий*;
- *Машиностроение* (БНТУ);
- *Актуальные вопросы машиноведения* (ОИМ НАН Беларуси);
- *Математика. Информатика* (БГУ).

Полагаю, что список не исчерпывающий.

Как следует из вышеприведенного списка, до 2007 г. в Беларуси отсутствовало периодическое издание в виде специализированного журнала для механиков. Являясь с 1996 г. главным редактором международного научно-технического журнала «Материалы, технологии, инструменты», автор этих строк ввел в структуру журнала два раздела: «механика материалов и конструкций» и «расчеты и моделирование». Но с годами этого становилось все более недостаточно. К 2007 г. в Беларуси широким фронтом развернулись исследования и разработки в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Механика» и Государственной научно-технической программы «Белавтотракторостроение». Остро ощущалась необходимость в специализированном периодическом издании как информационном сопровождении названных и других близких по тематике программ. Поэтому директор ОИМ академик Высоцкий М. С. поддержал предложение автора о необходимости издания на базе ОИМ периодического специализированного издания по механике машин. Первоначально академику было предложено название журнала: «Механика материалов, механизмов и машин», что отвечало логике развития научной мысли. «Нет! – сказал Михаил Степанович, – первична машина. Техническое задание на машину диктует требования и к материалам, и к компонентам и узлам машин». Так утвердилось нынешнее название журнала.

Министерство информации Республики Беларусь 05 июня 2007 г. зарегистрировало новый международный научно-технический журнал «Механика машин, механизмов и материалов». Главным редактором журнала был определен академик Высоцкий М. С., его заместителями член-корреспондент Плескачевский Ю. М. и д.т.н. Мариев П. Л., ответственным секретарем к.т.н. Еловой О. М. В состав редколлегии и международного редсовета вошли наиболее авторитетные ученые специалисты в области механики материалов, конструкций, механизмов и машин из Беларуси и ряда зарубежных государств. Первый номер журнала с «забойными» статьями вышел 15 октября 2007 г. тиражом 500 экземпляров. С тех пор журнал выходит исправно четырьмя номерами в год, являясь авторитетным и единственным в Беларуси специализированным академическим изданием по широкому спектру фундаментальных и прикладных проблем и задач механики [15].

В настоящее время главным редактором журнала «Механика машин, механизмов и материалов» является генеральный директор ОИМ, к.т.н., доцент Поддубко С. Н. С первого номера журнала и по сей день всей организационной работой по наполнению и своевременному выходу журнала успешно занимается начальник отдела информационных ресурсов, маркетинга и международных связей ОИМ Русан С. В. Всего за 2007–2022 гг. увидел свет 61 выпуск журнала, опубликовано 836 статей.

Конгрессы и конференции. Первые два Белорусских конгресса по теоретической и прикладной механике (Механика-95 и Механика-99) состоялись на базе тогда Белорусской государственной политехнической академии (БГПА) по инициативе заведующего кафедрой теоретической и прикладной механики БГПА профессора Чигарева А. В. (см. выше) при активной поддержке тогда вице-президента НАН Беларуси академика Высоцкого М. С. Труды обеих конгрессов были изданы на базе Института механики металлополимерных систем НАН Беларуси [16–17]. В последующие восемь лет по разным причинам конгрессы не проводились. Рубежным стал 2007 г., в котором ОИМ планировал отметить 50-летие. Предложение автора о возрождении традиции проведения белорусских конгрессов по механике, но уже на базе ОИМ в рамках мероприятий по празднованию юбилея института, Высоцкий М. С. поддержал безоговорочно и сразу выдал все необходимые поручения. Важно было обеспечить максимально возможный высокий уровень представительства из числа известных ученых и специалистов. В итоге программа пленарных и секционных заседаний возрожденного конгресса «Механика-2007» выглядела весьма представительной. Достаточно отметить, что с одним из пленарных докладов выступил всемирно известный механик, директор Института проблем механики РАН, академик РАН Климов Д. М., прибывший на конгресс в качестве почетного гостя. Столь же высокий уровень представительства по требованию Высоцкого М. С. был обеспечен и на конгрессе «Механика-2009», в работе которого, например, приняли участие и выступили с пленарными докладами председатель Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, авторитетный в мире механик академик РАН Морозов Н. Ф. и мировой известности биомеханик, в те годы главный редактор издания «Российский журнал биомеханики» профессор Няшин Ю. И. Традиционно в работе конгрессов принимали и принимают участие главные конструкторы и ведущие специалисты машиностроительных предприятий и профильных научных центров Беларуси, России и других государств. С тех пор Белорусские конгрессы по механике ОИМ проводит регулярно каждые три года [15].

По инициативе академика Высоцкого М. С. на базе ОИМ с 2008 г., в годы, промежуточные между конгрессами, проводится международная научно-техническая конференция «Инновации в машиностроении» с изданием выбранных докладов в сборнике «Актуальные вопросы машиноведения», первый выпуск которого вышел в свет в декабре 2012 г. уже по инициативе тогда генерального директора ОИМ к.т.н. Дюжева А. А.

На базе БНТУ ежегодно с 1969 г. проводится международная конференция «Моделирование и инжиниринг механических и мехатронных систем», а также республиканский научно-методический семинар «Применение методов компьютерной механики в инженерии, науке, образовании». Проведено девять международных научно-технических конференций «Теоретическая и прикладная механика» с публикацией материалов докладов (по рекомендации оргкомитетов) в международном научно-техническом сборнике «Теоретическая и прикладная механика» (основан в 1975 г. и с 2023 г. издается в статусе журнала).

В последние годы, как отмечено выше, вся эта работа проводится под руководством профессора Василевича Ю. В.

В 2003 г. была проведена международная научно-техническая конференция «Механика машин: теория и практика». Организаторы: Институт механики и надежности машин совместно с Отделением физико-технических наук НАН Беларуси и НИРУП «Белавтотракторостроение» НАН Беларуси.

Следует также отметить ставшую заметным событием в жизни механиков Беларуси проведенную на базе БГУ в 2013 г. по инициативе профессора Михасева Г. И. международную конференцию «Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур». Труды данной конференции опубликованы в из-

дательстве «Springer». Попытка провести вторую такую конференцию с широким международным участием в 2020 г. не осуществилась из-за ковидных ограничений и введенных коллективным Западом против Беларуси необоснованных санкций.

Подготовка научных кадров. Номенклатура специальностей научных работников Республики Беларусь по разделу «01.02.00 – механика» предусматривает возможности подготовки и защиты докторских и кандидатских диссертаций по физико-математическим и техническим наукам по следующим специальностям:

01.02.01 – теоретическая механика;

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела;

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы;

01.02.06 – динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры;

01.02.08 – биомеханика.

В Беларуси в настоящее время действуют следующие советы по защите диссертаций:

– Совет Д.02.05.07 при БНТУ по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела; председатели в разные годы профессора Чигарев А. В. и Василевич Ю. В. (за прошедшее десятилетие защищено 3 докторских и 15 кандидатских диссертаций);

– Совет Д.01.15.01 при ОИМ по специальности 01.02.06 – динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры; председатели в разные годы член-корреспондент Берестнев О. В., академик Высоцкий М. С., профессор Моисеенко В. И. и член-корреспондент Красневский Л. Г. (всего защищено 20 докторских и 147 кандидатских диссертаций);

– Совет К.02.27.01 при БелГУТе по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела; председатель профессор Старовойтов Э. И. (всего защищено 25 кандидатских диссертаций).

Аспирантура и докторантура по подготовке ученых-механиков функционируют при Белгосуниверситете, БНТУ, ОИМ, БелГУТ, ИММС, ГГУ им. Ф. Скорины и др.

Международная олимпиада по теоретической механике. Организатором олимпиады является БелГУТ, кафедра технической физики и теоретической механики, которой заведует профессор Шимановский А. О. Олимпиада проводится ежегодно с 2005 г. с публикацией задач и итогов конкурсов в сборнике «Механика. Исследования и инновации». Традиционно в олимпиаде принимают участие 100–130 студентов из 30–35 ВУЗов Беларуси, России, Китая, Польши, Швеции, Турции, Израиля и других государств. Олимпиада включает лично-командный конкурс и командный «Брейн-ринг». Победители олимпиады награждаются дипломами и ценными подарками.

Представительство в зарубежных изданиях, советах, комитетах, обществах. Признанием вклада белорусских ученых-механиков в развитие механики является включение их в составы редколлегий и редсоветов следующих зарубежных изданий (в скобках указаны учредители и белорусские ученые, входившие ранее и входящие в настоящее время в названные составы):

– *Mechanics of Composite Materials* (Латвия, Институт механики полимеров: Бельский В. А., Юркевич О. Р., Плескачевский Ю. М., Михасев Г. И.);

– *Механика композиционных материалов и конструкций* (Россия, Институт проблем механики РАН: Старовойтов Э. И.);

– *Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. Математика. Механика. Астрономия* (переводится в Springer как «*Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*»), Россия: Михасев Г. И.);

– *Mathematics and Mechanics of Solids* (SAGE, США: Михасев Г. И. – приглашенный редактор);

- *International Journal of Modern Studies in Mechanical Engineering* (Индия: Михасев Г. И.);
- *American Journal of Mechanics and Applications* (США, Шилько С. В.);
- *Вестник Саратовского университета. Математика и механика* (Россия: Старовойтов Э. И.);
- *Российский журнал биомеханики* (Пермский национальный исследовательский политехнический университет: Плескачевский Ю. М., Шилько С. В.).

Ряд отечественных ученых избраны в различные зарубежные научные сообщества. Многие механики Беларуси являются членами весьма престижного Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике. Членом Евразийской академии горных наук и Российской академии горных наук является Журавков М. А. В Европейское общество биомехаников избран Шилько С. В. В EUROМЕСН входят Можаровский В. В. и Михасев Г. И. В Международную федерацию по содействию развитию науки о механизмах и машинах входят Григорьев А. Я., Канэ М. М., Старжинский В. Е., Шилько С. В.

Естественно, вышеприведенные списки не исчерпывающие, но убедительно демонстрируют признание заслуг белорусских механиков мировой научной общественностью.

Заключение.

1. Основными факторами, определяющими достаточно успешное развитие механики в Беларуси, является следующий их комплекс: комплектуются и финансируются программы различного уровня, включающие подпрограммы, задания и проекты по механике; выполняются проекты БРФФИ; издаются соответствующие журналы и сборники; пишутся монографии и учебники; ежегодно проводятся профильные конференции, один раз в три года – Белорусский конгресс по теоретической и прикладной механике; функционируют докторантура и аспирантура, советы по защитах диссертаций; работают профильные кафедры и лаборатории, готовятся специалисты, магистры, кандидаты и доктора наук.

2. В целом развитие механики в Беларуси осуществляется в рамках госпрограмм различного уровня, исследований и разработок научных центров, в русле заложенных традиций, на основе инициативы руководителей профильных организаций, научных школ и отдельных ученых.

3. Исторически сложилось так, что благодаря осуществляемой на протяжении десятилетней инициативе руководителей и ученых-механиков Белорусского национального технического университета, Белорусского государственного университета, Белорусского государственного университета транспорта, Института механики металлополимерных систем имени В.А. Белого НАН Беларуси, Объединенного института машиностроения НАН Беларуси и др., в стране сложились и успешно развиваются научные школы в области механики деформируемого твердого тела, строительной механики, геомеханики, механики полимеров и композитов, микро- и наномеханики, биомеханики, механики конструкций, механизмов и машин, компьютерной механики, других разделов теоретической и прикладной механики.

4. Успехи и достижения белорусских ученых-механиков, созданные методы расчета и моделирования, изобретения и программные продукты в значительной степени составляют научные основы создания конкурентоспособной на мировых рынках широкой номенклатуры отечественной продукции, а изданные монографии, учебники, учебные пособия, технические словари и справочники, курсы лекций и лабораторные работы, квалификация профессорско-преподавательского состава обеспечивают высокую компетентность подготовки специалистов для народнохозяйственного комплекса Республики Беларусь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наука Беларуси в XX столетии. / Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: Н. А. Борисевич (гл. ред.) [и др.]. – Минск : Белорусская наука, 2001. – 1006 с.
2. Национальная академия наук Беларуси : энцикл. справ. / Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: В. Г. Гусаков (гл. ред.) [и др.] – Минск : Белорусская наука, 2017. – 599 с.
3. Белорусская академическая наука. 100 лет / под ред. В. Г. Гусакова. – Минск : Белорусская наука, 2022. – 738 с.
4. Довнар-Запольский М. В. История Беларуси / М. В. Довнар-Запольский. – 4-е изд. – Минск : Беларусь, 2016. – 591 с.
5. Ученые, прославившие Беларусь / Нац. акад. наук Беларуси, сост.: М. П. Ахремчик [и др.]; редкол.: В. Г. Гусаков (гл. ред.) [и др.] – Минск : Белорусская наука, 2017. – 366 с.
6. Гомельщина научная / сост. Ю. М. Плескачевский. – Гомель : БелГУТ, 2020. – 239 с.
7. Белорусский государственный университет транспорта / под ред. И. И. Эвентова. – Гомель : Издат. Центр БелГУТа, 2018. – 146 с.
8. Шимановский А. О. Научная работа кафедры «Техническая физика и теоретическая механика» за 55 лет ее существования / А. О. Шимановский, Г. М. Куземкина // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. – 2009. – Вып. 3. – С. 155–160.
9. Национальная академия наук Беларуси: персональный состав, 1928–2018 / сост.: О. А. Гапоненко, Н. Н. Костюкович; редсовет: В. Г. Гусаков (предс.) [и др.] – Минск : Белорусская наука, 2018. – 614 с.
10. К истории подготовки инженерных кадров в области микросистемной техники в БНТУ / Люцко К. С. [и др.] // Приборостроение-2022: Матер. 15 МНТК (16–18 ноября 2022 года) – Минск : БНТУ. – С. 453–454.
11. Плескачевский Ю. М. Динамика металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, – Минск : Белорусская наука, 2004. – 386 с.
12. Плескачевский Ю. М. Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск : Белорусская наука, 2004. – 342 с.
13. Первопроходец белорусского конкурсного финансирования науки (БРФФИ: 1991–2006) / Белор. респ. фонд фундаментальных исследований; под общ. ред. В. А. Орловича. – Минск : Белорусская наука, 2007. – 624 с.
14. Русско-белорусско-немецко-английский словарь по механике / Ю. М. Плескачевский [и др.] – Минск : Белорусская энциклопедия, 2005. – 192 с.
15. Плескачевский Ю. М. Конгресс и журнал: история, факты, имена / Плескачевский Ю. М. // Механика машин, механизмов и материалов. – 2022. – № 3 (60). – С. 11–12.
16. Белорусский конгресс по теоретической и прикладной механике «Механика-95». Минск, Беларусь (6–11 февраля 1995). Тезисы докладов / редкол. Ю. М. Плескачевский [и др.]. – ИММС АНБ «Инфотрибо». – Гомель. 1995. – 412 с.
17. Материалы II Белорусского конгресса по теоретической и прикладной механике «Механика-99». Минск, Беларусь (28–30 июня 1999) / под общ. ред. М. С. Высоцкого. – ИММС НАНБ. – Гомель, 1999. – 420 с.

Поступила: 30.03.2023

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ В СТАЦИОНАРНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

¹Старовойтов Э. И., ²Журавков М. А., ¹Яровая А.В.

¹Белорусский государственный университет транспорта

²Белорусский государственный университет

Введение. Эксплуатация трехслойных элементов конструкций, занявших доминирующее положение в технике и строительстве, часто протекает в условиях воздействия внешних температурных полей. Это объясняет возросший спрос на разработку математических моделей трехслойных пластин и методов их расчета на различные виды и типы термосиловых нагрузок.

Монографии [1–2] описывают различные подходы к построению математических моделей статического и динамического деформирования многослойных и трехслойных элементов конструкций в различных физико-механических полях. В них также изложены методы решения соответствующих краевых и начально-краевых задач. Гармонические и нестационарные динамические нагружения неоднородных цилиндрических и сферических оболочек исследованы в работах [3–7]. Изотермическое динамическое деформирование трехслойных круговых пластин при импульсных и резонансных непрерывных и локальных нагрузках рассмотрено в статьях [8–13]. Затухание колебаний в вязкоупругой трехслойной пластине в условиях нейтронного облучения исследовано в статье [14; 15]. Нестационарный контакт сферических и цилиндрических оболочек анализируется в работах [16–19]. Публикации [20–27] посвящены изотермическому и термосиловому квазистатическому нагружению трехслойных пластин и стрежней, в том числе опирающихся на упругое основание [28; 29].

В статье [30] решена задача о собственных колебаниях упругой круговой трехслойной пластины в температурном поле. Проведен численный параметрический анализ зависимости собственных чисел и частот колебаний защемленной по контуру пластины от температуры. Здесь, на базе полученных в [30] результатов, построено решение задачи о вынужденных колебаниях упругой круговой трехслойной пластины в стационарном температурном поле и проведен численный параметрический анализ зависимости параметров колебаний защемленной по контуру пластины от температуры.

1. Постановка начально-краевой задачи. Используется цилиндрическая система координат r, φ, z , связанная со срединной плоскостью заполнителя, ось z направлена вверх, перпендикулярно к первому слою (рисунок 1). Для тонких внешних несущих слоев толщинами $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого легкого заполнителя ($h_3 = 2c$) справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали.

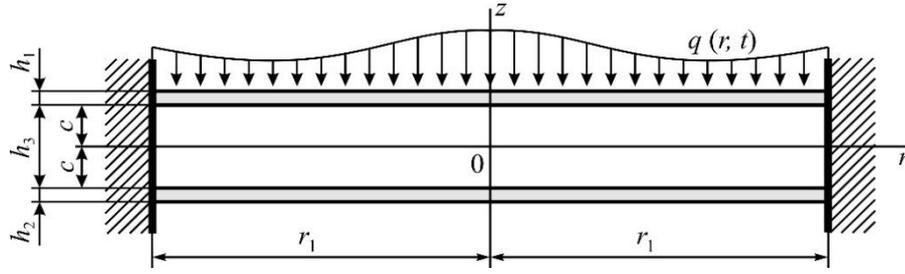


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины

Считаем, что к наружной поверхности первого несущего слоя приложена произвольная распределенная поперечная нагрузка $q(r, t)$. Температурное поле принимается однородным. В силу осесимметричности нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ ($k=1, 2, 3$ – номер слоя), а прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ . В дальнейшем эти функции считаем искомыми. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi = 0$ при $r = 1$). Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_1 .

Для описания зависимости модулей упругости $G(T)$, $K(T)$ материалов слоев от однородной стационарной температуры T , использовалась универсальная формула Белла [1]:

$$\begin{aligned} \{G(T), K(T), E(T)\} &= \{G(0), K(0), E(0)\} \varphi(T), \\ \varphi(T) &= \begin{cases} 1, & 0 < T / T_m \leq 0,06, \\ 1,03(1 - T / (2T_m)), & 0,06 < T / T_m \leq 0,57, \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

где T_m – температура плавления материала; $G(0)$, $K(0)$, $E(0)$ – значения модулей при начальной температуре.

Деформации и напряжения в слоях связаны термоупругим законом Гука:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k(T_k) \varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T_k) \quad (k=1,2,3), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_k(T_k) \varepsilon_{rz}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi), \end{aligned}$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$ – девиаторные, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения материала k -го слоя.

Уравнения движения рассматриваемой пластины получены вариационным методом в [1]. Соответствующая система дифференциальных уравнений в частных производных будет

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} &= -q. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь L_2 , L_3 – линейные дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2},$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_r \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

коэффициенты

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \\ a_3 &= h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+, \quad a_4 = c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right), \\ a_5 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \\ a_6 &= h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\ K_k^+ &= K_k(T) + \frac{4}{3} G_k(T), \quad K_k^- = K_k(T) - \frac{2}{3} G_k(T); \end{aligned} \quad (3)$$

$M_0 \ddot{w}$ – поперечные инерционные силы, $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_0^2$, ρ_k – плотность материала k -го слоя.

Здесь, как и ранее, температура в явном виде в уравнения движения (2) не входит. Она учитывается в коэффициентах (3) термозависимостью параметров упругости материалов слоев.

Начальные условия принимаются однородными ($t = 0$):

$$w(r, 0) \equiv 0, \quad \dot{w}(r, 0) \equiv 0. \quad (4)$$

На заделанном контуре пластины должны выполняться граничные условия:

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = 1. \quad (5)$$

2. Методика решения начально-краевой задачи. При рассмотрении вынужденных колебаний круговой трехслойной пластины решение строится с помощью разложения в ряды по системам собственных ортонормированных функций, приведенных в [30]. Внешняя нагрузка $q(r, t)$ и искомые перемещения $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$ представляются в виде

$$\begin{aligned} q(r, t) &= M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t), \\ \psi(r, t) &= b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n T_n(t), \quad u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n T_n(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где β_n – собственные числа; $v_n(\beta_n r)$, $\phi_n(\beta_n r)$ – системы собственных ортонормированных функций

$$v_n(\beta_n r) = \frac{1}{d_n} \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_0(\beta_n r) \right],$$

$$\phi_n(\beta_n r) = \frac{\beta_n}{d_n} \left[J_1(\beta_n r_1) \frac{r}{r_1} - J_1(\beta_n r) + \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} (I_1(\beta_n r_1) \frac{r}{r_1} - I_1(\beta_n r)) \right].$$

Ряды в (6) сходятся равномерно, что обеспечено полнотой используемых систем собственных фундаментальных функций. Это позволяет считать искомые функции непрерывными и дифференцируемыми. В силу выбора собственных функций $v_n(\beta_n r)$, $\phi_n(\beta_n r)$ граничные условия на контуре пластины (5) выполняются автоматически.

Выражения для коэффициентов разложения нагрузки в ряд по системе собственных функций $q_n(t)$ получим, умножив первое из соотношений в (6) на функцию $v_n(\beta_n r)$ и проинтегрировав по радиусу пластины:

$$\int_0^1 q(r, t) v_n r dr = M_0 \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} v_m q_m(t) v_n r dr = M_0 \sum_{m=0}^{\infty} q_m(t) \int_0^1 v_m v_n r dr.$$

В силу ортонормированности системы собственных функций

$$\int_0^1 v_m v_n r dr = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

имеем

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^1 q(r, t) v_n r dr. \quad (7)$$

При колебаниях в стационарном температурном поле заземленной по контуру трехслойной пластины дифференциальное уравнение для определения искомой функции времени $T_n(t)$ можно получить из третьего уравнения системы (2) после подстановки в него выражений (6), (7) и использования линейной дифференциальной связи функций v_n , ϕ_n :

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n. \quad (8)$$

Общее решение уравнения (8) можно принять в виде

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau)) q_n(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Следовательно, прогиб $w(r, t)$, относительный сдвиг $\psi(r, t)$ и радиальное перемещение $u(r, t)$ в круговой трехслойной упругой пластине, находящейся под воздействием осесимметричной динамической нагрузки в стационарном температурном поле, определяются соотношениями (6). При этом учитываются функции времени (9). Удовлетворяя начальным условиям движения (4), получим коэффициенты

$$A_n = B_n = 0.$$

Следовательно, задача по исследованию вынужденных колебаний, сводится к нахождению параметров разложения в ряд заданной нагрузки $q_n(t)$ и определению функции $T_n(t)$.

3. Решение начально-краевой задачи. Пусть на рассматриваемую пластину действует локальная мгновенно приложенная динамическая поверхностная нагрузка, равномерно распределенная внутри круга относительного радиуса $b \leq 1$.

В этом случае нагрузку можно представить с помощью функции Хэвисайда $H_0(r)$:

$$q(r, t) = q_0(t)H_0(b - r). \quad (10)$$

Подставляя нагрузку (10) в формулу (2.3), получаем интегральное выражение для вычисления параметров $q_n(t)$:

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)}{M_0 d_n} \int_0^{r_1} H_0(b - r) \left(J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_0(\beta_n r) \right) r dr.$$

Взяв, входящие в это выражение определенные интегралы от произведения функций Бесселя и Хэвисайда, получим коэффициенты разложения нагрузки (10) в ряд по системе собственных ортонормированных функций $v_n(\beta_n r)$:

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)b}{M_0 d_n \beta_n} \left(J_1(\beta_n b) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n b) \right). \quad (11)$$

Функция времени $T_n(t)$ вычисляется по формуле (9) с учетом коэффициентов (11). При постоянной интенсивности мгновенно приложенной нагрузки $q_0(t) = q_0 = \text{const}$ и нулевых начальных условиях получаем

$$T_n(t) = \frac{q_0 b (1 - \cos(\omega_n t))}{M_0 d_n \beta_n \omega_n^2} \left(J_1(\beta_n b) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_1(\beta_n b) \right). \quad (12)$$

При $b = r_1$ нагрузка распределена по всей поверхности пластины.

4. Численные результаты получены для круговой трехслойной пластины единичного радиуса $r_1 = 1$ м. Собственные частоты колебаний ω_n вычислялись по формуле

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}$$

с использованием собственных чисел из работы [30] при интенсивности распределенной нагрузки $q_0 = 7000$ Па.

На рисунке 2 показано изменение прогиба (*a*) и относительного сдвига в заполнителе (*b*) вдоль радиуса пластины, защемленной по контуру. Слои выполнены из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т ($h_1 = h_2 = 0,02$, $h_3 = 0,05$). Кривые рассчитаны при комнатной температуре $T_1 = 0$ ($t_1 = 0,0115$ с) и после нагрева на $T = 200$ °С ($t_2 = 0,0123$ с) для различных значений радиуса пятна нагрузки: 1 – $b = 0,5$ м (T_1 , t_1); 2 – $b = 0,5$ м (T_2 , t_2); 3 – $b = 1$ м (T_1 , t_1); 4 – $b = 1$ м (T_2 , t_2). Моменты времени t_1 , t_2 в которые вычислялись прогиб и сдвиг соответствуют максимуму функции (12) при частоте основного тона ω_0 . Увеличение температуры приводит к росту перемещений на 16–17 %.

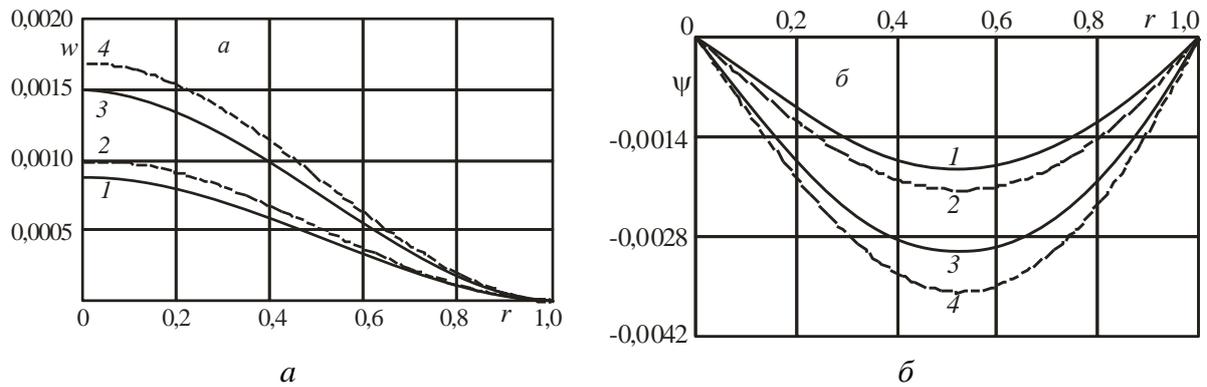


Рис. 2. Прогиб (а) и относительный сдвиг (б) в трехслойной пластине при круговой мгновенно приложенной нагрузке ($t = \pi / \omega_0$, Д16-Г-фторопласт-4-Д16Г)

Аналогичные графики для пластины, слои которой выполнены из материалов кордиерит-фторопласт-4-Д16Г, приведены на рисунке 3. Кривые рассчитаны в момент времени $t_3 = 0,005$ с, соответствующий максимуму функции времени (12) при частоте основного тона ω_0 . Здесь воздействие температуры не приводит к заметному изменению перемещений, что обусловлено весьма жестким кордиеритовым слоем.

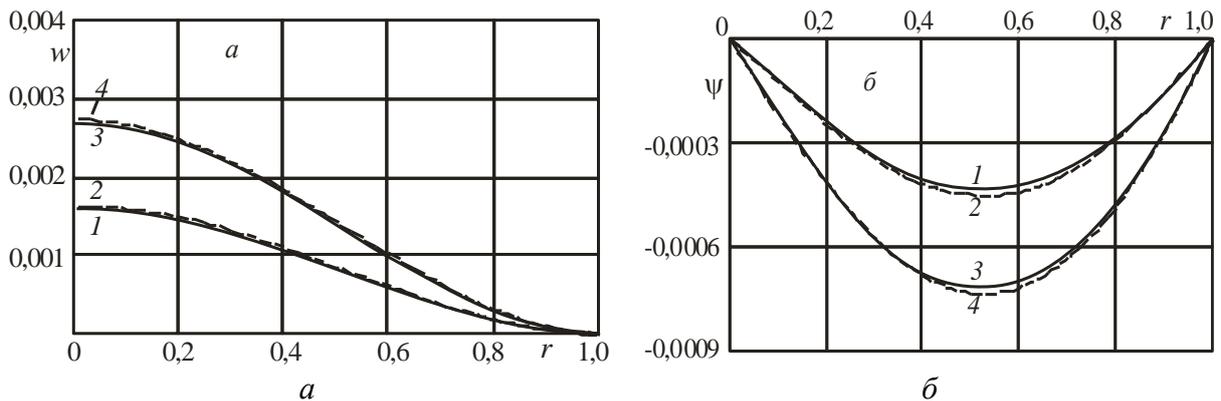


Рис. 3. Прогиб (а) и относительный сдвиг (б) в трехслойной пластине при круговой мгновенно приложенной нагрузке ($t = \pi / \omega_0$, кордиерит-фторопласт-4-Д16Г)

Рисунок 4 иллюстрирует сходимость ряда (6) для прогиба при нагрузке, равномерно распределенной по верхней плоскости пластины Д16Г-фторопласт-Д16Г ($b = 1$ м): 1 – $T = 0$; 2 – $T = 200$ °С. При расчете прогиба суммировались первые восемь членов ряда. Добавление последующих 92 слагаемых изменяло результат менее чем на 0,01 %. Отдельные точки на графике соединены для лучшего зрительного восприятия процесса сходимости.

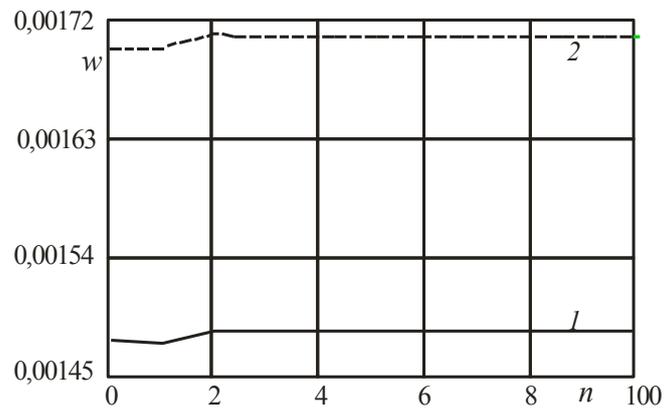


Рис. 4. Сходимость ряда при вычислении прогиба

Выводы. Предложена механико-математическая модель динамического деформирования упругих трехслойных круговых пластин мгновенно приложенными нагрузками. Она позволяет исследовать зависимость параметров колебаний от величины стационарного температурного поля. Показано, что температура влияет на амплитуды колебаний через механические характеристики материалов, собственные частоты и собственные функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция».

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков [и др.] – Минск : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
2. Журавков М. А. Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов – Минск : БГУ, 2021 – 535 с.
3. Gorshkov, A. G. Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell / A. G. Gorshkov, E. I. Starovoitov, A. V. Yarovaya // International applied mechanics. – 2001. – Vol. 37, No. 9. – P. 1196–1203.
4. Старовойтов Э. И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – 21, № 2. – С. 162–169.
5. Mikhailova, E. Yu. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) / E. Yu. Mikhailova, G. V. Fedotenkov // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, No. 2. – P. 239–247.
6. Tarlakovskii, D. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, No. 2. – P. 145–152.
7. Mikhasev, G. I. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells / G. I. Mikhasev, H. Altenbach // Thin-walled laminated structures. – Cham: Springer. – 2019. – P. 157–198.
8. Могилевич Л. И. Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым наполнителем / Л. И. Могилевич, В. С. Попов, Э. И. Старовойтов // Наука и техника транспорта. – 2006. – № 2. – С. 56–63.
9. Paimushin, V. N. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour / V. N. Paimushin // Mechanics of Composite Materials. – 2017. – Vol. 53, No. 1. – P. 1–16.

10. Bakulin, V. N., Dynamic Stability of a Cylindrical Shell under Alternating Axial External Pressure. / V. N. Bakulin, E. N. Volkov, A. I. Simonov // Russian Aeronautics. – 2017. – Vol. 60, No. 4. – P. 508–513.
11. Bakulin, V. N. Parametric resonance of a three layered cylindrical composite rib-stiffened shell / V. N. Bakulin, D. A. Boitsova, A. Ya. Nedbai // Mechanics of composite materials. – 2021. – Vol. 57, No. 5. – P. 623–634.
12. Starovoitov, É. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, No. 5. – P. 474–481.
13. The oblique impact response of composite sandwich plates/ I. Ivañez [et al.] // Composite Structures. – 2015. – No. 133. – P. 1127–1136.
14. Vakhneev, S. Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol. 18, No. 4. – P. 699–704.
15. Paimushin, V. N. Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping / V. N. Paimushin, V. A. Firsov, V. M. Shishkin // Mechanics of Composite Materials. – 2017 – Vol. 53, No. 4. – P. 283–304.
16. Fedotenkov, G. V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovskiy // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 162, No. 2. – p. 246–253.
17. Paimushin, V. N. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate / V. N. Paimushin, R. K. Gazizullin // Mechanics of Composite Materials. – 2017 – Vol. 53, No. 3. – P. 407–436.
18. Fedotenkov, G. V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2019. – Vol. 40, No. 4. – P. 439–447.
19. Suvorov, Ye. M. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium / Ye. M. Suvorov, D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2012. – Vol. 76, No. 5. – P. 511–518.
20. Захарчук Ю. В. Деформирование круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Теоретическая и прикладная механика. Минск : БНТУ, 2018. – Вып. 33. – С. 363–369.
21. Захарчук Ю. В. Влияние сжимаемости наполнителя на перемещения в трехслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2. – С. 14–27.
22. Козел А. Г. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – № 11 (11). – С. 127–133.
23. Козел А. Г. Деформирование круговой трехслойной пластины, защемленной по контуру, на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. Минск : БНТУ. – 2018. – Вып. 33. – С. 318–323.
24. Нестерович А. В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при несимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – № 11 (11). – С. 195–203.
25. Нестерович, А. В. Несимметричное нагружение физически нелинейной трехслойной круговой пластины в своей плоскости // Теоретическая и прикладная механика. Минск : БНТУ. – 2021. – Вып. 36. – С. 42–46.

26. Старовойтов Э. И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.

27. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field / É. I. Starovoitov [et al.] // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88, No. 4. – P. 1023–1029.

28. Трацевская Е. Ю. Закономерности развития суффозионно-просадочных явлений на территории Белоруссии / Е. Ю. Трацевская, А. Н. Галкин // Инженерная геология массивов лессовых пород. труды международной научной конференции. под ред. В. Т. Трофимова, В. А. Королева. – М. : 2004. – С. 108–109.

29. Трацевская Е. Ю. Особенности освоения техногенных грунтов г. Гомеля в современных условиях / Е. Ю. Трацевская, А. Н. Галкин // Многообразие грунтов: морфология, причины, следствия. Труды Международной научной конференции. Под ред. В. Т. Трофимова и В. А. Королева. – М. 2003. – С. 123.

30. Старовойтов, Э. И. Термоупругие свободные колебания трехслойной круговой пластины / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, А. В. Яровая // Теоретическая и прикладная механика. – Минск : БНТУ, 2021. – Вып. 36. – С. 15–20.

Поступила: 15.03.2023

ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОРОДНОГО МАССИВА ПРИ ВЕДЕНИИ ГОРНЫХ РАБОТ ВБЛИЗИ ШАХТНОГО СТВОЛА

Журавков М. А., Николайчик М. А., Климович Н. М.

Белорусский государственный университет

Введение. В настоящее время компьютерное (численное) моделирование находит все больше применений в различных областях механики: биомеханике, гидро- и аэродинамике, электродинамике и т. д. Не исключением стало и его применение в геомеханике. В частности, широкое распространение в геомеханике получило численное моделирование геомеханического состояния массива при ведении горных работ, возведении подземных геотехнических сооружений, а также эксплуатации объектов горнодобывающей промышленности. Данное исследование посвящено определению напряженно-деформированного состояния (НДС) породного массива от глубины ведения горных работ до дневной поверхности.

На сегодняшний день, анализ литературных источников показывает немногочисленное количество работ по данной тематике. Малое количество работ, посвященных моделированию НДС массива от глубины ведения горных работ до дневной поверхности объясняется сложностью данного направления исследований, обусловленную большим количеством параметров, которые необходимо учитывать при составлении механико-математических моделей. Многие из этих работ посвящены изучению характеристик мульды оседания (максимальное оседание, ширина мульды и т. д.) дневной поверхности, так, например, в [1] исследуется взаимосвязь между коэффициентом оседания дневной поверхности и глубиной разработки при камерной системе ведения горных работ. В [2–3] изучаются характеристики динамического оседания массива с помощью моделей, основанных на объединении вязкоупругих и вероятностных моделей. В [4–5] исследуется напряженное состояние вблизи зон добычи полезных ископаемых и их влияние на вышележащую поверхность с помощью сопряжения нескольких численных методов.

В данной статье рассматривается задача моделирования напряженно-деформированного состояния (НДС) породного массива при его отработке столбовой системой (отработка большими площадями) от глубины ведения горных работ до дневной поверхности в окрестности шахтного ствола. Цель исследования заключается в изучении характеристик мульды оседания (максимального оседания и ширины мульды) дневной поверхности и их верификация с данными натурных замеров. Также, в рамках исследования, проводился анализ взаимного влияния проходки лавы и шахтного ствола в подработанном массиве горных пород.

Постановка задачи. В качестве модельной задачи рассматривался процесс отработки породного массива одиночной лавой (широким очистным забоем) в окрестности шахтного ствола. Горные работы велись на глубине 555 м.

Геомеханическая модель строилась с учетом следующих обобщенных слоев: верхний осадочный слой мощностью 105 м, следующий слой глинисто-мергелистой толщи (ГМТ) мощностью 265 м и нижележащая соленосная толща. Геометрические размеры численной модели выбирались с учетом отсутствия влияния отдаленных границ модели на НДС участка породного массива, где велись очистные работы и проходил шахтный ствол. Высота области моделирования равнялась 2000 м, радиус – 20 000 м. Высота лавы принималась равной 2,15 м, ширина лавы в направлении, пер-

пендикулярном направлении забоя – 221 м, общая длина вынимаемого столба по направлению движения забоя – 2600 м. Радиус шахтного ствола равнялся 4 м, толщина бетонной крепи – 0,7 м, высота шахтного ствола – 1000 м. Расстояние от шахтного ствола до границы области, обрабатываемой лавой, принималось равным 385 м. При этом шахтный ствол находится в зоне влияния очистных работ.

В качестве модели поведения грунтов, составляющих обобщенные слои, была выбрана модель Кулона-Мора. Физико-механические свойства материалов, используемых в качестве исходных данных, приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Физико-механические свойства материалов

Параметр	Осадочный слой	ГМТ	Соленосная толща	Бетон Б30
Модуль упругости, ГПа	2,76	0,56	2,05	32,5
Коэффициент Пуассона	0,36	0,4	0,27	0,2
Угол внутреннего трения, град	11,12	46,55	41	–
Структурное сцепление, МПа	0,19	1,25	1,47	–
Предел прочности на сжатие, МПа	–	–	30	30
Плотность, кг/м ³	2043	2150	2400	2350

Модельные задачи решались в трехмерной постановке на базе метода конечных элементов (МКЭ). Каждая задача рассчитывалась в квазистатической постановке. Все тела механико-математической модели рассматривались как квазиоднородные и квазиизотропные упругопластические тела.

Граничные условия. Граничное условие на нижней границе модели представляло собой условие жесткого закрепления. К боковым границам прикладывалось горное (литостатическое) давление величиной ρgh , где ρ – плотность грунта, g – ускорение свободного падения, h – глубина залегания грунта. Задача решалась в поле силы тяжести и в полных напряжениях, т. е. на каждом последующем шаге учитывались напряжения, полученные на предыдущем шаге [6].

Ход решения. Алгоритм решения модельной задачи состоял из 3-ех расчетных шагов. На первом шаге массив рассматривался как упругая среда, на остальных – как упругопластическая [7].

На первом шаге определялось начальное (естественное) НДС ненарушенного породного массива.

На втором шаге определялось НДС породного массива после проходки шахтного ствола. Проходка шахтного ствола и постановка бетонной крепи учитывались в одном расчетном шаге. Модельная задача решалась с учетом напряжений, полученных на 1-ом шаге.

На третьем шаге вычислялось НДС породного массива после проходки лавы и окончания активного процесса сдвижения пород. На данном шаге в зону полного обрушения и активного трещинообразования, вставлялись блочные элементы в виде упругой связи, жесткость которой в вертикальном направлении – $2,4 \cdot 10^{11}$ Н/м, в направлении забоя – $1 \cdot 10^{13}$ Н/м, в направлении, перпендикулярном направлению забоя – $1 \cdot 10^{15}$ Н/м.

Жесткость упругой связи выбиралась таким образом, чтобы обеспечить выполнение следующих наблюдений за оседанием земной поверхности над одной из лав рудника, расположенного на Старобинском месторождении калийных солей:

– «...определяемая согласно действующему нормативному документу граница существенного оседания под влиянием очистной выемки в лаве располагается на расстоянии примерно 274 м от движущегося забоя лавы, образуя, таким образом, граничный угол в 63 градуса»;

– «...величина оседания по центру выработанного пространства на удалении 1243 м от забоя лавы достигает около 1070 мм, что составляет 83 % от расчетного согласно нормативному документу».

При этом задачи определения значения жесткостей упругих связей, а также выделения характерных зон нарушения предельного условия по напряжениям сжатия (рисунок 1, *а* и *б*) и зоны нарушения предельного условия Кулона-Мора (рисунок 1, *в*), которые впоследствии могут формировать свод возможного полного сдвижения над очистной выработкой и области разгрузки под обрабатываемым пространством, решались отдельно [7].

Высота свода обрушения и активного трещинообразования составляла 89 м., ширина в направлении, перпендикулярном направлению забоя (далее данное направление обозначается как «профиль 1») – 237 м, ширина в направлении забоя («профиль 2») – 2618 м (на уровне отработки лавы).

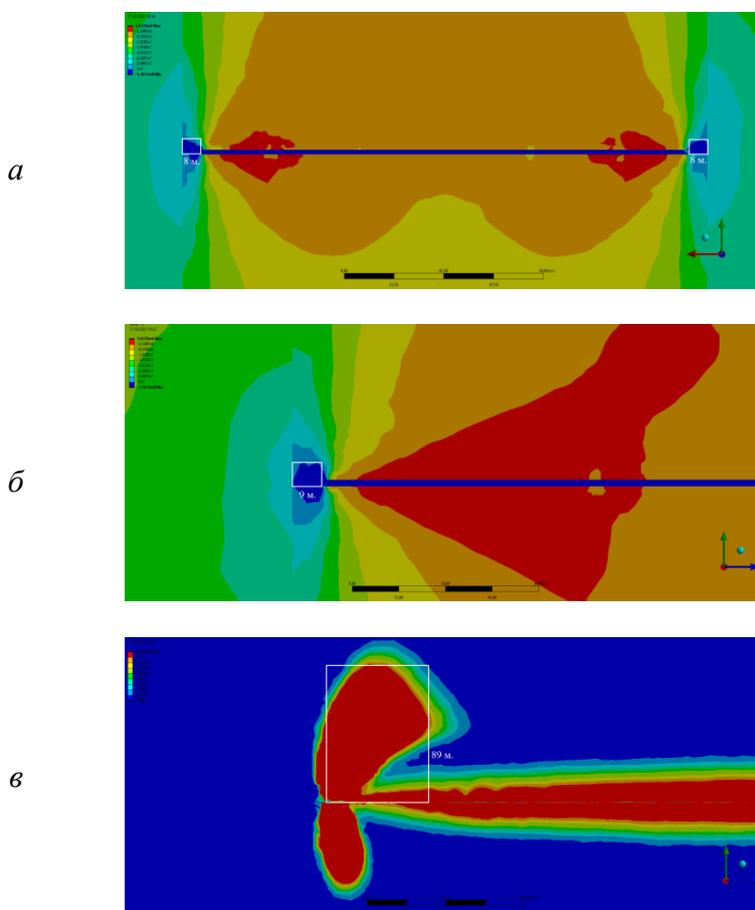


Рис. 1. Краевые зоны нарушения предельного условия: *а* – по напряжениям сжатия в 1-ом профиле; *б* – по напряжениям сжатия во 2-ом профиле; *в* – Кулона-Мора во 2-ом профиле

Результаты моделирования. На рисунках 2–3 представлены распределения вертикальных перемещений на дневной поверхности и в массиве горных пород после проходки лавы без учета шахтного ствола. В таблице 2 приведено сравнение результатов моделирования и натурных наблюдений.

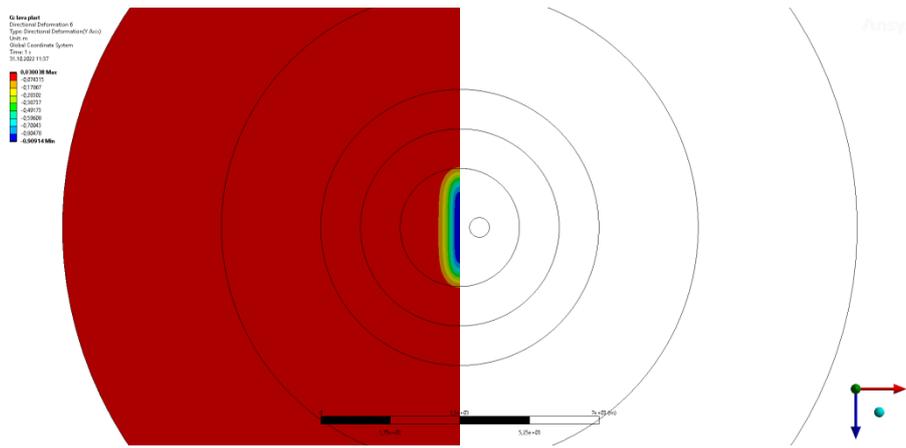


Рис. 2. Распределение вертикальных перемещений на дневной поверхности после проходки лавы без учета шахтного ствола

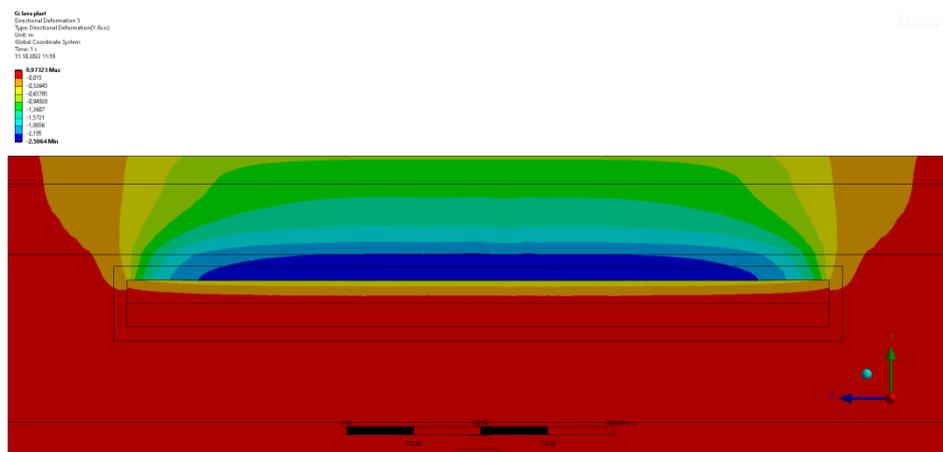


Рис. 3. Распределение вертикальных перемещений в породной толще после проходки лавы без учета шахтного ствола (профиль 2)

Таблица 2 – Сравнение результатов моделирования и данными натурных замеров

Данные	Максимальное оседание мульты сдвижения	Полуширина мульты минус полуширина лавы (профиль 2)
Согласно натурным замерам	1070 мм	274 м
По результатам моделирования	880 мм	329 м
Разница между полученными и исходными данными	18 %	20 %

Далее, на рисунках 4–6 приведены результаты моделирования НДС породного массива после проходки шахтного ствола без учета лавы.

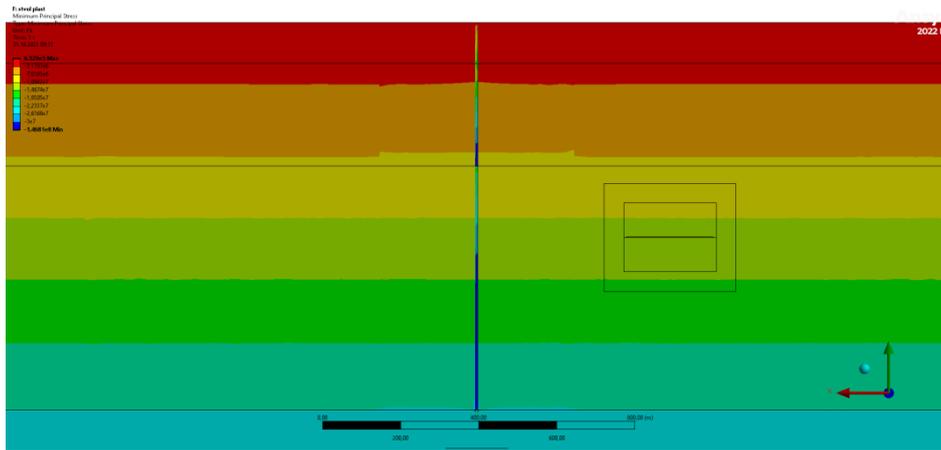


Рис. 4. Распределение сжимающих напряжений в породной толще после проходки шахтного ствола без учета лавы (профиль 1)

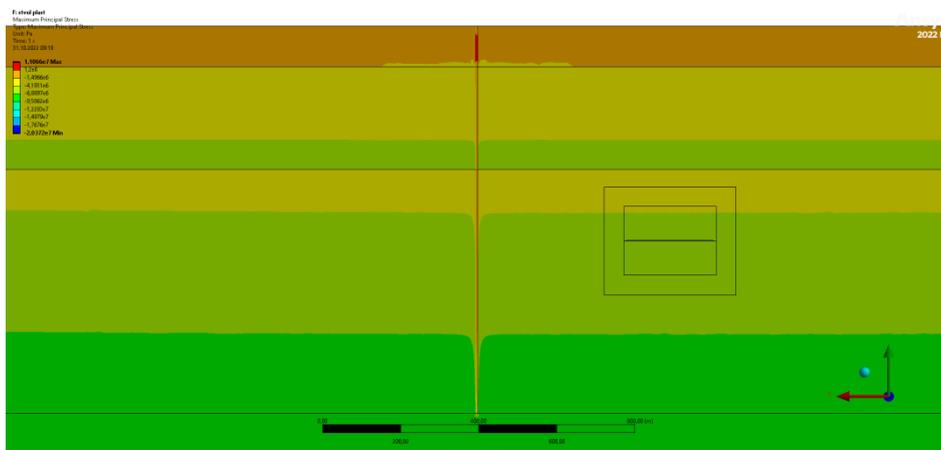


Рис. 5. Распределение растягивающих напряжений в породной толще после проходки шахтного ствола без учета лавы (профиль 1)

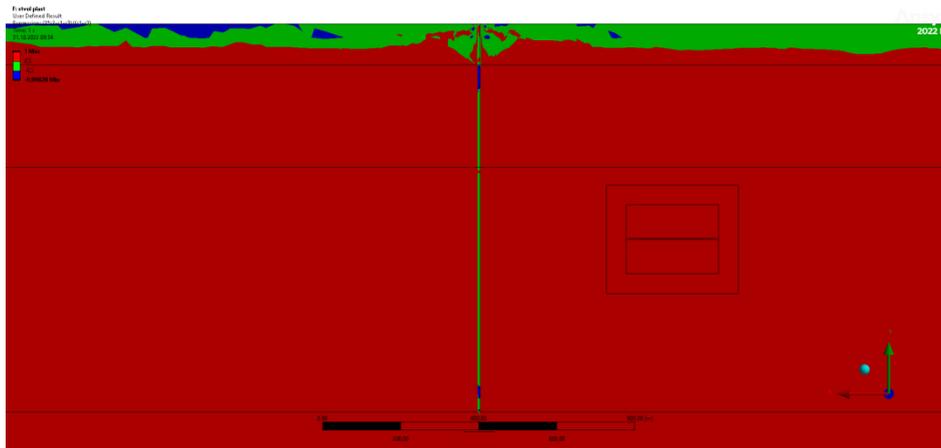


Рис. 6. Распределение коэффициента Надаи-Лоде в породной толще после проходки шахтного ствола без учета лавы (профиль 1)

На рисунках 7–10 представлены результаты моделирования НДС породного массива после проходки сначала шахтного ствола, а затем лавы. В таблице 3 приведено сравнение результатов на 2-ом и 3-ем этапах моделирования.

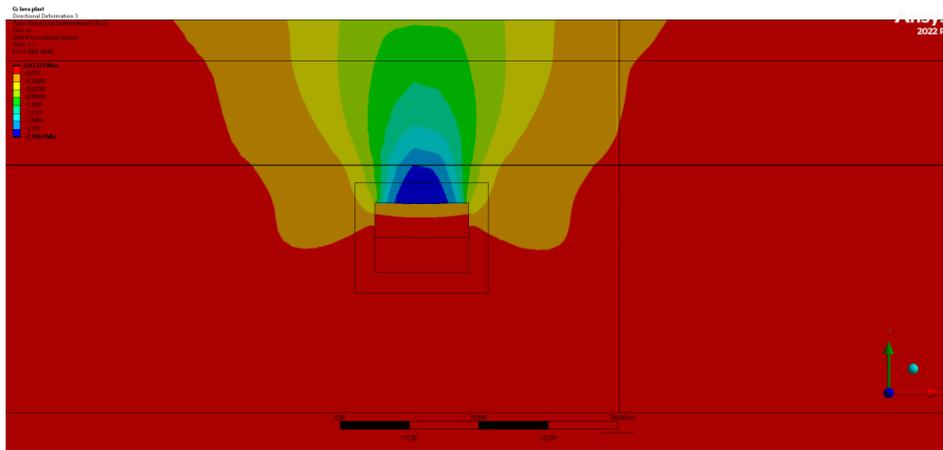


Рис. 7. Распределение вертикальных перемещений в породной толще после проходки шахтного ствола и лавы (профиль 1)

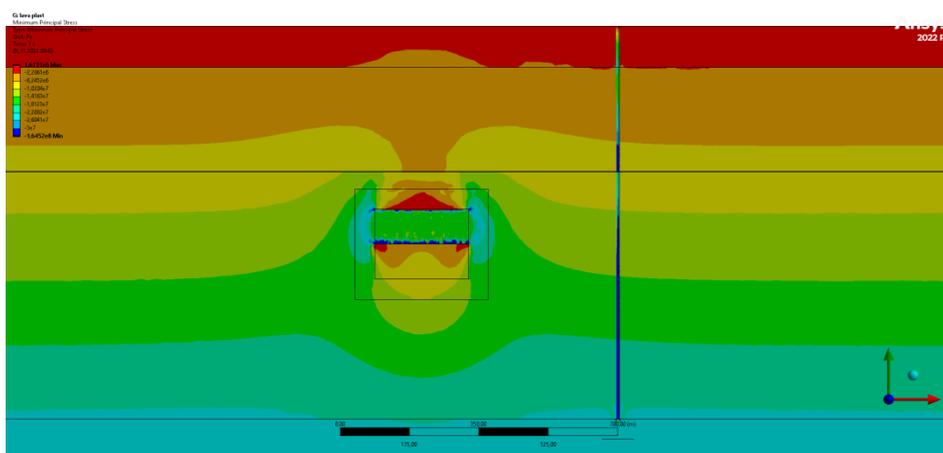


Рис. 8. Распределение сжимающих напряжений в породной толще после проходки шахтного ствола и лавы (профиль 1)

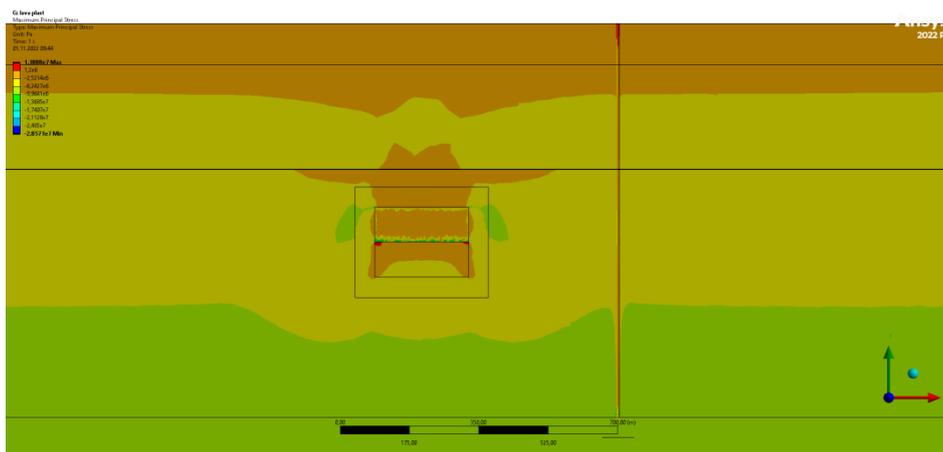


Рис. 9. Распределение растягивающих напряжений в породной толще после проходки шахтного ствола и лавы (профиль 1)

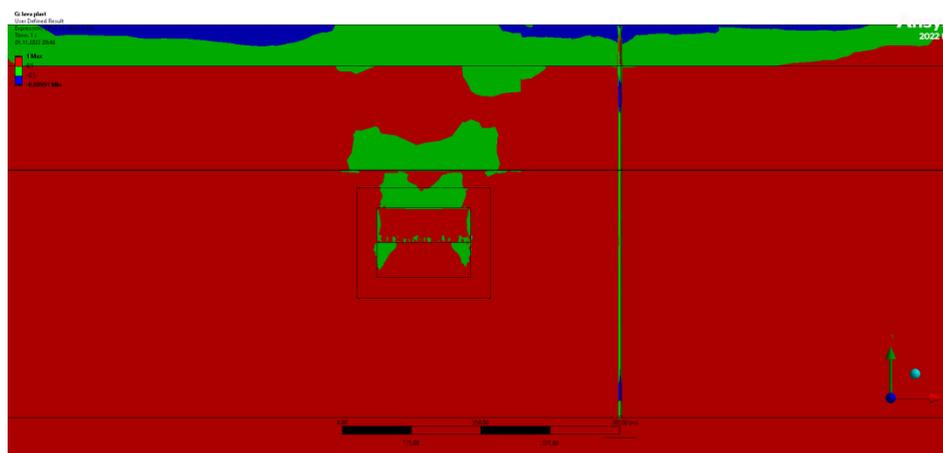


Рис. 10. Распределение коэффициента Надаи-Лоде в породной толще после проходки шахтного ствола и лавы (профиль 1)

Таблица 3 – Влияние наличия шахтного ствола на мульду оседаний дневной поверхности

	Максимальное оседание мульды сдвижения	Полуширина мульды минус полуширина лавы (профиль 2)	Полуширина мульды минус полуширина лавы (профиль 1)
По результатам моделирования без учета проходки шахтного ствола	880 мм	329 м	509 м
По результатам моделирования с учетом проходки шахтного ствола	909 мм	329 м	502 м
Разница между полученными результатами	3 %	0 %	1,4 %

Выполненные сравнительные расчеты показывают, что разница, при моделировании НДС породного массива после проходки лавы без учета шахтного ствола, между данными натурных замеров и результатами моделирования составляет 18–20 % (рисунки 2–3 и таблица 2).

При моделировании проходки шахтного ствола было замечено, что предельное значение по напряжениям сжатия в бетонной крепи достигается в окрестности переслаивания ГМТ-соленосная толща и в соленосной толще начиная с глубинной отметки равной 593 м (рисунок 4). Предельное значение по напряжениям растяжения превышает в бетонной крепи почти во всем осадочном слое (рисунок 5). По распределению коэффициента Надаи-Лоде [8] видно, что бетонная крепь находится в обобщенном напряженном состоянии сдвига (ближе к зумфу и на переслаивании осадочного слоя с ГМТ наблюдается обобщенное растяжение) (рисунок 6).

При моделировании проходки лавы после шахтного ствола наблюдается сохранение размера области, в которой достигается предельное значение по напряжениям растяжения (рисунок 9), однако, размер области, в которой превышает предельное значение по напряжениям сжатия увеличивается (глубинная отметка в соленосной толще увеличивается с 593 м до 490 м) (рисунок 8). По распределению коэффициента Надаи-Лоде (рисунок 10) наблюдается небольшое увеличение уже имеющихся зон обобщенного растяжения.

Так же стоит учитывать, что предельное состояние по условиям сдвига является более опасным нежели по напряжениям сжатия. Кроме того, фактическая прочность крепи превышает заявленные величины для данной марки бетона, так как используется ж/бетонная крепь, которая существенно увеличивает прочностные характеристики крепи.

По таблице 4 видно, что наличие шахтного ствола в окрестности ведения очистных работ оказывает не существенное (1,4–2 %) на характеристики мульды оседания.

Заключение. Таким образом, построена численная геомеханическая модель массива горных пород при его отработке столбовой системой в окрестности шахтного ствола, позволяющая моделировать трехмерное НДС породного массива от глубин ведения горных работ до дневной поверхности.

Численное моделирование проводилось на базе алгоритмов метода конечных элементов и метода блочных элементов. Все тела механико-математической модели рассматривались как квазиоднородные квазиизотропные упругопластические тела и соответствовали модели поведения грунтов Кулона-Мора.

В ходе моделирования были определены размеры зоны, представляющей собой свод обрушения и активного трещинообразования, а также характеристики мульды оседаний (максимальное оседание и ширина мульды) дневной поверхности. Верификация полученных результатов проводилась в соответствии с данными натурных замеров одного из рудников Старобинского месторождения калийных солей.

Анализ полученных результатов показал, что, даже в случае попадания в зону влияния очистных работ, изменение НДС шахтного ствола незначительно, что не приводит к критическим изменениям в нем. Данный факт дает возможность уменьшать расстояние между шахтным стволом и зонами ведения очистных работ, что поможет снизить оставляемые в недрах запасы полезных ископаемых.

Благодарность. Работа выполнена в рамках НИР кафедры теоретической и прикладной механики БГУ № 644/21 «Разработать математические модели и методы решения новых классов краевых задач механики сплошных сред применительно к актуальным современным проблемам науки и техники», ГПНИ «Конвергенция», задание 1.7.01.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. GUO Wen-bing. Relationship between surface subsidence factor and mining depth of strip pillar mining / GUO Wen-bing, HOU Quan-lin, ZOU You-feng // Transactions of Nonferrous Metals Society of China – 2011. – № 21 – P. 594–598.
2. Superposition model for analyzing the dynamic ground subsidence in mining area of thick loose layer / Defeng Hou [et al.] // International Journal of Mining Science and Technology. – 2018, – № 28 – P. 663–668.
3. Wen-Xiu Li. A visco-elastic theoretical model for analysis of dynamic ground subsidence due to deep underground mining // Applied Mathematical Modelling. – 2015. – № 39 – P. 5495–5506.
4. Francisco Zarate. A coupled fluid FEM-DEM technique for predicting blasting operations in tunnels // Underground Space. – 2018. – № 3 – P. 310–316.
5. Yang Ju. Numerical analysis of the dynamic evolution of mining-induced stresses and fractures in multilayered rock strata using continuum-based discrete element method // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2019. – №113 – P. 191–210.
6. Компьютерное моделирование в геомеханике / М. А. Журавков [и др.] // Минск : БГУ, 2008 – С. 200.

7. Моделирование геомеханического состояния породного массива при отработке подземного пространства большими площадями / М. А. Журавков [и др.] // Механика машин, механизмов и материалов – 2022. – № 4. – С. 97–104.

8. Николайчик М. А. Оценка напряженно деформируемого состояния тубинговой крепи при тампонировании околоствольного массива / М. А. Николайчик, М. А. Журавков // «Теоретическая и прикладная механика» – 2021. – № 36 – С. 93–98.

Поступила: 15.03.2023

КОЛЕБАНИЯ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ПЛАСТИНЫ, ПОБУЖДАЕМЫЕ МНОГОКРАТНО ПОВТОРНОЙ НАГРУЗКОЙ

Маркова М. В., Леоненко Д. В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. Композитные трехслойные элементы конструкций давно заняли свою нишу в инженерном деле. Их явное преимущество над элементами, выполненными из одного материала, заключается в возможности контролировать и задавать требуемые проектными и техническими условиями физико-механические параметры элемента: прочность, жесткость, тепло- и электропроводность, звуко- и магнитную проницаемость и т. д. Это возможно как раз благодаря сочетанию в рамках единого пакета свойств разнородных совместно работающих материалов. Кроме того, благодаря включению связующих срединных прослоек из легких материалов можно достичь существенного снижения общего веса конструкции без значимого ухудшения показателей прочности и жесткости. В то же время, проектирование слоистых конструкций с точным изменением толщины в наиболее напряженных местах повышает их рациональность с точки зрения материалоемкости.

Объем публикаций и научных исследований, направленных на моделирование и изучение работы слоистых конструкций, воспринимающих воздействие внешних нагрузок, включает несколько тысяч работ. Это обусловлено существованием различных методов приведения трехмерной задачи теории упругости к двумерной и подходов к моделированию и решению поставленных задач. Однако и на сегодняшний день трехслойные конструкции и, в частности, элементы с функциональным изменением толщины не утратили своей актуальности. Приведем обзор научных разработок схожей проблематики последних лет.

Собственные частоты и формы колебаний круговых пластин с функционально-изменяющейся толщиной заполнителя широко рассмотрены в работах Р. Лала и Р. Рани [1–5]. Схожая задача о свободных колебаниях трехслойной пластины с переменной толщиной срединного слоя обзревается в работе Ч. Чанга и Х. Чена [6]. Ч. Лу в работе [7] поднимает вопрос об изменении аэродинамических свойств трехслойной балки при изменении ее толщины вдоль пролета. В работе С. Суслера и Х. Туркмени [8] представлены теоретические и численные исследования нелинейного динамического деформирования пластин с конической формой сердцевины и коническим изменением толщины внешних слоев. В [9; 10] представлен способ изменения несущей способности прямоугольных сэндвич-панелей путем ступенчатого изменения толщины их внешних слоев, рассмотрены вопросы изгиба и устойчивости таких пластин, а также исследована зависимость между собственными частотами и формой ступенчатого профиля.

В данной работе будут рассмотрены вопросы динамического деформирования круговой трехслойной пластины со ступенчатым изменением толщины внешних слоев.

Основная теоретическая часть. Рассмотрим вынужденные колебания круговой жестко защемленной по наружному контуру трехслойной пластины. Толщина ее внешних слоев ступенчато изменяется вдоль радиуса. Толщина срединного заполнителя постоянна (рисунок 1).

Пластина находится в покое. Начальные деформации в пластине отсутствуют. В некоторый момент времени t_0 пластина воспринимает действие внешней многократно повторной нагрузки, выводящей ее из состояния равновесия (рисунок 2). Функция рассматриваемого воздействия имеет вид:

$$q_{(I,II)}(r,t) = \sum_{m=1}^N \left(q_0 - q_0 \frac{t - (m-1)\tau}{\tau_q} \right) \left(H_0[(m-1)\tau + \tau_q - t] - H_0[(m-1)\tau - t] \right). \quad (1)$$

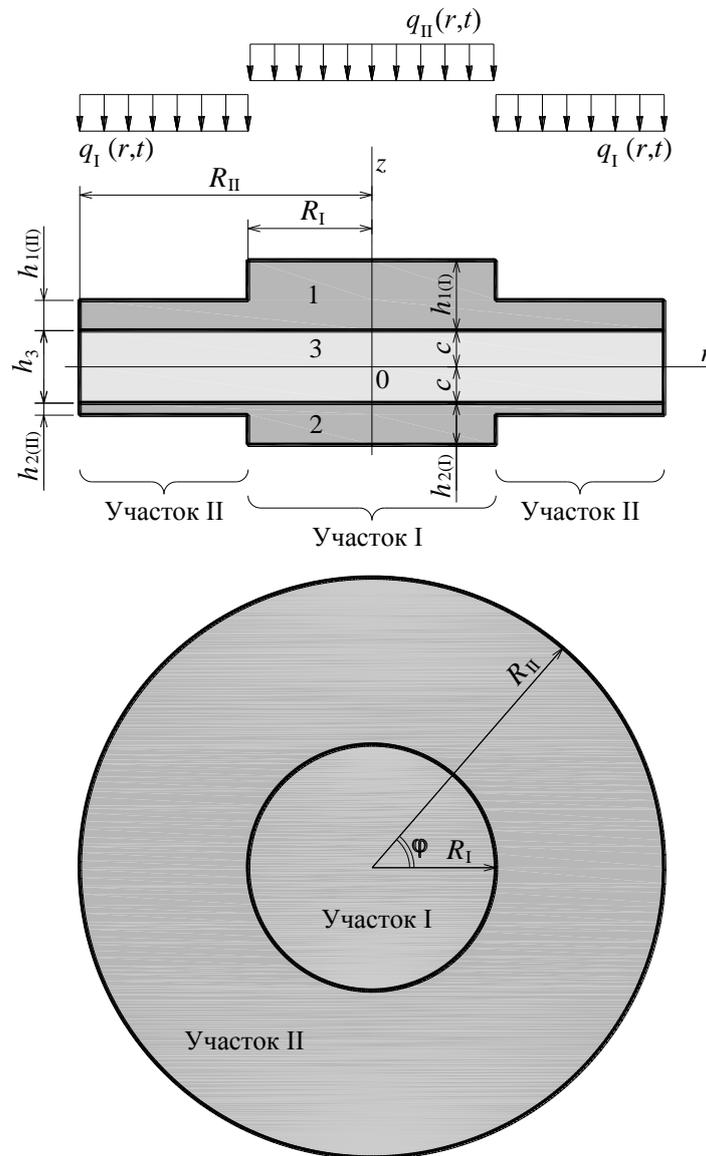


Рис. 1. Круговая трехслойная пластина со ступенчатым изменением толщины внешних слоев

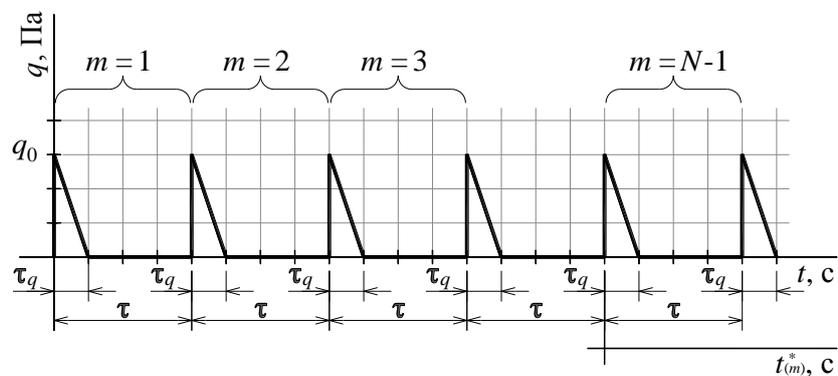


Рис. 2. Многократно повторная линейно-убывающая внешняя нагрузка

В приведенном выше выражении (1) I, II – номер рассматриваемого участка пластины (см. рисунок 1); q_0 – максимальная интенсивность внешнего воздействия; τ_q – продолжительность действия нагрузки; τ – временной интервал длительности цикла загрузки, представляющий собой сумму времени действия внешней нагрузки и времени свободных колебаний пластины до восприятия следующего воздействия; m – номер цикла; N – количество ударов; H_0 – функция Хевисайда [11]:

$$H_0(f) = \begin{cases} 0 & \text{при } f \leq 0; \\ 1 & \text{при } f > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Деформирование пластины моделируется в рамках дискретно-структурного подхода, основанного на предположениях о характере работы каждого слоя в отдельности, образующих единую систему гипотез. Считаем, что относительно толстый срединный заполнитель пластины подвержен сдвиговым деформациям при его изгибе, то есть для него справедлива сдвиговая модель Тимошенко [12]. Деформирование относительно тонких внешних слоев описываем в соответствии с классической гипотезой Кирхгофа о прямолинейности и перпендикулярности нормали к срединной поверхности до и после изгиба пластины [13; 14]. То есть при изгибе пластины нормаль, проведенная к срединной поверхности, во внешних слоях поворачивается на некоторый угол θ , и при этом остается прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной плоскости. В то же время в пределах заполнителя нормаль повернется на некоторый угол ψ , причем $\psi > \theta$, но также останется прямолинейной и не изменит своей длины.

Таким образом получаем, что при колебаниях пластины в ней возникают следующие перемещения: изгиб $w(r, t)$, сдвиг в заполнителе $\psi(r, t)$ и радиальное смещение координатной поверхности $u(r, t)$. В дальнейшем перечисленные функции будем считать искомыми.

Опираясь на вариационный принцип Гамильтона [15–17], в [18; 19] была получена система дифференциальных уравнений движения для каждого прямолинейного участка пластины, имеющего постоянную толщину. При этом общее решение для пластины в целом может быть представлено путем сопряжения частных решений для отдельных прямолинейных участков:

$$\begin{aligned} w &= w_{(I)} + (w_{(II)} - w_{(I)}) \cdot H_0(r - R_I); & \psi &= \psi_{(I)} + (\psi_{(II)} - \psi_{(I)}) \cdot H_0(r - R_I); \\ u &= u_{(I)} + (u_{(II)} - u_{(I)}) \cdot H_0(r - R_I). \end{aligned} \quad (3)$$

Для решения системы уравнений движения пластины функции искоемых перемещений $w(r, t)$, $u(r, t)$, $\psi(r, t)$ представим в виде суммы квазистатических $w_s(r, t)$, $u_s(r, t)$, $\psi_s(r, t)$ и динамических $w_d(r, t)$, $u_d(r, t)$, $\psi_d(r, t)$ составляющих:

$$w_{(I,II)} = w_{s(I,II)} + w_{d(I,II)}; \quad u_{(I,II)} = u_{s(I,II)} + u_{d(I,II)}; \quad \psi_{(I,II)} = \psi_{s(I,II)} + \psi_{d(I,II)}. \quad (4)$$

Выражения для определения квазистатических составляющих перемещений имеют вид [20]:

$$w_{s(I,II)} = C_{s5(I,II)} + C_{s6(I,II)}r^2 + C_{s7(I,II)} \ln r + C_{s8(I,II)}r^2 \ln r + D_{(I,II)} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (rq_{(I,II)}) dr dr dr dr;$$

$$\begin{aligned}
u_{s(I,II)} &= C_{s1(I,II)}r + \frac{C_{s2(II)}}{r} + 2C_{s6(I,II)}b_{1(I,II)}r + \frac{C_{s7(I,II)}b_{1(I,II)}}{r} + C_{s8(I,II)}b_{1(I,II)}r(2\ln r + 1) + \\
&\quad + \frac{D_{(I,II)}b_{1(I,II)}}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (rq_{(I,II)}) dr dr dr ; \\
\Psi_{s(I,II)} &= C_{s3(I,II)}r + \frac{C_{s4(II)}}{r} + 2C_{s6(I,II)}b_{2(I,II)}r + \frac{C_{s7(I,II)}b_{2(I,II)}}{r} + C_{s8(I,II)}b_{2(I,II)}r(2\ln r + 1) + \\
&\quad + \frac{D_{(I,II)}b_{2(I,II)}}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (rq_{(I,II)}) dr dr dr . \tag{5}
\end{aligned}$$

Константы интегрирования квазистатического деформирования C_{si} определяются из граничных условий жесткой заделки, условий равенства всех перемещений и внутренних усилий в точке изменения толщины пластины, а также сингулярности логарифмических функций в начале координат.

Выражения для определения динамических составляющих перемещений имеют вид:

$$\begin{aligned}
w_{d(I,II)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_{d5n(I,II)}I_0(r\gamma_{(I,II)n}^+) + C_{d6n(II)}K_0(r\gamma_{(II)n}^+) + C_{d7n(I,II)}J_0(r\gamma_{(I,II)n}^-) + C_{d8n(II)}Y_0(r\gamma_{(II)n}^-) \right] \times \\
&\times (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(r) \cdot (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)); \\
u_{d(I,II)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_{d1n(I,II)}r + \frac{C_{d2n(II)}}{r} + C_{d5n(I,II)}I_1(r\gamma_{(I,II)n}^+) \left(\gamma_{(I,II)n}^+ b_{1(I,II)} + \frac{\omega_n^2 m_{1(I,II)}}{\gamma_{(I,II)n}^+} \right) - \right. \\
&- C_{d6n(I,II)}K_1(r\gamma_{(I,II)n}^+) \left(\gamma_{(I,II)n}^+ b_{1(I,II)} + \frac{\omega_n^2 m_{1(I,II)}}{\gamma_{(I,II)n}^+} \right) - C_{d7n(I,II)}J_1(r\gamma_{(I,II)n}^-) \left(\gamma_{(I,II)n}^- b_{1(I,II)} - \frac{\omega_n^2 m_{1(I,II)}}{\gamma_{(I,II)n}^-} \right) - \\
&- C_{d8n(I,II)}Y_1(r\gamma_{(I,II)n}^-) \left(\gamma_{(I,II)n}^- b_{1(I,II)} - \frac{\omega_n^2 m_{1(I,II)}}{\gamma_{(I,II)n}^-} \right) \left. \right] \times (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)); \\
\Psi_{d(I,II)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_{d3n(I,II)}r + \frac{C_{d4n(II)}}{r} + C_{d5n(I,II)}I_1(r\gamma_{(I,II)n}^+) \left(\gamma_{(I,II)n}^+ b_{2(I,II)} + \frac{\omega_n^2 m_{2(I,II)}}{\gamma_{(I,II)n}^+} \right) - \right. \\
&- C_{d6n(I,II)}K_1(r\gamma_{(I,II)n}^+) \left(\gamma_{(I,II)n}^+ b_{2(I,II)} + \frac{\omega_n^2 m_{2(I,II)}}{\gamma_{(I,II)n}^+} \right) - C_{d7n(I,II)}J_1(r\gamma_{(I,II)n}^-) \left(\gamma_{(I,II)n}^- b_{2(I,II)} - \frac{\omega_n^2 m_{2(I,II)}}{\gamma_{(I,II)n}^-} \right) - \\
&- C_{d8n(I,II)}Y_1(r\gamma_{(I,II)n}^-) \left(\gamma_{(I,II)n}^- b_{2(I,II)} - \frac{\omega_n^2 m_{2(I,II)}}{\gamma_{(I,II)n}^-} \right) \left. \right] \times (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)). \tag{6}
\end{aligned}$$

Здесь γ_n^\pm – коэффициенты, зависящие от частоты собственных колебаний пластины ω_n ; $I_0(r\gamma_n^+)$, $K_0(r\gamma_n^+)$, $J_0(r\gamma_n^-)$, $Y_0(r\gamma_n^-)$ – функции Бесселя от действительного и мнимого аргумента [21; 22]; A_n и B_n – временные константы интегрирования, определяемые из начальных условий колебания пластины. Подробный вывод (6) представлен в работе [23].

Исходя из свойств ортогональности Бесселевых функций и условий нормировки выражения для временных констант интегрирования A_n и B_n будут иметь вид:

$$A_n = \int_0^{R_{II}} r W_n(r) f_1(r) dr; \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^{R_{II}} r W_n(r) f_2(r) dr, \quad (7)$$

где $f_1(r), f_2(r)$ – функция прогиба и функция скорости движения точек пластины соответственно в начальный момент времени t_0 ;

$W_n(r)$ – координатная функция формы колебаний.

Опираясь на исходные условия задачи об отсутствии колебательных процессов и начальных деформаций до момента приложения внешней нагрузки, учитывая (3)₁, можно записать:

$$\begin{aligned} w(r, 0) &= w_s(r, 0) + w_d(r, 0) = 0; \\ f_1(r) &= w_d(r, 0) = -w_s(r, 0) \quad \text{и} \quad f_2(r) = \dot{w}_d(r, 0) = -\dot{w}_s(r, 0). \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим загрузку пластины многократно повторной внешней нагрузкой (см. рисунок 2). Представим данную нагрузку в виде циклически повторяющейся кратковременной нагрузки. Примем, что каждый цикл внешнего воздействия имеет собственную локальную координатную ось времени $t^*_{(m)}$. Взаимосвязь между основной координатной осью t и локальными $t^*_{(m)}$ можно представить следующим выражением:

$$t^*_{(m)} = t - (m-1)\tau.$$

В то же время, аналитическое решение для функции прогиба пластины при действии кратковременной нагрузки представим в виде суммы двух решений на различных временных участках колебаний: «1» – от момента приложения внешней нагрузки $t^*_{(m)} = 0$ до момента завершения действия нагрузки $\tau_q - w^q_{(m)}(r, t)$; и «2» – от момента завершения внешнего воздействия τ_q до момента приложения нового внешнего воздействия $t^*_{(m+1)} = 0 - w^0_{(m)}(r, t)$. Второй временной участок представляет собой свободные колебания пластины, начальными условиями для которых служат функции прогиба и скорости движения точек пластины при вынужденных колебаниях предыдущего временного участка в момент времени $t^*_{(m)} = \tau_q$:

$$\begin{aligned} f_1^0(r) &= w^q_{(m)}(r, \tau_q) = w_s(r, [(m-1)\tau + \tau_q]) + w^q_{d(m)}(r, \tau_q); \\ f_2^0(r) &= \dot{w}^q_{(m)}(r, \tau_q) = \dot{w}_s(r, [(m-1)\tau + \tau_q]) + \dot{w}^q_{d(m)}(r, \tau_q). \end{aligned} \quad (9)$$

Отличие первого цикла внешнего воздействия от всех последующих будет заключаться в начальных условиях для первого временного участка. В момент времени $t^*_{(m)} = 0$ при $m = 1$ прогиб и скорость движения точек пластины будут отсутствовать – начальные условия для первого временного участка представлены выражениями (8). При $m > 1$ начальными условиями цикла будут служить функции прогиба и скоростей движения точек пластины предыдущего цикла в момент времени τ , то есть, учитывая алгоритм построения решения, прогиб и скорости движения точек будут определяться свободными колебаниями пластины предыдущего цикла в момент времени $(\tau - \tau_q)$:

$$\begin{aligned} w^q_{(m)}(r, 0) &= w_s(r, [(m-1)\tau]) + w^q_{d(m)}(r, 0) = w^0_{d(m-1)}(r, [\tau - \tau_q]); \\ f_1^q(r) &= w^q_{d(m)}(r, 0) = -w_s(r, [(m-1)\tau]) + w^0_{d(m-1)}(r, [\tau - \tau_q]); \end{aligned} \quad (10)$$

$$f_2^q(r) = \dot{w}_{d(m)}^q(r, 0) = -\dot{w}_s(r, [(m-1)\tau]) + \dot{w}_{d(m-1)}^0(r, [\tau - \tau_q]).$$

Общее выражение для функции прогиба m -ного цикла внешнего воздействия:

$$w_{(m)}(r, t) = w_s(r, t) + w_{d(m)}^0(r, [t - (m-1)\tau - \tau_q]) + (w_{d(m)}^q(r, [t - (m-1)\tau]) - w_{d(m)}^0(r, [t - (m-1)\tau - \tau_q])) \cdot H_0[(m-1)\tau + \tau_q - t]. \quad (11)$$

Здесь время функции динамического прогиба свободных колебаний определено как $[t - (m-1)\tau - \tau_q]$ в виду того, что выражения (7) для констант интегрирования A_n и B_n получены из условия начала колебаний, то есть при $t = 0$.

Итоговое выражение для функции прогиба пластины при вынужденных колебаниях, побуждаемых многократным ритмичным внешним воздействием

$$w(r, t) = w_s(r, t) + \sum_{m=1}^N \left[w_{d(m)}^0(t - (m-1)\tau - \tau_q) + \left[w_{d(m)}^q(t - (m-1)\tau) - w_{d(m)}^0(t - (m-1)\tau - \tau_q) \right] \times \right. \\ \left. \times \left(H_0[(m-1)\tau + \tau_q - t] - H_0[(m-1)\tau - t] \right) - \sum_{m=2}^N \left[\left(w_{d(m)}^0(t - (m-1)\tau - \tau_q) \right) \cdot H_0((m-1)\tau - t) + \right. \right. \\ \left. \left. + w_{d(m-1)}^0(t - (m-2)\tau - \tau_q) \left(1 - H_0[(m-1)\tau - t] \right) \right]. \quad (12)$$

Для многократно повторной линейно-убывающей внешней нагрузки константы интегрирования A_n и B_n для функции первого временного участка первого цикла будут иметь вид:

$$A_{n(1)}^q = \frac{-1}{d_n} \left[\int_0^{R_I} r \left[I_0(r\gamma_{(I)n}^+) + k_{1n} J_0(r\gamma_{(I)n}^-) \right] \left[C_{s5(I)} + C_{s6(I)} r^2 + D_{(I)} \frac{q_{0(I)} r^4}{64} \right] dr + \right. \\ \left. + \int_{R_I}^{R_{II}} r \left[k_{2n} I_0(r\gamma_{(II)n}^+) + k_{3n} K_0(r\gamma_{(II)n}^+) + k_{4n} J_0(r\gamma_{(II)n}^-) + k_{5n} Y_0(r\gamma_{(II)n}^-) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[C_{s5(II)} + C_{s6(II)} r^2 + C_{s7(II)} \ln r + C_{s8(II)} r^2 \ln r + D_{(II)} \frac{q_{0(II)} r^4}{64} \right] dr \right]; \quad (13)$$

$$B_{n(1)}^q = \frac{1}{\omega_n d_n} \left[\int_0^{R_I} r \left[I_0(r\gamma_{(I)n}^+) + k_{1n} J_0(r\gamma_{(I)n}^-) \right] \cdot D_{(I)} \frac{r^4 q_{0(I)}}{64 \tau_q} dr + \int_{R_I}^{R_{II}} r \left[k_{2n} I_0(r\gamma_{(II)n}^+) + \right. \right. \\ \left. \left. + k_{3n} K_0(r\gamma_{(II)n}^+) + k_{4n} J_0(r\gamma_{(II)n}^-) + k_{5n} Y_0(r\gamma_{(II)n}^-) \right] \cdot D_{(II)} \frac{r^4 q_{0(II)}}{64 \tau_q} dr \right]. \quad (14)$$

Константы интегрирования для функции первого временного участка m -ного цикла при $m > 1$ могут быть определены с помощью следующих выражений

$$\begin{aligned}
A_{n(m)}^q &= \frac{-1}{d_n} \left[\int_0^{R_I} r \left[I_0 \left(r\gamma_{(I)n}^+ \right) + k_{1n} J_0 \left(r\gamma_{(I)n}^- \right) \right] \cdot \left[C_{s5(I)} + C_{s6(I)} r^2 + D_{(I)} \frac{q_{0(I)} r^4}{64} - \right. \right. \\
&- \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_{n(m-1)}^0 \cos \left(\omega_n \left[\tau - \tau_q \right] \right) + B_{n(m-1)}^0 \sin \left(\omega_n \left[\tau - \tau_q \right] \right)}{d_n} \times \left(I_0 \left(r\gamma_{(I)n}^+ \right) + k_{1n} J_0 \left(r\gamma_{(I)n}^- \right) \right) \right) \Big] dr + \\
&+ \int_{R_I}^{R_{II}} \left(r \left[k_{2n} I_0 \left(r\gamma_{(II)n}^+ \right) + k_{3n} K_0 \left(r\gamma_{(II)n}^+ \right) + k_{4n} J_0 \left(r\gamma_{(II)n}^- \right) + k_{5n} Y_0 \left(r\gamma_{(II)n}^- \right) \right] \cdot \left[C_{s5(II)} + C_{s6(II)} r^2 + \right. \right. \\
&+ C_{s7(II)} \ln r + C_{s8(II)} r^2 \ln r + D_{(II)} \frac{q_{0(II)} r^4}{64} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_{n(m-1)}^0 \cos \left(\omega_n \left[\tau - \tau_q \right] \right) + B_{n(m-1)}^0 \sin \left(\omega_n \left[\tau - \tau_q \right] \right)}{d_n} \times \right. \\
&\left. \left. \times \left(k_{2n} I_0 \left(r\gamma_{(II)n}^+ \right) + k_{3n} K_0 \left(r\gamma_{(II)n}^+ \right) + k_{4n} J_0 \left(r\gamma_{(II)n}^- \right) + k_{5n} Y_0 \left(r\gamma_{(II)n}^- \right) \right) \right) \right] \Big] dr \Big]; \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{n(m)}^q &= \frac{1}{\omega_n d_n} \left[\int_0^{R_I} r \left[I_0 \left(r\gamma_{(I)n}^+ \right) + k_{1n} J_0 \left(r\gamma_{(I)n}^- \right) \right] \cdot \left[D_{(I)} \frac{r^4 q_{0(I)}}{64 \tau_q} - \right. \\
&- \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega_n \left(A_{n(m-1)}^0 \sin \left(\omega_n \left[\tau - \tau_q \right] \right) - B_{n(m-1)}^0 \cos \left(\omega_n \left[\tau - \tau_q \right] \right) \right) \left(I_0 \left(r\gamma_{(I)n}^+ \right) + k_{1n} J_0 \left(r\gamma_{(I)n}^- \right) \right)}{d_n} \right) \Big] dr + \\
&+ \int_{R_I}^{R_{II}} \left(r \left[k_{2n} I_0 \left(r\gamma_{(II)n}^+ \right) + k_{3n} K_0 \left(r\gamma_{(II)n}^+ \right) + k_{4n} J_0 \left(r\gamma_{(II)n}^- \right) + k_{5n} Y_0 \left(r\gamma_{(II)n}^- \right) \right] \times \\
&\times \left[D_{(II)} \frac{r^4 q_{0(II)}}{64 \tau_q} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega_n \left(A_{n(m-1)}^0 \sin \left(\omega_n \left[\tau - \tau_q \right] \right) - B_{n(m-1)}^0 \cos \left(\omega_n \left[\tau - \tau_q \right] \right) \right) \times \right. \\
&\left. \left. \times \left(k_{2n} I_0 \left(r\gamma_{(II)n}^+ \right) + k_{3n} K_0 \left(r\gamma_{(II)n}^+ \right) + k_{4n} J_0 \left(r\gamma_{(II)n}^- \right) + k_{5n} Y_0 \left(r\gamma_{(II)n}^- \right) \right) \right) \right] \Big] dr \Big]. \quad (16)
\end{aligned}$$

Константы интегрирования для второго временного участка m -ного цикла:

$$\begin{aligned}
A_{n(m)}^0 &= \frac{1}{d_n} \left[\int_0^{R_I} r \left[I_0 \left(r\gamma_{(I)n}^+ \right) + k_{1n} J_0 \left(r\gamma_{(I)n}^- \right) \right] \times \right. \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_{n(m)}^q \cos \left(\omega_n \tau_q \right) + B_{n(m)}^q \sin \left(\omega_n \tau_q \right)}{d_n} \left(I_0 \left(r\gamma_{(I)n}^+ \right) + k_{1n} J_0 \left(r\gamma_{(I)n}^- \right) \right) \right) \Big] dr + \\
&+ \int_{R_I}^{R_{II}} \left(r \left[k_{2n} I_0 \left(r\gamma_{(II)n}^+ \right) + k_{3n} K_0 \left(r\gamma_{(II)n}^+ \right) + k_{4n} J_0 \left(r\gamma_{(II)n}^- \right) + k_{5n} Y_0 \left(r\gamma_{(II)n}^- \right) \right] \times \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_{n(m)}^q \cos \left(\omega_n \tau_q \right) + B_{n(m)}^q \sin \left(\omega_n \tau_q \right)}{d_n} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(k_{2n} I_0 \left(r \gamma_{(\text{II})n}^+ \right) + k_{3n} K_0 \left(r \gamma_{(\text{II})n}^+ \right) + k_{4n} J_0 \left(r \gamma_{(\text{II})n}^- \right) + k_{5n} Y_0 \left(r \gamma_{(\text{II})n}^- \right) \right) \left. \right] dr \Bigg]; \quad (17) \\
B_{n(m)}^0 = & \frac{-1}{\omega_n d_n} \left[\int_0^{R_I} \left(r \left[I_0 \left(r \gamma_{(\text{I})n}^+ \right) + k_{1n} J_0 \left(r \gamma_{(\text{I})n}^- \right) \right] \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega_n}{d_n} \left(A_{n(m)}^q \sin(\omega_n \tau_q) - B_{n(m)}^q \cos(\omega_n \tau_q) \right) \right) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left(I_0 \left(r \gamma_{(\text{I})n}^+ \right) + k_{1n} J_0 \left(r \gamma_{(\text{I})n}^- \right) \right) \right] + \frac{D_{(\text{I})} q_{0(\text{I})} r^4}{64 \tau_q} \right] dr + \\
& + \int_{R_I}^{R_{\text{II}}} \left(r \left[k_{2n} I_0 \left(r \gamma_{(\text{II})n}^+ \right) + k_{3n} K_0 \left(r \gamma_{(\text{II})n}^+ \right) + k_{4n} J_0 \left(r \gamma_{(\text{II})n}^- \right) + k_{5n} Y_0 \left(r \gamma_{(\text{II})n}^- \right) \right] \times \right. \\
& \left. \times \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega_n}{d_n} \left(A_{n(m)}^q \sin(\omega_n \tau_q) - B_{n(m)}^q \cos(\omega_n \tau_q) \right) \right) \left(k_{2n} I_0 \left(r \gamma_{(\text{II})n}^+ \right) + k_{3n} K_0 \left(r \gamma_{(\text{II})n}^+ \right) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + k_{4n} J_0 \left(r \gamma_{(\text{II})n}^- \right) + k_{5n} Y_0 \left(r \gamma_{(\text{II})n}^- \right) \right) \right] + \frac{D_{(\text{II})} q_{0(\text{II})} r^4}{64 \tau_q} \right] dr \Bigg]. \quad (18)
\end{aligned}$$

Численные расчеты. Для численной апробации полученного решения рассмотрим защемленную по внешнему контуру круговую трехслойную ступенчатую пластину, имеющую уширение в центральной части (см. рисунок 1).

Геометрические параметры пластины: внешний радиус – $R_{\text{II}} = 1$ м; радиус центрального участка I – $R_I = 0,5 R_{\text{II}}$; толщина внешних слоев пластины на участке I – $h_{1(\text{I})} = h_{2(\text{I})} = 0,04$ м; толщина внешних слоев пластины на участке II – $h_{1(\text{II})} = h_{2(\text{II})} = 0,02$ м; толщина срединного заполнителя – $h_3 = 0,3$ м.

Состав слоев пластины представлен материалами «сталь–ПС-1–сталь».

Физико-механические характеристики материалов слоев [24–26]: сталь – $\rho_{1,2} = 7850$ кг/м³; $K_{1,2} = 1,913 \cdot 10^{11}$ Па, $G_{1,2} = 0,78 \cdot 10^{11}$ Па; полистирольный пенопласт (ПС-1) – $\rho_3 = 60$ кг/м³; $K_3 = 10 \cdot 10^6$ Па, $G_3 = 15 \cdot 10^6$ Па. Здесь ρ – плотность; K – модуль объемной деформации; G – модуль сдвига.

Пластина воспринимает нагрузку из 6-и последовательных внешних воздействий, временной интервал между которыми привязан к первой частоте собственных колебаний пластины ω_0 . Продолжительность приложения нагрузки совпадает с полупериодом и периодом первой формы колебаний пластины: $\tau = 134\pi / \omega_0 = 1,00$ с, $\tau = 135\pi / \omega_0 = 1,01$ с; $\tau_q = \pi / \omega_0 = 7,4 \cdot 10^{-3}$ с, $\tau_q = 2\pi / \omega_0 = 14,9 \cdot 10^{-3}$ с.

Максимальная интенсивность каждого внешнего воздействия $q_{0(\text{I})} = q_{0(\text{II})} = -100$ кПа.

На рисунке 3 представлены графики изменения прогибов пластины во времени.

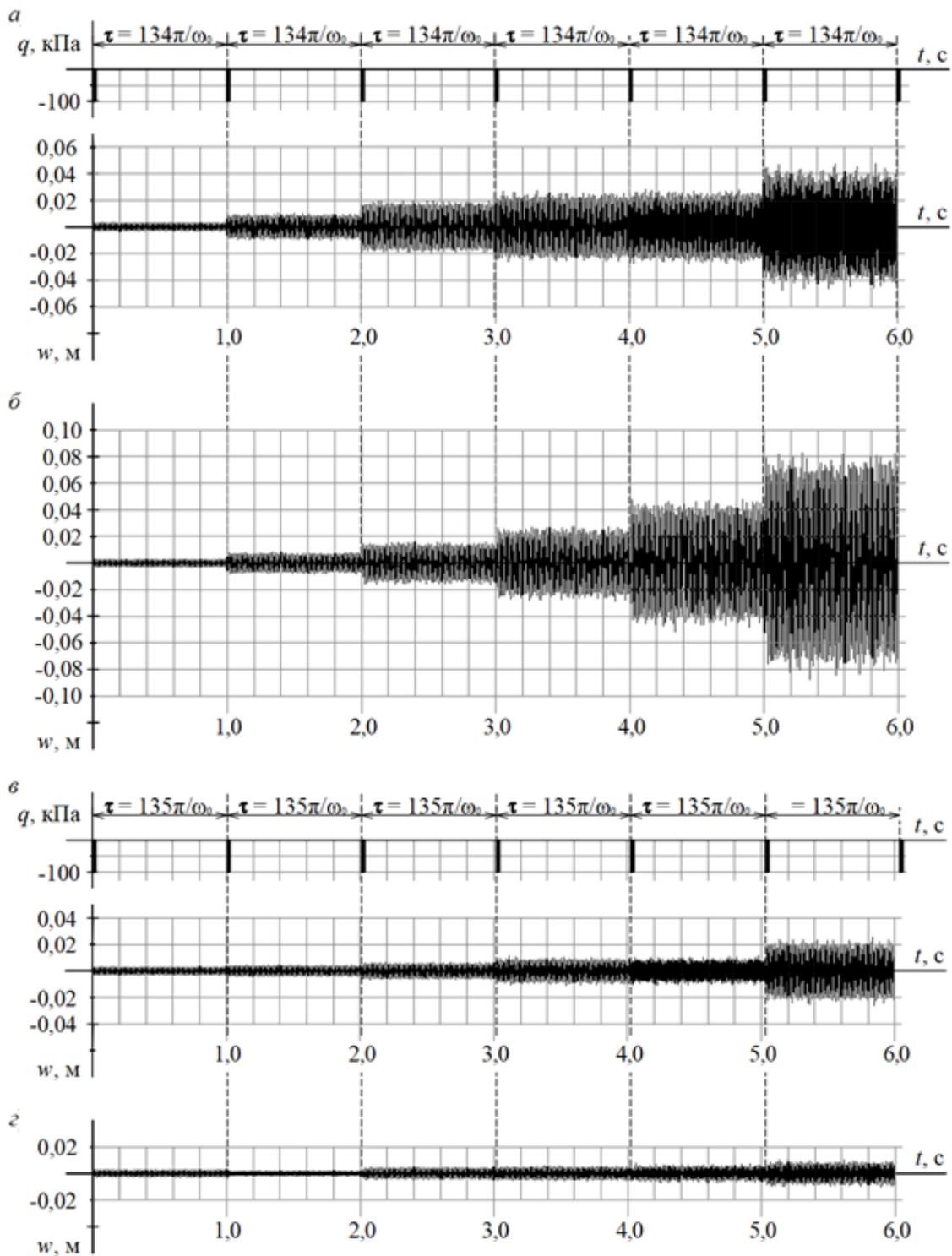


Рис. 3. Изменение прогиба пластины «сталь–ПС-1–сталь» при применении многократно повторной линейно-убывающей нагрузки: *а, в* – длительность приложения каждого воздействия $\tau_q = \pi / \omega_0$; *б, г* – длительность приложения каждого воздействия $\tau_q = 2\pi / \omega_0$

Выводы. Из приведенных графиков видно, что временной интервал между внешними воздействиями оказывает существенное влияние на характер вынужденных колебаний.

Выразив интервал между нагрузками как $\tau = k\pi / \omega_0$ можно сказать, что если k представляет собой натуральное четное число, то с течением времени колебаний происходит постоянное нарастание амплитуды прогибов. При этом для многократно повторной ли-

нейно-убывающей нагрузки длительность самого внешнего воздействия τ_q никак не влияет на характер колебаний.

В случае, если интервал между воздействиями представлен выражением $\tau = k\pi/\omega_0$ с нечетным значением k , характер колебаний пластины строится по принципу попеременного возбуждения и гашения амплитуды прогибов. При этом, как и в предыдущем случае, длительность загружения τ_q не оказывает влияние на характер колебаний.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T22M-072).

ЛИТЕРАТУРА

1. Lal, R. On radially symmetric vibrations of circular sandwich plates of non-uniform thickness / R. Lal, R. Rani // International journal of mechanical sciences. – 2015. – № 99. – P. 29–39. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.04.016>
2. Lal, R. On the radially symmetric vibrations of circular sandwich plates with polar orthotropic facings and isotropic core of quadratically varying thickness by harmonic differential quadrature method / R. Lal, R. Rani // Meccanica. – 2016. – № 51. – P. 611–634. <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0226-9>.
3. Rani, R. Radially symmetric vibrations of exponentially tapered clamped circular sandwich plate using harmonic differential quadrature method / R. Rani, R. Lal // Mathematical analysis and its applications. – 2015. – № 143. – P. 633–643. https://doi.org/10.1007/978-81-322-2485-3_52.
4. Lal, R. On the use of differential quadrature method in the study of free axisymmetric vibrations of circular sandwich plates of linearly varying thickness / R. Lal, R. Rani // Journal of vibration and control. – 2016. – № 7(22). – P. 1729–1748. <https://doi.org/10.1177/1077546314544695>.
5. Rani, R. Axially symmetric vibrations of circular sandwich plates of linearly varying thickness / R. Rani, R. Lal // Soft computing for problem solving : proceedings of the third international conference, New Delhi, 04.03.2014 / Springer; In: M. Pant [et al.] (eds). – New Delhi, 2014. – № 258. – P. 169–181. https://doi.org/10.1007/978-81-322-1771-8_15.
6. Chang, J. S. Free vibrations of sandwich plates of variable thickness / J. S. Chang, H. C. Chen // Journal of sound and vibration. – 1992. – № 2(155). – P. 195–208. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(92\)90507-T](https://doi.org/10.1016/0022-460X(92)90507-T).
7. Lu, Ch. H. Bending of anisotropic sandwich beams with variable thickness / Ch. H. Lu // Journal of thermoplastic composite materials. – 1994. – № 4(7). – P. 364–374. <https://doi.org/10.1177/089270579400700406>.
8. Süssler, S. Nonlinear dynamic analysis of tapered sandwich plates with multi-layered faces subjected to air blast loading / S. Süssler, H. Türkmeni // International Journal of mechanics and materials in design. – 2017. – № 13. – P. 429–451. <https://doi.org/10.1007/s10999-016-9346-1>.
9. Nguyen, C. H. Dynamics and buckling of sandwich panels with stepped facings / C. H. Nguyen [et al.] // International journal of structural stability and dynamics. – 2011. – № 04(11). – P. 697–716. <https://doi.org/10.1142/S0219455411004300>.
10. Nguyen, C. H. Enhanced static response of sandwich panels with honeycomb cores through the use of stepped facings / C. H. Nguyen, K. Chandrashekhara, V. Birman // Journal of sandwich structures & materials. – 2011. – № 2(13). – P. 237–260. <https://doi.org/10.1177/1099636210369615>.

11. Зорич, В. А. Математический анализ. Часть I / В. А. Зорич. – изд. 6-е дополн. – Москва : МЦНМО, 2012. – 710 с.
12. Timoshenko, S. P. On the correction for shear the differential equation for transverse vibrations of the prismatic bars / S. P. Timoshenko // Philosophical magazine and journal of science. – 1921. – № 41(245). – P. 744–746. <https://doi.org/10.1080/14786442108636264>
13. Bauchau, O. Kirchhoff plate theory / O. Bauchau, J. Craig // Structural analysis. – 2009. – № 163. – P. 819–914.
14. Reddy, J. N. Theory and analysis of elastic plates and shells / J. N. Reddy. – Boca-Raton : CRC Press, 2006. – 568 p. <https://doi.org/10.1201/9780849384165>
15. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – Москва : Мир, 1975. – 872 с.
16. Natural vibration of circular and annular thin plates by Hamiltonian approach / Z. H. Zhou [et al.] // Journal of Sound and Vibration. – 2011. – № 5(330). – P: 1005–1017. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.09.015>
17. Колтунов, М. А. Упругость и прочность цилиндрических тел / М. А. Колтунов, Ю. Н. Васильев, В. А. Черных. – Москва : Высшая школа, 1975. – 528 с.
18. Маркова, М. В. Постановка начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях круговой трехслойной пластины переменной толщины / М. В. Маркова, Д. В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. – Минск, 2022. – Вып. 36. – С. 3–10.
19. Маркова, М. В. Вынужденные колебания круговой трехслойной пластины ступенчато-переменной толщины, побуждаемые ударным воздействием / М. В. Маркова // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 28–36.
20. Леоненко, Д. В. Колебания круговой трехслойной ступенчатой пластины при ударном периодическом воздействии / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // Механика машин, механизмов и материалов. – 2022. – № 3 (60). – С. 68–76.
21. Бейтман, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтман, А. Эрдейи. – Москва : Наука, 1974. – 296 с.
22. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций / Г. Н. Ватсон. – Москва : Изд-во иностр. лит., 1949. – 799 с.
23. Маркова, М. В. Собственные колебания круговой трехслойной ступенчатой пластины / М. В. Маркова // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – №14 (14). – С. 147–158.
24. Плескачевский, Ю. М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко. – Москва : Физматлит, 2011. – 560 с.
25. СП 5.04.01–2021. Стальные конструкции. – Введ. 29.07.2021. – Минск : Минстройархитектуры, 2021. – 147 с.
26. Строительные конструкции с применением пластмасс. Примеры проектирования и расчета: учеб. пособие для инж.-строит. вузов и фак. / А. М. Иванов [и др.]. – Москва : Высш. школа, 1968. – 220 с.

Поступила: 15.04.2023

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КАЧЕНИЯ И ЗОНЫ КОНТАКТА АВТОШИНЫ С ОСНОВАНИЕМ

¹Можаровский В. В., ¹Кузьменков Д. С., ²Василевич Ю. В.

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель

²Белорусский национальный технический университет, Минск

Введение Для описания и анализа контактных процессов, происходящих при качении автомобильных колес по основанию и механизма изнашивания автошин колес, были рассмотрены задачи о математическом моделировании процесса качения двух ортотропных (из композитов) цилиндров с параллельными осями, прижатых друг к другу с силой P , и их реализация в виде компьютерных программ. Решение данной проблемы позволяет оценить влияния механических и упругих свойств армированной шины колеса, которая, безусловно, имеет такое же характерное поведение присущее, как и волокнистому композиту. На базе представленных в монографии [1] теоретических положений, кратко изложена программная реализация. В связи с построением решения данной задачи возникает и другая проблема расчета напряженно-деформированного состояния армированной шины и определения дискретных зон контакта в системе взаимодействия «шина-основание». Здесь необходимо разрабатывать теоретико-экспериментальную методику на базе широко известного метода конечных элементов (МКЭ) и проведения опытов на основе современных технических достижений сканирования зон контакта шины и основания (например, фотопринт) или сбор сигналов от пьезодатчиков давления и обработка их на компьютере (рисунок 2).

Краткое описание процесса качения. Следует отметить, что исследование явления качения цилиндрических тел из композитных материалов при контактом взаимодействии тел возможно при использовании эмпирических экспериментальных методов, но нежелательно, из-за обширности и дороговизны работ, требуемых для охвата множества разнообразных комбинаций структур материалов, заполнителей, способов плетения волокна, последовательности укладки слоев, типов конструкций. В связи с этим создана программа, реализующая нахождение касательных усилий в области контакта, а также определение зон скольжения и сцепления, направления скольжения. Данную задачу решаем, как задачу математического программирования, используя вариационный подход, который был применен Калкером [2] для задачи качения однородных изотропных цилиндров. Приняв, что выполняется закон сухого трения Кулона, определим тангенциальные усилия (касательные напряжения) в зоне скольжения:

$$\tau(x) = fp(x) \operatorname{sign} S(x)$$

в зоне сцепления

$$|\tau(x)| \leq fp(x),$$

где $p(x)$, $\tau(x)$ – нормальные и тангенциальные силы (касательные напряжения);

$f = \text{const}$ – коэффициент трения;

$S(x)$ – скорость проскальзывания.

Задача определения касательных напряжений в области контакта сводится к минимизации функционала [1, 2] при ограничениях,

$$J = \int_{\Omega_a} [fp(x)|S(x)| - \tau(x)S(x)] dx,$$

где Ω_a – зона контакта.

Обоснование существования этого функционала для изотропных тел приведено в работе [2], а аналитические решения в [1]. Для решения данной задачи необходимо установить связь между величиной проскальзывания и усилиями в зоне контакта. Рассматривая стационарный случай, когда усилия не зависят от времени, получаем:

$$S(x) = vV + V \frac{du}{dx}.$$

Здесь V_1, V_2 – составляющие скоростей, определяемые кинематикой контактирующих цилиндров как абсолютно жестких; $V = -\frac{V_1 + V_2}{2}$ – скорость качения;

$v = \frac{V_1 - V_2}{V}$ – скольжение; $u = u_2 - u_1$ – касательные перемещения для цилиндров (отмеченных соответственно индексами 1 и 2). Связь между тангенциальными усилиями и перемещениями в зоне контакта определяется упругими свойствами и конструктивными особенностями рассматриваемых цилиндров, подставим ее в операторном виде:

$$u = L(p) + N(\tau),$$

где $L(\cdot), N(\cdot)$ – линейные интегральные операторы.

Алгоритм решения задачи качения и основные результаты. Для решения поставленной задачи был запрограммирован алгоритм решения задачи о качении цилиндров. Сначала производится ввод исходных данных, позволяющее задать управляющий параметр $\psi = T/fP$ [1], нормальные и касательные усилия T и P , коэффициент трения $f, E_j, j = 1, 2, G_{12}, \nu$ – технические постоянные материала. Далее программа производит необходимые вычисления и открывает окно вывода результатов, в котором приведены все необходимые выходные данные. Найденные касательные усилия в области контакта, а также зоны скольжения и сцепления, направление скольжения изображены на рисунке 1. Согласно теоретическим и экспериментальным исследованиям зона сцепления примыкает к переднему краю площадки контакта.

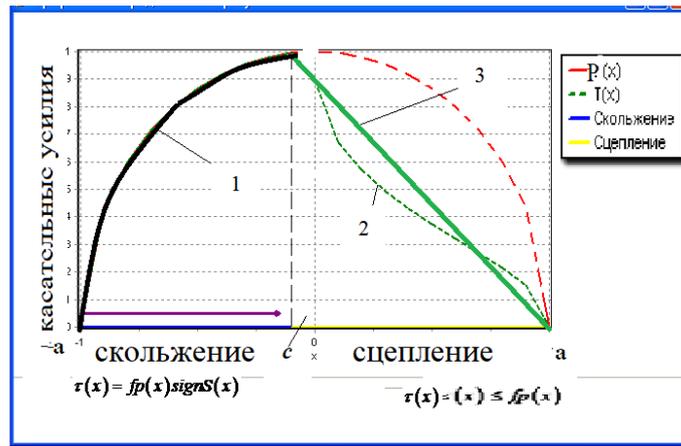


Рис. 1. Окно графического представления результатов скольжения и сцепления в контакте качения (1 – скольжение, 2 – сцепление, 3 – линейная аппроксимация)

В инженерных расчетах для цилиндрического индентора при качении в области скольжения касательные усилия можно определять по закону

$$\tau(x) = \frac{2P}{a^2\pi} f \sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a \leq x \leq c,$$

считая, что выполняется контакт по теории Герца. Изменения касательных усилий в области сцепления можно упростить, заменяя кривую 2 на ее аппроксимацию – прямую 1 (например, рисунок 1). Линейная аппроксимация упрощает описания изменения касательного усилия в зоне сцепления:

$$\tau(x) = \frac{2P}{a^2\pi} f \sqrt{\frac{a-c}{a+c}} \cdot (a-x), \quad c \leq x \leq a.$$

Следуя исследованиям Л. А. Галина [3], запишем выражения для тангенциальных усилий для качения цилиндра с изотропного материала с упругим основанием:

$$\tau(x) = \frac{2Pf}{a^2\pi} [\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{(a-x)(x-c)}], \quad c \leq x \leq a,$$

$$c = a \left[1 - 2\sqrt{1 - \frac{k}{f}} \right],$$

где k – коэффициент сцепления, равный отношению касательного усилия к нормальному.

Координату точки разделения зон сцепления и скольжения можно определять, например, по формуле, представленной в работе [4], или по теории Л. А. Галина [3].

Если материал контактирующих цилиндров разный или ортотропный, то возникает дополнительное проскальзывание и нужно использовать методику расчета параметров исходя из работ [1–3].

Программа, реализующая определение зоны контакта напряжений и перемещений построена на основе МКЭ в которой используются экспериментальные исследования, например, применяя фотопринт (см., например, [5]). Для решения поставленной задачи был использован и успешно запрограммирован метод конечных элементов. Разработан алгоритм и создана программа, реализующая определение напряжений и перемещений

в контактирующих телах. Программа позволяет изменять размеры параллелепипеда, в котором находится исследуемое тело. Форму верхней границы тела, на которую действует давление, можно задавать при помощи «мыши» (прямоугольниками). Построена схема расчета параметров контакта рисунок 2



Рис. 2. Схема расчета параметров контакта

Результаты экспериментального исследования о взаимодействии шины колеса с основанием, а также определения размеров зоны контакта и деформативности шины, получены вследствие опытов в ИММС НАН РБ [6]. При сканировании зона контакта является дискретной и различная в цветовом диапазоне, так как давление в зоне контакта распределено неравномерно.

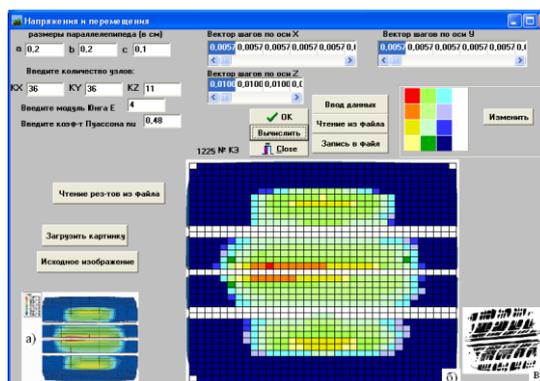


Рис. 3. Определение зоны контакта и действующего давления при взаимодействии шины колеса и основания [7]

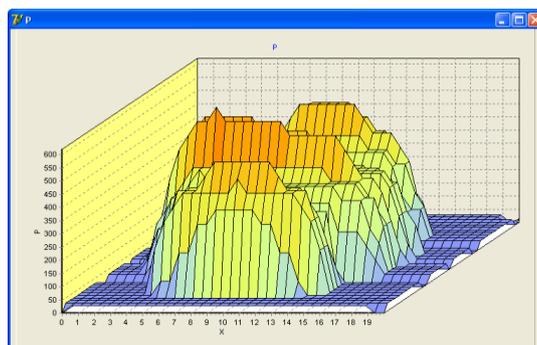


Рис. 4. Эпюра изменения давления при контакте шины колеса

Используя методику считывания цвета в зоне контакта (каждому давлению в точке соответствует свой цвет), и затем обрабатывая на компьютере по специальной программе получаем картину о напряженном состоянии в контакте и эпюру распределения давлений (см. рисунки 3, 4).

Заключение

На основании методов математического программирования и численных расчетов по МКЭ напряженного состояния упругих волокнистых тел разработан алгоритм решения задачи качения цилиндров из композитов. Применяя, теоретические и экспериментальные исследования предложен расчет напряженно-деформированного состояния изотропного основания (покрытия) на примере контакта шины и дорожного покрытия. Разработан алгоритм решения исследуемых задач, создана программа, реализующая расчет напряженно-деформированного состояния шины при контакте с дорожным основанием (покрытием). Разработанные алгоритмы могут быть адаптированы для решения подобных задач контактного взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Можаровский В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов. / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский – Мн. : Наука и техника, 1988. – 280 с.
2. Калкер И. Ж. О природе трения твердых тел / И. Ж. Калкер. – Мн. : Политехника, 1971. – С. 444–448.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М. : Наука, 1980. – 304 с.
4. Трение, изнашивание и смазка: Справочник. В 2-х кн. / под ред. Крагельского И. В. – Машиностроение – 1978. – 358 с.
5. Tire Contact Force Equations for Vision-Based Vehicle Weight Identification / Xuan Kong [et al.] // Appl. Sci. – 2022. – Vol. 12. – P. 4487–4494.
6. Анализ контактного взаимодействия автомобильной шины с колесным диском и дорожным покрытием / В. В. Можаровский [и др.] // Доклады Белорусского конгресса по механике: сборник научных трудов. – Минск, 2007 – С. 135–142.
7. Реализация алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния элементов машин и трибологических систем // В. В. Можаровский [и др.] // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика». – 2020. – Вып. 35. – С. 36–43.

Поступила: 21.04.2023

ВЛИЯНИЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ ВОЛОКОН НА ПАРАМЕТРЫ КОНТАКТА «ВАЛ – ВТУЛКА» ДЛЯ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ ИЗ КОМПОЗИТОВ

Можаровский В. В., Киргинцева С. В.

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

Введение. Для обеспечения надежного срока службы, достаточно высоких антифрикционных свойств и износостойкости подшипников сухого трения необходим оптимальный выбор допустимых значений действующей нагрузки, скорости скольжения, температуры и других параметров и их соответствия физико-механическим свойствам для применяемых материалов пары трения «втулка – вал» при принятых геометрических соотношениях.

В инженерной практике для изготовления подшипников скольжения широко применяются композиционные материалы на основе фенольных и полиамидных смол, а также материалы, которые армированы волокнами, то есть композиты. Они имеют хорошие механические свойства, малый удельный вес, высокие динамические свойства, низкие коэффициенты трения. Расчет давлений для втулок подшипника при контактном взаимодействии, в основном, построен на изотропных свойствах материала. Но современные волокнистые композиты имеют выраженную анизотропию механических свойств. Эти особенности необходимо учитывать при расчете и конструировании подшипников скольжения при сухом и граничном трении по удельному давлению.

В данной работе создана математическая модель, которая применяется при разработке алгоритма инженерного расчета давления при контактном взаимодействии для системы «вал – втулка из волокнистого материала» на основе математической теории упругости анизотропного тела. Следует отметить, что при использовании волокнистых композитов в качестве материала для втулки предлагается расположить волокна тремя способами: перпендикулярно, параллельно и радиально оси втулки (рисунок 1).

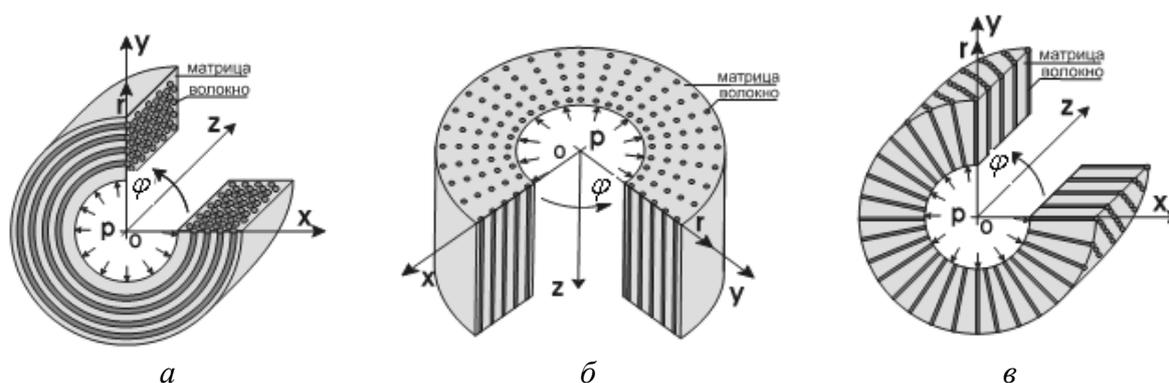


Рис. 1. Расположение волокон во втулке по отношению к ее оси (здесь обозначено $\varphi r z$ и $x y z$ – цилиндрическая и декартова системы координат): *a* – перпендикулярно; *б* – параллельно; *в* – радиально

Некоторые механические свойства ортотропных материалов (модули упругости, коэффициенты Пуассона) и основные уравнения для описания контактного взаимодействия цилиндрических тел из композитов представлены в работах [1–5]. Для определения контактных параметров (давление, зона контакта, напряжений и т. д.) при взаимодействии системы «вал – втулка» можно использовать модифицированное решение ти-

па Г. Герца для случая внутреннего касания цилиндров при малых зонах контакта. Рассмотрим композиционный материал, армированный волокнами, которые ориентированы в направлении одной из осей X или Y (координатные оси совпадают с основными направлениями материала).

Математические модели расчета контактных параметров для подшипников скольжения из волокнистых композитов. Представим расчет напряженного состояния ортотропного тела, при взаимодействии вала с втулкой композита, подверженного воздействию поверхностного давления p , распределенного в соответствии с законом

$$p(x) = p_0 \sqrt{a^2 - x^2}, p_0 = 2P / (L\pi a^2);$$

или согласно [1]

$$p(x) = m \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (1)$$

где R_1 и R_2 – радиусы двух взаимодействующих тел – втулки и цилиндра (мм); P и L – действующее усилие и длина цилиндра, параметр $m = \left[((\beta_1 + \beta_2)S_{22})^{(1)} + ((\beta_1 + \beta_2)S_{22})^{(2)} \right]^{-1}$, индексы (1) и (2) характеризуют материалы двух взаимодействующих тел, величины $\beta_{1,2}$ для каждого цилиндра вычисляются по формулам [1]

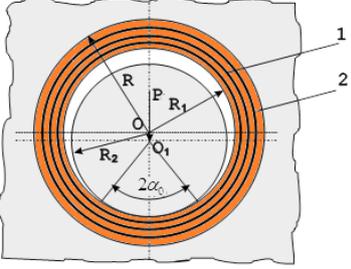
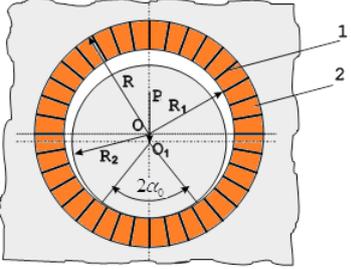
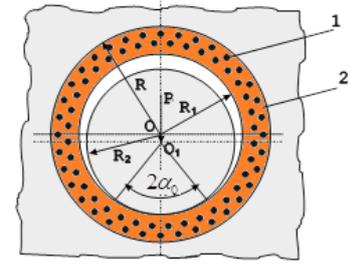
$$\beta_{1,2} = \left(\sqrt{\frac{S_{66} + 2S_{12} \pm \sqrt{(S_{66} + 2S_{12})^2 - 4S_{11}S_{22}}}{2S_{11}}} \right)^{-1}, \quad (2)$$

где постоянные $S_{i,j}$ при плоской деформации определяются из [1] следующим образом:

$$S_{11} = (1 - \nu_{13}\nu_{31}) / E_1, S_{12} = -(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{31}) / E_1, S_{22} = (1 - \nu_{32}\nu_{23}) / E_2, S_{66} = 1 / G_{12},$$

индексы i, j технических постоянных материалов цилиндров (модуля упругости E (МПа), коэффициента Пуассона ν и модуля сдвига G (МПа)) характеризуют различные направления и вычисляются по зависимостям по правилу смесей (таблица 1, здесь на схемах цифрами 1 и 2 обозначаются соответственно волокна и матрица).

Таблица 1 – Зависимости для определения модулей упругости и коэффициентов Пуассона [5] (индексы 1, 2, 3 соответствуют x, y, z или φ, r, z) волокнистых материалов при различных расположениях волокон

Расчетная схема по- шипника скольжения	Механические свойства
<p>Перпендикулярное рас- положение волокон по отношению к оси втулки</p> 	$E_2 = E_m \frac{1 + \eta V}{1 - \eta V}, \quad E_1 = VE_f + (1 - V)E_m, \quad E_3 = E_2,$ $v_{12} = Vv_f + (1 - V)v_m, \quad v_{31} = v_{21}, \quad v_{13} = v_{12}, \quad v_{21} = \frac{E_2}{E_1}v_{12},$ $v_{23} = 1 - v_{21} - \frac{E_2}{3K}, \quad v_{32} = v_{23}, \quad v_{13} = \frac{E_1}{E_3}v_{31},$ $K_m = \frac{E_m}{3 - 6v_m}, \quad K_f = \frac{E_f}{3 - 6v_f}, \quad K = \frac{K_f K_m}{VK_m + (1 - V)K_f},$ $\eta = \frac{E_f - E_m}{E_f + E_m}, \quad G_{12} = G_m \frac{G_f(1 + V) + G_m(1 - V)}{G_f(1 - V) + G_m(1 + V)}.$
<p>Радиальное расположе- ние волокон по отноше- нию к оси втулки</p> 	$E_2 = VE_f + (1 - V)E_m, \quad E_1 = \frac{E_f E_m}{VE_m + (1 - V)E_f}, \quad E_3 = E_1,$ $v_{12} = Vv_f + (1 - V)v_m, \quad v_{13} = 1 - v_{12} - \frac{E_1}{3K},$ $v_{21} = \frac{E_2}{E_1}v_{12}, \quad v_{32} = v_{12}, \quad v_{23} = v_{21},$ $v_{31} = v_{13}, \quad K_f = \frac{E_f}{3 - 6v_f}, \quad K_m = \frac{E_m}{3 - 6v_m}, \quad K = \frac{K_f K_m}{VK_m + (1 - V)K_f},$ $G_{12} = G_m \frac{G_f(1 + V) + G_m(1 - V)}{G_f(1 - V) + G_m(1 + V)}$
<p>Параллельное располо- жение волокон по отноше- нию к оси втулки</p> 	$E_3 = VE_f + (1 - V)E_m, \quad E_1 = \frac{E_f E_m}{VE_m + (1 - V)E_f}, \quad E_2 = E_1,$ $v_{31} = Vv_f + (1 - V)v_m, \quad v_{32} = \frac{E_3}{E_2}v_{23}, \quad v_{12} = 1 - v_{13} - \frac{E_1}{3K},$ $v_{23} = v_{13}, \quad K_f = \frac{E_f}{3 - 6v_f}, \quad K_m = \frac{E_m}{3 - 6v_m}, \quad K = \frac{K_f K_m}{vK_m + (1 - v)K_f},$ $\eta = \frac{E_f - E_m}{E_f + E_m}, \quad G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + v_{12})}.$

Индексы f и m обозначают волокно и матрицу соответственно; V – объемное содержание волокна в матрице материала; K_f, K_m – объемные модули упругости волокна и матрицы.

Величина зоны контакта при сопряжении рассматриваемых упругих ортотропных тел определяется по формуле:

$$a = \sqrt{\frac{2PR_1R_2}{\pi mL(R_1 - R_2)}} \quad (3)$$

Для оценки применимости формул, определяющих параметры контакта для внутреннего взаимодействия изотропного цилиндра с ортотропной втулкой, нужно оценить применимость представленных формул аналогично, как сделано в работе [2] для малых зон контакта. Используя по аналогии с работой [2], в которой дан критерий применимости формул для задачи Герца для малых областей контакта взаимодействующих изотропных тел, проведем аналогичную оценку, приняв, что $a = R \sin \alpha_0$, $x = R \sin \alpha$, α_0 – угол контакта.

Исходя из того, что принимаем $R_1 \approx R_2$, $R_1 - R_2 = \varepsilon$, получим

$$a^2 = R^2 \sin^2 \alpha_0 = \frac{2PR^2}{\pi m \varepsilon} = \frac{2PR^2}{\pi \varepsilon \frac{E_2}{(\beta_1 + \beta_2)(1 - \nu_{23}\nu_{32})}},$$

здесь и в дальнейшем будем использовать линейную нагрузку на вал, т. е. вместо P/L записываем P .

Преобразовав последнее соотношение и обозначив, $\frac{P}{\varepsilon E_2} = \theta$,

$$k_1 = \frac{2(\beta_1 + \beta_2)(1 - \nu_{23}\nu_{32})}{\pi}, \text{ получим:}$$

$$\sin^2 \alpha_0 = \theta \cdot k_1. \quad (4)$$

Например, если возьмем изотропный случай $E_1 = E_2 = E$, $\nu_{ij} = \nu$ и $\nu = 0.3$, тогда значение коэффициента $k_1 = 4(1 - \nu^2) / \pi = 1,16$.

$$\text{Уравнение (1) преобразуем к виду: } \frac{p(x)}{\varepsilon} = m \frac{1}{R^2} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

В дальнейшем для упрощения расчета будем считать, что рассматривается абсолютно жесткий вал ($E_2 = \infty$, $S_{22} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2} \rightarrow 0$), параметр m примет вид:

$$m = [(\beta_1 + \beta_2)S_{22}^{(1)}]^{-1} = \left[(\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2} \right]^{-1} = \frac{E_2}{(\beta_1 + \beta_2)(1 - \nu_{23}\nu_{32})}.$$

Тогда

$$\frac{p(x)}{\varepsilon E_2} = \frac{1}{R^2 (\beta_1 + \beta_2)(1 - \nu_{23}\nu_{32})} \sqrt{(R \sin \alpha_0)^2 - (R \sin \alpha)^2} = \frac{1}{R (\beta_1 + \beta_2)(1 - \nu_{23}\nu_{32})} \sqrt{\sin^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha}.$$

Преобразовав, запишем формулу удобную для расчета изменения давлений в зоне контакта для различных материалов:

$$P_1 = \frac{p(x)Rk_1\pi}{2\varepsilon E_2} = \sqrt{\sin^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha}. \quad (5)$$

Влияние схемы расположения волокон во втулке подшипника на изменения контактных параметров.

Расчетный пример: Подшипниковый узел трения без смазки состоит из стального вала и втулки, выполненной из композита *Gr/Al* со следующими характеристиками: $E_f = 380$ ГПа, $E_m = 70$ ГПа, $\nu_f = 0,2$, $\nu_m = 0,34$, $G_f = 13$ ГПа, $G_m = 26$ ГПа.

На рисунке 2 показаны графики зависимости параметров $\theta \cdot k_1$ и θ от угла контакта α_0 (измеряется в градусах) для изотропного материала (сплошная зеленая кривая), а также для разного объемного содержания волокон в матрице композиционного материала (40 % и 70 %) при перпендикулярном (а), параллельном (б) и радиальном (в) расположении волокон по отношению к оси втулки.

На рисунке 3 показаны графики зависимости P_1 и P_1/k_1 от угла контакта α (измеряется в градусах) для изотропного материала, а также для разных объемных содержаний волокон в матрице композиционного материала (40 % и 70 %) при перпендикулярном (а), параллельном (б) и радиальном (в) расположении волокон по отношению к оси втулки.

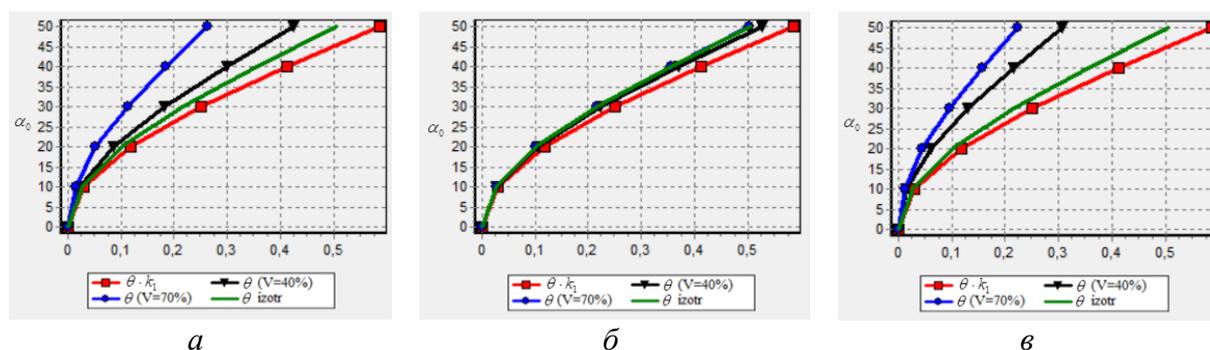


Рис. 2. Графики зависимости $\theta \cdot k_1$ и θ от α_0

при перпендикулярном (а), параллельном (б) и радиальном (в) расположении волокон по отношению к оси втулки

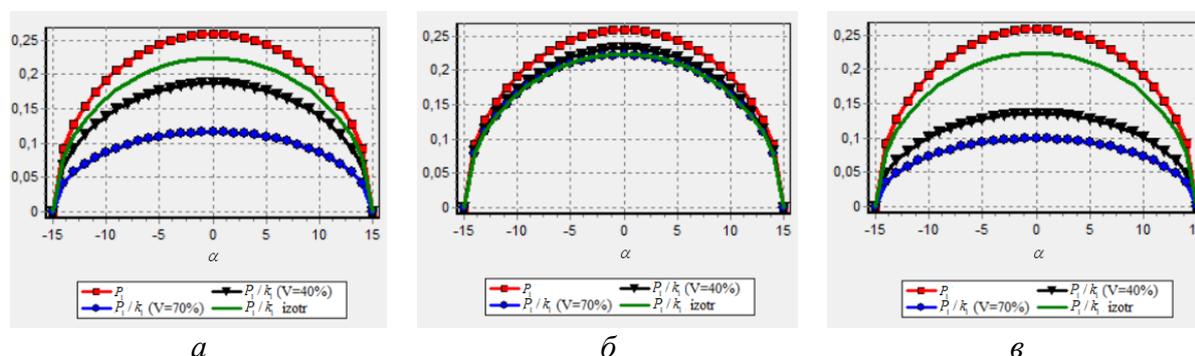


Рис. 3. Графики зависимости P_1 и P_1/k_1 от α

при перпендикулярном (а), параллельном (б) и радиальном (в) расположении волокон по отношению к оси втулки.

Заключение

1. Построенный приближенный алгоритм расчета давления и зоны контакта в зависимости от расположения и состава волокон во втулке дает возможность учитывать и давать оценку о влиянии их на контактное давление и зону контакта в подшипнике скольжения.

2. Анализ графических зависимостей угла контакта α_0 от параметров действующей нагрузки и модулей упругости для ортотропных материалов показывает, что в основном на изменение численных значений параметров контакта влияет расположение волокон в двух случаях – перпендикулярном и радиальном, а влияние параллельного расположения волокон носит незначительный вклад.

ЛИТЕРАТУРА

1. Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука и техника, 1988. – 280 с.
2. Крагельский, И. В. Основы расчетов на трение и износ / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Комбалов. – Москва : Машиностроение, 1977. – 526 с.
3. Пилюшина, Г. А. Подшипники скольжения из армированных композиционных материалов / Г. А. Пилюшина, Е. А. Памфилов, Е. В. Шевелева // Вестник Брянского государственного технического университета. – № 6 (79). – 2019. – С. 56–64.
4. Панасюк, В. В. Деякі контактні задачі теорії пружності / В. В. Панасюк, М. Й. Теплий. – Київ : Наукова думка, 1975. – 195 с.
5. Pleskachevsky, Yu. Mathematical models of contact quasi-static interaction between fibrous composite bodies / Yu. Pleskachevsky, V. Mozharovsky, Yu. Rouba // Computational methods in contact mechanics III / ed. by Alialady M. H., Samartin A. – Madrid : Computational mechanics publications. – 1997. – P. 363–372.

Поступила: 16.05.2023

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО РАСТЯЖЕНИЕМ ОБРАЗЦА

¹Василевич Ю. В., ²Мойсейчик А. Е., ¹Мойсейчик Е. А., ¹Яковлев А. А.

¹Белорусский национальный технический университет

²ЗАО «Струнные технологии»

Введение. В соответствии с ГОСТ Р 56511–2015 «Методы теплового вида. Общие требования» настройку и периодическую проверку работоспособности термографической аппаратуры проводят с использованием образцов. Проверку такой аппаратуры непосредственно перед проведением исследования объектов и в случае контроля методом сравнения с объектом стандартом рекомендуется выполнять на 2-х группах образцов, содержащих моделируемые дефекты. Изготовление первой группы образцов производится по технической документации разработчика аппаратуры, а изготовление образцов второй группы – выполняется потребителем аппаратуры. Более детальным нормативным требованиям на разработку контрольных образцов для настройки и работоспособности термографической аппаратуры, исследования дефектов не выявлено при анализе соответствующей литературы.

Трудности в разработке таких образцов для тепловых активных и пассивных методов на основе инфракрасной термографии затронуты в ряде публикаций [1; 2; 3; 4; 5]. В настоящее время инфракрасная термография часто используется для качественных исследований изделий [2; 6; 7–10]. Определение координат дефектов, размеров и глубины их заложения по характеристикам температурного поля поверхности исследуемого объекта можно отнести к задачам, частично решаемым методами современной тепловой диагностики. В ИЭС им. Е. О. Патона считают [1] актуальной задачей тепловой диагностики создание «средств и специального программного обеспечения, а также методик и соответствующей нормативной базы, которые бы позволяли по распределению температуры на начальных термограммах оценивать техническое состояние разнообразных объектов в реальных условиях их эксплуатации». Авторы статьи [3] отмечают, что для «развития теплового метода неразрушающего контроля необходимо не только всестороннее теоретическое и научно-техническое обоснование метода, но и наличие базы нормативно-технической документации, регламентирующей применение метода на промышленных объектах», а ключевым моментом «в решении этой проблемы является создание стандартных (настроечных) образцов».

Универсальных образцов для использования в тепловой диагностике различных объектов при стационарных и нестационарных тепловых воздействиях в литературных источниках не выявлено [2; 6; 7]. Имеется несколько предложений различных авторов по конструкции контрольных образцов, используемых при активной тепловой диагностике (рисунок 1). Для случая пассивной тепловой диагностики не установлено конструктивных форм контрольных образцов.

Поэтому целью настоящей статьи является разработка конструктивной формы контрольных образцов, их конечно-элементный анализ с использованием программного комплекса ANSYS и анализ соответствующего температурного поля.

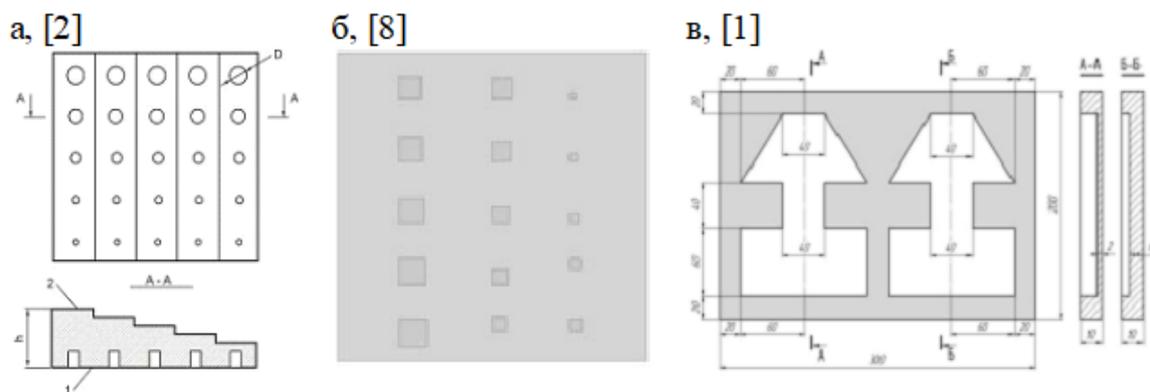


Рис. 1. Виды конструкций контрольных образцов для активных методов теплового контроля

Форма образцов. Такие образцы будем разрабатывать в предположении их применения в диагностике стальных листовых элементов, деформируемых растяжением в испытательной машине (пассивная тепловая диагностика). Учитывая, что разработка является пионерной, возможные дефекты будем имитировать на листовых элементах с использованием засверливания различной глубины. Отверстия располагаем на минимальных расстояниях от кромок образцов и друг от друга (с учетом минимизации взаимного влияния силового влияния концентраторов напряжений друг на друга). Образцы предполагается изготавливать из той же стали, что и в исследуемых конструкциях. Конструктивные формы образцов представлены на рисунках 2–4.

Контрольные образцы предполагается подвергать квазистатическому растяжению при скорости деформирования 10–50 мм в минуту с параллельным термографированием процесса. Тепло в зоне дефектов будет вызываться деформационными источниками.

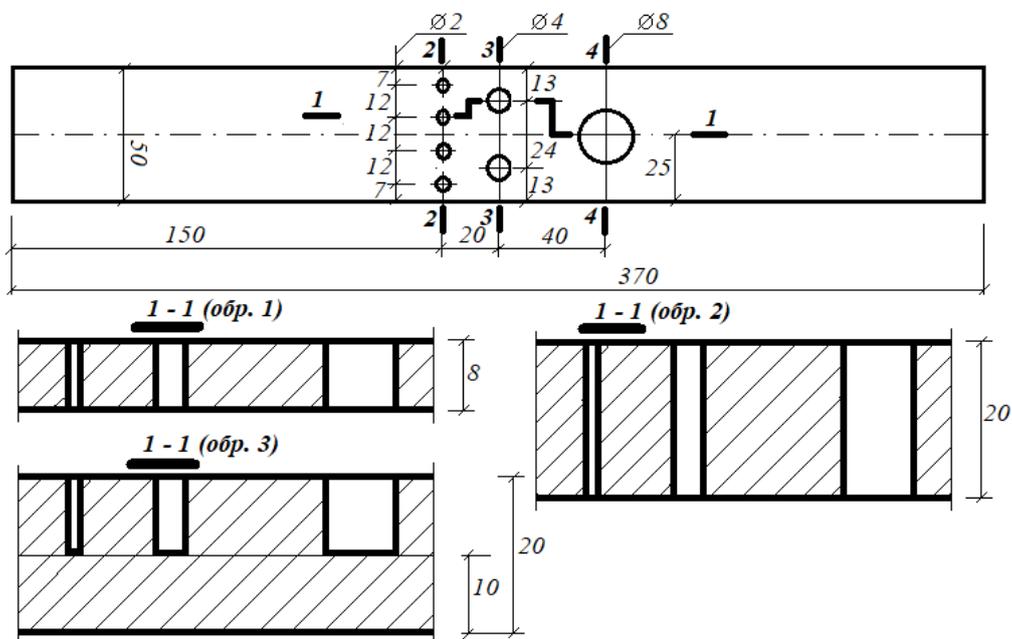


Рис. 2. План и сечение 1–1 образцов 1–3 (размеры в мм)

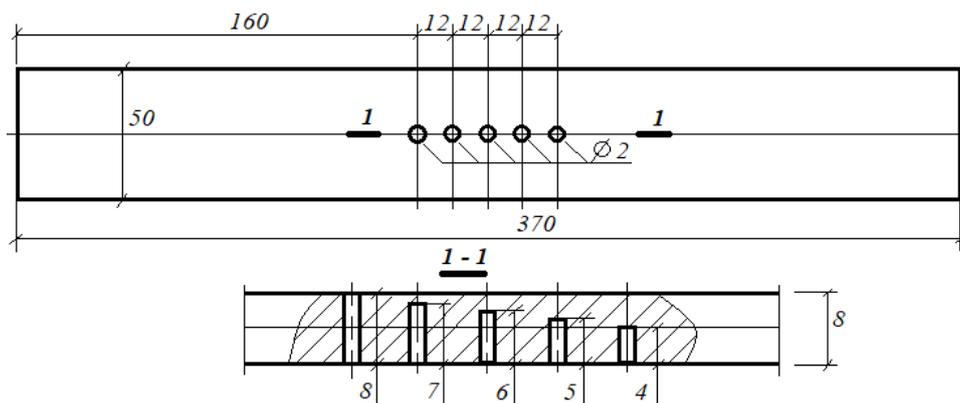


Рис. 3. План и сечение 1–1 образца 4 (размеры в мм)

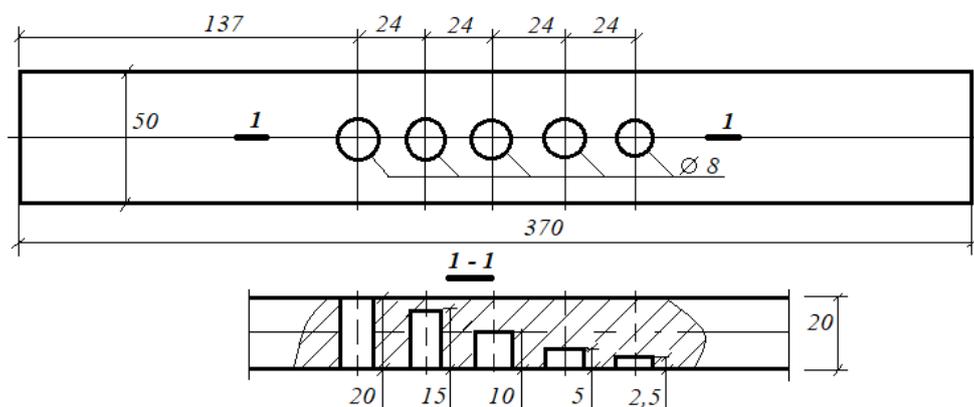


Рис. 4. План и сечение 1–1 образца 5 (размеры в мм)

Поэтому температурное поле поверхности будет отображать деформированное состояние образца принятой формы. За счет процесса теплопроводности внутри металлического образца тепловая энергия распространяется во всех направлениях. В зоне засверливаний тепловые потоки внутри образца перераспределяются и это приведет к появлению на передней и задней поверхности образца температурных аномалий. Температурные аномальные поля будут наблюдаться и регистрироваться в течение всего процесса деформирования с помощью тепловизора в форме термофильма. Амплитуда, форма и изменение во времени температурных сигналов станут теми информативными параметрами, которые позволят обнаруживать модельные дефекты (засверленные отверстия), а также оценивать их параметры (глубину расположения, изменения при деформировании).

Расчет и анализ НДС образцов. Важным этапом в разработке образцов является конечно-элементный анализ их напряженно-деформированного состояния в упруго-пластической стадии работы материала и расчет соответствующего температурного поля поверхностей и сечений образцов. Численным методом будем исследовать образцы 2–5 (рисунки 2–4) с использованием ПК ANSYS. Физико-механические характеристики материала образцов принимаем для стали 09Г2С.

Образцы нагружаем растягивающим усилием, определяемым по выражению

$$P = k \sigma_y A,$$

где σ_y – предел текучести;

A – площадь опасного поперечного сечения;

k – доля предела текучести материала образца.

Чтобы исследовать работу образца в упругой, пластической и частично в стадии самоупрочнения металла принимаем поочередно в расчете значения $k = 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1$.

Результаты конечно-элементного расчета образцов 1–5 приведены на рисунках 5–9.

Анализ температурных полей образцов. На рисунке 10 у основания дефекта контрольного образца выделена область, являющаяся источником деформационного тепла, т. е. местным источником тепла. Сведем все выделяющееся деформационное тепло в точку O . Для дальнейшего обсуждения и анализа используем метод мгновенных источников [9]. Основное ограничение этого метода – источник должен сосредоточен в малом элементе объема, а область распространения тепла – весьма большая по сравнению с объемом источника.

В начальный момент времени $t = 0$ в бесконечно малом элементе объема $dV = dx dy dz$ неограниченного теплопроводящего тела с некоторой начальной температурой, сосредоточено количество тепла Q .

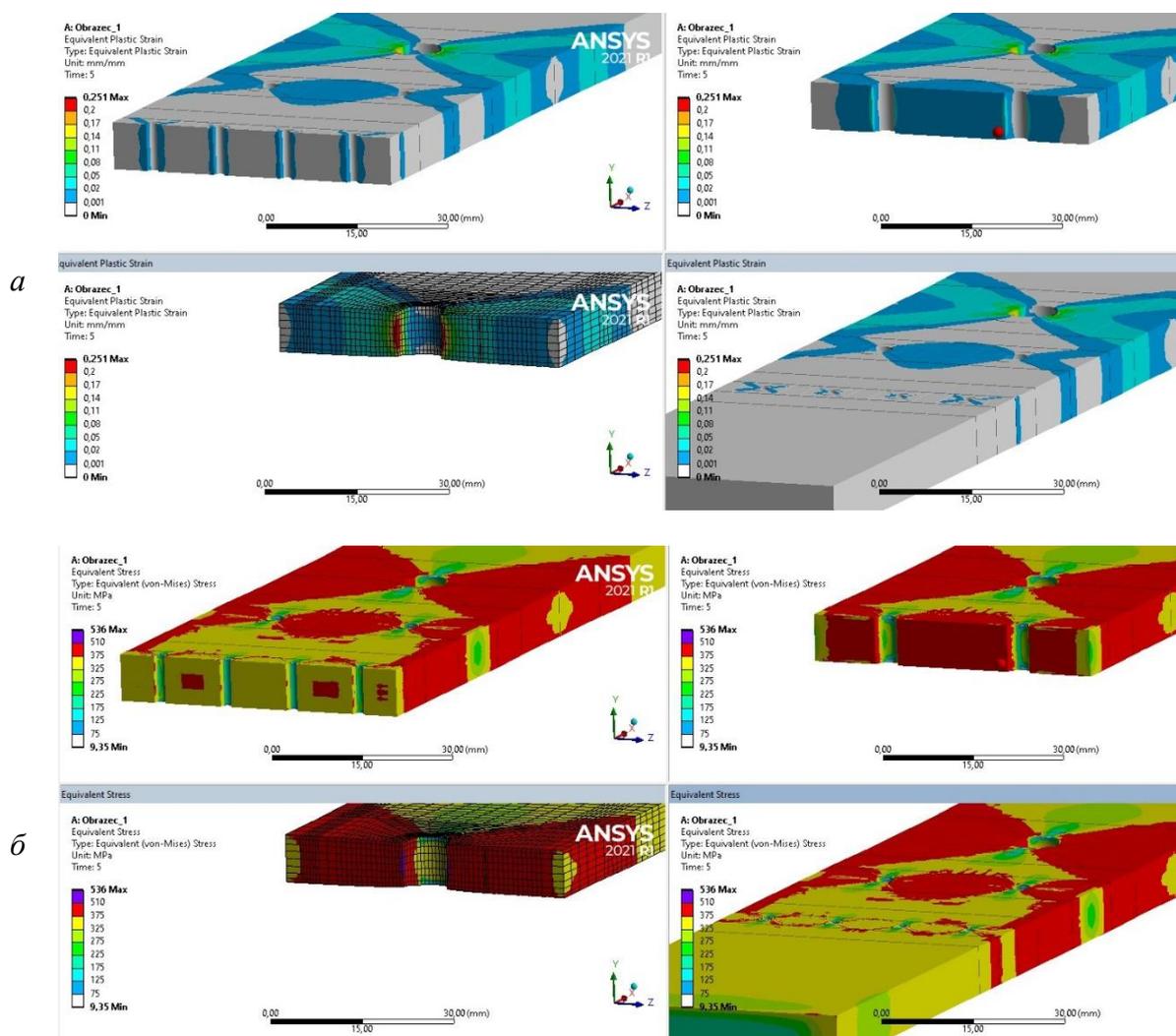


Рис. 5. Распределение деформаций (а), эквивалентных напряжений (б), и деформационной температуры (в) в сечениях 2–4 модельного образца 1

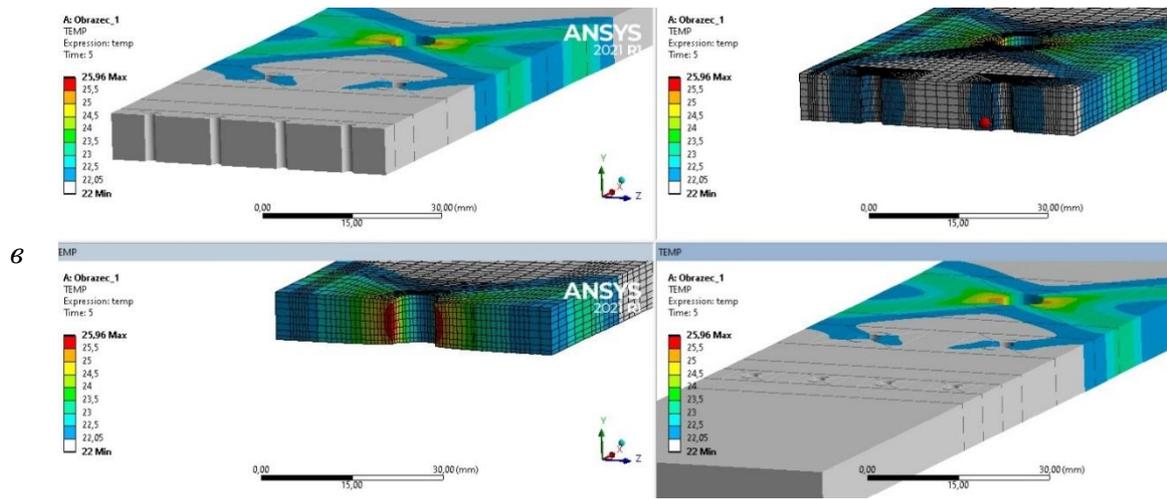


Рис. 5. (окончание)

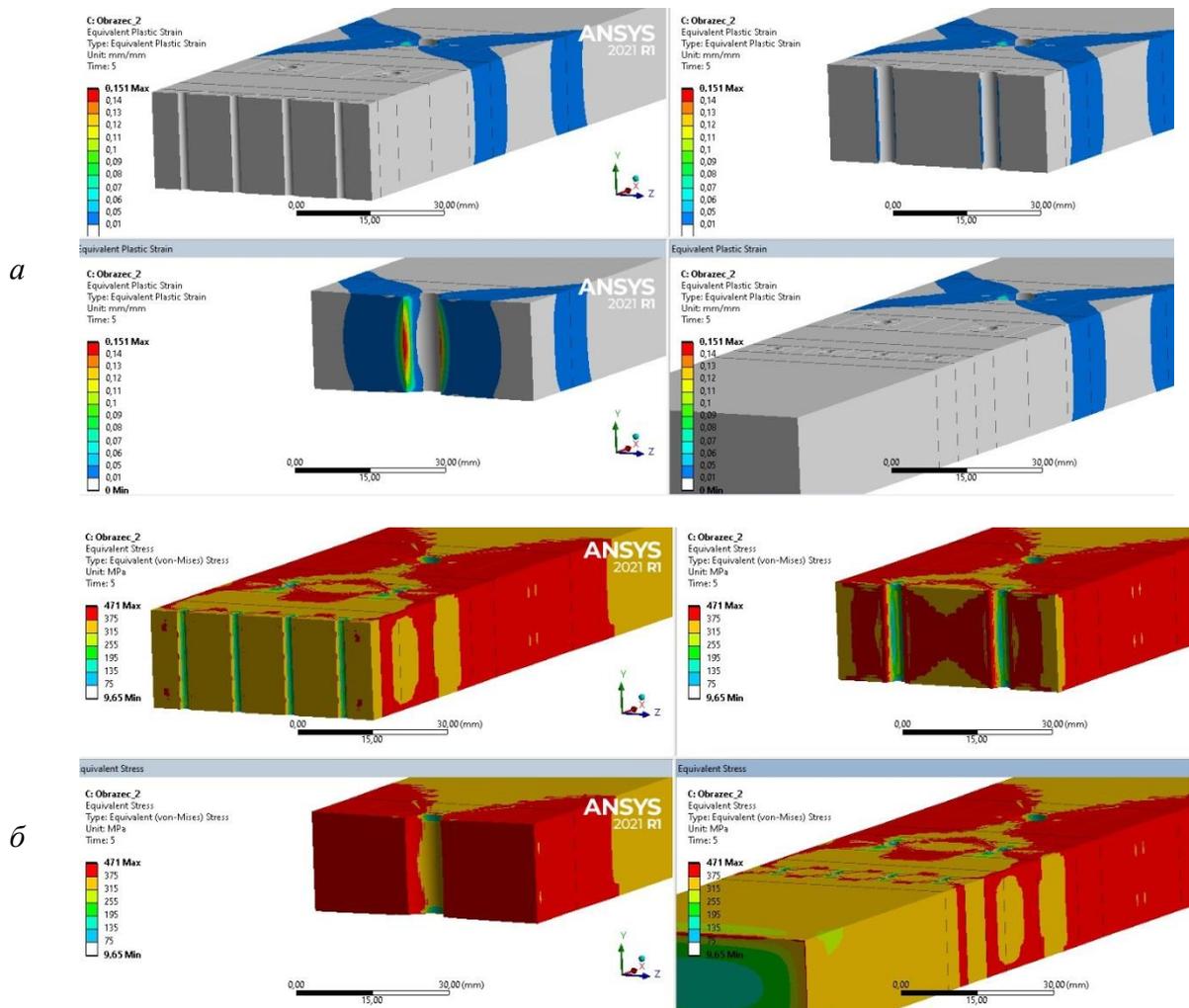


Рис. 6. Распределение деформаций (а), эквивалентных напряжений (б), и деформационной температуры (в) в сечениях 2–4 модельного образца 2

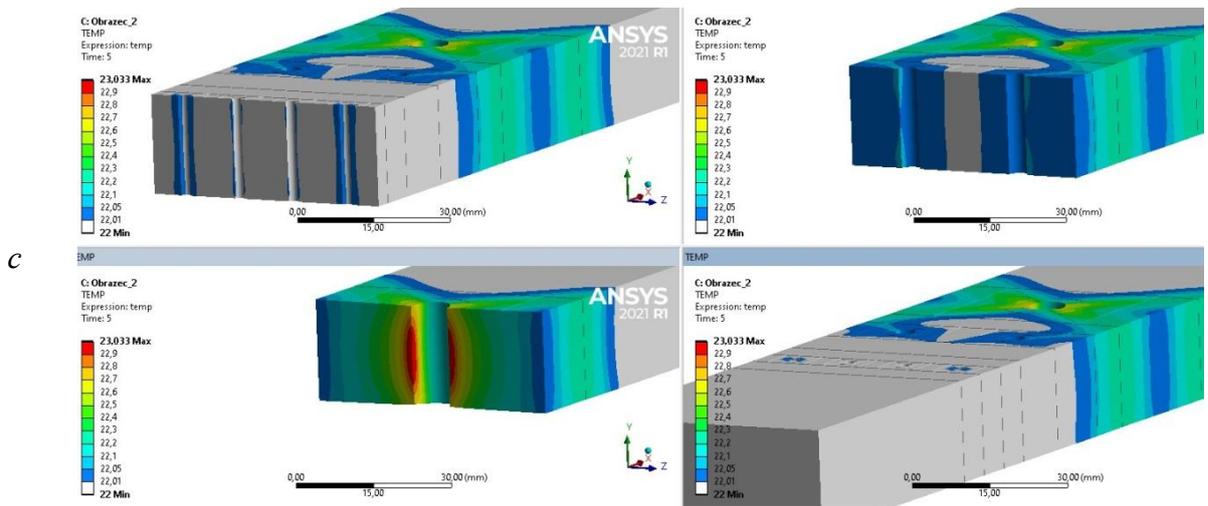


Рис. 6. (окончание)

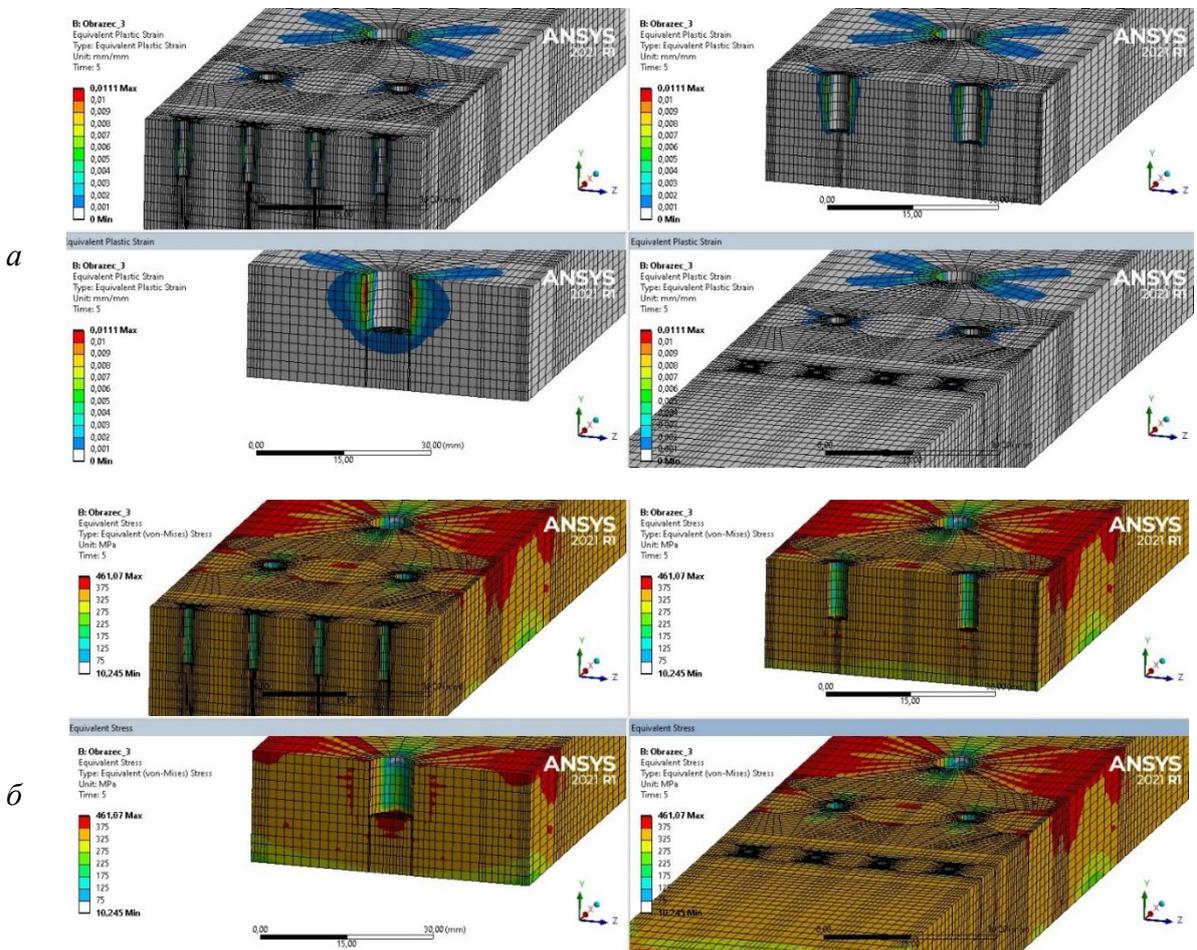


Рис. 7. Распределение деформаций (а), эквивалентных напряжений (б), и деформационной температуры (в) в сечениях 2–4 модельного образца 3

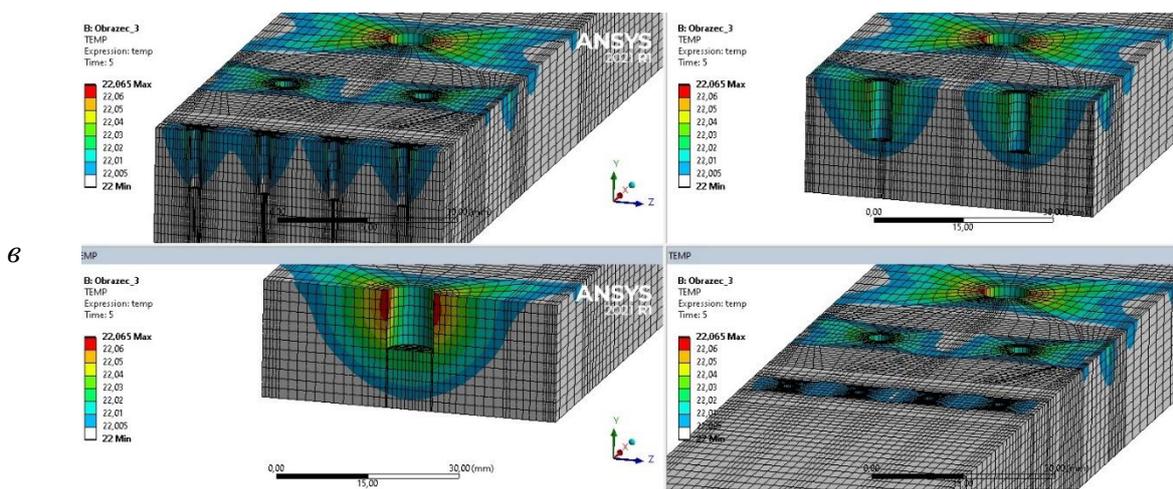


Рис. 7. (окончание)

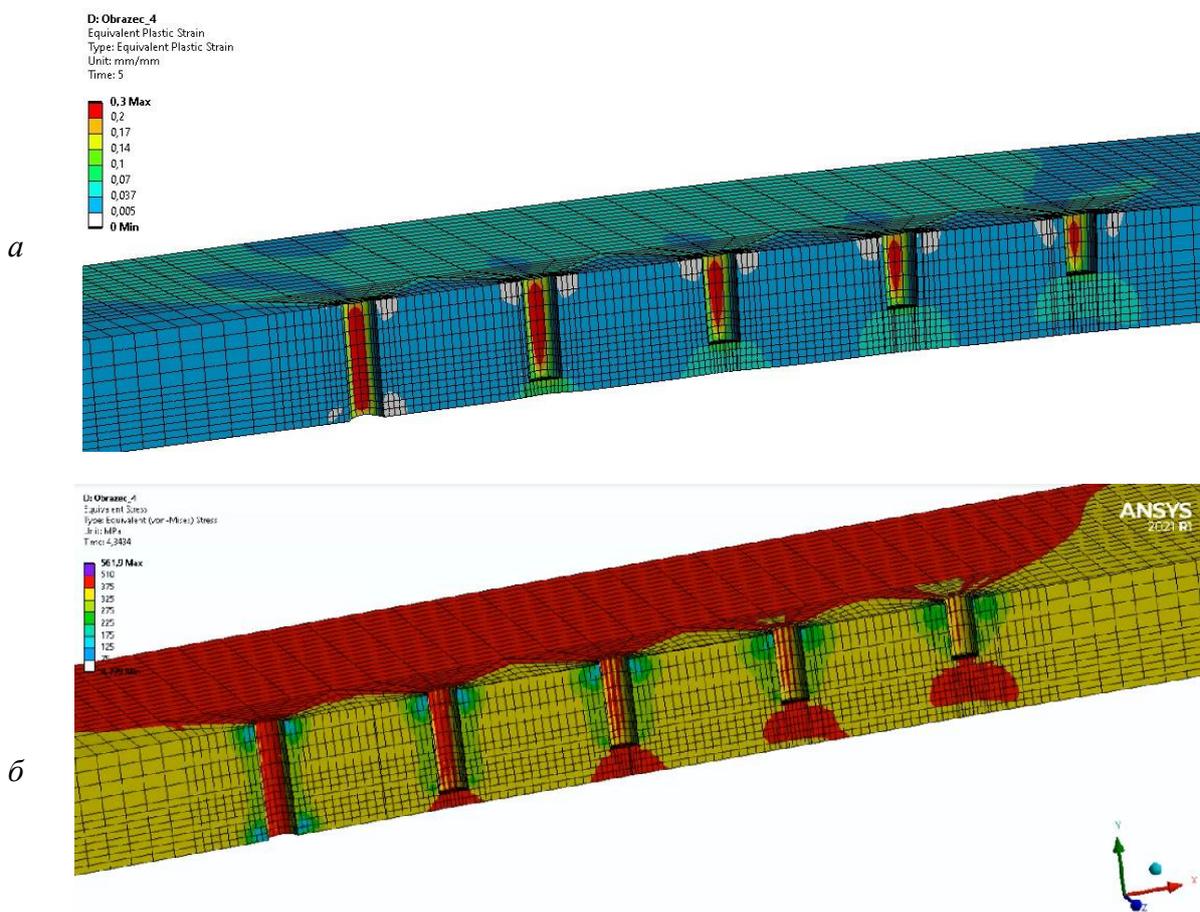


Рис. 8. Распределение эквивалентных деформаций (а), эквивалентных напряжений (б), и деформационной температуры (в) в сечении 1–1 модельного образца 4

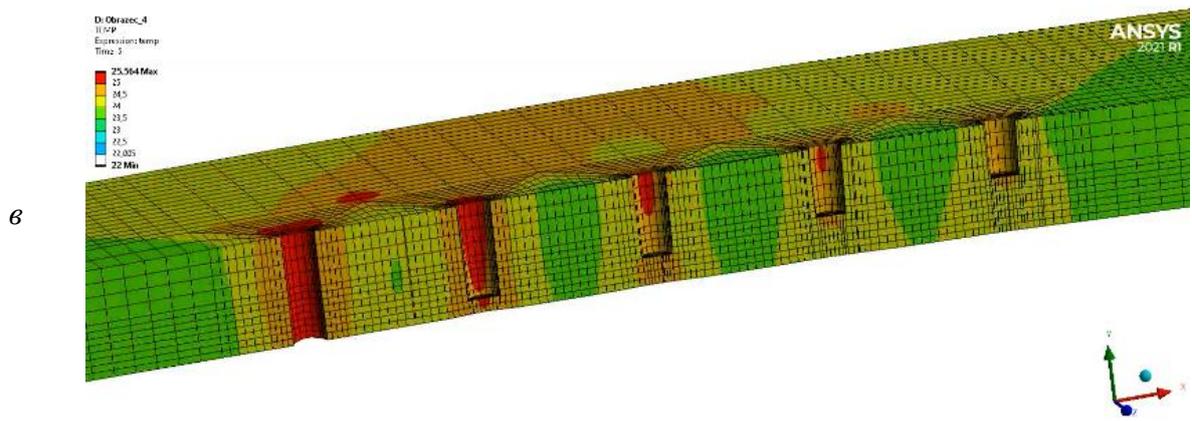


Рис. 8. (окончание)

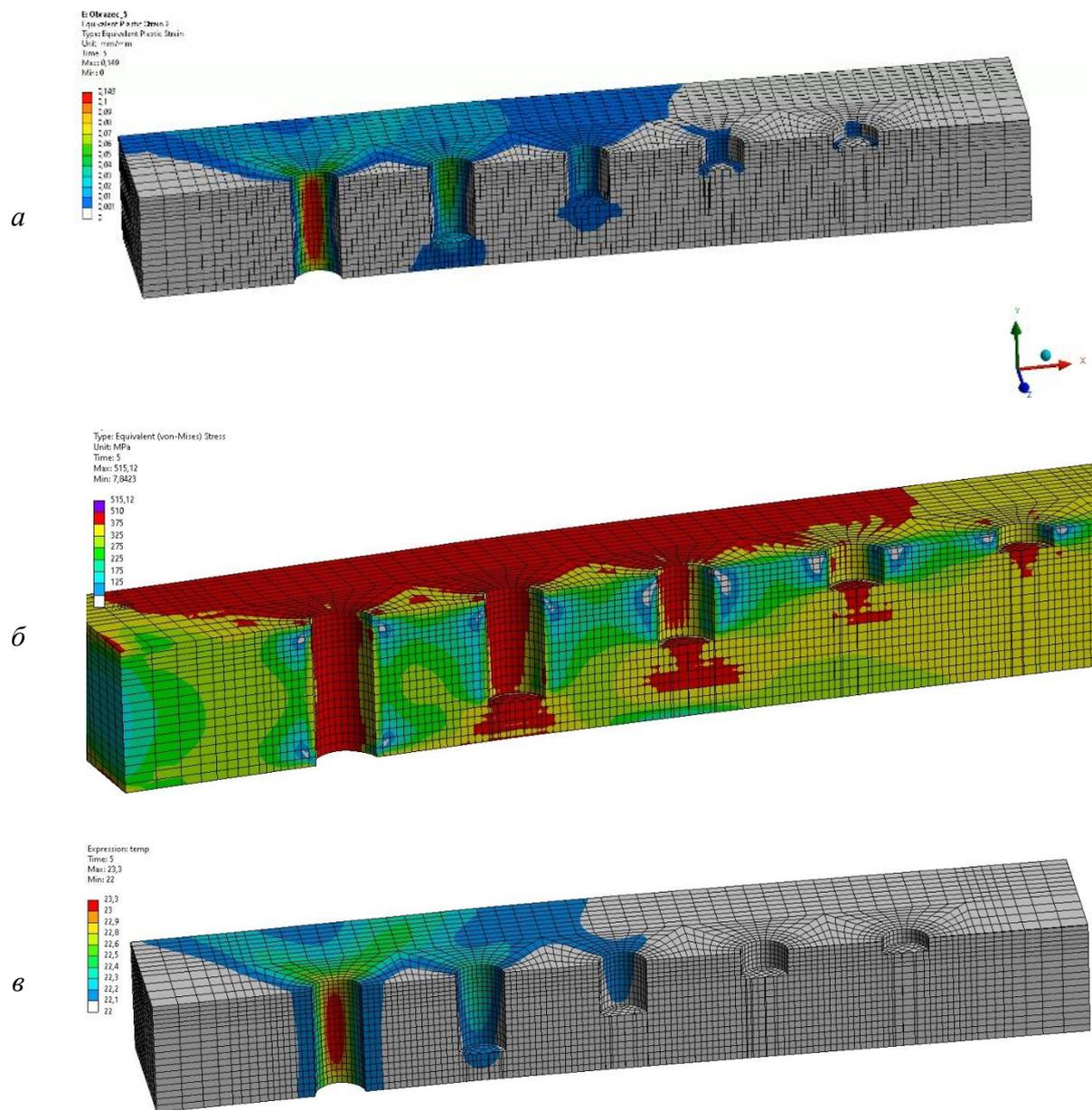


Рис. 9. Распределение эквивалентных деформаций (а), эквивалентных напряжений (б), и деформационной температуры (в) в сечении 1–1 модельного образца 5

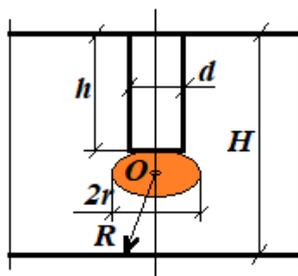


Рис. 10. Дефект контрольного образца и его параметры

Теплофизические свойства стали характеризуются коэффициентом теплопроводности λ , объемной теплоемкостью $c\gamma$ и коэффициентом температуропроводности a . Допускаем, что эти параметры остаются постоянными во время теплового воздействия и не зависят от температуры. Совместим с элементом объема dV начало O прямоугольной системы координат. Тогда процесс распространения тепла мгновенного сосредоточенного источника Q выразится уравнением [1]:

$$T(R, t) = \frac{Q}{c\gamma(4\pi at)^{1,5}} e^{-\frac{R^2}{4at}}, \quad (1)$$

где $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ – квадрат расстояния от источника тепла O до точки тела с координатами x, y, z .

Из выражения (1) следует, что температура произвольной точки тела определяется ее радиус-вектором R . Изотермические поверхности представляют собой сферы радиуса $R = \text{const}$ с центром в точке O .

Сопоставляя между собой рисунки 5–9, можно заметить, что объем области выделения деформационного тепла зависит от относительной глубины (h / H) засверленного отверстия, диаметра отверстия (d / h), напряженно-деформированного состояния в основании выточки, свойств материала. В первом приближении примем эту область сферической, диаметром kd (k – числовой коэффициент, зависящий от d / h , определяемый численным расчетом или экспериментальным путем). В первом приближении величина коэффициента может быть принята: для образца 4: $k = 2,4-3,0$; для образца 5: $k = 0,75-1,5$. Тогда Q можно рассчитать по зависимости:

$$Q = q V = q (1/6\pi k^3 d^3), \quad (2)$$

где q – количество тепла, выделяемого объемом dV ;

V – объем шара радиусом kr .

Минимальное значение модуля радиус-вектора можно определить по выражению:

$$R_{\min} = H - h - 0,5 k d, \quad (3)$$

Допустим, что $h / H \ll 1$, т. е. выражение (4.1) применимо для всех засверливаний, кроме сквозного отверстия.

Для фиксированного момента времени t_f можно найти отношение температур на гладкой поверхности образца по осям i -го и k -го засверливаний (при $R_k > R_i$):

$$\frac{T_k(R_k, t_f)}{T_i(R_i, t_f)} = \frac{q_k (k_k d_k)^3}{q_i (k_i d_i)^3} e^{\frac{R_i^2 - R_k^2}{4at_f}}. \quad (4)$$

Выражение (4) применимо для образцов типа 3, 4, 5 (при условии $h / H \ll 1$). Для пластин конечной толщины H с засверленными отверстиями выражения (1), (2) применять затруднительно из-за выхода сосредоточенных деформационных источников тепла на исследуемую поверхность образца.

В контрольном образце на внесенные засверливанием дефекты могут действовать несколько источников тепла, например, сочетание нагрева со стороны засверливания с деформационным нагревом.

Допустим, что мощность тепловых источников, коэффициенты теплопроводности и коэффициенты теплообмена не зависят от температуры. При таких допущениях температуру T_i в любой i -ой точке образца можно определить с учетом принципа суперпозиции температурных полей следующим выражением [10]:

$$T_i = T_0 + \sum_{j=1}^n P_j k_{ji}, \quad (5)$$

где T_0 – начальная температура (среды, материала образца);

P_j – мощность j -го теплового источника;

n – число источников;

k_{ji} – числовые коэффициенты, не зависящие от температуры внешней среды, мощности источников.

Исследование стационарного температурного поля образца с несколькими источниками тепла сводится к определению коэффициентов k_{ij} .

Рассмотрим три случая стационарного теплового воздействия на образец.

1-й случай (нагрев производится с засверленной поверхности образца, деформационный нагрев отсутствует). В этом случае формула (5) принимает вид:

$$T_i = T_0 + P_1 k_1. \quad (6)$$

2-й случай (нагрев с засверленной поверхности образца отсутствует; действует деформационный нагрев). Для этого случая температура в произвольной точке образца определяется аналогично по выражению (7):

$$T_i = T_0 + P_2 k_2. \quad (7)$$

3-й случай (суперпозиция 2-х предыдущих тепловых воздействий). Расчетное выражение для 3-го случая запишется в виде (8):

$$T_i = T_0 + P_1 k_1 + P_2 k_2. \quad (8)$$

Коэффициенты k_1, k_2 можно определить экспериментально или расчетом.

Выводы. При активном тепловом исследовании образцов по выражению (6) и соответствующей мощности внешнего нагрева можно выявлять искусственные дефекты (засверленные отверстия) и их параметры. По выражению (8) можно выявлять дефекты, которые имеют выход сосредоточенных деформационных источников тепла на исследуемую поверхность образца. В третьем случае, варьируя величиной P_1 при ограничении P_2 можно также выявить искусственные дефекты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глуховський, В. Ю. Особливості створення систем оцінки геометричних параметрів дефектів методом тепловізійного контролю / В. Ю. Глуховський, В. О. Троїцький // Методи та прилади контролю якості. – № 2 (33). – 2014. – С. 5–12.
2. Maldague, X. Theory and practice of infrared technology for nondestructive testing. – New York : John Wiley & Sons. – 2001. – 682 p. – (Wiley Series in Microwave and Optical Engineering).
3. Подходы к созданию стандартных образцов для теплового неразрушающего контроля / В. А. Стороженко [и др.] // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2005 – № 1 – С. 21–25.
4. Evaluation of new designed reference blocks for calibration and NDT by optical and ultrasonic techniques / Mirham A. Y. Barakat, Mohamed Abdelwahab, Alshaimaa Waheed Abdallah // Metrol. Meas. Syst., – (2022). – Vol. 29. No. 4. – P. 719–736.
5. Non-destructive testing of metallic materials using passive and active infrared thermography / P. Bouteille [et al.] // Mechanics & Industry – 15, 1 (2014). – P. 313–321.
6. Неразрушающий контроль: справочник : в 8 т. / под общ. ред. В. В. Клюева; т. 5 : в 2 кн. : Тепловой контроль. / В. П. Вавилов ; Электрический контроль / К. В. Подмастерьев [и др.] – 2-е изд., испр. – М. : Машиностроение, 2006. – 679 с.
7. Вавилов, В. П. Инфракрасная термография и тепловой контроль / В. П. Вавилов. – М. : ИД Спектр. – 2009. – 544 с.
8. Galagan, R. Statistical analysis of thermal nondestructive testing data / R. Galagan, A. Momot // Advanced Information Systems. – 2019. – Vol. 3, No. 1. – P. 58–62.
9. Рыкалин, Н. Н. Расчеты тепловых процессов при сварке / Н. Н. Рыкалин. – М. : Машгиз, 1951. – 296 с.
10. Дульнев, Г. Н. Теплообмен в радиоэлектронных аппаратах / Г. Н. Дульнев, Э. М. Семейкин. – Ленинград : Энергия, 1968. – 360 с.

Поступила: 15.05.2023

МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ ВИНТОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН СЖАТИЯ И РАСТЯЖЕНИЯ ИЗ СТАЛИ ПРЕДНАЗНАЧЕННЫХ ДЛЯ АМОРТИЗАЦИИ СТРЕЛКОВОГО ОРУЖИЯ

Москалев С. А.

Белорусский национальный технический университет

Введение. Одним из наиболее активно развивающихся направлений в области вооружения и техники в настоящее время являются дистанционно-управляемые боевые модули, оснащенные средствами видеонаблюдения и вооружением. Боевые модули могут устанавливаться на стационарных позициях либо различных мобильных объектах (автомобили, БТР, БМП, катера, дистанционно-управляемые шасси и др.) Основными целями применения боевых модулей является сохранение личного состава за счет размещения его в укрытиях и удаления от огневых средств и противника.

На корпус автоматического оружия при стрельбе действует сила отдачи. Если корпус оружия жестко закрепить на боевом модуле, то при работе газоотводных систем с неподвижным стволом сила отдачи будет приложена непосредственно к установке. Наиболее существенной составляющей силы отдачи в этом случае является сила давления пороховых газов на дно канала ствола. У оружия калибра 20-мм и выше максимальное расчетное значение этой силы превышает 100 кН. При таких усилиях требуется боевой модуль, обладающий значительной массой и габаритами. Для того чтобы уменьшить значение сил, действующих на все элементы боевого модуля, и уменьшить его упругие деформации, в конструкцию постели (узел боевого модуля для установки стрелкового оружия) вводятся амортизаторы, обеспечивающие продольное перемещение оружия при выстреле.

Цель выполняемой работы – разработать методику расчета и конструирования систем винтовых цилиндрических пружин, предназначенных для виброизоляции стрелкового оружия, устанавливаемого на различных боевых модулях различных боевых машин.

Имеющиеся в промышленности марки пружинной стали характеризуются следующими свойствами и условиями применения, представленными в таблице 1 [1].

Таблица 1

№ п/п	Материал	Особенности
1	Сталь 65Г	Повышенная склонность к образованию закалочных трещин. Применяется с целью удешевления продукции для изделий массового производства в случаях, когда поломки пружин не вызывают нарушения функционирования деталей механизмов и не связаны с трудоемкими заменами.
2	Сталь 51ХФА	Повышенная теплоустойчивость. В результате высоких упругих и вязких свойств служит лучшим материалом для пружин I класса.
3	Сталь 60С2А, 60С2	Высокие упругие и вязкие свойства. Повышенная склонность к графитизации и недостаточная прокаливаемость при сечениях $d > 20$ мм. Широкая применимость для пружин I и II классов.

Окончание таблицы 1

4	Сталь 60С2ХФА	Высокая прокаливаемость, малая склонность к росту зерна и обезуглероживанию при нагреве, повышенные вязкость, жаропрочность и хладостойкость, хорошая циклическая прочность и релаксационная стойкость в широком диапазоне циклических изменений температур. Предпочтительное применения в сечениях проволоки от 30 мм и выше.
5	Сталь 70СЗА	Повышенная прокаливаемость. Обладает склонностью к графитизации. Преимущественное применение при диаметрах проволоки $d \geq 20$ мм.

1. Расчетные формулы винтовых цилиндрических пружин.

В зависимости от действия нагрузки винтовые пружины, деформируясь, изменяют свою форму и размеры. С увеличением нагрузки увеличивается деформация пружины и соответственно увеличивается их, так называемый часто ход пружины. Зависимость хода винтовой пружины от нагрузки называют характеристикой пружины. Эта зависимость изображается в системе координат «усилие-деформация». В первом приближении можно считать, что характеристики винтовых цилиндрических пружин прямолинейны. Обозначения параметров пружин, расчетные формулы и значения должны соответствовать указанным на рисунке 1 и в таблице 1 [2].

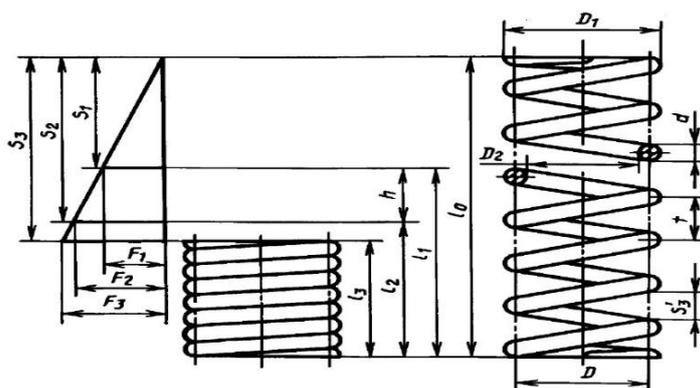


Рис. 1. Винтовая цилиндрическая пружина

Таблица 2

Наименование параметра	Обозначение	Расчетная формула и значение
Сила пружины при рабочей деформации, Н	F_1	Принимается в зависимости от нагрузки пружины
Сила пружины при рабочей деформации, Н	F_2	
Рабочий ход пружины, мм	h	
Наибольшая скорость перемещения подвижного конца пружины при нагружении или разгрузке, м/с	ϑ_{\max}	
Выносливость пружины – число циклов до разрушения	N_F	
Наружный диаметр пружины, мм	D_1	Предварительно принимается с учетом конструкции узла

Продолжение таблицы 2

Относительный инерционный зазор пружины	δ	$\delta = 1 - \frac{F_2}{F_3} \quad (1.1)$ Для пружин сжатия I и II классов $\delta = 0,05$ до $0,25$
Сила пружины при максимальной деформации, Н	F_3	$F_3 = \frac{F_2}{1 - \delta} \quad (1.2)$
		Уточняется по таблицам ГОСТ 13766
Сила предварительного напряжения, Н	F_0	$F_0 = (0,1 - 0,25)F_3 \quad (1.3)$
Диаметр проволоки, мм	d	Выбирается по таблицам ГОСТ 13764–ГОСТ 13776
Жесткость одного витка пружины, Н/мм	c_1	
Максимальная деформация одного витка пружины, мм	s'_3 (при $F_0 = 0$)	Выбирается по таблицам ГОСТ 13764–ГОСТ 13776
	s''_3 (при $F_0 > 0$)	
Максимальное касательное напряжение пружины, МПа	τ_3	$\tau_3 = k \frac{8F_3 D}{\pi d^3} \quad (1.5)$
Критическая скорость пружины сжатия, м/с	ϑ_k	$\vartheta_k = \frac{\tau_3 \left(1 - \frac{F_2}{F_3}\right)}{\sqrt{2G\rho} 10^{-3}} \quad (1.6)$
Модуль сдвига, МПа	G	Для пружинной стали $G = 7,85 \cdot 10^4$
Динамическая (гравитационная) плотность материала, Нс ² /м ⁴	ρ	Для пружинной стали $\rho = 8 \cdot 10^3$
Жесткость пружины, Н/мм	c	$c = \frac{F_2 - F_1}{h} = \frac{F_2}{s_2} = \frac{F_3}{s_3} = \frac{Gd^4}{8D^3n} \quad (1.7)$
Число рабочих витков пружины	n	$n = \frac{c_1}{c} \quad (1.8)$
Полное число витков пружины	n_1	$n_1 = n + n_2, \quad (1.9)$
		где n_2 – число опорных витков
Средний диаметр пружины	D	$D = D_1 - d = D_2 + d \quad (1.10)$
Внутренний диаметр пружины	D_2	$D_2 = D_1 - 2d \quad (1.11)$
Индекс пружины	i	$i = \frac{D}{d} \quad (1.12)$
Предварительная деформация пружины, мм	s_1	$s_1 = \frac{F_1}{c} \quad (1.13)$
Рабочая деформация пружины, мм	s_2	$s_2 = \frac{F_2}{c} \quad (1.14)$

Окончание таблицы 2

Максимальная деформация пружины, мм	s_3	$s_3 = \frac{F_3}{c}$	(1.15)
Длина пружины при максимальной деформации, мм	l_3	$l_3 = (n_1 - 0,5)d$	(1.16)
Длина пружины в свободном состоянии, мм	l_0	$l_0 = l_3 + s_3$	(1.17)
Длина пружины при предварительной деформации, мм	l_1	$l_1 = l_0 - s_1$	(1.18)
Длина пружины при рабочей деформации, мм	l_2	$l_2 = l_0 - s_2$	(1.19)
Шаг пружины в свободном состоянии, мм	t	$t = s'_3 + d$	(1.20)
Напряжение в пружине при предварительной деформации, МПа	τ_1	$\tau_1 = \frac{F_1}{F_3} \tau_3$	(1.21)
Напряжение в пружине при рабочей деформации, МПа	τ_2	$\tau_2 = \frac{F_2}{F_3} \tau_3$	(1.22)
Коэффициент, учитывающий кривизну витка пружины	k	$k = \frac{4i - 1}{4i - 4} + \frac{0,615}{i}$	(1.23)

Для обеспечения надежной работы устройства предварительную нагрузку F_1 необходимо выбирать так, чтобы $F_1 > 0,1F_2$. Конструкция опорных мест должна обеспечивать надежное центрирование пружины и передачу усилия строго по ее оси.

Торцевые витки пружины называются «мертвыми». Они шлифуются и плотно поджимаются к соседним рабочим. Количество «мертвых» витков рекомендуется принимать равным 0,75–1,25 с каждой стороны в зависимости от длины пружины.

Для определения осевой деформации пружины с круглым сечением витка при определенной нагрузке используем формулу [3]

$$l = \frac{8FD^3}{Gd^4}n, \quad (1)$$

Выразим из формулы (1) значение нагрузки при определенной деформации:

$$F = \frac{Gd^4l}{8D^3n}. \quad (2)$$

Длина ненагруженной пружины

$$l_0 = l_3 + n(t - d). \quad (3)$$

Из формулы (3) выразим шаг пружины

$$t = \frac{l_0 - l_3}{n} + d.$$

2. Расчет параметров системы амортизации стрелкового оружия в общем виде.

Характеристикой силового воздействия на оружие является импульс отдачи, равный сумме произведения сил давления пороховых газов на дно канала ствола за малые промежутки времени на эти промежутки. Известно, что количество движения при отдаче численно равно максимальному количеству движения оружия

$$I_{\max} = M\vartheta_{\max}, \quad (4)$$

где M – масса оружия со всеми откатными частями, кг;

ϑ_{\max} – максимальная скорость свободной отдачи оружия, м/с.

Действие пороховых газов на пулю и оружие можно рассматривать как внутреннюю силу. Количество движения пули и порохового заряда рассчитывается по формуле

$$I = q\vartheta_0 + \beta\omega\vartheta_0 = \vartheta_0(q + \beta\omega), \quad (5)$$

где q – масса пули, кг;

ϑ_0 – начальная скорость пули, м/с;

β – коэффициент последствия пороховых газов;

ω – масса порохового заряда, кг.

Коэффициент β для момента, пока пуля не покинула ствол оружия, очевидно заключается в пределах от нуля до единицы. При движении пули по стволу коэффициент β подвергается изменениям и его среднее значение близко к 0,5, то для всего периода движения по каналу принимают значение $\beta=0,5$. Количество движения в момент выхода пули из ствола рассчитывается по формуле

$$I = \vartheta_0 \left(q + \frac{1}{2} \omega \right). \quad (6)$$

В действительности опытом установлено, что наибольшая скорость отката получается через некоторое время спустя, после того как пуля покинет ствол, что объясняется действием вытекающих из канала ствола после вылета пули пороховых газов.

Формула для расчета коэффициента β , основанная на теории истечения газов имеет следующий вид:

$$\beta = \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{3}} C_0 \Phi(T)}{\vartheta_0}, \quad (7)$$

где k – показатель политропы расширения пороховых газов;

C_0 – скорость распространения звука в газе под дульным давлением;

$$C_0 = \sqrt{gk \frac{P_d}{\gamma_0}}, \quad (8)$$

где P_d – дульное давление;

γ_0 – удельный вес пороховых газов в момент вылета пули;

$$\gamma_0 = \frac{\omega}{W_{op}}, \quad (9)$$

где $W_{ор}$ – объем канала ствола оружия вместе с камерой.

$$\Phi(T) = 1 - \left(\frac{P_d}{P_a}\right)^{\frac{-k-1}{2k}}, \quad (10)$$

где $P_a = 1 \text{ кг/см}^2$.

Формула (7), полученная теоретически, сложна и не отвечает действительным условиям, при которых происходит истечение пороховых газов из канала ствола после вылета пули, так как эта формула выведена при предположении, что в начальный период истечения пороховые газы находятся в состоянии покоя при неизменных начальных условиях состояния газа.

Также существует довольно много эмпирических формул для определения коэффициента β , некоторые варианты которых представлены в таблице 3.

Таблица 3

Формулы для расчета коэффициента β	Источник
$\beta = 2,3 - \frac{\vartheta_0}{1000}$	[4, с.11]
$\beta = 0,67 \sqrt{\frac{q}{\omega}}$	[4, с.12]
$\beta = \frac{1275}{\vartheta_0}$	[5, с.13]
$\beta = \frac{1300}{\vartheta_0}$	[6, с.14]
$\beta = \frac{1400}{\vartheta_0} + 0,15$	[6, с.15]

При работе системы амортизации происходит изменение импульса отдачи, которое можно записать в следующем виде:

$$\Delta \vec{I} = \vec{I}_{\max} - 0 = \vec{F}t, \quad (15)$$

где \vec{F} – сила, с которой воздействует амортизатор на оружие; t – время воздействия силы.

Для определения значения силы и времени ее воздействия рассмотрим пружинный амортизатор двустороннего действия.

Предварительно поджатие F_0 пружины амортизатора необходимо для надежного удержания оружия в положении статического равновесия. При максимальном откате движение оружия прекращается, так как импульс отдачи равен нулю, а амортизатор воздействует на оружие с рабочим усилием F_2 и выполняет накат – возвращает оружие в исходное положение. Полный ход оружия на амортизаторах (т. е. сумма максимального отката и максимального выката) ограничен условиями безотказного движения оружия и составляет величину порядка 20–40 мм. С увеличением хода нужно увеличить и длину той части патронной ленты, которая участвует в продольном движении оружия на амортизаторах. В противном случае возможно заклинивание, или выход из строя ленты и появление задержек.

Для обеспечения кучности при стрельбе очередями оружие к очередному выстрелу должно возвращаться в первоначальное положение – выполнить откат и накат за

время T . Время T , которое необходимо для выполнения одного выстрела, можно найти по формуле

$$T = \frac{60}{n},$$

где n – скорострельность оружия, выстр./мин.

Исходя из вышесказанного можно сделать вывод, что импульс отдачи изменяется от максимального до нуля во время отката при воздействии амортизатора с изменяющимся усилием от F_0 до F_2 в течение времени, равному половине периода одного выстрела. Формула (15) имеет следующий вид, графическая интерпретация которой изображена на рисунке 2

$$I_{\max} = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot \frac{T}{2} = \frac{F_2(k + 1)}{2} \cdot \frac{T}{2}, \quad (16)$$

где F_1 – предварительное усилие амортизатора;

F_2 – рабочее усилие амортизатора;

T – период одного выстрела;

k – коэффициент предварительной нагрузки амортизатора в зависимости от рабочей нагрузки.

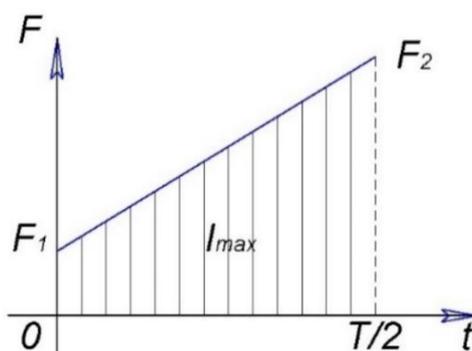


Рис. 2. Графическая интерпретация изменения импульса отдачи

Коэффициент k определяется по формуле:

$$k = \frac{F_1}{F_2}. \quad (17)$$

Для обеспечения надежной работы устройства наименьшую предварительную нагрузку F_1 необходимо выбирать так, чтобы $F_1 > 0,1F_2$ для винтовых цилиндрических пружин круглого сечения [3], $s_1 = (0,2 — 0,4)s_3$ и $s_1 = (0,15 — 0,2)s_3$ по ГОСТ 3057–90 и DIN 2093 соответственно для тарельчатых пружин. Для удовлетворения вышеуказанных рекомендаций и надежного удержания пулемета в состоянии покоя для расчета используем $k = 0,25$.

Выразим из (16) рабочее усилие амортизатора

$$F_2 = \frac{4I_{\max}}{T(k + 1)}. \quad (18)$$

Формулу (18) можно использовать как для амортизаторов с одной пружиной, работающей на откат и на выкат, так и для системы амортизации с двумя пружинами. При использовании системы амортизации с двумя пружинами влиянием пружины выката во время отката (переход из состояния предварительной нагрузки в свободное состояние) можно пренебречь.

Исходя из рабочей нагрузки F_2 амортизатора, полученной по формуле (18), требуемой рабочей деформации (величина отката), конструктивных особенностей и габаритов установки определяются параметры амортизаторов.

3. Расчет параметров системы амортизации.

Выполним расчет параметров системы амортизации по формулам, представленным в разделе 2. Для расчета необходимо знать характеристики стрелкового оружия. В таблице 4 указаны необходимые характеристики [7; 8].

Таблица 4

Характеристика	Значение
Масса пули ЛПС (легкая пуля со стальным сердечником), г	9,6
Масса порохового заряда, г	3,1
Скорострельность, выстр./мин.	750
Начальная скорость пули, м/с	855

По формуле (6) определяем количество движения в момент вылета пули из ствола

$$I = \vartheta_0 \left(q + \frac{1}{2} \omega \right) = 855 \left(0,0096 + \frac{1}{2} \cdot 0,0031 \right) = 9,533 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

По формуле (7) определяем коэффициент последствия пороховых газов

$$\beta = \frac{1400}{\vartheta_0} + 0,15 = \frac{1400}{855} + 0,15 = 1,787.$$

Определяем максимальное значение количества движения при отдаче

$$I_{\max} = \vartheta_0 (q + \beta \omega) = 855 (0,0096 + 1,787 \cdot 0,0031) = 12,944 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Определяем время, необходимое для выполнения одного выстрела из:

$$T = \frac{60}{n} = \frac{60}{750 \text{ выстр./мин}} = 0,08 \text{ с.}$$

Рассчитываем рабочее усилие амортизатора

$$F_2 = \frac{4I_{\max}}{T(k+1)} = \frac{4 \cdot 12,944}{0,08(0,25+1)} = 517,8 \text{ Н.}$$

4. Расчет винтовых цилиндрических пружин для системы амортизации.

Амортизация при стрельбе из стрелкового оружия обеспечивается двумя штатными винтовыми цилиндрическими пружинами с круглым сечением. Рассчитаем характеристики традиционных пружин амортизатора и сравним с характеристиками исследуемой модели. Предварительную деформацию большей пружины штатного амортизатора

определим из конструктивных требований амортизационного узла и имеющихся конструктивных данных используемых деталей (переднего ползуна).

Пружина амортизатора большая в ненагруженном состоянии имеет длину $l_0 = 60$ мм, при предварительной деформации – $l_1 = 56$ мм, при рабочей – $l_2 = 46$ мм.

Определим длину и большой шаг пружины амортизатора при максимальной деформации

$$l_3 = (14 - 0,5) \cdot 3 = 40,5 \text{ мм},$$

$$t = \frac{60 - 40,5}{12} + 3 = 4,63 \text{ мм}.$$

Рассчитаем предварительное, рабочее и максимальное усилия большой пружины амортизатора

$$F_1 = \frac{7,85 \cdot 10^4 \cdot 3^4 \cdot (60 - 56)}{8 \cdot 12^3 \cdot 12} = 153,2 \text{ Н};$$

$$F_2 = \frac{7,85 \cdot 10^4 \cdot 3^4 \cdot (60 - 46)}{8 \cdot 12^3 \cdot 12} = 536,3 \text{ Н};$$

$$F_3 = \frac{7,85 \cdot 10^4 \cdot 3^4 \cdot (60 - 40,5)}{8 \cdot 12^3 \cdot 12} = 747 \text{ Н}.$$

Определим длину и шаг малой пружины амортизатора при максимальной деформации

$$l_3 = (9 - 0,5) \cdot 3 = 25,5 \text{ мм},$$

$$t = \frac{36,5 - 25,5}{7} + 3 = 4,57 \text{ мм}.$$

Перед выстрелом система находится в равновесии, следовательно, предварительные усилия большой и малой пружины амортизатора равны. Аналогично определим рабочее и максимальное усилия малой пружины

$$F_2 = \frac{7,85 \cdot 10^4 \cdot 3^4 \cdot (36,5 - 28,2)}{8 \cdot 12^3 \cdot 7} = 545 \text{ Н};$$

$$F_3 = \frac{7,85 \cdot 10^4 \cdot 3^4 \cdot (36,5 - 25,5)}{8 \cdot 12^3 \cdot 7} = 722 \text{ Н}.$$

Деформация малой пружины амортизатора при предварительной нагрузке равна

$$l = \frac{8 \cdot 153,2 \cdot 12^3}{78,45 \cdot 10^3 \cdot 3^4} \cdot 7 = 2,3 \text{ мм}.$$

Характеристики штатных амортизаторов указаны в таблице 5.

Таблица 5

Параметр	Пружина амортизатора большая (пружина отката)		Пружина амортизатора малая (пружина наката)	
	Значения для штатных амортизаторов	Расчетные значения	Значения для штатных амортизаторов	Расчетные значения
Длина в свободном состоянии l_0 , мм	60	60	36,5	36,5
Шаг, мм	4,75	4,63	4,75	4,57
Число рабочих и мертвых витков	$13,5 \pm 1/2$	14	$8,5 \pm 1/2$	9
Предварительная нагрузка F_1 , Н	–	153,2	–	153,2
Длина при предварительной деформации l_1 , мм	–	56	–	34,2
Рабочая нагрузка F_2 , Н	$519,9 \pm 24,5$	536,3	$524,8 \pm 28,5$	545
Длина при рабочей деформации l_2 , мм	46	46	28,2	28,2
Максимальная нагрузка F_3 , Н	–	747	–	722

Выводы

Разработана методика по расчету цилиндрических пружин, предназначенных для амортизации систем стрелкового оружия. Используя информационный ресурс, изложенный в статье, можно осуществлять инженерно-технические исследования в области конструирования амортизаторов по их назначению. Сравнивая расчетное значение рабочей нагрузки амортизатора (536 Н) с аналогичным параметром (517,8 Н) штатной системы амортизации, следует вывод, что полученные при расчете результаты близки к характеристикам штатного усилия амортизатора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алферов В. В. Конструкция и расчет автоматического оружия – 1977. – 248 с.
2. Курендаш Р. С. Конструирование пружин. – 1958. – 109с.
3. Радчик А. С., Буртковский И. И. Пружины и рессоры. – 1973. – 120 с.
4. ГОСТ 3057–90. Пружины тарельчатые. Общие технические условия. – Введен 01.07.91. – М : Изд-во стандартов, 1990. – 37 с.
5. DIN 2093. Dimensions and quality of conical disk springs. – January 1992. – 11p.
6. Изготовление тарельчатых пружин [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.szzmk.ru/produkts/pruzhiny/tarelchatye-pruzhiny/> – Дата доступа: 03.01.2019.
7. ГОСТ 9389–75. Проволока стальная углеродистая пружинная. Технические условия. – Введен 01.01.77. – М : Изд-во стандартов, 1975. – 11 с.
8. ГОСТ 13765–86. Пружины винтовые цилиндрические сжатия и растяжения из стали круглого сечения. Обозначение параметров, методика определения размеров. – Введен 01.07.88. – М : Изд-во стандартов, 1988. – 15 с.

Поступила: 12.03.2023

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ НАНОБАЛОК С УЧЕТОМ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСОВЫХ СИЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

¹Михасев Г. И., ²Radi E.

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

²Università di Modena e Reggio Emilia, Reggio Emilia, Italy

Введение. Семейства параллельно ориентированных нанотрубок, взаимодействующих между собой посредством полей межмолекулярных сил, представляют собой уникальные объекты, которые находят свое применение в различных микро- и наноразмерных электромеханических системах (МЭМС и НЭМС). В частности, пара конусообразных параллельно расположенных нанотрубок, взаимодействующих между собой как два бистабильных электрода, является основным элементом наноразмерных пинцетов, используемых в современной микрохирургии для манипуляций на клеточном уровне [1]. Массив вертикально ориентированных нанотрубок, запечатанных с обеих сторон между пластинками или мембранами, является сверхчувствительным элементом в таких НЭМС как наноразмерные датчики давления и напряжений [2], настраиваемые осцилляторы и резонаторы [3], биометрические сенсоры [4]. Такие факторы, как оптимальное расстояние между трубками, их длина, а также возникающие межмолекулярные ван-дер-ваальсовы и казимировые силы, являются определяющими при моделировании механического поведения подобных НЭМС. Сверхмалые размеры всех элементов системы ставят задачу учета не только межмолекулярных сил взаимодействия между трубками, но и внутренних нелокальных эффектов деформирования самих трубок.

Целью данной статьи является постановка задачи о колебаниях системы параллельно ориентированных нанотрубок, моделируемых нанобалками, в рамках нелокальной теории упругости Эрингена [5–8]. Предполагается, что расстояние между нанобалками достаточно мало, что приводит к появлению межмолекулярных ван-дер-ваальсовых сил взаимодействия.

Общая постановка задачи. Рассмотрим плоскую систему из N параллельно ориентированных нанобалок длиной l , стоящих на жесткой неподвижной подложке, см. рисунок 1. Верхние края балок могут быть свободны, жестко защемлены, либо свободно оперты. Расстояние между соседними балками в их основании одинаково и равно g . Уравнение движения n -ой нанобалки, моделируемой в рамках континуальной теории упругости, будем описывать уравнением

$$\frac{\partial^2 M_n}{\partial x^2} = -q_n(x) + \rho S \frac{\partial^2 W_n^*}{\partial t^2}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где M_n – изгибающий момент, x – осевая координата, общая для всех балок и отсчитываемая от их основания, t – время, W_n^* – нормальное перемещение n -ой балки (в направлении, ортогональном к оси Ox), ρ , S – плотность материала и площадь поперечного сечения балок, соответственно, а $q_n(x)$ – равнодействующая распределенных ван-дер-ваальсовых сил, действующих на n -ю балку со стороны соседних, и зависящая от относительных перемещений $W_n^* - W_{n-1}^*$ и $W_{n+1}^* - W_n^*$.

Поставим задачу о выводе системы интегро-дифференциальных и дифференциальных уравнений и соответствующих граничных условий, описывающих динамику семейства параллельно ориентированных балок с учетом как ван-дер-ваальсовых сил, так и эффектов нелокального деформирования каждой балки.

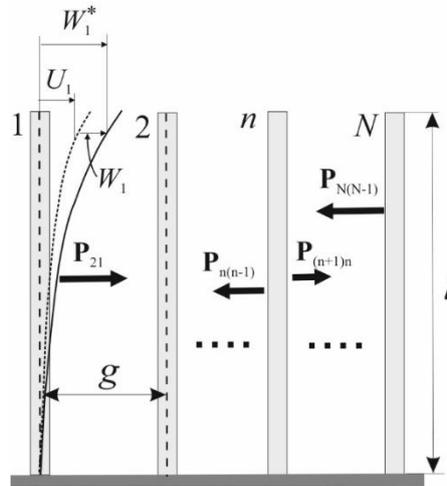


Рис. 1. Плоская система N параллельно ориентированных нанобалок

Ван-дер-ваальсовы силы. Межмолекулярные ван-дер-ваальсовы силы действующие между ближайшими нанобалками, вызванные их отклонением от положения равновесия, могут быть найдены с использованием потенциала Леннарда-Джонсона [9],

$$\varphi_{ij} = \frac{C_{12}}{r_{ij}^{12}} - \frac{C_6}{r_{ij}^6}, \quad (2)$$

где r_{ij} – расстояние между i -ым и j -ым атомами, например, n -ой и $(n+1)$ -ой нанобалками, рассматриваемых как дискретные системы, а C_{12} и C_6 – так называемые отталкивающая и притягивающая константы, соответственно. Ван-дер-ваальсова сила $P_{(n+1)n}$ взаимодействия двух соседних нанобалок, вызванных их относительным перемещением $W_{n+1}^* - W_n^*$ из положения равновесия может быть найдена путем интегрирования ван-дер-ваальсовой энергии взаимодействия по объему двух нанобалок подобно тому, как это было сделано в работе [10] при оценке ван-дер-ваальсовых сил между двумя нанотрубками. Заметим, что в общем случае соответствующие соотношения для компонент силы $P_{(n+1)n}$ достаточно сложны и носят нелинейный характер относительно функции $W_{n+1}^*(x, t) - W_n^*(x, t)$.

Приведем здесь полученную в [11] наиболее простую формулу ван-дер-ваальсовых сил для двух консольных параллельно ориентированных трубок толщиной h с внешним радиусом R :

$$P_{12} \approx \frac{3Ah^2}{254R^2(g - 2W^*)^{5/2}}, \quad (3)$$

где A – постоянная Хамакера, а W^* – перемещение одной трубки. Формула (3) выведена в [11] при моделировании устойчивости нанопинцета и соответствует случаю симметричной деформаций первой и второй трубок, а также при условии выполнения сильно-

го неравенства $R \ll g$, при котором коэффициент C_{12} пренебрежительно мал, а $C_6 = 15,6 \text{ eV\AA}^6$.

Представим перемещение в виде

$$W^*(x, t) = U_s(x) + W(x, t), \quad (4)$$

где $U_s(x)$ – статическое отклонение, вызванное действием ван-дер-ваальсовых сил, а $W(x, t)$ – дополнительно динамическое перемещение, соответствующее малым колебаниям в окрестности положения равновесия. Предполагая выполнение условия $W \ll g - 2U_s$ для любого $0 \leq x \leq l$, ван-дер-ваальсову силу (3) можно представить в виде $P_{12} = P_{vdW}^{(s)} + P_{vdW}^{(d)}$, где

$$P_{vdW}^{(s)} = \frac{3Ah^2}{254R^{3/2}(g-2U_s)^{5/2}}, \quad P_{vdW}^{(d)} = c_{vdW}^*(x)W(x, t), \quad c_{vdW}^*(x) = \frac{15Ah^2}{254R^{3/2}[g-2U_s(x)]^{7/2}}. \quad (5)$$

Таким образом, в случае двух одинаковых параллельно ориентированных трубок, их малые симметричные колебания в окрестности статического деформированного состояния, вызванного действием сил $P_{vdW}^{(s)}$, можно описать линейным уравнение

$$\frac{\partial^2 M^{(d)}}{\partial x^2} = -c_{vdW}^*(x)W + \rho S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Здесь, $M^{(d)}(x, t)$ – динамический момент, являющийся функцией амплитуды $W(x, t)$ малых изгибных колебаний, а $c_{vdW}^*(x)$ – переменный ван-дер-ваальсов коэффициент, зависящий от статического перемещения $U_s(x)$, которое, в свою очередь, находится из решения нелинейного уравнения

$$\frac{\partial^2 M^{(s)}}{\partial x^2} = -P_{vdW}^{(s)}, \quad (7)$$

где $M^{(s)}(x)$ – изгибающий статический момент, определяемый через перемещение $U_s(x)$, а статическая ван-дер-ваальсова сила $P_{vdW}^{(s)}$ находится согласно (5).

Уравнение (7) не допускает точного аналитического решения, однако его приближенное решение $U_s(x)$ может быть найдено так же как и в статье [12] в предположении о линейной или квадратичной зависимости ван-дер-ваальсовой силы $P_{vdW}^{(s)}$ от координаты x в случае консольного нановыключателя. Заметим при этом, что брешь g между балками не должна быть меньше некоторого критического значения g_c , при котором происходит критическое втягивание трубок и их взаимное касание в вершине [13; 14].

Если считать, что величина g и жесткость каждой трубки EI на изгиб достаточно велики, а длина трубок l мала, так что $U_s(x) \ll g/2$ для любого x , то коэффициент c_{vdW}^* в уравнении (6) можно считать приблизительно постоянным. Заметим, что аналогичное предположение о постоянстве коэффициента c_{vdW}^* вдоль оси нанотрубки было подтверждено в работе [10] в результате оценки ван-дер-ваальсовых сил между одностенными углеродными нанотрубками (УНТ) с использованием потенциала Леннарда-Джонсона (2). В частности, для двух одностенных УНТ длиной $l = 5$ нм и внешним радиусом $R = 1,34$ нм, находящихся на расстоянии $g = 3$ нм, расчеты, выполненные в [10], дали значение $c_{vdW}^* \approx 10 EI/l^4$.

В дальнейшем, моделируя малые колебания семейства $N > 2$ нанобалок в окрестности слабо возмущенного статического состояния, будем считать, что ванн-дер-ваальсовы связи между двумя соседними параллельно ориентированными нанобалками подчиняются линейному закону

$$P_{(n+1)n} = c_{vdW}^*(W_{n+1} - W_n), \quad (8)$$

где c_{vdW}^* – постоянная ван-дер-ваальсова константа, зависящая как от расстояния g между нанобалками, так и от геометрических и физических характеристик нанобалок [10,11], а $W_n(x, t)$ – дополнительное динамическое отклонение балки от статического равновесного положения, характеризующегося отклонением $U_n(x)$ (на рисунок 1 данные перемещения показаны лишь для первой нанобалки).

Нелокальный изгибающий момент. В рамках классической (локальной) теории упругости, изгибающий момент в n -ой балке при малых колебаниях в окрестности положения равновесия определяется как

$$M_n = -EI \frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2}, \quad (9)$$

где EI – изгибная жесткость, которая здесь принимается постоянной для всех нанобалок. В рамках двух-фазной (смешанной) нелокальной теории упругости Эрингена, изгибающий *нелокальный* момент находится как сочетание локальной и нелокальной составляющих [15; 16]

$$M_n = -EI \left(\xi_1 \frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2} + \xi_2 \int_0^l K(|x - \hat{x}|, \kappa) \frac{\partial^2 W_n}{\partial \hat{x}^2} d\hat{x} \right). \quad (10)$$

Здесь $K(|x - \hat{x}|, \kappa)$ – положительная функция (ядро), быстро затухающая вдали от x , удовлетворяющая условия симметрии относительно x , а также условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(|x - \hat{x}|, \kappa) d\hat{x} = 1,$$

где $\kappa = e_0 a$ – нелокальный параметр, зависящий от материальной константы e_0 и внутренней характерной длины a (параметр решетки или гранул, расстояние между атомами и т. п.), а ξ_1 и ξ_2 – объемные доли локальной и нелокальной фаз, соответственно, такие что $\xi_1 + \xi_2 = 1$ и $\xi_1 \xi_2 \geq 0$. Если $\xi_1 = 0$, то (10) принимает форму, соответствующую чисто нелокальной модели Эрингена, а при $\xi_1 = 1$ формула (10) вырождается в (9).

Уравнения движения. Граничные условия. Подстановка (8), (10) в (1) приводит к системе N интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} EI \left(\xi_1 \frac{\partial^4 W_1}{\partial x^4} + \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^l K(|x - \hat{x}|, \kappa) \frac{\partial^2 W_1}{\partial \hat{x}^2} d\hat{x} \right) - c_{vdW}^*(W_2 - W_1) + \rho S \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} = 0, \\ EI \left(\xi_1 \frac{\partial^4 W_n}{\partial x^4} + \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^l K(|x - \hat{x}|, \kappa) \frac{\partial^2 W_n}{\partial \hat{x}^2} d\hat{x} \right) - \\ - c_{vdW}^*(W_{n+1} - 2W_n + W_{n-1}) + \rho S \frac{\partial^2 W_n}{\partial t^2} = 0, \dots, n = 2, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (11)$$

$$EI \left(\xi_1 \frac{\partial^4 W_N}{\partial x^4} + \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^l K(|x - \hat{x}|, \kappa) \frac{\partial^2 W_N}{\partial \hat{x}^2} d\hat{x} \right) + c_{vdW}^*(W_{N-1} - W_N) + \rho S \frac{\partial^2 W_N}{\partial t^2} = 0.$$

Уравнения (11) следует дополнить граничными условиями. На нижнем крае каждой балки рассмотрим условия жесткого защемления:

$$W_n = \frac{\partial W_n}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (12)$$

На верхнем крае рассмотрим один из следующих вариантов:

а) жесткое защемление

$$W_n = \frac{\partial W_n}{\partial x} = 0 \text{ при } x = l; \quad (13)$$

б) шарнирное опирание

$$W_n = M_n = 0 \text{ при } x = l; \quad (14)$$

в) свободный край

$$M_n = Q_n = 0 \text{ при } x = l, \quad (15)$$

где $Q_n = \frac{\partial M_n}{\partial x}$ – перерезывающая сила. Заметим, что в силу принятия нелокального закона физического состояния Эрингена, изгибающий момент и перерезывающая сила на краях носят нелокальный характер и зависят от перемещений точек в окрестности края.

Система уравнений (11) с граничными условиями (12, 13) или (12, 14) может быть использована для моделирования динамики большого массива нанотрубок, запечатанных между двумя жесткими пластинами, а граничная задача (11, 15) – для исследования колебаний «леса» нанотрубок, свободно стоящих на жесткой подложке.

Сведение задачи к эквивалентной дифференциальной форме. Система интегро-дифференциальных уравнений (11) достаточно сложна для анализа. Однако в случае принятия ядра Гельмгольца [17–19], которое наиболее часто используется для исследования динамики *одномерных* наноразмерных объектов (нитей, стержней и балок), уравнения (12) могут быть сведены к эквивалентной системе дифференциальных уравнений. В дальнейшем в уравнениях (11) примем

$$K(|x - \hat{x}|, \kappa) = \frac{1}{2\kappa} \exp\left(-\frac{|x - \hat{x}|}{\kappa}\right). \quad (16)$$

Заметим, что для данного ядра справедливы следующие преобразования:

$$\frac{d}{ds} \int_0^1 e^{-\frac{|s-\hat{s}|}{\varepsilon}} y(\hat{s}) d\hat{s} = \frac{1}{\varepsilon} \left[e^{\frac{s}{\varepsilon}} \int_s^1 e^{-\frac{\hat{s}}{\varepsilon}} y(\hat{s}) d\hat{s} - e^{-\frac{s}{\varepsilon}} \int_0^s e^{\frac{\hat{s}}{\varepsilon}} y(\hat{s}) d\hat{s} \right], \quad (17)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \int_0^1 e^{-\frac{|s-\hat{s}|}{\varepsilon}} y(\hat{s}) d\hat{s} = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 e^{-\frac{|s-\hat{s}|}{\varepsilon}} y(\hat{s}) d\hat{s} - \frac{2}{\varepsilon} y(s). \quad (18)$$

Имея в виду исследовать свободные колебания системы, перемещения нанобалок представим в виде $W_n = w_n(s) \exp(i \omega t)$, где $s = x/l$ – безразмерная осевая координата, i – мнимая единица, а ω – собственная частота колебаний. Введем также безразмерные параметры

$$\varepsilon = \frac{\kappa}{l}, \quad \lambda^4 = \frac{\rho S l^4 \omega^2}{EI}, \quad c = \frac{l^4 c_{vdW}}{EI}, \quad (19)$$

где $1 \gg \varepsilon$ – малый параметр.

Решения системы (11) будем искать в классе функций [16, 19] $w_n(s) \in C^6[0, 1]$. Дифференцируя уравнения (11) дважды по s и принимая во внимание тождество (18), приходим к системе N дифференциальных уравнений 6-го порядка:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\varepsilon\xi} \frac{d^4 w_1}{ds^4} - \mathbf{J}_\varepsilon [c(w_2 - w_1) + \lambda^4 w_1] &= 0, \\ \mathbf{I}_{\varepsilon\xi} \frac{d^4 w_n}{ds^4} - \mathbf{J}_\varepsilon [c(w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}) + \lambda^4 w_n] &= 0, \quad n = 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mathbf{I}_{\varepsilon\xi} \frac{d^4 w_N}{ds^4} - \mathbf{J}_\varepsilon [c(w_N - w_{N-1}) + \lambda^4 w_N] = 0,$$

где $\xi = \xi_1$, а $\mathbf{I}_{\varepsilon\xi}$ и \mathbf{J}_ε – дифференциальные операторы второго порядка, определяемые как

$$\mathbf{I}_{\varepsilon\xi} = \varepsilon^2 \xi \frac{d^2}{ds^2} - 1, \quad \mathbf{J}_\varepsilon = \varepsilon^2 \frac{d^2}{ds^2} - 1. \quad (21)$$

Граничные условия в случае, когда верхние края свободны или шарнирно оперты, также могут быть переписаны в дифференциальной форме. Для этого обратимся к исходным интегро-дифференциальным уравнениям (11). Используя свойство (18) и выражая из уравнений (11) интегральные компоненты, условия $M_n(1) = 0$ и $Q_n(1) = 0$ можно переписать в чисто дифференциальной форме [16]:

$$\begin{aligned} M_n(1) = 0 &\Rightarrow w_n''(1) + \varepsilon^2 K_n = 0, \\ Q_n(1) = 0 &\Rightarrow \varepsilon \xi w_n'''(1) - \Gamma_n = 0, \quad n = 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= -\xi w_1^{IV}(1) + \lambda^4 w_1(1) + c[w_2(1) - w_1(1)], \\ K_n &= -\xi w_n^{IV}(1) + \lambda^4 w_n(1) + c[w_{n+1}(1) - 2w_n(1) + w_{n-1}(1)], \\ K_N &= -\xi w_N^{IV}(1) + \lambda^4 w_N(1) - c[w_N(1) - w_{N-1}(1)], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -\varepsilon^2 \xi w_1^{IV}(1) + (1 - \xi) w_1''(1) + \varepsilon^2 \{c[w_2(1) - w_1(1)] + \lambda^4 w_1(1)\}, \\ \Gamma_n &= -\varepsilon^2 \xi w_n^{IV}(1) + (1 - \xi) w_n''(1) + \varepsilon^2 \{c[w_{n+1}(1) - 2w_n(1) + w_{n-1}(1)] + \lambda^4 w_n(1)\}, \\ \Gamma_N &= -\varepsilon^2 \xi w_N^{IV}(1) + (1 - \xi) w_N''(1) + \varepsilon^2 \{c[w_N(1) - w_{N-1}(1)] + \lambda^4 w_N(1)\} \end{aligned}$$

при $n = 2, \dots, N-1$.

Ввиду повышения порядка дифференцирования в уравнениях (20), по сравнению с исходными уравнениями (11), общие решения уравнений (20) могут содержать посторонние частные решения, которые должны быть исключены. Для этого на систему дифференциальных уравнений (20) должны быть наложены дополнительные $2N$ граничных условий – по одному краевому условию на каждом крае для каждой балки. Эти условия могут быть получены из исходных интегро-дифференциальных уравнений (11). Интегрируя каждое из них по s и используя свойства ядра (17, 18), приходим к недостающим N краевым условиям на нижнем крае,

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 \xi w_1^V(0) - \varepsilon^2 \xi w_1^{IV}(0) - (1 - \xi)[\varepsilon w_1'''(0) - w_1''(0)] + \\
& + \varepsilon^2 \lambda^4 [w_1(0) - \varepsilon w_1'(0)] + c \varepsilon^2 \{w_2(0) - w_1(0) - \varepsilon [w_2'(0) - w_1'(0)]\} = 0, \\
& \varepsilon^3 \xi w_n^V(0) - \varepsilon^2 \xi w_n^{IV}(0) - (1 - \xi)[\varepsilon w_n'''(0) - w_n''(0)] + \varepsilon^2 \lambda^4 [w_n(0) - \varepsilon w_n'(0)] + \\
& + c \varepsilon^2 \{w_{n+1}(0) - 2w_n(0) + w_{n-1}(0) - \varepsilon [w_{n+1}'(0) - 2w_n'(0) + w_{n-1}'(0)]\} = 0, \\
& \varepsilon^3 \xi w_N^V(0) - \varepsilon^2 \xi w_N^{IV}(0) - (1 - \xi)[\varepsilon w_N'''(0) - w_N''(0)] + \\
& + \varepsilon^2 \lambda^4 [w_N(0) - \varepsilon w_N'(0)] - c \varepsilon^2 \{w_N(0) - w_{N-1}(0) - \varepsilon [w_N'(0) - w_{N-1}'(0)]\} = 0,
\end{aligned} \tag{24}$$

и N условиям на верхнем крае,

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 \xi w_1^V(1) + \varepsilon^2 \xi w_1^{IV}(1) - (1 - \xi)[\varepsilon w_1'''(1) + w_1''(0)] - \\
& - \varepsilon^2 \lambda^4 [w_1(1) + \varepsilon w_1'(1)] - c \varepsilon^2 \{w_2(1) - w_1(1) + \varepsilon [w_2'(1) - w_1'(1)]\} = 0, \\
& \varepsilon^3 \xi w_n^V(1) + \varepsilon^2 \xi w_n^{IV}(1) - (1 - \xi)[\varepsilon w_n'''(1) + w_n''(1)] - \varepsilon^2 \lambda^4 [w_n(1) + \varepsilon w_n'(1)] - \\
& - c \varepsilon^2 \{w_{n+1}(1) - 2w_n(1) + w_{n-1}(1) + \varepsilon [w_{n+1}'(1) - 2w_n'(1) + w_{n-1}'(1)]\} = 0, \\
& \varepsilon^3 \xi w_N^V(1) + \varepsilon^2 \xi w_N^{IV}(1) - (1 - \xi)[\varepsilon w_N'''(1) + w_N''(1)] - \\
& - \varepsilon^2 \lambda^4 [w_N(1) + \varepsilon w_N'(1)] + c \varepsilon^2 \{w_N(1) - w_{N-1}(1) + \varepsilon [w_N'(1) - w_{N-1}'(1)]\} = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Система (20), состоящая из N дифференциальных уравнений 6-го порядка, является сингулярно возмущенной, ибо содержит малый параметр при старшей производной. Непосредственное интегрирование данных уравнений с соответствующими краевыми условиями и определение собственных значений λ является непростой задачей и является предметом отдельного рассмотрения и дополнительных исследований. Заметим лишь что в частном случае для $N=1$ она была решена в [16] методом асимптотического интегрирования, при котором общее решение строилось в виде суперпозиции основного решения, описывающего напряженно-деформированное состояние внутри нанобалки, и интегралов краевого эффекта, учитывающих нелокальные эффекты вблизи краев наноконсоли.

Заключение. С использованием нелокальной двухфазной теории упругости Эрингена получена система из N интегро-дифференциальных уравнений, описывающая свободные плоскостные колебания семейства N параллельно ориентированных нанобалок с учетом ван-дер-ваальсовых сил взаимодействия. Показано, что в случае принятия в законе физического состояния ядра Гельмгольца, система интегро-дифференциальных уравнений может быть сведена к эквивалентной системе N дифференциальных уравнений 6-го порядка, а граничные условия для свободного или шарнирно-опертого краев могут быть также записаны в дифференциальной форме. Выведены дополнительные $2N$ граничных условия, гарантирующие исключение «побочных» решений. Полученная система дифференциальных уравнений может быть использована для исследования свободных колебаний «леса» вертикально-ориентированных нанотрубок на подложке, для анализа колебаний семейства параллельно ориентированных нанотрубок, запечатанных между двумя пластинками, а также для исследования колебаний нанопинцета в окрестности статического деформированного состояния с учетом ван-дер-ваальсовых сил взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kim, P. Nanotube nanotweezers / P. Kim, C. M. Lieber // Science. – 1999. –V. 286. – P. 2148–2150.
2. Bsoul, A., Piezoresistive pressure sensor using vertically aligned carbon-nanotube forests / A. Bsoul, M. S. Mohamed, K. Takahata // Electronic Letters. – 2011. – V. 47 (14). – P. 807–808.

3. A tunable carbon nanotube electromechanical oscillator / V. Sazonova [et al.] // *Nature*. – 2004. – V. 431. – P. 284–287.
4. Schneider, J. J. Vertically aligned carbon nanotubes as platform for biomimetically inspired mechanical sensing, bioactive surfaces, and electrical cell interfacing / J. J. Schneider // *Advanced Biosystems*. – 2017. – V. 1(11) – 1700101–13.
5. Eringen, A. C. Nonlocal polar elastic continua / A. C. Eringen // *Int. J. Eng. Sci.* – 1972. – V. 10. – P. 1–16.
6. Eringen, A. C. On nonlocal elasticity / A. C. Eringen, D. G. B. Edelen // *Int. J. Eng. Sci.* – 1972. – V. 10. – P. 233–248.
7. Eringen, A. C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves / A. C. Eringen // *J. Appl. Phys.* – 1983. – V. 54. – P. 4703–4710.
8. Eringen, A. C. *Nonlocal Continuum Field Theories* / A. C. Eringen. – New York: Springer, 2002.
9. Jones, J. E. On the Determination of Molecular Fields. I. From the Variation of the Viscosity of a Gas with Temperature / J. E. Jones // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 1924. – V. 106(738). – P. 441–462.
10. Kiani, K. In- and out-of-plane dynamic flexural behaviors of two-dimensional ensembles of vertically aligned single-walled carbon nanotubes / K. Kiani // *Physica B*. – 2014. – V. 449. – P. 164–180.
11. Farrokhabadi A. Modeling the static response and pull-in instability of CNT nanotweezers under the Coulomb and van der Waals attractions / A. Farrokhabadi, R. Rach, M. Abadyan // *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*. – 2013. – V. 53. – P. 137–145.
12. Mikhasev, G. I. Pull-in instability analysis of a nanocantilever based on the two-phase nonlocal theory of elasticity / G. I. Mikhasev, E. Radi, V. Misnik // *Journal of Applied and Computational Mechanics*. – 2022. – V. 8(4). – P. 1456–1466.
13. Electrostatic pull-in instability for tweezer architectures / G. Bianchi [et al.] // *Mecanica*. – 2022. – V. 57. – P. 1767–1781.
14. Radi, E. Bounds to the pull-in voltage of a MEMS/NEMS beam with surface elasticity / E. Radi, G. Bianchi, A. Nobili // *Applied Mathematical Modelling*. – 2021. – V. 91. – P. 1211–1226.
15. Fernández-Sáez, J. Vibrations of Bernoulli-Euler beams using the two-phase nonlocal elasticity theory / J. Fernández-Sáez, R. Zaera // *International Journal of Engineering Sciences*. – 2017. – V. 119. – P. 232–248.
16. Mikhasev, G. On the solution of the purely nonlocal theory of beam elasticity as a limiting case of the two-phase theory / G. Mikhasev, A. Nobili // *International Journal of Solids and Structures*. – 2020. – V. 190. – P. 47–57.
17. Challamel, N. The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved / N. Challamel, C. M. Wang // *Nanotechnology*. – 2008. – V. 19. – P. 345703–345710.
18. Benvenuti, E. One-dimensional nonlocal and gradient elasticity: Closed-form solution and size effect / E. Benvenuti, A. Simone // *Mechanics Research Communications*. – 2013. – V. 48. – P. 46–51.
19. Mikhasev, G. Free high-frequency vibrations of nonlocally elastic beam with varying cross-section area / G. Mikhasev // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. – 2021. – V. 33. – P. 1299–1312.

Поступила: 15.05.2023

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

к.т.н. Хвисевич В. М., к.ф.-м.н. Веремейчик А. И., Мазырка М. В.

Брестский государственный технический университет, Брест

Введение. Развитие современной техники предъявляет повышенные требования к прочностным характеристикам конструктивных элементов механизмов, машин и сооружений, их материалоемкости и геометрическим параметрам, что требует создания новых методов расчета, наиболее полно и адекватно учитывающих свойства реальных материалов. Современные конструкционные материалы применяются в широком диапазоне механических и температурных воздействий. Для описания поведения деформируемых твердых тел при указанных воздействиях во многих случаях необходимо построение сложных моделей задач механики деформируемого твердого тела. Решение термоупругих задач для сред с усложненными свойствами является одним из наиболее актуальных направлений современной механики. Поведение некоторых материалов, обладающих анизотропией свойств, существенно зависит от действующих на них нагрузок, поэтому необходимо построение на основе общих соотношений термомеханических моделей данных материалов. В настоящее время наметился существенный разрыв между количеством общих подходов к решению такого рода задач и доведением их до конкретных моделей и расчетов.

Хотя число работ, в которых рассматривается решение некоторых осесимметричных задач для тел вращения, обладающих цилиндрической анизотропией, велико, например, [1–9], недостаточно внимания уделяется решению термоупругих задач для анизотропных сред методом граничных интегральных уравнений. Целью работы является разработка методики решения краевой задачи термоупругости цилиндрически анизотропной среды, используя теорию потенциала.

1. Постановка задачи. Математическая модель задачи в перемещениях. Для цилиндрически анизотропной среды справедливы следующие группы разрешающих уравнений:

– геометрические соотношения Коши:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\rho z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right); \quad (1)$$

– физические уравнения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\rho\rho} &= \frac{\sigma_{\rho\rho}}{E_\rho} - \frac{\nu_{\vartheta\rho}}{E_\vartheta} \sigma_{\vartheta\vartheta} - \frac{\nu_{z\rho}}{E_z} \sigma_{zz} + \alpha_\rho T, & \varepsilon_{\vartheta\vartheta} &= -\frac{\nu_{\rho\vartheta}}{E_\rho} \sigma_{\rho\rho} + \frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{E_\vartheta} - \frac{\nu_{z\vartheta}}{E_z} \sigma_{zz} + \alpha_\vartheta T, \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu_{\rho z}}{E_\rho} \sigma_{\rho\rho} - \frac{\nu_{\vartheta z}}{E_\vartheta} \sigma_{\vartheta\vartheta} + \frac{\sigma_{zz}}{E_z} + \alpha_z T, & \varepsilon_{\rho z} &= \frac{\sigma_{\rho z}}{2G_{\rho z}}; \end{aligned} \quad (2)$$

где ν_{ij} , E_i – упругие постоянные, α_i – температурные коэффициенты линейного расширения цилиндрически анизотропной термоупругой среды.

Из (2) получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho} &= C_{11}\varepsilon_{\rho\rho} + C_{12}\varepsilon_{99} + C_{13}\varepsilon_{zz} - c_\rho T, & \sigma_{99} &= C_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + C_{22}\varepsilon_{99} + C_{23}\varepsilon_{zz} - c_9 T, \\ \sigma_{zz} &= C_{13}\varepsilon_{\rho\rho} + C_{23}\varepsilon_{99} + C_{33}\varepsilon_{zz} - c_z T, & \sigma_{\rho z} &= 2C_{44}\varepsilon_{\rho z},\end{aligned}\quad (3)$$

где коэффициенты C_i определяются по формулам:

$$c_\rho = C_{11}\alpha_\rho + C_{12}\alpha_9 + C_{13}\alpha_z, \quad c_9 = C_{12}\alpha_\rho + C_{22}\alpha_9 + C_{23}\alpha_z, \quad c_z = C_{13}\alpha_\rho + C_{23}\alpha_9 + C_{33}\alpha_z. \quad (4)$$

Уравнения равновесия для бесконечно малого объема сплошной среды для осесимметричных задач представим в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\rho} + \frac{\partial\sigma_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{99}}{\rho} + q_\rho = 0, \\ \frac{\partial\sigma_{\rho z}}{\partial\rho} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho z}}{\rho} + q_z = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Система уравнений (1, 3, 5) содержит десять неизвестных искомым функций.

Сформулируем граничные условия для стационарной термоупругой задачи с краевыми условиями силового типа. Температура T в приведенной системе дифференциальных уравнений рассматривается как известная функция, определенная по результатам решения краевой задачи теплопроводности. Поэтому под T в уравнениях (3) можно понимать для задачи Дирихле потенциал двойного слоя $T(x) = \oint_S \chi(y) \frac{d}{dn_y} \frac{1}{r} dS_y$

и для задачи Неймана потенциал простого слоя $T(x) = \oint_S \chi(y) \frac{1}{r} dS_y$, где плотность потенциала определяется по результатам решения соответствующих интегральных уравнений теплопроводности [10, 11].

Граничные условия представим в виде:

$$\begin{cases} \sigma_{\rho\rho} n_\rho + \sigma_{\rho z} n_z = f_\rho, \\ \sigma_{\rho z} n_\rho + \sigma_{zz} n_z = f_z. \end{cases} \quad (6)$$

Уравнения (1, 3, 5) и граничные условия (6) дают формулировку задачи термоупругости. Редуцируем систему уравнений (1, 3, 5) к системе 2-х уравнений относительно неизвестных перемещений u, w :

$$\begin{cases} C_{11} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{u}{\rho} \right) + C_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial\rho \partial z} + \frac{C_{13} - C_{23}}{\rho} \frac{\partial w}{\partial\rho} + (C_{11} - C_{22}) \frac{u}{\rho^2} + q_\rho = \\ = c_\rho \frac{\partial T}{\partial\rho} + \frac{c_\rho - c_9}{\rho} T, \\ C_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + C_{44} \left(\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial w}{\partial\rho} + (C_{13} + C_{44}) \left(\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{C_{13} - C_{23}}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} + q_z = c_z \frac{\partial T}{\partial z}. \end{cases} \quad (7)$$

Выразим граничные условия через перемещения:

$$\begin{cases} \left(C_{11} \frac{\partial u}{\partial \rho} + C_{12} \frac{u}{\rho} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z} - c_p T \right) n_p + C_{44} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) n_z = f_p, \\ C_{44} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) n_p + \left(C_{13} \frac{\partial u}{\partial \rho} + C_{23} \frac{u}{\rho} + C_{33} \frac{\partial w}{\partial z} - c_z T \right) n_z = f_z. \end{cases} \quad (8)$$

Краевая задача термоупругости (7), (8) может быть приведена к краевой задаче теории упругости, для чего достаточно ввести фиктивные, зависящие от температуры T объемные нагрузки, распределенные на граничной поверхности, которые представим в виде:

$$\begin{aligned} q_p^\Phi &= -c_p \frac{\partial T}{\partial \rho} - \frac{c_p}{\rho} T + \frac{c_9}{\rho} T + q_p, \\ q_z^\Phi &= -c_z \frac{\partial T}{\partial z} + q_z, \end{aligned} \quad (9)$$

а формулы для фиктивных нагрузок на поверхности:

$$f_p^\Phi = c_p T n_p + f_p, \quad f_z^\Phi = c_z T n_z + f_z. \quad (10)$$

Тогда тогда дифференциальные уравнения (7) можно представить в виде уравнений теории упругости:

$$\begin{cases} C_{11} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} \right) + C_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial z} + \frac{C_{13} - C_{23}}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + (C_{11} - C_{22}) \frac{u}{\rho^2} + q_p^\Phi = 0, \\ C_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + C_{44} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial w}{\partial \rho} + (C_{13} + C_{44}) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{C_{13} - C_{23}}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} + q_z^\Phi = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} \left(C_{11} \frac{\partial u}{\partial \rho} + C_{12} \frac{u}{\rho} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \right) n_p + C_{44} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) n_z = f_p^\Phi, \\ C_{44} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) n_p + \left(C_{13} \frac{\partial u}{\partial \rho} + C_{23} \frac{u}{\rho} + C_{33} \frac{\partial w}{\partial z} \right) n_z = f_z^\Phi. \end{cases} \quad (12)$$

Напряжения в краевой задаче (11, 12) определяются по формулам закона Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{pp}^\Phi &= C_{11} \varepsilon_{pp} + C_{12} \varepsilon_{99} + C_{13} \varepsilon_{zz}, & \sigma_{99}^\Phi &= C_{12} \varepsilon_{pp} + C_{22} \varepsilon_{99} + C_{23} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{zz}^\Phi &= C_{13} \varepsilon_{pp} + C_{23} \varepsilon_{99} + C_{33} \varepsilon_{zz}, & \sigma_{pz} &= 2C_{44} \varepsilon_{pz}. \end{aligned} \quad (13)$$

Очевидно, что напряжения (13) не будут равны напряжениям (3) термоупругой задачи, хотя перемещения u, w в обоих случаях будут одинаковыми, определяемыми из (7) при граничных условиях (8).

2. Решение задачи в напряжениях. Система уравнений (11) при обозначениях (13) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^{\Phi}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}^{\Phi}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho\rho}^{\Phi} - \sigma_{99}^{\Phi}}{\rho} + q_{\rho}^{\Phi} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\rho z}^{\Phi}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{\Phi}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho z}^{\Phi}}{\rho} + q_z^{\Phi} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Граничные условия (12) примут вид:

$$\begin{cases} \sigma_{\rho\rho}^{\Phi} n_{\rho} + \sigma_{\rho z}^{\Phi} n_z = f_{\rho}^{\Phi}, \\ \sigma_{\rho z}^{\Phi} n_{\rho} + \sigma_{zz}^{\Phi} n_z = f_z^{\Phi}. \end{cases} \quad (15)$$

Уравнения (14) решаются совместно с (13) и (1) с учетом граничных условий (15). Исключим температуру из дифференциальных уравнений (14) и граничных условий (15). Для этого рассмотрим частное решение σ_{ij}^T :

$$\sigma_{\rho\rho}^T = c_{\rho} T, \sigma_{99}^T = c_9 T, \sigma_{zz}^T = c_z T, \sigma_{\rho z}^T \equiv 0. \quad (16)$$

Частное решение удовлетворяет дифференциальным уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^T}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}^T}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho\rho}^T - \sigma_{99}^T}{\rho} = c_{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} + c_{\rho} \frac{T}{\rho} - c_9 \frac{T}{\rho}, \\ \frac{\partial \sigma_{\rho z}^T}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{zz}^T}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho z}^T}{\rho} = c_z \frac{\partial T}{\partial z}. \end{cases} \quad (17)$$

и граничным условиям:

$$\begin{cases} \sigma_{\rho\rho}^T n_{\rho} + \sigma_{\rho z}^T n_z = c_{\rho} T n_{\rho}, \\ \sigma_{\rho z}^T n_{\rho} + \sigma_{zz}^T n_z = c_z T n_z. \end{cases} \quad (18)$$

Представим решение σ_{ij}^y фиктивной упругой задачи (14), (15) в виде суммы частного решения σ_{ij}^T и решения σ_{ij}^0 некоторой упругой задачи:

$$\sigma_{\rho\rho}^{\Phi} = \sigma_{\rho\rho}^0 + \sigma_{\rho\rho}^T, \sigma_{99}^{\Phi} = \sigma_{99}^0 + \sigma_{99}^T, \sigma_{zz}^{\Phi} = \sigma_{zz}^0 + \sigma_{zz}^T, \sigma_{\rho z}^{\Phi} = \sigma_{\rho z}^0 + \sigma_{\rho z}^T. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (14), получим для σ_{ij}^0 с учетом (17):

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^0}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}^0}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho\rho}^0 - \sigma_{99}^0}{\rho} + q_{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\rho z}^0}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{zz}^0}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho z}^0}{\rho} + q_z^0 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Поставив (19) в (15), получим:

$$\begin{cases} \sigma_{\rho\rho}^0 n_\rho + \sigma_{\rho z}^0 n_z = f_\rho, \\ \sigma_{\rho z}^0 n_\rho + \sigma_{zz}^0 n_z = f_z. \end{cases} \quad (21)$$

Уравнения (20) при условиях (21) представляют задачу теории упругости при задании механических нагрузок q_ρ, q_z, f_ρ, f_z . Представим решение σ_{ij}^0 потенциалами:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^0(x) &= \oint_L [t_\rho(y) \sigma_{\rho\rho}^{\rho*}(x, y) + t_z(y) \sigma_{\rho\rho}^{z*}(x, y)] dl, \\ \sigma_{\rho z}^0(x) &= \oint_L [t_\rho(y) \sigma_{\rho z}^{\rho*}(x, y) + t_z(y) \sigma_{\rho z}^{z*}(x, y)] dl, \\ \sigma_{zz}^0(x) &= \oint_L [t_\rho(y) \sigma_{zz}^{\rho*}(x, y) + t_z(y) \sigma_{zz}^{z*}(x, y)] dl, \\ \sigma_{\rho z}^0(x) &= \oint_L [t_\rho(y) \sigma_{\rho z}^{\rho*}(x, y) + t_z(y) \sigma_{\rho z}^{z*}(x, y)] dl. \end{aligned} \quad (22)$$

Плотности потенциалов $t_\rho(y)$ и $t_z(y)$ определяются из граничных условий, приводящихся к интегральным уравнениям.

3. Построение граничных интегральных уравнений. Рассмотрим прямую формулировку решения задачи термоупругости, основанную на использовании интегрального тождества типа Грина для представления общего решения задачи, вытекающего из теоремы Остроградского-Гаусса. Обозначим через P_i и q_i , $i = \rho, z$ поверхностные и объемные нагрузки первого (основного) напряженно-деформированного состояния. Эти нагрузки вызывают появление перемещений u_i , деформаций ε_{ij} , напряжений σ_{ij} в области V , занимаемой телом вращения. Наряду с основным, будем рассматривать вспомогательное напряженно-деформированное состояние той же области, но с другими причинами P_i^* , q_i^* и другими неизвестными u_i^* , деформаций ε_{ij}^* , напряжений σ_{ij}^* . Выразив работы через нагрузки и внутренние напряжения и деформации, перейдем к следующему тождеству Бетти:

$$\int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* - \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}) dV = \oint_L (P_i u_i^* - P_i^* u_i) dl + \int_V (q_i u_i^* - q_i^* u_i) dV. \quad (23)$$

Применим (23) к рассматриваемой сплошной анизотропной термоупругой среде, учитывая осевую симметрию подинтегральных функций. Внесем под интегралы в левой части (23) вместо σ_{ij} и σ_{ij}^* напряжения через деформации (3). После сокращения подобных слагаемых получим:

$$\int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* - \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}) dV = \int_V (T^* \theta - \theta^* T) dV, \quad (24)$$

где $\theta = C_\rho \varepsilon_{\rho\rho} + C_\rho \varepsilon_{\rho\rho} + C_z \varepsilon_{zz}$, $\theta^* = C_\rho \varepsilon_{\rho\rho}^* + C_\rho \varepsilon_{\rho\rho}^* + C_z \varepsilon_{zz}^*$.

Используя фундаментальные решения осесимметричной задачи теории упругости u_i^{k*} и σ_{ij}^{k*} в качестве элементов вспомогательного напряженно-деформированного со-

стояния, можно на основе (23) получить интегральные представления $u_i, i = \rho, z$ задач стационарной термоупругости.

Внесем в (23, 24) вместо вспомогательных элементов фундаментальное решение, соответствующее единичной силе, направленной вдоль оси ρ , при этом учтем, что $T^* = 0$. Тогда при $q_\rho^* = \delta(y - x), u_\rho = u, u_z = w, u_\rho^{\rho*} = u^{\rho*}, u_z^{\rho*} = w^{\rho*}$:

$$u = \oint_L (P_\rho u^{\rho*} + P_z w^{\rho*} - P_\rho^{\rho*} u - P_z^{\rho*} w) dl_y + \int_V T \theta_\rho^* dV_y, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_\rho^* &= C_\rho \varepsilon_{\rho\rho}^{\rho*} + C_9 \varepsilon_{99}^{\rho*} + C_z \varepsilon_{zz}^{\rho*}, \\ P_\rho^{\rho*}(x, y) &= \sigma_{\rho\rho}^{\rho*} n_\rho(y) + \sigma_{\rho z}^{\rho*} n_z(y); \quad P_z^{\rho*}(x, y) = \sigma_{\rho z}^{\rho*} n_\rho(y) + \sigma_{zz}^{\rho*} n_z(y); \end{aligned} \quad (26)$$

$$P_\rho = f_\rho = 0, \quad P_z = f_z = 0. \quad (27)$$

В (27) нагрузки приняты равными нулю, чтобы получить решение краевой задачи при чисто температурном воздействии, т. е. при отсутствии механических нагрузок. В противном случае ядра (25) будут содержать также слагаемый потенциал простого слоя, ядра $u^{\rho*}$ и $w^{\rho*}$ которого неизвестны. Следовательно, (25) принимает вид:

$$u(x) = -\oint_L (P_\rho^{\rho*}(x, y)u(y) - P_z^{\rho*}(x, y)w(y)) dl_y + \int_V T \theta_\rho^* dV_y. \quad (28)$$

После подстановки второго фундаментального решения u^{z*}, w^{z*} , соответствующего силе, направленной по оси z , получим аналогичное представление перемещения w :

$$w(x) = \oint_L (P_\rho^{z*}(x, y)u(y) - P_z^{z*}(x, y)w(y)) dl_y + \int_V T \theta_z^* dV_y, \quad (29)$$

где:

$$\begin{aligned} P_\rho^{z*}(x, y) &= \sigma_{\rho\rho}^{z*} n_\rho(y) + \sigma_{\rho z}^{z*} n_z(y); \quad P_z^{z*}(x, y) = \sigma_{\rho z}^{z*} n_\rho(y) + \sigma_{zz}^{z*} n_z(y), \\ \theta_z^* &= C_\rho \varepsilon_{\rho\rho}^{z*} + C_9 \varepsilon_{99}^{z*} + C_z \varepsilon_{zz}^{z*}. \end{aligned} \quad (30)$$

В (28, 29) неизвестны плотности потенциала двойного слоя $u(y), w(y)$ – перемещения в точках y границы L . Эти перемещения определяются из решения граничного интегрального уравнения.

Для составления граничных интегральных уравнений установим сначала предельные значения потенциалов двойного слоя при стремлении точки x к y , принадлежащей границе L области. Выражения потенциалов простого слоя:

$$\begin{aligned} W_\rho(x) &= \oint_L [P_z^{\rho*}(x, y)w(y) - P_\rho^{\rho*}(x, y)u(y)] dl_y, \\ W_z(x) &= \oint_L [P_z^{z*}(x, y)w(y) - P_\rho^{z*}(x, y)u(y)] dl_y. \end{aligned} \quad (31)$$

Если внести в (31) выражения (26, 30), то оба потенциала можно представить в виде:

$$W_k(x) = \oint_L \sigma_{ij}^{k*}(x, y) n_j(y) u_i(y) dl_y. \quad (32)$$

Предельное значение для компонентов суммы (32) определяем по формуле:

$$W_k(x_0) = \lim_{x \rightarrow L} W_k(x) = n_j \sigma_{ij}(x_0), \quad k, i, j = \rho, z. \quad (33)$$

где $\sigma_{ij}(x_0)$ – значения напряжений в точках, принадлежащих границе области.

Предельные значения (28, 29) дают систему двух граничных интегральных уравнений относительно плотностей u, w потенциалов:

$$\begin{cases} u(x_0) = W_\rho(x_0) + \int_V T\theta_\rho^*(x_0, y) dV_y, \\ w(x_0) = W_z(x_0) + \int_V T\theta_z^*(x_0, y) dV_y \end{cases} \quad (34)$$

Решение системы (34) позволит определить перемещения $u(x)$ и $w(x)$.

Заключение. Рассмотрена постановка в перемещениях и напряжениях и особенности решения осесимметричной краевой задачи термоупругости с учетом анизотропии методом граничных интегральных уравнений. Использована прямая формулировка общего решения дифференциального уравнения в потенциалах. Получены интегральные уравнения термоупругости для цилиндрически анизотропной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванычев, Д. А. Решение задач термоупругости для анизотропных тел вращения / Д. А. Иванычев // Труды МАИ. – 2019. – № 106. – С. 1–19.
2. Грин, А. Е. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. Е. Грин, Дж. Адкинс. – М. : Мир, 1965. – 456 с.
3. Христич, Д. В. Термомеханические задачи нелинейного деформирования анизотропных цилиндрических тел: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.04 / Д. В. Христич / Тул. гос. ун-т. – Тула, 2006. – 20 с.
4. Finite element method for thermomechanical response of near-incompressible elastomers / D. W. Nicholson, B. Lin. // Acta Mech. – 1997. – № 124. – P. 181–198.
5. Stationary thermoelastic analysis of thick cross-ply laminated cylinders and cylindrical panels / K. P. Soldatos, J. Q. Ye // Acta mech. – 1995. – 110. – № 1–4. – P. 1–18.
6. Boundary Element and Sensitivity Analysis of Anisotropic Thermoelastic Metal and Alloy Discs with Holes / Mohamed Abdelsabour Fahmy, Mohammed Owaidh Alsulami // Materials (Basel). 2022 Feb 28 – 15(5): – P. 1828. doi: 10.3390/ma15051828.

7. W. T. Ang & X. Wang A numerical method based on boundary integral equations and radial basis functions for plane anisotropic thermoelastostatic equations with general variable coefficients Applied Mathematics and Mechanics. – Vol. 41 – P. 551–566 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10483-020-2592-8>.

8. M. I. Azis and D. L. Clements, A boundary element method for anisotropic inhomogeneous elasticity // International Journal of Solids and Structures 38 (2001). – P. 5747–5764.

9. Боган, Ю. А. Задача Дирихле в двумерной стационарной анизотропной термоупругости / Ю. А. Боган // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 5(21) (2010), – P. 64–71.

10. Прусов, И. А. Некоторые задачи термоупругости / И. А. Прусов. – Минск : Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1972. – 198 с.

11. Формалев В. Ф. Теплопроводность анизотропных тел. Часть 1. Аналитические методы решения задач / В. Ф. Формалев. – М. : Изд-во: Физматлит, 2014. – 349 с.

12. Веремейчик, А. И. Интегральные уравнения нестационарных осесимметричных краевых задач теплопроводности при различных граничных условиях / А. И. Веремейчик, В. М. Хвисевич // Теоретическая и прикладная механика. – 2016. – Вып. 31. – С. 234–237.

Поступила: 24.04.2023

УСКОРЕНИЕ ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ РАСЧЕТОВ В МЕХАНИКЕ С ПОМОЩЬЮ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ГРАФИЧЕСКОМ ПРОЦЕССОРЕ

¹Щербаков С. С., ²Полещук М. М.

¹Национальная академия наук Беларуси, Минск

²Белорусский государственный университет, Минск

Рассматривается реализация непрямого метода граничных элементов с использованием трех нелинейных функций формы для вычисления распределения потенциала внутри замкнутого контура при действии потенциала, распределенного на поверхности. Ускорение соответствующих вычислений было реализовано на графическом акселераторе с помощью технологии NVidia CUDA. Получены зависимости ускорения распараллеленных расчетов в зависимости от количества граничных элементов и расчетных узлов.

Представлено сравнение применения колокационного и Галеркинских подходов, а также анализ результатов распараллеливания данных алгоритмов.

Показано значительное до 52 раз ускорение расчета распределения потенциала при сохранении его точности. Достигнуто ускорение до 22 раз при расчете матрицы взаимовлияний граничных элементов.

Введение. Метод граничных элементов (МГЭ) успешно применяется при моделировании различных задач из областей гидро- и электродинамики, а также механики деформируемого твердого тела. В отличие от методов конечных разностей и конечных элементов МГЭ позволяет дискретизировать вместо всей расчетной области только ее поверхность. Разнообразие таких задач приводит к необходимости появления различных модификаций МГЭ. Наиболее частой модификацией является изменение функций формы [1,2]. Однако помимо классического колокационного также применяется менее распространенный подход на основе метода Галеркина или интегрального метода [3]. Далее будет рассмотрено применение данного метода модификации МГЭ с использованием трех нелинейных функций формы при моделировании распределения потенциала в замкнутой двумерной области, а затем рассмотрим распараллеливание расчетов, основанное на применении технологии CUDA [4].

Постановка задачи. Рассмотрим задачу, представленную в статье [1; 5; 6], в которой требуется найти распределение потенциала в замкнутой прямоугольной области $A = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 5, -8 \leq y \leq 0\}$ (рисунок 1), на одной из сторон которой $-b \leq x \leq b, y = 0, b = 2,5$ задано граничное условие

$$p^*(x) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}. \quad (1)$$

Для применения МГЭ граница исследуемой области была разбита на N граничных элементов (ГЭ), полудлина которых равна h , таким образом, что все граничные элементы должны оставаться прямыми отрезками. Центры ГЭ расположены в точках $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$. Следует отметить, что источниками влияния являются не граничные элементы, а узлы элементов $\mathbf{x}_i - \mathbf{h}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i + \mathbf{h}$, где $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$.

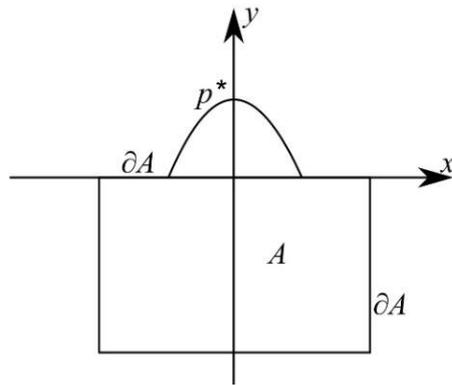


Рис. 1. Схема задачи и граничное условие

При расчетах использовались три функции формы $f_i^I(\mathbf{x})$, $f_i^{II}(\mathbf{x})$, $f_i^{III}(\mathbf{x})$, которые распределялись на граничных элементах как показано на рисунке 2.

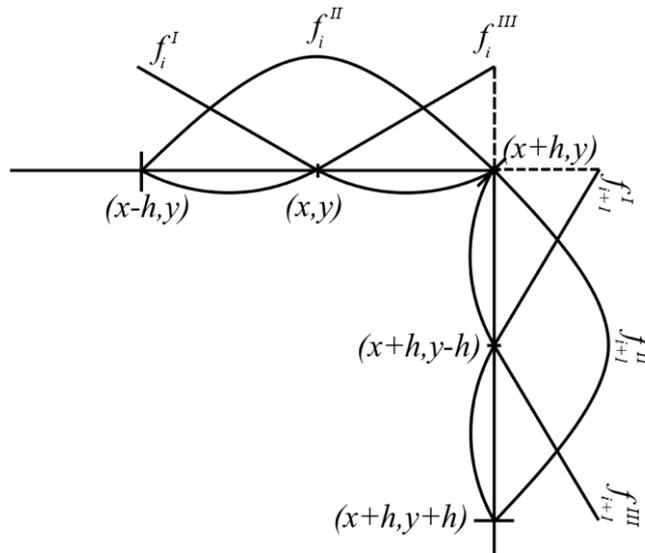


Рис. 2. Распределение нелинейных функций формы по ГЭ

Сравнение результатов реализации методов колокационного и Галеркина. Ввиду того, что задача не имеет аналитического решения внутри области, для анализа полученных результатов можно рассмотреть решение на границе, сравнив его с заданным граничным условием. На рисунке 3 представлены распределения потенциалов на верхней части границы, которые были получены, используя найденные фиктивные усилия, или же, коэффициенты функций формы.

Из рисунке 3 видно, что реализация метода Галеркина дает несколько более точное решение по сравнению с реализацией колокационного метода.

Рассмотрим сходимость вычислений и погрешность четырех вариантов реализации МГЭ с тремя функциями формы – негладкого и гладкого колокационного метода, а также негладкого и гладкого метода Галеркина. Относительная погрешность, рассчитывалась по следующей формуле:

$$e = \frac{IG(x_i) - p^*(x_i)}{p^*(x_i)}, \quad (2)$$

где x_i – точка границы с ненулевым граничным условием.

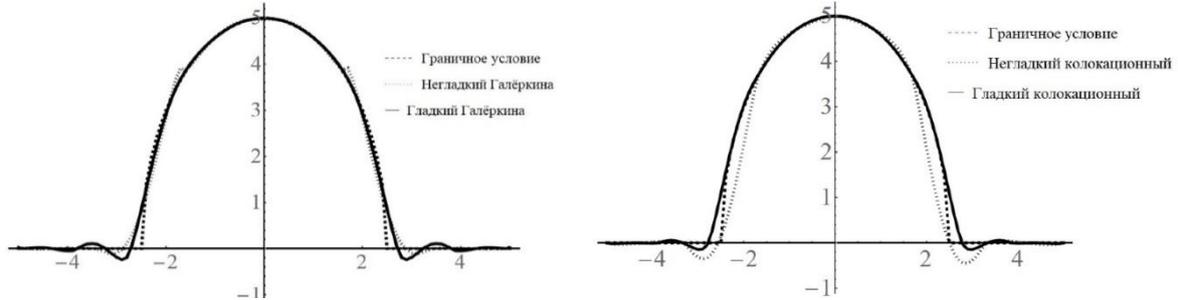


Рис. 3. Сравнение полученных и заданных граничных условий

Затем для каждой точки высчитывалась средняя погрешность реализации метода на поверхности.

На рисунке 4 приведены относительные погрешности данных методов, для разного количества граничных элементов. Данные зависимости можно использовать для оценки сходимости методов, так как по ним можно сделать оценку скорости приближения результатов расчетов к квазипостоянной относительной погрешности. Из рисунка 4 видна быстрая сходимость расчетов по негладкому методу Галеркина. Таким образом, даже для грубых дискретизаций можно достичь приемлемой точности решения.

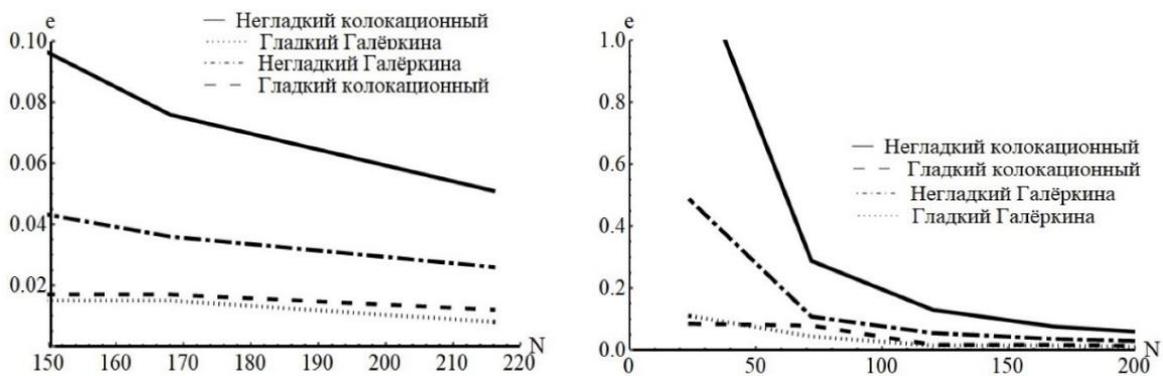


Рис. 4. Относительные погрешности методов

Также отметим, что гладкий колокационный и гладкий метод Галеркина даже при грубой гранично-элементной дискретизации поверхности имеют небольшую погрешность, но все же гладкий метод Галеркина оказывается немного точнее. Из этого делаем вывод, что условие гладкости (неразрывности) позволяет повысить точность вычислений. В связи с тем, что гладкий колокационный метод и гладкий метод Галеркина обладают наибольшей точностью среди всех представленных методов, в дальнейшем будем сравнивать только эти два метода.

Распараллеливание расчета матрицы взаимовлияний. Распараллеливание ко-локационного метода с помощью технологии NVidia CUDA было описано в работе [1; 6]. Основным этапом распараллеливания представленного метода является ускорение расчета матрицы взаимовлияния. Формирование данной системы – трудоемкий процесс, т. к. создается матрица, которая имеет размерность $N \times N$, где N – количество узлов на граничных элементах и $N = 2K + 1$, где K – количество граничных элементов. Распараллеливание данного процесса выполняется путем создания $N \times N$ потоков, каждый из которых вычисляет конкретный элемент матрицы, что заметно ускоряет формирование матрицы взаимовлияния.

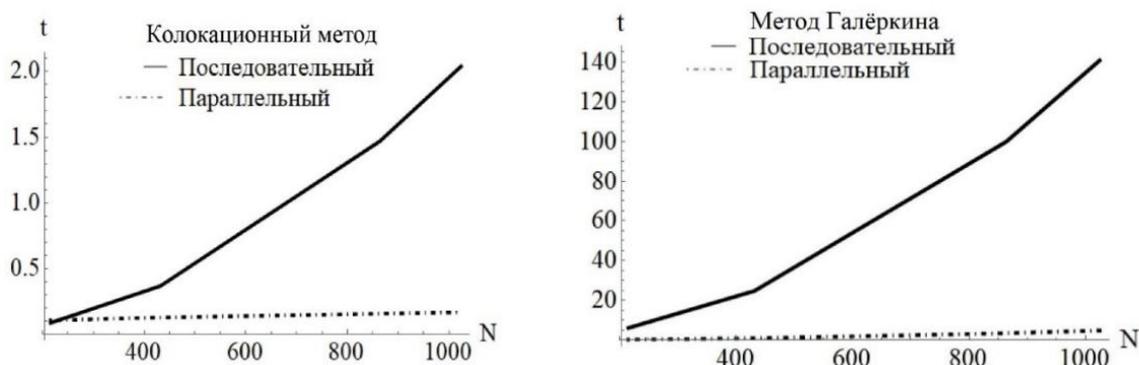


Рис. 5. Зависимости времени распараллеленных расчетов от количества коэффициентов для гладких Галеркина и колокационного методов

На рисунке 5 представлено по два графика зависимости времени расчета от количества коэффициентов для гладких колокационного метода и метода Галеркина. Можно заметить, что последовательная реализация алгоритма Галеркина значительно медленнее чем колокационного.

Поэтому сравнение распараллеленной реализации данных методов представляет особый интерес, что и представлено на рисунке 6. Отметим, что ускорение вычислений может быть значительно увеличено при распараллеливании на большем числе ядер графического акселератора. Из рисунка 6 видно, что скорость колокационного метода значительно выше. Однако стоит заметить, что гладкий метод Галеркина несколько точнее. На рисунке 7 представлены коэффициенты эффективного ускорения, описанных выше, алгоритмов, используя технологию NVidia CUDA. Как видно из рисунка 7, максимальный коэффициент ускорения практически одинаков.

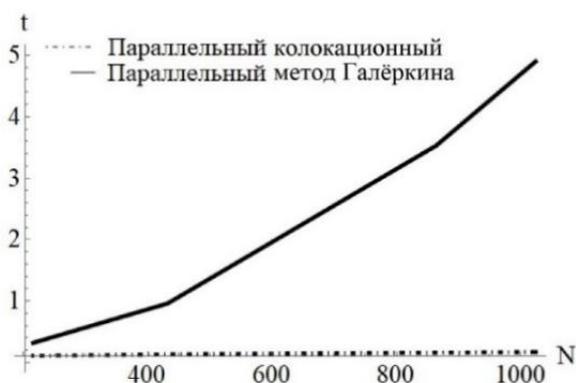


Рис. 6. Сравнение скорости вычислений распараллеленных гладкого метода Галеркина и колокационного метода

Ускорение при низкой дискретизации граничной области в разы выше для метода Галеркина. Поэтому учитывая, что при низкой дискретизации метод Галеркина точнее колокационного, можно сделать вывод, что распараллеливание более эффективно при реализации метода Галеркина.

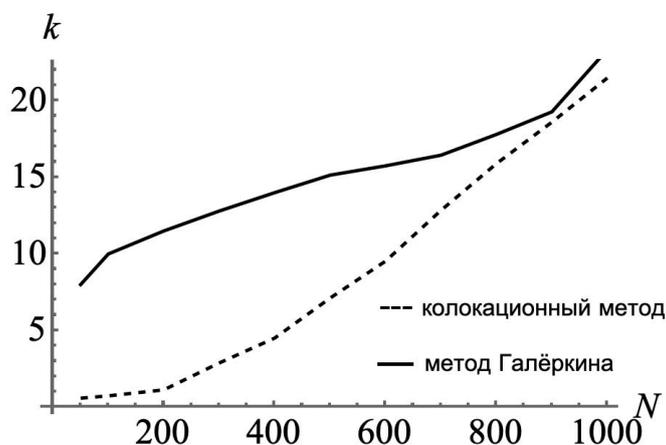


Рис. 7. Коэффициенты ускорения колокационного и Галеркина методов относительно их последовательных реализаций

Распараллеливание расчета распределения потенциала в расчетной области. Распределения полей потенциала были построены для разных дискретизаций расчетной области. Из рисунке 8 видно, что с увеличением количества расчетных узлов распределения потенциала становятся более гладкими, а при увеличении количества ГЭ это не так заметно. Однако, как уже было отмечено выше, при увеличении количества ГЭ повышается точность вычисления потенциала в точке.

Рассмотрим зависимости времени расчета потенциала при фиксированном количестве граничных элементов и расчетных узлов. Из анализа рисунков 9–11 можно сделать вывод, что время, требующееся для последовательного расчета, почти линейно зависит от дискретизации границы и расчетной области. При этом также растет, хотя и гораздо медленнее, время параллельных вычислений. Это связано с временными затратами на копирование расчетных данных из оперативной памяти в память графического процессора. В итоге ускорение вычислений достигает 52 раза (рисунок 11).

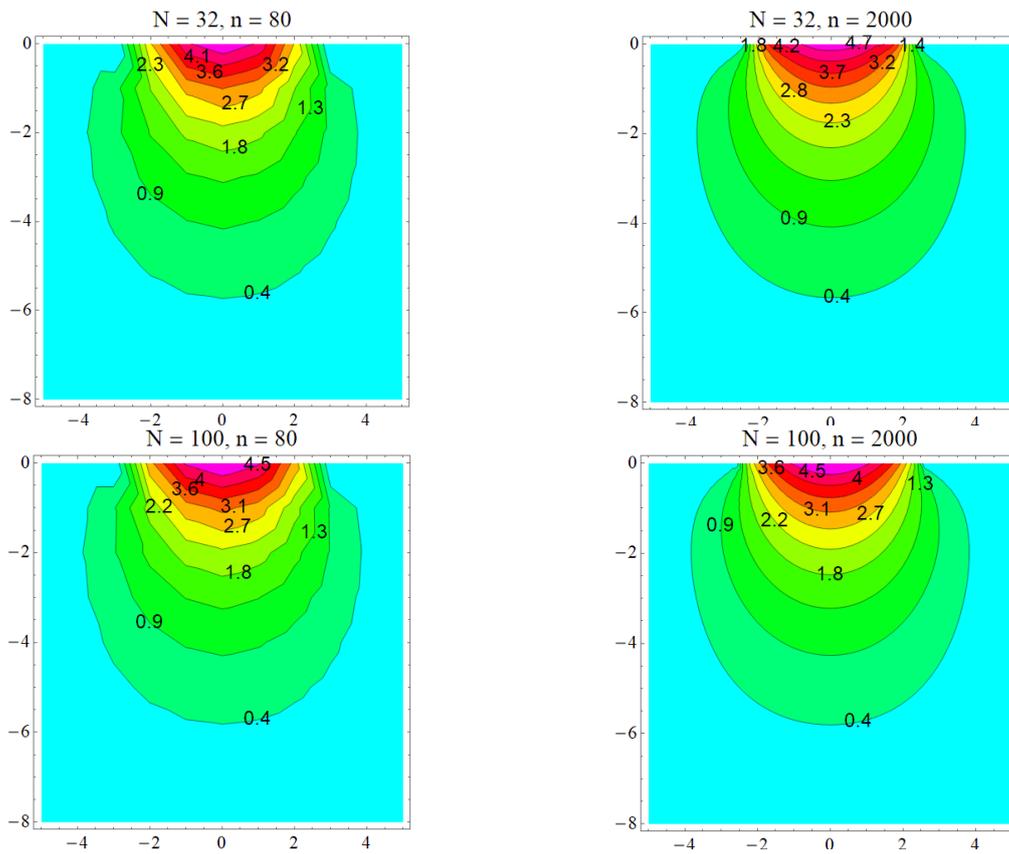


Рис. 8. Распределение потенциала для разного количества граничных элементов и расчетных узлов

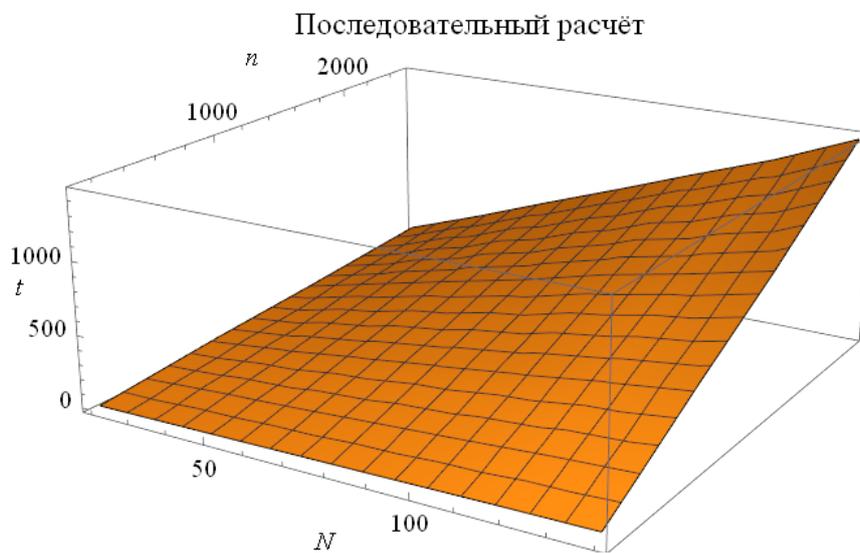


Рис. 9. Зависимость времени вычисления потенциала от количества граничных элементов и расчетных узлов для последовательного расчета

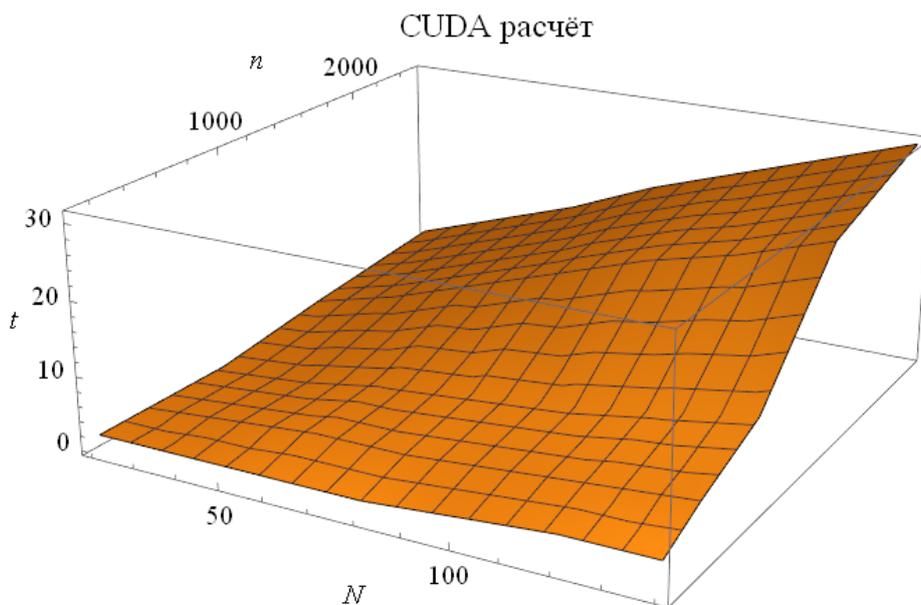


Рис. 10. Зависимость времени вычисления потенциала от количества граничных элементов и расчетных узлов для распараллеленного расчета

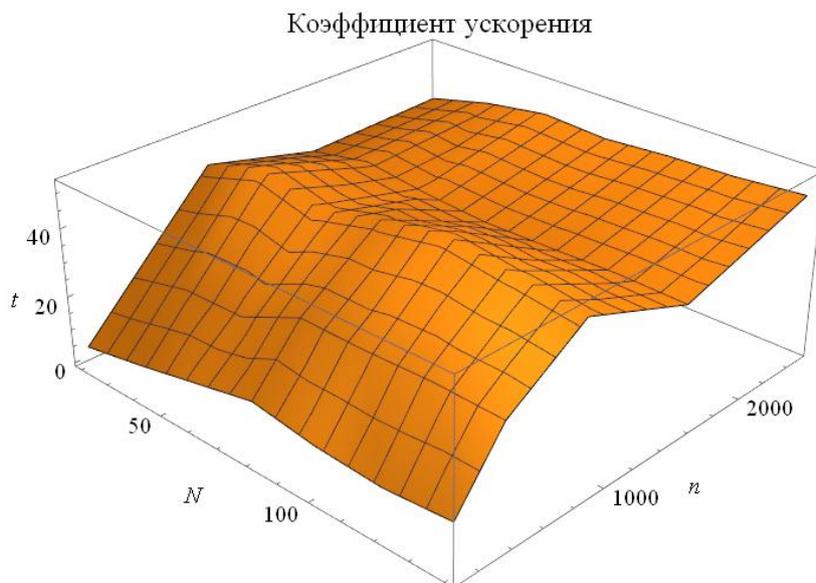


Рис. 11. Зависимость коэффициента ускорения вычисления потенциала от количества граничных элементов

Заключение. Для представленной модельной задачи о распределении потенциала в замкнутой области с граничным условием проведено исследование о преимуществах применения метода Галеркина при гранично-элементном моделировании. Была представлена как гладкая, так и негладкая реализации гранично-элементного расчета с использованием метода Галеркина. Проанализированы сходимости и точности решений, в результате чего показано, что гладкие методы колокационный и Галеркина обладают наименьшей погрешностью.

Представлено применение технологии CUDA для ускорения до 22 раз расчета матрицы взаимовлияния и до 52 раз ускорение расчета распределения потенциала внутри области.

Показаны особенности применения технологии распараллеливания как к гладкому методу Галеркина, так и гладкому колокационному методу. Эффективность приме-

нения технологии CUDA для гладкого колокационного метода выше, чем для гладкого метода Галеркина, однако подход Галеркина оказался точнее для данной задачи. В связи с тем, что конечный процесс расчета распределения потенциала для этих методов одинаков, при разовом расчете коэффициентов функции формы целесообразно использовать более точный метод.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта № T23РНФ-125.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков С. С. Ускорение гранично-элементных расчетов с помощью графического акселератора для элементов с нелинейными функциями формы / С. С. Щербаков, М. М. Полещук // Механика машин, механизмов и материалов. – 2019. – № 4 (49). – С. 89–94.
2. Бенерджи, П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – Москва : Мир, 1984. – 494 с.
3. Sutrathar, A. Symmetric Galerkin Boundary Element Method // A. Sutrathar, G. H. Paulino, L. J. Gray. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2008. – P. 1–7.
4. Rauber, T. General Purpose GPU Programming / T. Rauber, G. Rünger // Rauber, T. Parallel Programming for Multicore and Cluster Systems / Rauber T., Rünger G. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2013. – P. 387–415.
5. Щербаков С. С. Ускорение гранично-элементных расчетов для замкнутой области с использованием нелинейных функций формы и технологии CUDA / С. С. Щербаков М. М. Полещук // Доклады БГУИР. – 2021. – Т. 19, № 3. – С. 14.
6. Распараллеливание гранично-элементных расчетов с использованием метода Галеркина и нелинейных функций формы / С. С. Щербаков [и др.] // Вестник гродненского государственного университета им. Я. Купалы. – 2021. – Т. 11, № 2. – С. 41.

Поступила: 05.03.2023

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С ВЫСОКОКОНТРАСТНЫМИ МЕХАНИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОДНОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Ботогова М. Г., Ле Н. Д., Михасев Г. И.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Образованные из слоистых тонкостенных оболочко-подобных элементов конструкции сочетают в себе легкость с высокой прочностью, что объясняет широкое применение их в судостроении, авиа- и ракетостроении, машиностроении, в промышленном строительстве и других областях [1]. Использование новых полимерных материалов, таких как магнито-реологические эластомеры (МРЭ) и электро-реологические композиты (ЭРК) с управляемыми упругими и вязко-пластичными свойствами дало мощный толчок для активизации исследований и разработок по их применению в задачах демпфирования различных тонкостенных конструкций, в том числе объектов военного назначения [2–7]. Возникла необходимость создания таких конструктивных тонкостенных элементов, которые могут адаптироваться к нагрузке в зависимости от ее вида и интенсивности. Идея создания подобных адаптивных слоистых конструкций заключается в том, что действие диссипативного элемента, каковым может быть вязкоупругий слой, существенно усилится, если его параметры будут меняться под действием сигнала магнитного или электрического полей [6; 7]. Ранее проведенные экспериментальные исследования показали, что почти все магнитоуправляемые (МУ) материалы и, в частности, МРЭ и ЭРК проявляют сильную нелинейность своих реофизических свойств как функций индукции магнитного поля [1; 2; 5], а их применение в качестве наполнителей в слоистых оболочках позволяет осуществлять мягкое гашение бегущих вибраций [8], а также управлять жесткостными характеристиками конструкции посредством изменения магнитного поля и увеличивать более чем на 50 % их несущую способность [9; 10].

Целью данной работы является сделать сравнительный анализ модели Григолюка-Куликова и модели типа Тимошенко-Рейсснера, позволяющих заменить многослойную пластину эквивалентной однослойной пластиной на примере свободных низкочастотных колебаний сэндвич-пластины, содержащей МРЭ. Актуальность данной работы обусловлена тем, что модель Григолюка-Куликова, в отличие от второй модели, может быть использована для любого варианта граничных условий на кромках панели.

Модели эквивалентных однослойных пластин. Здесь мы рассмотрим две модели: модель Григолюка-Куликова (далее модель I) слоистых трансверсально изотропных пластин, основанная на принятии обобщенных кинематических гипотез Тимошенко для тангенциальных перемещений и учитывающая поперечные сдвиги в слоях [12]; модель типа Тимошенко-Рейсснера (далее модель II), предложенная Товстиком [11] для оболочек с произвольным распределением упругих свойств по толщине оболочки.

Модель 1. В соответствии с данной моделью [12] двухслойная пластина заменяется эквивалентной однослойной пластиной с приведенными характеристиками, которые вводятся следующим образом:

$$E = \frac{1-\nu^2}{h} \left(\sum_{k=1}^2 \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2} \right), \quad \nu = \sum_{k=1}^2 \frac{E_k h_k \nu_k}{1-\nu_k^2} \left(\sum_{k=1}^2 \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2} \right)^{-1}. \quad (1)$$

По формулам (1) определяются приведенный модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Также введем в рассмотрение приведенные цилиндрическую жесткость D , жесткость каждого слоя γ_k и параметры сдвига β и θ :

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \eta_3, \quad \gamma_k = \frac{1-\nu^2}{E h} \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}, \quad \beta = \frac{12(1-\nu^2) q_{44}}{E h \eta_1}, \quad \theta = 1 - \frac{\eta_2^2}{\eta_1 \eta_3}, \quad (2)$$

где

$$q_{44} = \frac{\left[\sum_{k=1}^2 \left(\lambda_k \frac{\lambda_{k0}^2}{k k} \right) \right]^2}{\sum_{k=1}^2 \left(\lambda_k \frac{\lambda_{k0}^2}{k k} \right) G_k^{-1}} + \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} G_k, \quad (3)$$

$$\lambda_k = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_0^2(z) dz, \quad \lambda_{kn} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_k(z) f_n(z) dz \quad (n = 0, k),$$

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^2 \frac{\pi_{1k} \gamma_k}{\xi_k} - 3c_{12}^2, \quad \eta_2 = \sum_{k=1}^2 \frac{\pi_{2k} \gamma_k}{\xi_k} - 3c_{12} c_{13},$$

$$\eta_3 = 4 \sum_{k=1}^2 (\xi_k^2 + 3\zeta_{k-1} \zeta_k) \gamma_k - 3c_{13}^2, \quad h \xi_k = h_k, \quad h \zeta_n = \delta_n \quad (n = 0, k),$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^N \xi_k^{-1} \pi_{3k} \gamma_k, \quad c_{13} = \sum_{k=1}^N (\zeta_{k-1} + \zeta_k) \gamma_k,$$

$$\pi_{1k} = \frac{12}{h^3} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g^2(z) dz, \quad \pi_{2k} = \frac{12}{h^3} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} z g(z) dz, \quad \pi_{3k} = \frac{2}{h^2} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g(z) dz.$$

Здесь $G = q_{44} / h$ приведенный модуль сдвига [12], $f_n(z)$ – непрерывные на каждом слое функции, определяемые следующим образом:

$$f_0(z) = \frac{1}{h^2} (z - \delta_0)(\delta_N - z) \quad \text{если } z \in [\delta_0, \delta_N],$$

$$f_k(z) = \frac{1}{h_k^2} (z - \delta_{k-1})(\delta_k - z) \quad \text{если } z \in [\delta_{k-1}, \delta_k], \quad (4)$$

$$f_k(z) = 0 \quad \text{если } z \notin [\delta_{k-1}, \delta_k].$$

Пусть w – нормальный прогиб оболочки (в направлении оси \mathbf{Oz}), F – функция напряжений Эйри, $\rho_0 = \sum_{k=1}^2 \rho_k \xi_k$ – приведенная плотность всего пакета сэндвича, t – время. Будем далее исследовать колебания пластины средней длины. Тогда уравнения движения двуслойной пластины в принятых обозначениях принимают вид (5) для модели Григолюка [14]:

$$D \left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta} \Delta \right) \Delta^2 \chi + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_n(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad (5)$$

где Δ – оператор Лапласа, w – прогиб пластины, χ – функция сдвига, $q_n(\alpha_1, \alpha_2, t)$ – нормальная нагрузка, t – время.

Модель 2. Рассмотрим теперь модель типа Тимошенка-Рейснера (далее модель II), предложенную Товстиком [11] для оболочек с произвольным распределением упругих свойств по толщине оболочки.

В данной модели приведенные параметры «эквивалентной» однослойной оболочки определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} K_0 &= \int_0^h E(z) dz, & D &= \int_0^h E_*(z)(z-a)^2 dz, & K &= \int_0^h E_*(z) dz, \\ E_*(z) &= \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)}, & g &= \frac{1}{R^2 D} \int_0^h \frac{\Theta^2(z)}{G(z)} dz, & \Theta(z) &= \int_0^z E_*(\zeta)(\zeta-a) d\zeta, \\ a &= \frac{1}{K} \int_0^h E_*(z) z dz, & \rho_0 &= \frac{1}{h} \int_0^h \rho(z) dz. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $E(z), G(z), \nu(z), \rho_0(z)$ – заданные кусочно-непрерывные функции, определяемые на каждом слое своим значением. Например,

$$E(z) = \begin{cases} E_1, & 0 \leq z \leq h_1, \\ E_2, & h_1 < z < h. \end{cases}$$

Движение пластины описывается уравнениями [11]:

$$D\Delta^2\chi + \rho_0 h (1 - g R^2 \Delta) \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = q_n(\alpha_1, \alpha_2, t). \quad (7)$$

Будем рассматривать только один вариант граничных условий. Пусть все края шарнирно оперты и снабжены диафрагмой, препятствующей поперечные сдвиги. Тогда

$$\chi = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha_k^2} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_k = 0, L_k; \quad k = 1, 2. \quad (8)$$

Собственные колебания. Сначала проанализируем свободные колебания ($q_n = 0$). Решение краевой задачи (5) – (8) имеет вид

$$\chi = \chi_0 \sin \frac{\pi n \alpha_1}{L_1} \sin \frac{\pi m \alpha_2}{L_2} e^{i\Omega t}, \quad (9)$$

где n, m – количество полуволн в направлениях α_1 и α_2 соответственно, Ω – комплексная собственная частота.

Подстановка равенства (9) в уравнения (5) дает простую формулу для искомого комплексного собственного значения

$$\Omega = \Omega_{nm} = \sqrt{\frac{\pi^4 E h^3 \eta_3}{12(1-\nu^2)\rho_0 h L_1^4}} \Lambda^{1/2}, \quad (10)$$

где

$$\Lambda = \Lambda_{nm} = \frac{\delta_{nm}^2(1+\theta K \delta_{nm})}{1+K \delta_{nm}}, \quad K = \frac{\pi^2 h^2}{\beta L_2^2}, \quad \delta_{nm} = n^2 + e^2 m^2, \quad e = \frac{L_1}{L_2}. \quad (11)$$

Формула (10) дает два комплексных собственных значения. Нам нужно выбрать только одно значение с положительной мнимой частью, так как второе значение не удовлетворяет условию диссипации энергии.

Для модели 2 получим следующую формулу для комплексной частоты

$$\Omega = \Omega_{nm} = \sqrt{\frac{\pi^4 D}{\rho_0 h L_1^4}} \Lambda^{1/2}, \quad (12)$$

где

$$\Lambda = \Lambda_{nm} = \frac{\delta_{nm}^2}{1 + \frac{\pi^2 g}{L_1^2} \delta_{nm}}, \quad \delta_{nm} = n^2 + e^2 m^2, \quad e = \frac{L_1}{L_2}. \quad (13)$$

В качестве примера рассмотрим квадратную двухслойную пластину со сторонами $L_1 = L_2 = 1$ м. Первый слой выполнен из ABS-пластика SD-0170 с параметрами $E_1 = 1,5 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_1 = 0,4$, $\rho_1 = 1,4 \cdot 10^3$ кг / м³. Толщина первого слоя 0,5 мм. Второй слой толщиной $h_2 = 10$ мм изготовлен из MRE1 со свойствами, указанными в [4]. Число волн в направлении α_1 $n=10$. Число волн m в другом направлении изменяется. Результаты вычислений представлены в таблицах 1 и 2. На рисунках 2 и 3 показано влияние индукции магнитного поля на собственные частоты $\omega = \Re\Omega$ и декременты $\alpha = \Im\Omega$. Видно, что чем больше волновые числа m и/или n , тем сильнее влияние магнитного поля на характеристики собственных мод сэндвич-пластины. Частоты и декременты для одинаковых m , построенные по разным моделям, практически совпадают.

Таблица 1 – Собственная частота $\omega = \Re\Omega$ (Гц) двухслойной пластины с МРЭ1 ядром как функция индукции B (мТл) магнитного поля для мод с $n = 10$ и разным числом m

B \ m	0	200	400	600	800
модель 1					
$m=1$	63,08	87,7	89,14	89,138	89,138
$m=7$	93,05	129,38	131,497	131,491	131,491
$m=10$	124,9	173,64	176,49	176,48	176,48
модель 2					
$m=1$	62,88	87,37	88,799	88,795	88,795
$m=7$	92,76	128,8	130,951	130,946	130,946
$m=10$	124,5	172,87	175,7	175,695	175,695

Таблица 2 – Декремент колебаний $\alpha = \zeta\Omega$ двухслойной пластины с МРЭ1 ядром как функция индукции B (мТл) магнитного поля для мод с $n = 10$ и разным числом m

$m \backslash B$	0	200	400	600	800
модель 1					
$m=1$	0	4,27	4,29	4,219	4,219
$m=7$	0	6,45	6,33	6,22	6,22
$m=10$	0	8,65	8,49	8,35	8,35
модель 2					
$m=1$	0	4,35	4,27	4,20	4,20
$m=7$	0	6,41	6,29	6,187	6,187
$m=10$	0	8,6	8,44	8,3	8,3

Заключение. В работе рассмотрены две модели слоистых пластин, учитывающих сдвиги: модель 1 Григолюка-Куликова [12], основанная на введении обобщенных кинематических гипотез Тимошенко, и модель 2 типа Тимошенко-Рейсснера [11]. На основе двух моделей, замещающих слоистую пластину «эквивалентной» однослойной трансверсально изотропной пластиной, исследованы свободные вязкоупругие колебания двухслойной пластины средней длины, один слой которой изготовлен из МРЭ. Показано, что индукция магнитного поля сильно влияет на вязкоупругие свойства пластины и, как следствие, на ее динамические характеристики.

Выполненный сравнительный анализ собственных частот и декрементов колебаний, найденных на основе двух моделей, позволяет сделать вывод о том, что модель 1 и модель 2 дают очень хорошее совпадение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Librescu L. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey / L. Librescu, T. Hause // Journal of Composite Structures. – 2000. – Vol. 48. – P. 1–17.
2. Li Y. A state-of-the-art review on magnetorheological elastomer devices / Y. Li [et al.] // Smart Materials and Structures. – 2014. – № 23(12). – P. 123001.
3. Shaw J. S. Design and control of adaptive vibration absorber for multimode structures / J. S. Shaw, C. A. Wang // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2019. – № 30(7). – P. 1043–1052.
4. Mikhasev G. I. Thin-Walled Laminated Structures: Buckling, Vibrations and Their Suppression / G. I. Mikhasev, H. Altenbach – Berlin : Springer, 2019. – 280 p.
5. On Damping Vibrations of Three Layered Beam Containing Magnetorheological / E. V Korobko [et al.] // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2012. – Vol. 23 (9). – P. 1019–1023.
6. Korobko E. Investigation of Elasticity of Magnetosensitive Adaptive Materials for Laminated Composite Structures / E. Korobko [et al.] // Mechanika. – 2014. – Vol. 20, № 5. – P. 466–470.

7. Farshad M. Magnetoactive elastomer composites / M. Farshad, A. Benine // Journal of Polymer Testing. – 2004. – Vol. 23. – P. 347–353.
8. Mikhasev G. Soft Suppression of Traveling Localized Vibrations in Medium-Length Thin Sandwich-Like Cylindrical Shells Containing Magnetorheological Layers via Nonstationary Magnetic Field / G. Mikhasev, I. Mlechka, H. Altenbach // Dynamical Systems: Theoretical and Experimental Analysis (ed.: J. Awrejcewicz), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer International Publishing Switzerland. – 2016. – Vol. 182. – P. 241–260.
9. Mikhasev G. I. On influence of boundary conditions and transverse shear on buckling of thin laminated cylindrical shells under external pressure / G. I. Mikhasev, Ih. R. Mlechka // Facta Univesitatis. Series : Mechanical Engineering. – 2014. – Vol. 12, No. 2. – P. 95–106.
10. Mikhasev, G. I. Effect of edge shears and diaphragms on buckling of thin laminated medium-length cylindrical shells with low effective shear modulus under external pressure / G. I. Mikhasev, M. G. Botogova // Acta Mechanica – 2017. – Vol. 228 (6). – P.2119–2140.
11. Mikhasev G. I. Localized Dynamics of Thin-Walled Shells / G. I. Mikhasev, P. E. Tovstik – Boc Raton: CRC Press, 2020. – 349 p.
12. Григолюк Э. И. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов – Москва : Машиностроение, 1988. – 288 с.

Поступила: 24.05.2023

УДЕЛЬНАЯ ЭНЕРГОЕМКОСТЬ И ТЕПЛООБРАЗОВАНИЕ В СТАЛЬНЫХ ОБРАЗЦАХ ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ РАСТЯЖЕНИИ

Яковлев А. А., Мойсейчик А. Е., Мойсейчик Е. А.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Введение. При деформировании растяжением стальных образцов можно выделить четыре стадии их работы (рисунок 1). На первой стадии материал работает упруго. Вторая стадия характеризуется появлением площадки текучести и соответствующей работой на ее протяжении. На третьей стадии образец равномерно деформируется в пределах рабочей зоны l (рисунок 1). Третья стадия возникает в равномерно деформируемом металле и характеризуется развитием локальной неустойчивости пластического деформирования, внешне проявляющейся в виде локального утонения («шейки»), зарождение и развитие которой происходит в произвольном сечении рабочей длины l образца. Накапливаемая на каждой стадии в единице объема материала образца механическая энергия (удельная энергоемкость) превращается, в основном, в тепло и рассеивается в металле образца и окружающей среде.

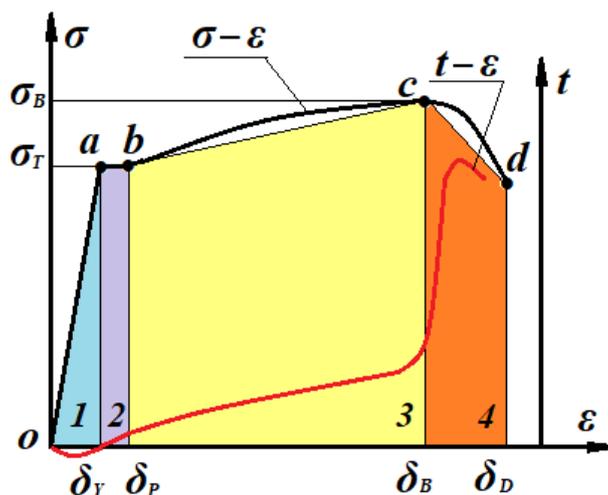


Рис. 1. Схемы диаграмм деформирования образцов « σ - ε » и теплообразования « t - ε »

Целью настоящей статьи является приближенная расчетно-экспериментальная оценка удельной энергоемкости и теплообразования на каждой стадии работы образца.

Удельная энергоемкость материала образца на стадиях 1–4 (см. рисунок 1).

Удельная энергоемкость a_v при упругой работе образца (стадия 1):

$$a_{v1} = \frac{\sigma_T}{2} \delta_Y. \quad (1)$$

На второй стадии –

$$a_{v2} = \sigma_T(\delta_P - \delta_Y). \quad (2)$$

На третьей стадии –

$$a_{v3} = \frac{(\sigma_T + \sigma_B)}{2} (\delta_B - \delta_P). \quad (3)$$

Обозначая разрушающие напряжения на четвертой стадии через σ_D аналогично получаем

$$a_{v4} = \frac{(\sigma_B + \sigma_D)}{2} (\delta_D - \delta_V). \quad (4)$$

Далее, можно в первом приближении определить среднюю температуру стали образцов на каждой из приведенных стадий. Для этого допускаем, что теплообразование происходит за малый промежуток времени, в течение которого стальной образец не обменивается теплотой с окружающим пространством (адиабатический процесс). Тогда изменение температуры на каждом участке диаграммы (рисунок 1) можно приближенно определить по формуле

$$\Delta t = \frac{\beta a_v}{c\rho}, \quad (5)$$

где: β – коэффициент Тейлора-Квинни, являющийся постоянной величиной, лежащей в пределах от 0 до 1;

c – удельная теплоемкость; ρ – плотность материала.

Коэффициент Тейлора-Квинни имеет сложную природу [1; 2]. При расчетах по формуле (5) будем принимать $\beta = 0,9$.

Образцы, методика их испытания и обработка результатов. Для квазистатических испытаний на растяжение принимались пропорциональные плоские образцы по ГОСТ 1497 (рисунок 2) двух типов. Первый образец толщиной 20 мм с рабочей длиной $l_0 = 140$ мм из стали 09Г2С. Второй образец толщиной 7,9 мм с рабочей длиной $l_0 = 140$ мм из стали ВСтЗсп.

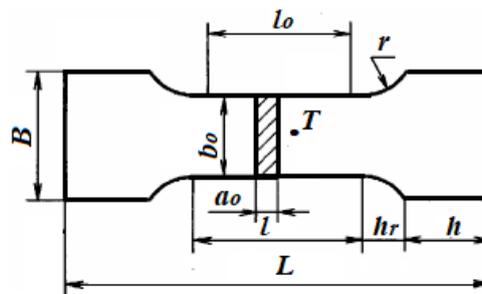


Рис. 2. Схема и характерные размеры экспериментальных образцов

Образцы испытывались на растяжение на электронно-гидравлической сервоприводной универсальной испытательной машине WAW-1000 с микрокомпьютером 100Т. Скорость нагружения v выдерживалась в пределах $3 \leq v \leq 9$ Н/мм² с. При испытании второй образец нагружался с остановками (перерывами) по 5–7 секунд для контроля трещинообразования в окалине и развития полос Людерса-Чернова в металле. Первый образец нагружался без перерывов. Координаты машинной диаграммы фиксировались в численной форме. Пересчет в координатную систему « σ – ϵ » выполнялся в Excel. В процессе растяжения испытываемые образцы изменяли свое тепловое состояние. Это засвидетельствовали изменения величин температуры в точке T в средней части образца (рисунок 2). Температуру поверхности измеряли с помощью портативного тепловизора testo 875i. Температурная чувствительность прибора меньше 0,05 °С при 30 °С.

Моделирование работы обоих образцов при упруго-пластическом растяжении производилось с использованием программного комплекса Ansys. При расчете напряженно-деформированного состояния внешняя растягивающая сила $P_{кр}$, прикладываемая к торцам образцов определялась как произведение площади опасного сечения на предел текучести материала. Развитие пластических деформаций в образцах наблюдалось при последовательном приложении к образцам следующих величин внешних растягивающих сил: $0,5P_{кр}$, $0,8P_{кр}$, $P_{кр}$, $1,05P_{кр}$, $1,2P_{кр}$. Материал представлялся моделью с билинейным изотропным упрочнением. Задача по моделированию тепловыделения при пластическом деформировании рассматривалось как нелинейная. При этом для лучшей сходимости расчетных циклов избегали конечных элементов низкого качества. Для разбивки шагов решения на подшаги использовали опцию Large Deflection. Определение доли накопленной энергии пластической деформации, затрачиваемой на теплообразование в образцах, велось с использованием конечного элемента SOLID226. Также для определения изменения поверхностной температуры при пластической деформации задавались следующие физические характеристики материала: теплопроводность, удельная теплоемкость, коэффициент Тейлора-Квинни.

Данные эксперимента и конечно-элементного моделирования. Машинные диаграммы деформирования образцов приведены на рисунке 3. Второй образец был доведен до разрыва, первый – до образования шейки (рисунок 4).

На втором образце заметны полосы скольжения, появившиеся в нем при загрузке на интервале «а–с» (рисунок 4). Разрушение обоих образцов происходило на ниспадающих ветвях машинных диаграмм и сопровождалось развитием локальной неустойчивости пластического деформирования в форме «шейки».

Ход экспериментальных кривых 1 и 3 (рисунок 3) отображает выделенные четыре участка машинных диаграмм. Резкое нарастание выделения тепла происходит на стадии зарождения и развития локальной неустойчивости пластического деформирования. Температура поверхности первого образца (рисунок 3, кривая 4) на этой стадии деформирования достигала $100\text{ }^{\circ}\text{C}$.

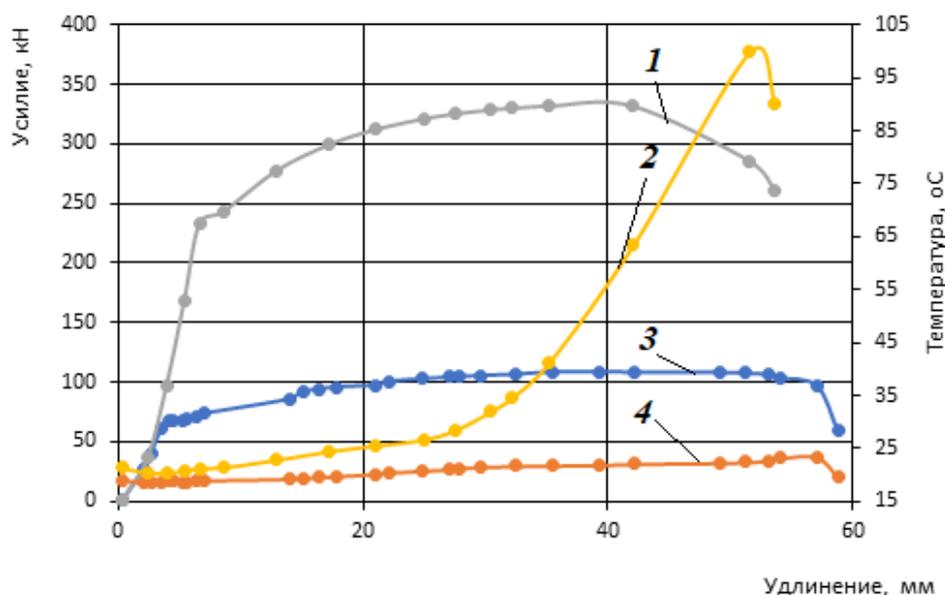


Рис. 3. Машинные диаграммы и изменение температуры поверхности в точке T пропорциональных образцов при растяжении: 1, 3 – машинные диаграммы «усилие-удлинение» для образцов 2 и 1; 2, 4 – температуры поверхности в опасном сечении образцов 2 и 1



Рис. 4. Вид первого (б) и второго (а) образцов после испытания

Результаты расчета напряженно-деформированного и энергетического состояния образцов приведены на рисунках 5–7. Следует отметить, что в процессе расчета фронт эквивалентных напряжений и пластических деформаций при росте растягивающей силы от $0,8P_{кр}$ до $1,05P_{кр}$ для принятой модели образцов распространялся от середины образца к захватам.

Максимальное расчетное значение поверхностной температуры образцов достигало: $29,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ (для первого образца) и $24,7\text{ }^{\circ}\text{C}$ (для второго образца). Начальная температура образцов задавалась $22\text{ }^{\circ}\text{C}$.

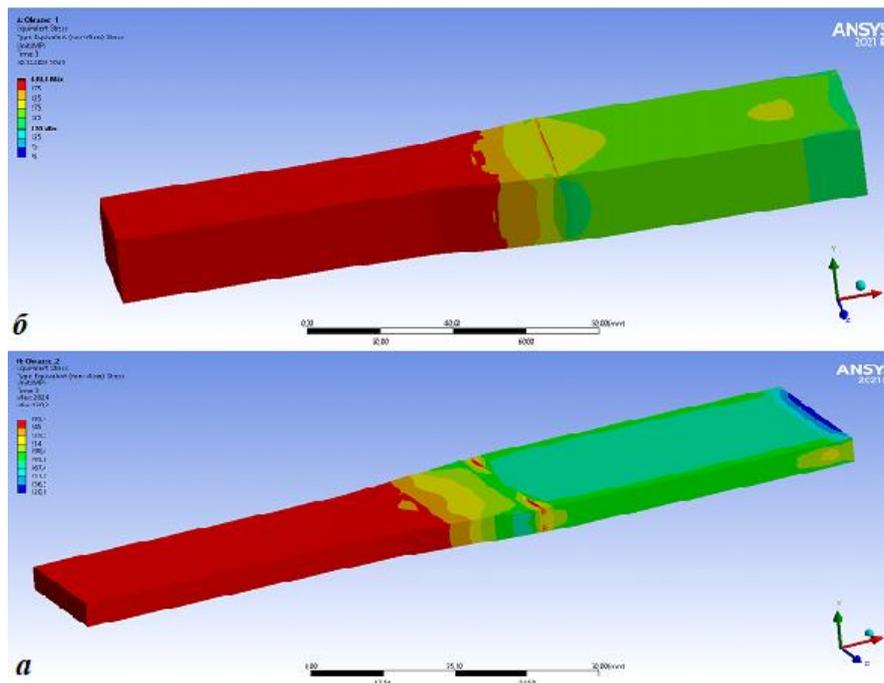


Рис. 5. Распределение эквивалентных напряжений по Мизесу в первом (б) и втором (а) образцах при нагружении силой равной $1,05P_{кр}$ (красным цветом выделены напряжения, превышающие σ_T)

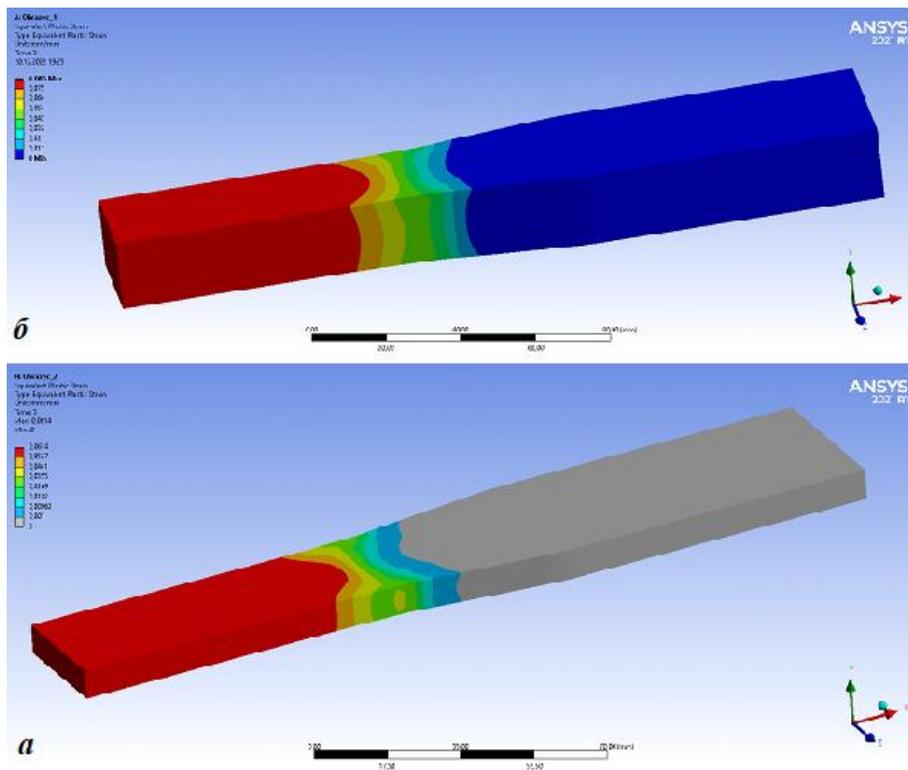


Рис. 6. Распределение эквивалентных пластических деформаций в первом (б) и втором (а) образцах при нагружении силой равной $1,05P_{кр}$.

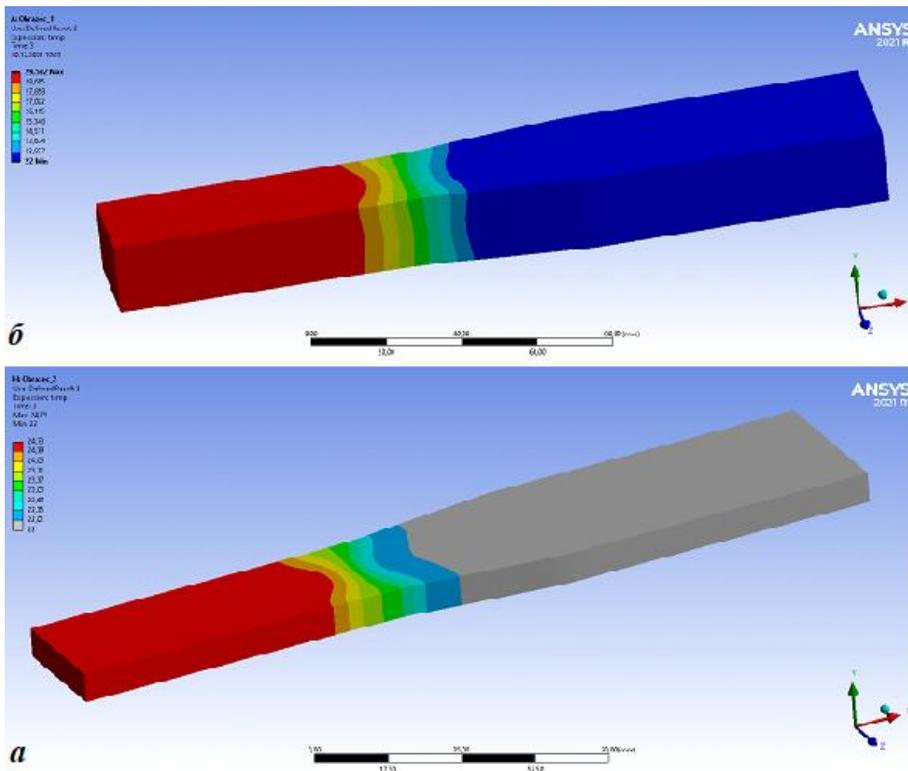


Рис. 7. Распределение поверхностной температуры в первом (б) и втором (а) образцах при нагружении силой равной $1,05P_{кр}$.

Обсуждение результатов. Из рисунка 3 видно, что наибольшее повышение температуры образцов произошло при образовании и развитии шейки. Так, резкий скачок с 30 °С до 100 °С на температурной кривой 4 (см. 3) произошел за 1/10 всего времени нагружения образца.

Расчетные величины изменения температур Δt , полученные по формулам (1–5) для стадий 1–4 деформирования образцов, приведены в таблице.

Таблица 1 – Расчетные значения изменения температур Δt для стадий 1–4

Стадии деформирования образцов и Δt (см. рисунок 1)	Нагрев материала образцов Δt при их деформировании на стадиях 1–4, °С			
	I	II	III	IV
Образец 1	1,04	0,92	25,5	10,2
Образец 2	2,34	1,32	24,5	6,75

Сопоставляя данные таблицы с экспериментальными (см. рисунок 3), можно отметить, что соответствующие температуры поверхности образцов 1 и 2 существенно отличаются. Меньшие величины экспериментальных температур для образца 1 объясняются остыванием металла в промежутках между ступенями его нагружения. Таких перерывов при деформировании образца 2 не было. Растяжение образца 2 велось непрерывно вплоть до зарождения трещины скола в шейке. Экспериментальное значение температуры поверхности 2-го образца на 3 стадии деформирования в 4 раза превышало расчетное. Такое расхождение объясняется как приближенностью расчета по формулам 1–5, так и неучетом теплообразования из-за твердотельных реакций в деформируемом металле [3].

Выводы.

1. Температура нагрева металла деформируемого растяжением стального элемента в первом приближении может быть рассчитана по формулам 1–5 или автоматизированным расчетом с использованием конечно-элементного анализа.

2. Экспериментальные величины температур поверхности при непрерывном квазистатическом деформировании значительно (до 5 раз) превышают их расчетные значения.

3. Фиксирование температурных полей металлических элементов при их деформировании следует выполнять дистанционно, в форме термофильмов, с использованием измерительных инфракрасных приборов.

ЛИТЕРАТУРА

1. A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals / P. A. Rosakis [et al.] // Journal of the mechanics and physics of solids – 2000. – V. 48. – P. 581 – 607.

2. Zaera, R. On the Taylor–Quinney coefficient in dynamically phase transforming materials. Application 304 stainless steel / R. Zaera, J. A. Rodriguez-Martinez, D. Rittel. // Int. J. Plasticity (2012), <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.08.003>

3. Мойсейчик Е. А. Тепловой контроль материалов, стальных конструкций и машин / Е. А. Мойсейчик. – Минск : Ковчег, 2022. – 200 с.

Поступила: 13.04.2023

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРУЕМОСТИ ДИСПЕРСНЫХ ГРУНТОВ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Грацевская Е. Ю.

Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель

Введение. Одним из основных видов техногенных воздействий на геологическую среду [1–3] и элементы конструкций [4–10] являются вибродинамические нагрузки, возникающие при строительстве и эксплуатации инженерных сооружений. Такие нагрузки могут приводить к изменению физико-механических свойств грунтов оснований и тем самым влиять на состояние инженерных объектов. Исследование подобных явлений проводилось экспериментально и теоретически в работах [11–14].

При изучении пластичности в современной механике грунтов сложился двоякий подход. С одной стороны, она характеризует способность грунта и элементов конструкций к необратимым (пластическим) деформациям под действием определенного внешнего механического воздействия, а с другой – способность грунта переходить в пластическое состояние в определенных интервалах влажности при неопределенной величине внешнего усилия. Первый параметр является прямой характеристикой пластичности грунта и конструкционных материалов, второй – косвенной.

Под пластичностью грунта понимается его способность деформироваться без разрыва сплошности при воздействии внешних механических усилий и сохранять полученную форму после их снятия [1; 15]. Это свойство характеризует возможность проявления в грунтах и материалах остаточных деформаций. Применение теории пластичности в расчетах грунтовых оснований позволяет выявить его прочностные и деформационные ресурсы.

Устоявшееся понятие пластичности из-за простоты определения и тесной корреляционной связи с показателями других свойств грунтов рассматривается главным образом с точки зрения их консистенции. Пластичность определяется характерными влажностями – нижним W_p и верхним W_L пределами пластичности; числом пластичности I_p и показателем текучести I_L . При определении характерных влажностей используются грунты нарушенного сложения. В естественном залегании они, благодаря действию структурных связей, по своему состоянию, а следовательно, и деформируемости могут существенно отличаться от тех же пород нарушенного сложения. Таким образом, применяемые пределы пластичности являются условными косвенными показателями пластичности грунтов. Они характеризуют свойства породообразующих минералов при некоторых значениях влажности.

Деформированию слоистых элементов конструкций при пластическом деформировании, посвящены многочисленные исследования, в том числе статьи [16–21]. В них рассмотрено деформирование трехслойных стержней, пластин и цилиндрических оболочек связанных и не связанных с упругим основанием. Кинематика трехслойного пакета принималась соответствующей гипотезе ломаной линии. Влияние упругого основания на деформирование трехслойных элементов конструкций описывалась моделями Винклера и Пастернака. Проведен численный анализ перемещений в зависимости от жесткости грунтового основания.

В статьях [22–26] исследованы вопросы влияния подтопления на свойства дисперсных грунтов. Особенности строения геологической среды Беларуси и Гомеля в связи с необходимостью оценки ее устойчивости и обоснования инженерной защиты городов рассмотрены в публикациях [27–30].

Деформирование грунтов в упругом и пластичном состояниях. В данной статье исследуется деформирование грунтов в упругом и пластичном состояниях и их влияние на связанные с ними трехслойные элементы конструкций. Объектом исследований служили супесчаные неводонасыщенные грунты различного генезиса. Супеси относятся к дисперсным глинистым грунтам, т. е. к тонкодисперсным образованиям, содержащим не менее 3 % глинистых частиц с числом пластичности $1 \leq I_p \leq 7$. Наиболее характерной их чертой является резкое изменение деформируемости и прочности при увлажнении.

Были изучены супеси различного генезиса, которые широко распространены в юго-восточной части Беларуси: днепровские ледниковые *gПd* и флювиогляциальные *fПd*; поозерские озерно-аллювиальные *laПpz* и аллювиальные – второй *a₂Пpz* и первой *a₁Пpz* надпойменных террас, а также голоценовые отложения поймы реки Сож *aIV*.

При анализе численных значений этих показателей, приведенных в литературе, отчетах различных изыскательских организаций, а также полученных при исследованиях проведенных автором установлено, что при изменении числа пластичности в пределах одного номенклатурного типа значения характерных влажностей грунтов различных геолого-генетических комплексов существенно отличаются (таблица 1).

Таблица 1 – Влажностные показатели супеси

Геолого–генетический комплекс	Влажности, %					S_r	I_p	W_L^*	K	K_p
	W	W_p	W_L	W_{sat}	W_{rel}					
Аллювиальный (<i>aIV</i>)	20,0	17,9	24,1	0,25	0,83	0,80	5,8	0,34	2,62	0,63
Аллювиальный первая надпойменная терраса (<i>a₁Пpz</i>)	23,1	19,0	26,7	0,25	0,87	0,92	6,1	0,64	3,11	0,71
Аллювиальный вторая надпойменная терраса (<i>a₂Пpz</i>)	17,4	19,1	25,0	0,21	0,70	0,83	5,9	0,28	2,56	0,69
Озерно–аллювиальный (<i>laПpz</i>)	16,8	17,2	22,6	0,20	0,74	0,85	5,1	0,39	–	–
Флювиогляциальный (<i>fПd^в</i>)	16,3	14,0	18,0	0,21	0,91	0,76	4,5	0,22	2,16	0,90
Моренный (<i>gПdn</i>)	10,6	12,6	17,0	0,14	0,62	0,80	5,5	0,24	2,59	1,11
Примечание: I_L^* – только в пределах пластичности										

Пластичность грунтов зависит от минерального и гранулометрического составов, присутствия органических веществ, состава обменных катионов, концентрации внешних растворов [1]. Здесь пластичность связных грунтов рассматривается с точки зрения ее обусловленности составом и свойствами твердой фазы.

Минеральный состав. По одним данным в аллювиальных пылевато-глинистых грунтах, распространенных в юго-восточной части Беларуси, преобладают каолинит-гидрослюдистая и монтмориллонит-гидрослюдистая ассоциации, а в моренах – диоктоэдрические гидрослюды (иллит, гидрослюда), каолинит, хлорит, смектит. Причем, отмечается, что каолинит и монтмориллонит преобладают только в древнем аллювии,

а начиная с неоплейстоцена в глинистом аллювии преобладает гидрослюда. По другим, в аллювии соответственно – каолинит-иллит, смектит-иллит-каолинит, а в морене – иллит, каолинит, смектит, смешаннослойные (иллит-смектит).

Гранулометрический состав. Большой пластичностью характеризуются грунты, обладающие большей дисперсностью. При определении гранулометрического состава супесей за основу принята классификация Сабанина по скорости падения частиц в воде. Это связано с тем, что коллоидная активность K_p и показатель гидрофильности K пылевато-глинистых грунтов определяются с использованием процентного содержания в грунте частиц, диаметр которых меньше 0,005 мм (M_c). Данные о содержании глинистых частиц M_c приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Показатели некоторых физических свойств грунтов

Геолого-генетический комплекс	Содержание частиц диаметром <0,005 мм	Коэффициенты пористости			Коэффициенты	
	M_c	e	e_L	e_P	K_d	K_c
Аллювиальный (aIV)	9,2	$\frac{0,66}{0,58-0,76}$	00,64	00,48	$\frac{-0,13}{0,38-(-0,75)}$	$\frac{-0,01}{0,04-(-0,07)}$
Аллювиальный – первая надпойменная терраса (a ₁ Шpz)	8,6	$\frac{0,67}{0,53-0,85}$	00,72	00,51	$\frac{0,24}{0,91-(-0,62)}$	$\frac{0,03}{0,11-(-0,080)}$
Аллювиальный – вторая надпойменная терраса (a ₂ Шpz)		$\frac{0,56}{0,45-0,70}$	00,67	00,51	$\frac{0,69}{0,72-(-0,19)}$	$\frac{0,07}{0,13-(-0,018)}$
Озерно –аллювиальный (laШpz)	–	$\frac{0,54}{0,41-0,66}$	00,61	00,46	$\frac{0,44}{1,33-(-0,33)}$	$\frac{0,03}{0,12-0,00}$
Флювиогляциальный (fIIд ^s)	3,6–8,4	$\frac{0,57}{0,39-0,80}$	00,48	00,38	$\frac{-0,90}{0,9-(-3,2)}$	$\frac{-0,06}{0,06-(-0,22)}$
Моренный (gIIдn)	4,0–6,6	$\frac{0,37}{0,30-0,85}$	00,46	00,35	$\frac{0,82}{1,46-(-3,55)}$	$\frac{0,06}{0,11-(-0,27)}$
Примечание: В числителе приведены средние значения показателей, в знаменателе – диапазон значений						

Гидрофильность глинистых минералов определяется удельной поверхностью и зависит от их состава и структуры [1]. Гидрофильность глинистой фракции и ее коллоидную активность можно установить при параллельном определении пластичности грунтов и содержания глинистой фракции. Основные показатели физического состояния и свойств грунтов приведены в таблицах 1 и 2.

Показатель гидрофильности определяется из выражения $K = W_L / M_c$. Как показано в таблице 1, максимальными значениями влажности верхнего предела пластичности W_L обладают грунты первой надпойменной террасы ($a_1Шрз$). Поэтому им свойственны максимальные значения показателя гидрофильности. Это объясняется, возможным присутствием в минеральном составе грунтов аллювиального генезиса минералов монтмориллонитово–гидрослюдистой ассоциации.

Коллоидная активность определяет процессы коагуляционного структурообразования в глинистых грунтах. Показатель коллоидной активности K_p определяется по известной формуле $K_p = I_p / M_c$ [1].

Рассматриваемые грунты по этому показателю можно отнести к грунтам со средней и в большей степени – низкой активностью. Причем, большей коллоидной активностью обладают флювиогляциальные ($fПд^s$) и ледниковые ($gПдн$) отложения, что связано с пониженным содержанием в их гранулометрическом составе глинистой фракции (см. таблицы 1 и 2).

Влияние жидкой компоненты на консистенцию грунтов. На состояние пылеватоглинистых грунтов существенно и по-разному влияют различные категории воды, содержание которых обуславливается в основном минеральным составом грунтов и связанной с ним дисперсностью. Пластичность грунтов обуславливает наличие осмотической связанной воды, т. к. при ее наличии частицы передвигаются относительно друг друга без разрыва сплошности. Формирование осмотической воды происходит в основном в интервале между нижним W_p и верхним W_L пределами пластичности. Дальнейшее увлажнение грунта до полной влагоемкости W_{sat} приводит к появлению свободной воды. Значения указанных влажностей W_L и W_{sat} близки (таблица 1).

Относительная влажность грунтов W_{rel} определяется из выражения $W_{rel} = W / W_L$. По этому показателю судят об относительной дегидратированности грунтов. Чем W_{rel} меньше, тем более дегидратирован грунт и тем более устойчива его консистенция. Из данных, приведенных в таблице 1, следует, что в большей степени дегидратированы моренные ($gПдн$) супеси второй надпойменной террасы ($a_2Шрз$).

Уплотненность супесчаных грунтов определяется по коэффициенту естественной уплотненности – $K_d = (e_L - e_0) / (e_L - e_p)$, где e_0 – коэффициент пористости в условиях естественного залегания, e_p и e_L – приведенные коэффициенты пористости, соответствующие переходу грунта из пластичного в твердое и из текучего в пластичное состояние.

Кроме того, используется показатель степени сжатия грунта [3]: $K_c = (e_L - e_0) / (1 + e_L)$.

Рассчитанные значения, e_p , e_L и K_c приведены в таблице 2. Большие вариации значений коэффициентов естественной уплотненности K_d и показателей степени сжатия K_c свидетельствуют о том, что рассматриваемые грунты находятся на разных стадиях литогенеза. Отрицательные значения показателей характерны для недоуплотненных грунтов аллювиального и озерно–аллювиального генезиса, которые формируются при прогрессивном литогенезе на стадии позднего диагенеза. Уплотнение таких пород продолжается, т. к. состояние равновесия и консолидация их еще не достигнуты. На ранней стадии катагенеза происходит дальнейшее уплотнение пород, отжатие из них слабосвязанной (осмотической) воды; влажность уменьшится, но не достигает нижнего предела пластичности ($W \geq W_p$). Естественная пористость породы соответствует пористости интервала «предел текучести – предел пластичности», т. е. $0 < K_d$ и $K_c < 1$. Такими значениями обладает большинство изучаемых грунтов, это грунты средней уплотненности.

Моренные отложения характеризуются низкой пористостью ($e = 0,33–0,43$). Это связано с уплотняющим действием ледника от его веса и движения, высыханием осадка и давлением выше отложившихся пород. [4; 11]. Уплотнению также способствует

большая разнородность гранулометрического состава грунтов. При выветривании (регрессивный литогенез) возрастает пористость пород, повышается их пластичность и влажность, ухудшаются физико-механические свойства [11].

Деформируемость грунтов. В литературе активно обсуждается влияние различных факторов на деформируемость глинистых пород. Здесь рассмотрим роль дисперсности (главным образом, содержания частиц глинистой фракции) и той стадии литогенеза, на которой сформированы свойства супесчаных грунтов.

На рисунке 1 представлены графики результатов штамповых испытаний различных грунтов: 1 – моренные ($g\Pi dn$) твердой-полутвердой консистенции; 2 – моренные ($g\Pi dn$) скрытопластичной консистенции; 3 – аллювиальные второй надпойменной террасы ($a_2\Pi pz$) скрытопластичной консистенции; 4 – аллювиальные первой надпойменной террасы ($a_1\Pi pz$) скрытопластичной консистенции. Утолщение линий соответствует интервалу пластических деформаций. Полевые эксперименты были выполнены разными изыскательскими организациями. Для анализа выбраны результаты, полученные при испытании штампами с плоской подошвой площадью 600 см^2 при одинаковой глубине заложения. На рисунке видно, что у отложений моренных ($g\Pi dn$) и второй надпойменной террасы ($a_2\Pi pz$) при приложении давления P проявляется линейная зависимость между давлением и деформацией. В определенных интервалах давления эти грунты ведут себя как квазитвердые тела, что соответствует их твердой и полутвердой консистенции.

При давлениях 0,22; 0,25 и 0,30 МПа соответственно супеси второй надпойменной террасы ($a_2\Pi pz$), и моренные ($g\Pi dn$) скрытопластичной и твердой консистенции переходят в пластичное состояние. Этим значениям давления соответствуют осадки 2,7; 4,7 и 3,0 мм. Связанные с этими давления напряжения, возникающие в грунтах, определяют их структурную прочность.

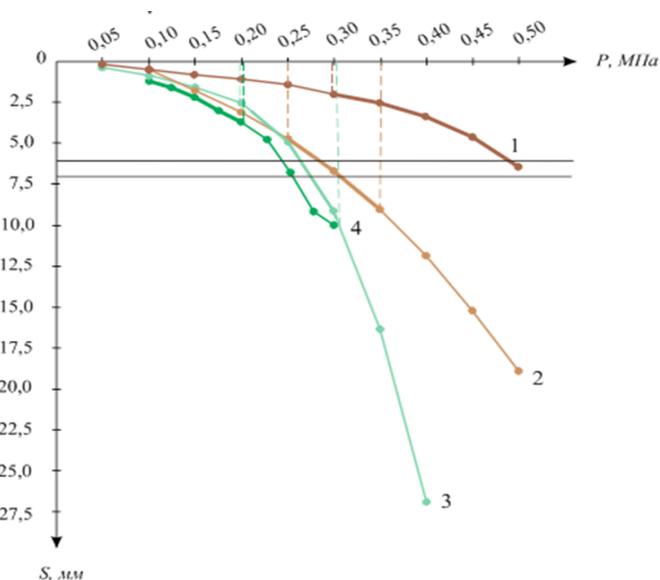


Рис. 1. Графики зависимости осадки штампа от давления

Супеси первой надпойменной террасы ($a_1\Pi pz$) практически сразу же переходят в пластичное состояние и структурной прочностью не обладают.

По остаточным деформациям можно судить о пластичности грунтов. Рассмотрим, например, интервал осадок грунтов $\Delta S = 6,0-7,0$ мм. Тангенсы углов наклона прямых $tg\alpha = \Delta S/\Delta P$ для моренных супесей ($g\Pi dn$) твердой и скрытопластичной консистенции соответственно равны 2,86 и 3,70; второй ($a_2\Pi pz$) и первой ($a_1\Pi pz$) надпойменных тер-

рас $-7,14$ и $9,10$. Чем больше $tg\alpha$ тем порода более податлива, сильнее уплотняется в пределах заданного интервала давления.

В соответствии с закономерностями развития деформаций грунтов основания учитывают значения критических нагрузок, разделяющих их фазы. Первая критическая нагрузка P_I – начало разрушения грунта характеризуется переход от линейной зависимости осадки от давления к нелинейной. И вторая – P_{II} – полное разрушение грунтов основания (предел несущей способности). Критические нагрузки определяют графически по зависимости осадка–давление фундамента (штампа).

Таким образом, по деформационным кривым можно определить предел несущей способности грунта R_0 , а также интервалы давлений ΔP_{pl} и соответствующих осадок ΔS_{pl} , в которых грунт проявляет свойство пластичности, причем, без изменения весовой влажности. В результате, $R_0 = 0,35; 0,30$ и $0,20$ МПа для моренной супеси скрытопластичной консистенции ($g\Pi dn$), аллювиальной второй надпойменной террасы ($a_2\Pi pz$) и аллювиальной первой надпойменной террасы ($a_1\Pi pz$). Соответственно $\Delta P_{pl} = 0,01; 0,08$ МПа и $\Delta P_{pl} > 0,2$ МПа и $\Delta S_{pl} = 4,3; 7,3$ мм и $\Delta S_{pl} = 4,3; 7,3$ мм и $\Delta S_{pl} > 4,5$ мм.

На рисунке 2 приведены графики зависимости модуля деформации от давления, нумерация кривых такая же, как на рисунке 1. Модули деформации рассчитывались для каждой кривой по известной формуле:

$$E = (1 - \nu^2) K_p K_1 D \frac{\Delta P}{\Delta S},$$

где $\nu = 0,30$ – коэффициент Пуассона;

K_p – коэффициент зависимости от заглубления штампа h / D (h – глубина расположения штампа, D – диаметр штампа, см);

$K_1 = 0,79$ – коэффициент для жесткого круглого штампа;

ΔP – приращение давления на штамп $\Delta P = P_n - P_{n-1}$, P_n – давление на границе n -го участка соответствующей экспериментальной кривой (см. рисунок 1), МПа;

ΔS – приращение осадки штампа, соответствующее ΔP , см.

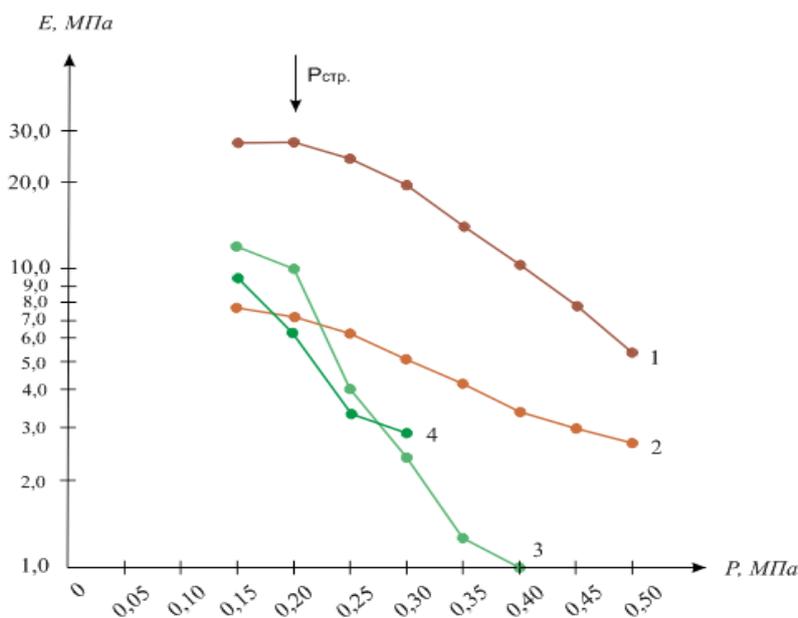


Рис. 2. Графики зависимости модуля деформации от давления

По кривым 1 и 2 можно судить, что при давлении $P < 0,20$ МПа грунты деформируются с постоянным модулем, т. е. упруго. Следовательно, указанное давление численно соответствует структурной прочности (structural strength) грунта P_{str} [1]. На начальном участке кривой 1 значение модуля деформации супесей твердой-полутвердой консистенции в 3,7 раз больше, чем у супеси скрытопластичной консистенции (кривая 2). Затем с ростом давления скорость уменьшения модуля деформации гораздо больше для первого грунта, что при давлении $= 0,50$ МПа приводит к их отличию только в 2 раза. Это эффект объясняется относительно большим уплотнением первого грунта за счет уменьшения объема пор при давлениях превышающих структурную прочность.

Подобная закономерность наблюдается у аллювиальных отложений (кривые 3, 4). Грунты второй надпойменной террасы в естественном залегании менее влажные (таблица 1). При увеличении давления пористость уменьшается, что приводит к перераспределению видов воды при постоянной весовой влажности, в частности, содержание осмотической воды увеличивается. Поэтому у них с ростом давления модуль деформации падает быстрее, чем у супесей первой надпойменной террасы, при этом на участке $0,25 < P < 0,30$ МПа модули выравниваются. Следует здесь отметить отсутствие упругих участков деформирования, что обусловлено незавершенностью процесса диагенеза.

По всем определенным критериям можно сделать вывод о том, пластичность супесей возрастает в следующей последовательности: моренные твердой-полутвердой консистенции ($g\Pi dn$) \rightarrow моренные скрытопластичной консистенции ($g\Pi dn$) \rightarrow аллювиальные второй надпойменной террасы ($a_2\Pi pz$) \rightarrow аллювиальные первой надпойменной террасы ($a_1\Pi pz$).

При сравнении графиков на рисунках 1 и 2 очевидны различия в численных значениях критических давлений P_I и P_{II} . На наш взгляд, эти показатели корректнее и легче определять по рисунку 2, т. е. по зависимости $E = f(P)$.

Деформирование трехслойной круговой пластины на грунтовом основании. Рассмотрим перемещения в трехслойной круговой пластине, связанной с упругим основанием Винклера. Подобная задача при локальных нагрузках рассматривалась ранее [18]. Поэтому здесь приведем лишь численные результаты, соответствующие равномерно распределенной нагрузке, что является частным случаем решения, приведенного в [18].

Трехслойная пластина единичного радиуса закреплена по контуру. Ее слои набраны из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т, механические характеристики которых заимствованы в [4]. Величина интенсивности поверхностной нагрузки принималась $q_0 = -1$ МПа. Толщины слоев, отнесенные к ее радиусу $h_1 = h_2 = 0,04$, $h_3 = 0,4$. Коэффициенты жесткости соответствуют слабым ($\kappa = 1$ МПа/м, песок пылеватый), средним ($\kappa = 100$ МПа/м, туф, крупноблочный грунт) и весьма жестким ($\kappa = 5000$ МПа/м, гранит, гнейс) основаниям.

На рисунках 3 а, б показано изменение вдоль радиуса прогиба w и сдвига в заполнителе ψ рассматриваемой пластины при различных коэффициентах жесткости основания (МПа/м): 1 – $\kappa = 1$, 2 – $\kappa = 100$, 3 – $\kappa = 5000$ (значения перемещений увеличены в 20 раз). Для жестких оснований прогиб перестает быть максимальным в центре пластины, сдвиг в заполнителе меняет знак вдоль радиуса. Увеличение коэффициента жесткости основания приводит к изменению форм кривых.

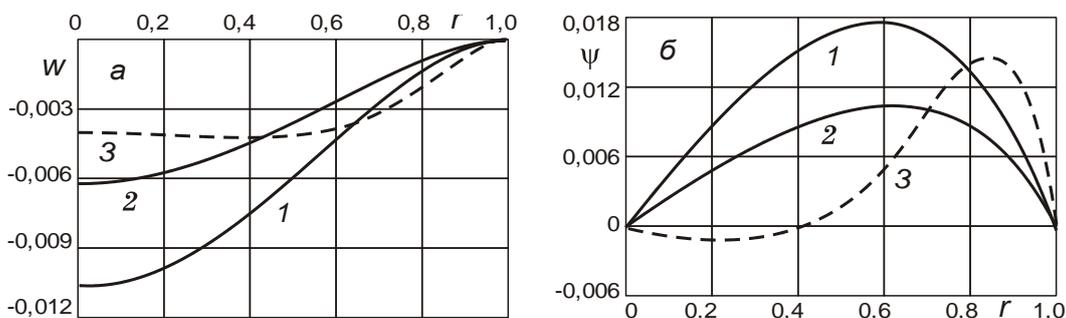


Рис. 3. Перемещения в трехслойной пластине

Выводы. Общие закономерности влияния генезиса, состава и свойств твердой фазы супесчаного грунта на его пластичность в напряженном состоянии сводятся к следующим положениям: пластичность и деформируемость моренных супесей *gIId* заметно снижены, что обуславливается повышением степени литификации грунтов. Увеличение пластичности и деформируемости флювиогляциальных отложениях *fIId* объясняется изменениями, происходящими при процессах выветривания. Представленные результаты могут быть полезными при расчетах фундаментов зданий и сооружений, передающих как статические, так и вибродинамические воздействия на естественные основания, при расчетах элементов конструкций, связанных с деформируемыми основаниями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грунтоведение / под ред. В. Т. Трофимова – М. : Изд-во Моск. университета, 2005. – 1023 с.
2. Галкин А. Н. Инженерная геология Беларуси / Часть 1. Грунты Беларуси / А. Н. Галкин – Витебск : ВГУ им. П. М. Машерова, 2016. – 367 с.
3. Инженерная геология России / под ред. В. Т. Трофимова, Е. А. Вознесенского, В. А. Королева // Том 1. Грунты России. – М. : Книжный дом, 2011. – 671 с.
4. Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
5. Могилевич Л. И. Гидроупругость вибропоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым наполнителем / Л. И. Могилевич, В. С. Попов, Э. И. Старовойтов // Наука и техника транспорта. – 2006. – № 2. – С. 56–63.
6. Gorshkov, A. G., Starovoitov E. I., Yarovaya A. V. Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell // International applied mechanics. – 2001. – Vol. 37, N. 9. – P. 1196–1203.
7. Starovoitov, É. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, N. 5. – P. 474–481.
8. Vakhneev, S. Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol. 18, N. 4. – P. 699–704.
9. Старовойтов Э. И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – 21, № 2. – С. 162–169.
10. Старовойтов, Э. И. Термоупругие свободные колебания трехслойной круговой пластины / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, А. В. Яровая // Теоретическая и прикладная механика. – Минск : БНТУ, 2022. – Вып. 36. – С. 15–20.

11. Starovoitov, E. I. Of dynamic characteristics three-phase soils and three-layer beams / E. I. Starovoitov, E. Yu. Tratshevskaya, E. L. Kuznetsova // Journal of the Balkan Tribological Association. 2021 – Vol. 27, N. 5. – P. 929–946.

12. Трацевская Е. Ю. Динамическая неустойчивость квазитиксотропных моренных грунтов / Е. Ю. Трацевская // Литосфера. – 2017. – № 1 (46). – С. 107–111.

13. Старовойтов Э. И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней/ Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.

14. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field / É. I. Starovoitov [et al.] // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88, N 4. – P. 1023–1029.

15. Трацевская Е. Ю. Влияние развития техногенного подтопления в дисперсных грунтах на надежность системы «основание–фундамент–здание» / Е. Ю. Трацевская // Экология урбанизированных территорий. – 2011. – № 2. – С. 71–76.

16. Трацевская Е. Ю. Особенности формирования техногенного подтопления дисперсных грунтов / Е. Ю. Трацевская // Природные ресурсы. – 2008. – № 2. – С. 106–112.

17. Трацевская Е. Ю. Геологическая опасность развития подтопления грунтов и оценка экономических рисков при ее реализации / Е. Ю. Трацевская // Природные ресурсы. – 2009. – № 1. – С. 102–109.

18. Трацевская Е. Ю. Закономерности развития суффозионно-просадочных явлений на территории Белоруссии / Е. Ю. Трацевская, А. Н. Галкин // Инженерная геология массивов лессовых пород. Труды международной научной конференции; под ред. В. Т. Трофимова, В. А. Королева. – М. – 2004. – С. 108–109.

19. Трацевская Е. Ю. Особенности тектоники территории г. Гомеля в связи с оценкой устойчивости геологической среды // Е. Ю. Трацевская, И. А. Красовская // Литосфера. – 2003. – № 1 (18). – С. 78–85.

20. Трацевская Е. Ю. Особенности освоения техногенных грунтов г. Гомеля в современных условиях / Е. Ю. Трацевская, А. Н. Галкин // Многообразие грунтов: морфология, причины, следствия. Труды Международной научной конференции; под ред. В. Т. Трофимова и В. А. Королева. – М. – 2003. – С. 123.

21. Трацевская Е. Ю. К вопросу о геологическом обосновании инженерной защиты городов (на примере г. Гомеля) // Промышленное и гражданское строительство. – 2005. – № 3. – С. 46–47.

22. Роль современных геологических процессов в формировании инженерно-геологических условий территории Гомеля / А. Н. Галкин [и др.] // Литосфера. – 2003. – № 2 (19). – С. 67–73.

23. Инженерно-геологическое районирование территории Гомеля / А. Н. Галкин [и др.] // Литосфера. – 2004. – № 2 (21). – С. 108–116.

Поступила: 31.03.2023

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ИМПУЛЬСНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК УЛЬТРАЗВУКОВЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Степаненко Д. А., Киндрук А. Н.

Белорусский национальный технический университет

Основными параметрами ультразвуковых колебательных систем (УЗКС), которые необходимо учитывать при их разработке и эксплуатации, являются собственные частоты колебаний и механическая добротность, связанная с коэффициентом затухания. Существует ряд методов экспериментального определения этих параметров, к которым относятся анализ частотных характеристик УЗКС с помощью анализаторов электрического импеданса и интегральный метод свободных колебаний (ИМСК) [1, 2]. ИМСК основан на возбуждении свободных затухающих колебаний УЗКС в широкой полосе частот путем кратковременного ударного воздействия. Возникающий при этом сигнал отклика системы, который может рассматриваться как ее импульсная характеристика, регистрируется с помощью датчика колебаний, например, пьезоэлектрического датчика, и представляет собой сумму затухающих гармонических колебаний, частоты которых совпадают с собственными частотами колебаний системы. Собственные частоты определяются с помощью дискретного преобразования Фурье экспериментально зарегистрированной импульсной характеристики, а одним из способов определения коэффициента затухания для каждой из частотных составляющих сигнала является синхронная демодуляция на основе преобразования Гильберта [2]. Результатом синхронной демодуляции является декомпозиция импульсной характеристики по дискретным частотным составляющим с экспоненциальными огибающими, постоянные времени которых обратно пропорциональны коэффициентам затухания для соответствующих собственных частот. Недостатком метода синхронной демодуляции является то, что характеристики используемого для его реализации фильтра нижних частот выбираются эмпирическим путем, что приводит к зависимости результатов от опыта расчетчика. В данной статье рассматривается альтернативный метод декомпозиции импульсных характеристик УЗКС, основанный на использовании преобразования Лапласа и не требующий для своей реализации эмпирического подбора параметров. Данный метод может быть использован для декомпозиции импульсных характеристик широкого класса линейных механических и немеханических систем, инвариантных относительно временного смещения входного воздействия.

Ядро $\exp(-j\omega t)$ интегрального преобразования Фурье, традиционно используемого для спектрального анализа сигналов, представляет собой комплексную экспоненту с мнимым аргументом, что соответствует декомпозиции сигнала по незатухающим гармоническим составляющим с круговыми частотами ω . В случае преобразования Лапласа ядро $\exp(-st)$ также представляет собой комплексную экспоненту, однако в общем случае $\text{Re}(s) \neq 0$, что позволяет, представив комплексную переменную s в форме $s = \beta + j\omega$, интерпретировать преобразование Лапласа как декомпозицию сигнала по затухающим гармоническим составляющим с круговыми частотами ω и коэффициентами затухания β . Если рассмотреть затухающий гармонический сигнал вида $y_{t_0}(t) = \exp(-\beta_0 t) \sin(\omega_0(t + t_0))u(t)$, где $u(t)$ – единичная функция Хевисайда, а индекс t_0 указывает на величину временного сдвига, необходимого для получения определенной начальной фазы $\varphi_0 = \omega_0 t_0$, то его одностороннее преобразование Лапласа примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y_{t_0}(t)\} &= \cos(\omega_0 t_0) \mathcal{L}\{\exp(-\beta_0 t) \sin(\omega_0 t) u(t)\} + \\ &+ \sin(\omega_0 t_0) \mathcal{L}\{\exp(-\beta_0 t) \cos(\omega_0 t) u(t)\} = \frac{\cos(\omega_0 t_0) \omega_0 + \sin(\omega_0 t_0) (s + \beta_0)}{(s + \beta_0)^2 + \omega_0^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Как следует из выражения (1), функция комплексной переменной, являющаяся изображением (по Лапласу) затухающего гармонического сигнала, имеет полюса в точках $s = -\beta_0 \pm j\omega_0$. Рассмотрим, каким образом влияет на положение и характер особых точек умножение сигнала на прямоугольную оконную функцию длительностью T

$$w_T(t) = u(t) - u(t - T),$$

соответствующую выделению фрагмента сигнала конечной длительности.

С учетом теоремы запаздывания получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y_{t_0}(t)w_T(t)\} &= \mathcal{L}\{y_{t_0}(t)\} - \mathcal{L}\{\exp(-\beta_0 t) \sin(\omega_0(t + t_0)) u(t - T)\} = \\ &= \mathcal{L}\{y_{t_0}(t)\} - \exp(-\beta_0 T) \mathcal{L}\{\exp(-\beta_0(t - T)) \sin(\omega_0((t - T) + t_0 + T)) u(t - T)\} = \\ &= \mathcal{L}\{y_{t_0}(t)\} - \exp(-\beta_0 T) \mathcal{L}\{y_{t_0+T}(t - T)\} = \frac{\cos(\omega_0 t_0) \omega_0 + \sin(\omega_0 t_0) (s + \beta_0)}{(s + \beta_0)^2 + \omega_0^2} - \\ &- \frac{\exp(-(s + \beta_0)T) (\cos(\omega_0(t_0 + T)) \omega_0 + \sin(\omega_0(t_0 + T)) (s + \beta_0))}{(s + \beta_0)^2 + \omega_0^2} = \frac{f(s)}{g(s)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $g(s) = (s + \beta_0)^2 + \omega_0^2$.

Покажем, что числитель $f(s)$ выражения (2) обращается в нуль при $s = -\beta_0 \pm j\omega_0$. Действительно, при $s = -\beta_0 + j\omega_0$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t_0) \omega_0 + \sin(\omega_0 t_0) (s + \beta_0) &= \omega_0 \cdot \exp(j\omega_0 t_0), \\ \cos(\omega_0(t_0 + T)) \omega_0 + \sin(\omega_0(t_0 + T)) (s + \beta_0) &= \omega_0 \cdot \exp(j\omega_0 T) \exp(j\omega_0 t_0), \\ \exp(-(s + \beta_0)T) &= \exp(j\omega_0 T), \end{aligned}$$

из которых вытекает $f(-\beta_0 + j\omega_0) = 0$.

Аналогичным образом доказывается, что $f(-\beta_0 - j\omega_0) = 0$.

Таким образом, в точках $s = -\beta_0 \pm j\omega_0$ изображение фрагмента сигнала конечной длительности будет иметь неопределенность вида $0/0$. Такие точки иногда описываются как особые точки типа «полюс-нуль» (pole-zero) [3]. В отличие от полюсов, в особых точках типа «полюс-нуль» изображение будет стремиться к конечному пределу, который может быть определен по правилу Лопиталья, учитывая, что функции $f(s)$ и $g(s)$ являются голоморфными:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\beta_0 \pm j\omega_0} \frac{f(s)}{g(s)} &= \lim_{s \rightarrow -\beta_0 \pm j\omega_0} \frac{f'(s)}{g'(s)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow -\beta_0 \pm j\omega_0} \left(\frac{\sin(\omega_0 t_0) - \sin(\omega_0(t_0 + T)) \exp(-(s + \beta_0)T)}{2(s + \beta_0)} + \right. \\ &+ \left. \frac{T \cdot \exp(-(s + \beta_0)T) (\cos(\omega_0(t_0 + T)) \omega_0 + \sin(\omega_0(t_0 + T)) (s + \beta_0))}{2(s + \beta_0)} \right) = \\ &= \pm \frac{\sin(\omega_0 t_0) - \sin(\omega_0(t_0 + T)) \exp(\pm j\omega_0 T)^* + T \omega_0 \cdot \exp(\pm j\omega_0 t_0)}{2j\omega_0}. \end{aligned} \quad (3)$$

где * обозначает комплексное сопряжение.

Это согласуется с тем фактом, что область сходимости интеграла Лапласа для абсолютно интегрируемых сигналов конечной длительности расширяется по сравнению с сигналами бесконечной длительности до всей комплексной плоскости [4, с. 663].

В качестве эффективного средства декомпозиции импульсных характеристик может использоваться взвешенный (нормированный) энергетический спектр преобразования Лапласа [3]:

$$\mathcal{E}_w\{y(t)\} = \frac{|\mathcal{L}\{y(t)\}|^2}{\mathcal{E}\{y_\beta(t)\}}, \quad (4)$$

где $y_\beta(t) = y(t) \cdot \exp(-\beta t)$ – экспоненциально-взвешенный сигнал, $\mathcal{E}\{y_\beta(t)\} = \int_0^T (y_\beta(t))^2 dt$ – энергия сигнала, сигнал $y(t)$ предполагается имеющим конечную длительность T .

Выражение (4) вытекает из известного определения нормированной энергетической плотности сигнала:

$$\frac{|\mathcal{F}\{y(t)\}|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}\{y(t)\}|^2 d\omega}, \quad (5)$$

где \mathcal{F} – преобразование Фурье.

Если в выражение (5) вместо функции $y(t)$ подставить экспоненциально-взвешенный сигнал $y_\beta(t)$, то с учетом теоремы Парсеваля получим

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{F}\{y_\beta(t)\}|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}\{y_\beta(t)\}|^2 d\omega} &= \frac{|\mathcal{F}\{y_\beta(t)\}|^2}{2\pi \cdot \int_0^T (y_\beta(t))^2 dt} = \frac{\left| \int_0^T y_\beta(t) \cdot \exp(-j\omega t) dt \right|^2}{4\pi^2 \cdot \int_0^T (y_\beta(t))^2 dt} = \\ &= \frac{\left| \int_0^T y(t) \cdot \exp(-(\beta + j\omega)t) dt \right|^2}{4\pi^2 \cdot \int_0^T (y_\beta(t))^2 dt}, \end{aligned}$$

что с точностью до множителя совпадает с выражением (3).

В отличие от преобразования Лапласа, обеспечивающего одномерную декомпозицию (по частоте) импульсной характеристики, взвешенный энергетический спектр преобразования Лапласа обеспечивает двумерную декомпозицию (как по частоте, так и по коэффициенту затухания): особенностям преобразования Лапласа типа «полюс-нуль» соответствуют локальные максимумы взвешенного энергетического спектра [3]. Далее приводится анализ эффективности и особенностей применения взвешенного энергетического спектра для декомпозиции импульсных характеристик на примерах искусственно сгенерированных (синтетических) импульсных характеристик.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим двухкомпонентную импульсную характеристику вида

$$y(t) = (\exp(-150 \cdot t) \sin(2 \cdot 10^4 \cdot t + 0.35 \cdot \pi) + A_2 \cdot \exp(-200 \cdot t) \sin(3 \cdot 10^4 \cdot t)) \times (u(t) - u(t - T)). \quad (6)$$

Прямое разделение компонент импульсной характеристики путем фильтрации в рассматриваемом случае невозможно, так как на Фурье-спектре компонентам соот-

ветствуют широкие перекрывающиеся между собой пики. Рассмотрим вначале случай $A_2 = 0,1$, $T = 0,02$ с. Будем считать, что характеристика задана в дискретной форме с шагом дискретизации $\Delta t = 10$ мкс. Входящие в выражение (4) модуль преобразования Лапласа и энергия сигнала вычислялись путем численного интегрирования по квадратурным формулам. При расчете коэффициент затухания β варьировался в диапазоне от -10^3 с $^{-1}$ до $+10^3$ с $^{-1}$ с шагом $\Delta\beta = 10$ с $^{-1}$, а круговая частота ω – в диапазоне от $-2,5 \cdot 10^4$ рад/с до $+2,5 \cdot 10^4$ рад/с с шагом $\Delta\omega = 20$ рад/с. На рисунке 1 представлены результаты расчета модуля преобразования Лапласа вдоль линий $\beta = -150$ с $^{-1}$ и $\omega = 2 \cdot 10^4$ рад/с, соответствующих параметрам первого слагаемого импульсной характеристики.

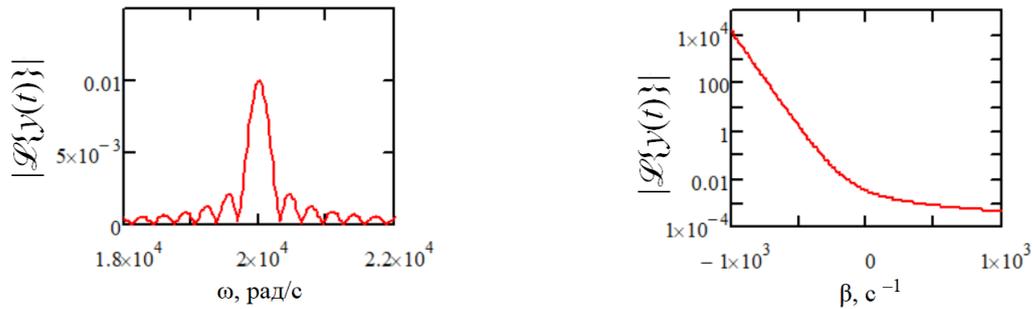


Рис. 1. Результаты расчета модуля преобразования Лапласа

На линии $\beta = -150$ с $^{-1}$ по пиковому значению модуля однозначно идентифицируется частотная составляющая $\omega = 2 \cdot 10^4$ рад/с, соответствующая первому слагаемому импульсной характеристики. Эта частотная составляющая будет идентифицироваться и на любой другой линии $\beta = \text{const}$ с той лишь разницей, что ей будет соответствовать более широкий пик. Результаты расчета вдоль линии $\omega = 2 \cdot 10^4$ рад/с подтверждают теоретическое положение об одномерном характере декомпозиции, обеспечиваемой преобразованием Лапласа: модуль преобразования Лапласа монотонно убывает вдоль данной линии, что не позволяет определить величину коэффициента затухания, соответствующего рассматриваемой частоте. На рисунке 2 представлены результаты расчета взвешенного энергетического спектра преобразования Лапласа вдоль тех же линий комплексной плоскости, которые использовались при построении рисунка 1.

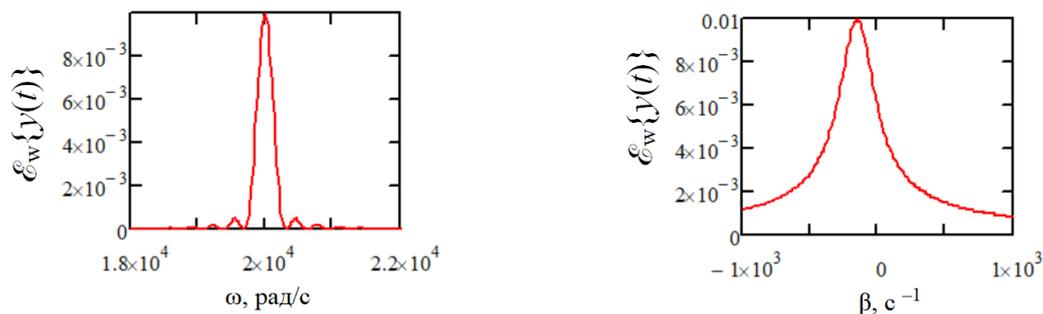


Рис. 2. Результаты расчета взвешенного энергетического спектра преобразования Лапласа

Как видно из приведенных результатов, применение взвешенного энергетического спектра обеспечивает двумерную декомпозицию импульсной характеристики: пиковое значение спектра на линии $\omega = 2 \cdot 10^4$ рад/с соответствует коэффициенту затухания $\beta = 150$ с $^{-1}$, что совпадает с коэффициентом затухания для первого слагаемого импульсной характеристики.

Следует отметить, что при недостаточно высоком разрешении $\Delta\omega$ по частоте сечение энергетического спектра вдоль линии $\omega = \omega_0$, где ω_0 – круговая частота, определенная по пиковому значению на линии $\beta = \text{const}$, может характеризоваться наличием двух локальных максимумов, разделенных между собой минимумом (рисунок 3, отстройка по частоте $\Delta\omega = -200$ рад/с по отношению к рисунку 2).

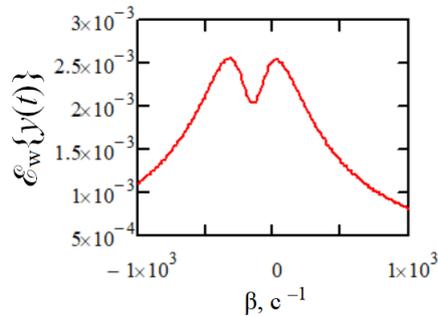


Рис. 3. Сечение энергетического спектра с двумя локальными максимумами

В этом случае коэффициент затухания для рассматриваемой частоты определяется по минимальному значению спектра. Появление минимума на сечении энергетического спектра поясняется рисунком 4, на котором представлена цветовая карта значений энергетического спектра на участке комплексной плоскости $1,8 \cdot 10^4$ рад/с $\leq \omega \leq 2,2 \cdot 10^4$ рад/с, -10^3 с⁻¹ $\leq \beta \leq 10^3$ с⁻¹.

Вертикальная линия соответствует сечению $\beta = -150$ с⁻¹, а горизонтальные линии – сечениям $\omega = 2 \cdot 10^4$ рад/с и $\omega = 1,98 \cdot 10^4$ рад/с. Как видно из рисунка, изогипсы энергетического спектра вблизи точки максимума имеют вид выпуклых замкнутых кривых эллипсовидной формы, однако по мере удаления от точки максимума приобретают вид выпукло-вогнутых кривых наподобие овалов Кассини. Возникновение минимума на горизонтальных сечениях энергетического спектра наблюдается при их прохождении через вогнутые участки изогипс.

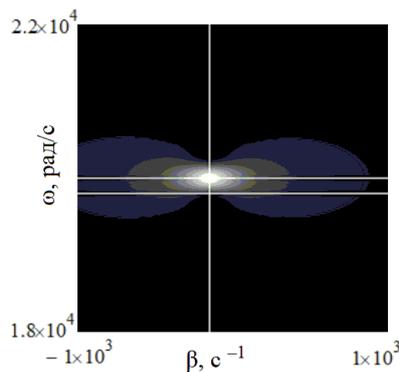


Рис. 4. Цветовая карта значений энергетического спектра

Пример 2. В рассмотренном выше примере точное определение параметров первого слагаемого импульсной характеристики было возможным благодаря малому значению ($A_2 = 0,1$) амплитуды второго слагаемого. При увеличении амплитуды второго слагаемого до значения $A_2 = 1$ расчетное значение коэффициента затухания для первого слагаемого составляет $\beta = 164,3$ с⁻¹, то есть отклоняется от истинного значения на 9,5 %. Это объясняется близким взаимным расположением особых точек, соответствующих слагаемым импульсной характеристики на комплексной плоскости. Точность

определения коэффициента затухания в этом случае может быть повышена с помощью следующих приемов:

1. Рассмотрение фрагмента сигнала с длительностью T , достаточно большой для практически полного затухания всех частотных составляющих сигнала, в том числе наименее демпфированной составляющей.

2. Рассмотрение взвешенного энергетического спектра преобразования Лапласа на терминальных отрезках сигнала вида $[(1 - \alpha)T; T]$, где $0 < \alpha < 1$. При снижении α до некоторого порогового значения основной вклад в сигнал начинает вносить наименее демпфированная составляющая, так как к моменту времени $t = (1 - \alpha_{\text{пор}})T$ остальные составляющие сигнала практически затухают. Использование данного приема имеет аналогию с применением кратковременного преобразования Фурье, которое выполняют на отрезках сигнала ограниченной длительности с целью анализа временной эволюции характеристик сигнала.

В случае импульсной характеристики вида (6) с $A_2 = 1$ и $T = 0.04$ с отношение амплитуд пиков, соответствующих на энергетическом спектре частотам $2 \cdot 10^4$ рад/с и $3 \cdot 10^4$ рад/с, составляет 6.5 при $\alpha = 1$ и 49.1 при $\alpha = 0.1$, то есть при $\alpha = 0.1$ составляющая с частотой $3 \cdot 10^4$ рад/с практически затухает. В общем случае пик энергетического спектра, имеющий наибольшую амплитуду при малых α , будет соответствовать наименее демпфированной частотной составляющей: в рассматриваемом случае это составляющая с частотой $2 \cdot 10^4$ рад/с. На рисунке 5 приведены сечения энергетического спектра вдоль линии $\omega = 2 \cdot 10^4$ рад/с при $\alpha = 1$ и $\alpha = 0.1$.



Рис. 5. Сечения энергетического спектра при различных значениях α

При $\alpha = 1$ наблюдающийся в сечении спектра пик обладает выраженной асимметрией, что видно из сравнения его профиля с профилем симметричного пика, изображенного штриховой линией и полученного путем симметричного продолжения левой части реального пика относительно вертикальной линии, проходящей через точку максимума. Асимметричность пика объясняется его взаимодействием с близко расположенным пиком, соответствующим второй частотной составляющей импульсной характеристики. Данное взаимодействие приводит к смещению точки максимума в сторону второго пика, то есть в область более высоких значений коэффициента затухания β . При этом площадь под левой частью пика оказывается больше площади под его правой частью. При $\alpha = 0,1$ пик становится более симметричным, что объясняется значительным снижением амплитуды пика, соответствующего второй частотной составляющей. Расчетное значение коэффициента затухания снижается при этом до величины $\beta = 148 \text{ c}^{-1}$, что соответствует снижению погрешности определения β с 9,5 % (при $\alpha = 1$) до 1,3 %. В общем случае степень асимметричности пика может выступать в качестве меры точности определения коэффициента затухания β : чем выше асимметричность, тем менее точным будет являться расчетное значение β . В качестве количественной характеристики степени асимметричности пика может использоваться коэффициент асимметрии Фишера-Пирсона [5]

$$K_a = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2\right)^{3/2}}$$

где x_i – значения случайной величины, вместо которых подставляются значения \mathcal{E}_w ;

\bar{x} – среднее значение случайной величины;

N – количество значений случайной величины.

На рисунке 6 представлен расчетный график зависимости коэффициента асимметрии пика от величины α .

Как видно из графика, оптимальное значение коэффициента асимметрии $K_a = 0$, соответствующее наиболее точному расчетному значению коэффициента затухания β , достигается при $\alpha \approx 0,13$. Расчетное значение β составляет в этом случае $149,1 \text{ с}^{-1}$, что соответствует погрешности 0,6 %.

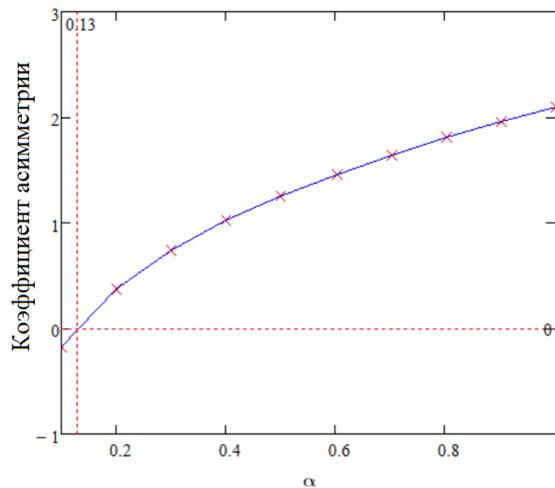


Рис. 6. График зависимости коэффициента асимметрии от величины α

Для пика, соответствующего составляющей с частотой $3 \cdot 10^4 \text{ рад/с}$, характер асимметричности изменяется на противоположный: площадь под левой частью пика оказывается меньше площади под его правой частью. Точка максимума при этом смещается в область более низких значений коэффициента затухания β : расчетное значение коэффициента затухания при $\alpha = 1$ составляет $\beta = 120,6 \text{ с}^{-1}$ при истинном значении $\beta = 200 \text{ с}^{-1}$. Столь значительное отклонение объясняется высокой амплитудой влияющего пика $2 \cdot 10^4 \text{ рад/с}$ по отношению к амплитуде рассматриваемого пика (отношение амплитуд составляет 6,5). Уменьшение α будет приводить к ухудшению оценки β для составляющей с частотой $3 \cdot 10^4 \text{ рад/с}$, так как со снижением α упомянутое отношение амплитуд пиков будет расти (достигая 49,1 при $\alpha = 0,1$). В связи с этим для точного определения значений β для всех частотных составляющих рассматриваемая методика должна применяться итеративным образом с последовательной идентификацией параметров всех частотных составляющих в порядке увеличения их демпфирования: после идентификации параметров наименее демпфированной частотной составляющей (первый шаг итеративного процесса) она вычитается из импульсной характеристики, а к результату вычитания снова применяется процедура определения параметров наименее демпфированной компоненты (второй шаг итерации). Требуемое количество шагов итерации зависит от числа присутствующих в составе импульсной характеристики частотных компонент.

Взаимное влияние пиков энергетического спектра при больших α также проявляется в завышенной оценке амплитуд частотных составляющих. Для однокомпонентной импульсной характеристики амплитуда может быть рассчитана по формуле

$$A \approx \frac{|\mathcal{L}\{y(t)\}|_{s=j\omega_0-\beta_0}}{0.5T}, \quad (7)$$

где модуль преобразования Лапласа в числителе определяется путем численного интегрирования.

Знаменатель формулы (7) в случае точного равенства должен представлять собой модуль выражения (3) (модуль преобразования Лапласа, рассчитанного аналитически для однокомпонентной импульсной характеристики с $A = 1$). Однако для высоких частот ω_0 в выражении (3) остается значимым только последнее слагаемое $T\omega_0 \cdot \exp(\pm j\omega_0 t_0)/2j\omega_0$, модуль которого равен $0,5T$.

Формула (7) может быть использована и для многокомпонентных импульсных характеристик при условии доминирования рассматриваемой частотной составляющей по амплитуде, что в общем случае будет справедливым для наименее демпфированной составляющей при малых значениях α . При $\alpha < 1$ вместо общей длительности T сигнала в формулу (7) следует подставлять αT , а численное интегрирование производить на отрезке $[(1 - \alpha)T; T]$. Для рассматриваемого примера расчет дает для составляющей с частотой $2 \cdot 10^4$ рад/с следующие значения амплитуды: $A_1 = 1,352$ при $\alpha = 1$ и $A_1 = 0,96$ при $\alpha = 0,13$, что соответствует снижению погрешности расчета с 35,2 % до 4 %.

Уширение пика при снижении величины α может быть объяснено аналогией с известным из спектрального анализа эффектом растекания спектра: при умножении бесконечного сигнала, представляющего собой сумму дискретных гармонических составляющих, на прямоугольную оконную функцию конечной длительности спектр сигнала сворачивается со спектром оконной функции, имеющим вид sinc-функции, что приводит к уширению элементов спектра, соответствующих гармоническим составляющим сигнала [6, с. 71]. При этом степень уширения определяется шириной основного «лепестка» sinc-функции и увеличивается со снижением длительности оконной функции.

Для определения начальной фазы наименее демпфированной составляющей сигнала может использоваться кросс-корреляция между исходным сигналом и функцией

$$y_1(t) = A_1 \exp(-\beta_1 t) \sin(\omega_1 t),$$

параметры A_1 , β_1 и ω_1 которой определены в соответствии с описанной выше методикой.

Начальная фаза φ_0 определяется по формуле

$$\varphi_0 = 2\pi - \omega_1 t_1,$$

где t_1 – значение времени, соответствующее первому максимуму кросс-корреляционной функции.

Для рассматриваемого примера получаем $\varphi_0 = 0,345 \cdot \pi$ при истинном значении $0,35 \cdot \pi$.

Для составляющей с частотой $3 \cdot 10^4$ рад/с расчет дает следующие значения параметров: $\beta = 199,7 \text{ с}^{-1}$, $A = 0,994$, $\varphi_0 = 0,09 \cdot \pi$ при истинных значениях $\beta = 200 \text{ с}^{-1}$, $A = 1$, $\varphi_0 = 0$.

Таким образом, итеративный расчет позволяет определить с достаточно высокой точностью значения параметров всех составляющих импульсной характеристики. Дальнейшее уточнение параметров возможно с помощью метода нелинейной регрес-

сии, в котором в качестве начальных приближений можно использовать расчетные значения параметров, полученные с помощью описанной выше методики. Например, для рассматриваемого численного примера применение функции *genfit*, используемой в Mathcad для решения задач нелинейной регрессии, позволяет определить точные значения всех параметров импульсной характеристики.

На основе вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

1. Разработана методика определения параметров (собственных частот ω , коэффициентов затухания β , амплитуд A и начальных фаз φ_0) компонент импульсной характеристики УЗКС, основанная на использовании взвешенного энергетического спектра преобразования Лапласа, определяемого путем численного интегрирования на терминальных отрезках сигнала. Разработанная методика применяется итеративным образом для последовательной идентификации параметров всех компонент импульсной характеристики в порядке возрастания их демпфирования.

2. На примере синтетической двухкомпонентной импульсной характеристики показана эффективность и точность применения разработанной методики для декомпозиции импульсных характеристик.

3. Расчетные значения параметров компонент импульсной характеристики, полученные с помощью предложенной методики, могут использоваться в качестве начальных приближений для уточнения этих параметров методом нелинейной регрессии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алешин Н. П. Методы акустического контроля металлов / Н. П. Алешин [и др.]. – М. : Машиностроение, 1989. – 456 с.
2. Степаненко Д. А. Определение эксплуатационных параметров ультразвуковых колебательных систем интегральным методом свободных колебаний / Д. А. Степаненко, К. А. Бунчук // Теоретическая и прикладная механика. – 2022. – Вып. 37. – С. 45–53.
3. Corinthios, M. J. Laplace spectrum for exponential decomposition and pole-zero estimation / M. J. Corinthios // IEE Proceedings – Vision, Image and Signal Processing. – 2001. – Vol. 148, No. 5. – P. 305–314.
4. Oppenheim, A. V. Signals & Systems / A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab. – New Jersey : Prentice Hall, 1996. – 957 p.
5. Doane, D. P. Measuring skewness: A forgotten statistic? / D. P. Doane, L. E. Seward // Journal of Statistics Education. – 2011. – Vol. 19, No. 2. – 18 p.
6. Prabhu, K. M. M. Window functions and their applications in signal processing / K. M. M. Prabhu. – Boca Raton : CRC Press, 2014. – 382 p.

Поступила: 21.04.2023

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Дудяк А. И., Дикан Ж. Г., Гончарова Е. А., Костюк И. Г.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Типичным примером стержней из композиционных материалов /1/ являются стержни из биметаллических пар, составленных из материала с разными значениями модулей Юнга, и работающих на изгиб как консольные или двух опорные балки /2–3/. В качестве примера можно представить железобетонные балки, широко используемые в строительстве различных сооружений.

Рассмотрим случай чистого изгиба балки прямоугольного поперечного сечения, составленной из двух неоднородных материалов, обладающих различными модулями продольной упругости, т. е. $E_1 > E_2$, при равных площадях сечений $A_1 = A_2$ (рисунок 1).

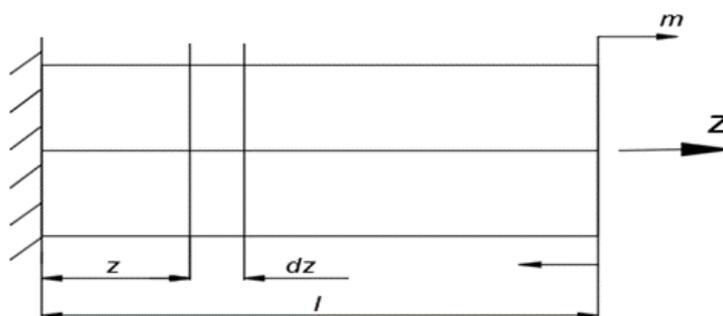


Рис. 1. Схема нагружения балки

В результате деформации верхние слои участка будут растянуты, а нижние сжаты (рисунок 2).

Рассмотрим случай чистого изгиба консольной балки, показанной схематически на рисунке 1.

Для исследования распределения нормальных напряжений возьмем стержень прямоугольного поперечного сечения у которого высоты отдельных частей сечения из неоднородных материалов будут равны. Можно утверждать, что нейтральная ось сместится в сторону материала с большим значением модуля продольной упругости E_1 (рисунок 2, а).

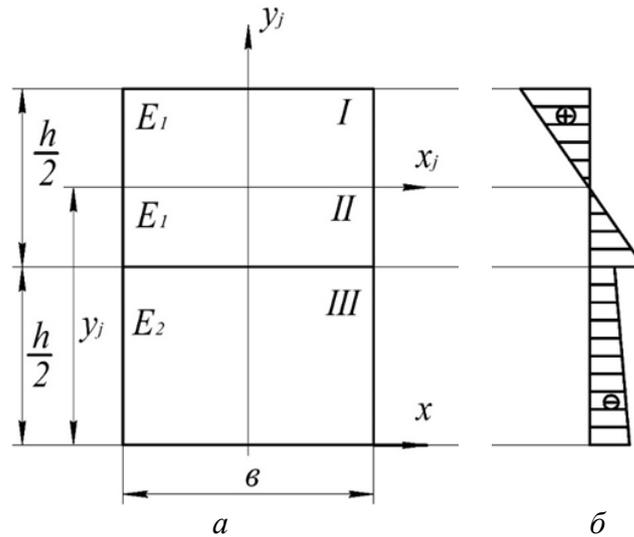


Рис. 2. Поперечное сечение балки (а), эпюра нормальных напряжений (б)

Ось y_j является осью симметрии для обеих частей сечения и, поэтому, она является главной осью центральной жесткости сечения [4]. Для получения деформации плоского изгиба необходимо, чтобы через ось y_j проходила силовая плоскость.

Нейтральная ось будет совпадать с осью x_j , проходящей через центр жесткости сечения [4] и она будет также главной осью центральной жесткости сечения. Определим координату этой оси относительно оси x :

$$y_j = \frac{(E \cdot S_x)_{\text{пр}}}{\sum_{i=1}^n E_i A_i} = \frac{E_1 \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{3}{4} h + E_2 \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4}}{E_1 \cdot b \cdot \frac{h}{2} + E_2 \cdot b \cdot \frac{h}{2}} = \frac{3E_1 + E_2}{4(E_1 + E_2)} h. \quad (1)$$

Главная ось центральной жесткости x_j делит сечение на три части.

Выделим из балки после ее деформации двумя сечениями перпендикулярными к оси балки элемент, длина которого до деформации была равной dz (рисунок 1). В результате деформации этого участка под действием изгибающего момента M нейтральный слой mn образует часть дуги окружности (рисунок 3). Верхние волокна такого элемента относительно нейтрального слоя удлинятся, а нижние – укоротятся.

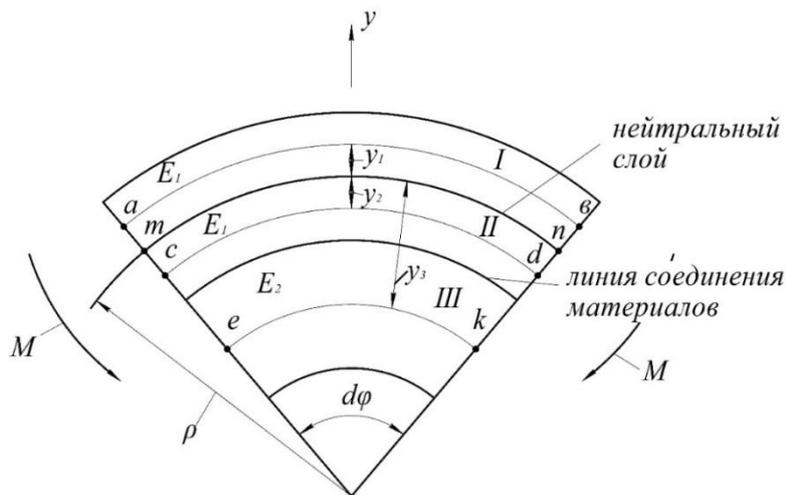


Рис. 3. Деформированное состояние участка балки длиной dz

Относительное удлинение волокна av будет равно:

$$\varepsilon_1 = \frac{av - mn}{mn} = \frac{(\rho + y_1)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y_1}{\rho}. \quad (2)$$

Относительное укорочение волокон cd и ek будут соответственно равны:

$$\varepsilon_2 = \frac{cd - mn}{mn} = \frac{(\rho - y_2)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = -\frac{y_2}{\rho}. \quad (3)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{ek - mn}{mn} = \frac{(\rho - y_3)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = -\frac{y_3}{\rho}. \quad (4)$$

В соответствии с законом Гука нормальные напряжения в отдельных частях поперечного сечения будут равны:

$$\sigma_1 = E_1 \frac{y_1}{\rho}; \quad \sigma_2 = -E_1 \frac{y_2}{\rho}; \quad \sigma_3 = -E_2 \frac{y_3}{\rho}. \quad (5)$$

В соответствии с формулами (5) закон изменения нормальных напряжений по высоте данного сечения приведен на рисунке 2, б. Нормальные напряжения изменяются по линейному закону и достигают максимальных значений в наиболее удаленных зонах от нейтральной линии. В зоне соединения двух неоднородных материалов эпюра напряжений терпит разрыв.

Из условий статического равновесия можно представить следующее равенство:

$$\frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y_1^2 dA_1 + \frac{E_1}{\rho} \int_{A_2} y_2^2 dA_2 + \frac{E_2}{\rho} \int_{A_3} y_3^2 dA_3 = M. \quad (6)$$

Интегралы, входящие в уравнения (6) представляют собой осевые моменты инерции частей сечения относительно нейтральной оси x_j , а поэтому:

$$\frac{1}{\rho} (E_1 J_{x_1} + E_1 J_{x_2} + E_2 J_{x_3}) = \frac{(EJ_x)_{\text{пр}}}{\rho} = M. \quad (7)$$

Из уравнения (7) следует:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{(EJ_x)_{\text{пр}}}. \quad (8)$$

Подставив выражение (8) в уравнения (5) получим:

$$\sigma_1 = \frac{M \cdot E_1}{(EJ_x)_{\text{пр}}} \cdot y_1; \quad \sigma_2 = -\frac{M \cdot E_1}{(EJ_x)_{\text{пр}}} \cdot y_2; \quad \sigma_3 = -\frac{M \cdot E_2}{(EJ_x)_{\text{пр}}} \cdot y_3. \quad (9)$$

Когда стержень состоит из n стержней прочно соединенных между собой, которые отличаются модулями продольной упругости, формулу для определения нормальных напряжений в любой точке поперечного сечения можно представить в следующем виде:

$$\sigma_i = \frac{E_i \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} \cdot y_i \quad (10)$$

где E_i – модуль продольной упругости части сечения, в которой определяют величину нормального напряжения; y_i – координата точки, в которой определяют напряжение, и она должна находиться в той части сечения, которой соответствует E_i .

Полученное уравнение (10) позволяет определять нормальные напряжения для сложных сечений из неоднородных материалов.

Пример. Двухопорная железобетонная балка нагружена сосредоточенной силой $F = 70 \text{ кН}$. Исследовать распределение нормальных σ и касательных τ напряжений по высоте сечения балки в зоне приложения нагрузки F . Схема нагружения балки и эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q показаны на рисунке 4, а. Поперечное сечение приведено на рисунке 4, б. Принять модуль упругости бетона равным $E_1 = 0,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, модуль упругости стали $E_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

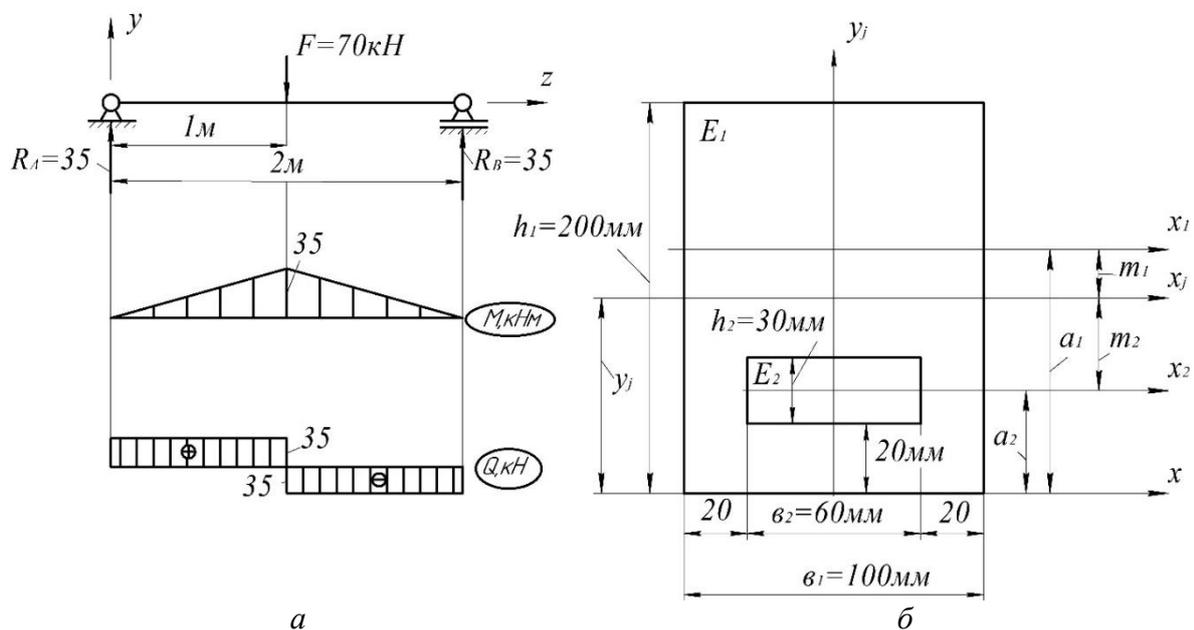


Рис. 4. Схема нагружения балки (а), поперечное сечение балки (б)

Ось y_j является осью симметрии и поэтому она является главной осью центральной жесткости сечения. Определим место положения второй главной оси центральной жесткости x_j приняв за ось отсчета ось x . Расстояние между осью x и центральными осями x_1 и x_2 будут равны: $a_1 = 100 \text{ мм}$; $a_2 = 35 \text{ мм}$.

В соответствии с /4–5/ получим следующее выражение для определения координаты y_j , определяющей положение оси x_j .

$$y_j = \frac{E_1 \cdot A_1 \cdot a_1 - E_1 \cdot A_2 \cdot a_2 + E_2 \cdot A_2 \cdot a_2}{E_1 A_1 - E_1 A_2 + E_2 A_2} = \frac{E_1 \cdot b_1 \cdot h_1 \cdot a_1 + (E_2 - E_1) b_2 h_2 a_2}{E_1 b_1 h_1 + (E_2 - E_1) b_2 h_2}$$

Подставив все числовые величины в последнее выражение получим:

$$y_j = \frac{0,2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 200 \cdot 100 + (2 \cdot 10^5 - 0,2 \cdot 10^5) \cdot 60 \cdot 30 \cdot 35}{0,2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 200 + (2 \cdot 10^5 - 0,2 \cdot 10^5) \cdot 60 \cdot 30} = 70,91 \text{ мм}$$

По полученному значению y_j на рисунке 4, б представлено положение главной оси центральной жесткости x_j . При правильном определении места положения оси x_j статический момент жесткости сечения относительно этой оси будет равен нулю. Определим расстояние m_1 и m_2 между осью x_j и центральными осями x_1 и x_2 . $m_1 = 29,09$ мм; $m_2 = -35,91$ мм.

Определяем статический момент жесткости сечения:

$$(E s_{x_j})_{\text{пр}} = E_1 A_1 m_1 - E_1 A_1 m_2 + E_2 A_2 m_2 = E_1 v_1 h_1 m_1 + (E_2 - E_1) v_2 h_2 m_2$$

или:

$$(E s_{x_j})_{\text{пр}} = 0,2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 200 \cdot 29,09 + (2 \cdot 10^5 - 0,2 \cdot 10^5) \cdot 60 \cdot 30(-35,91) = \\ = 129,288 \cdot 10^5 - 129,277 \cdot 10^5 \approx 0$$

Проверкой установлено, что место положения главной оси центральной жесткости x_j определено правильно.

На основании // получим величину приведенной жесткости сечения $(E J_x)_{\text{пр}}$.

$$(E J_x)_{\text{пр}} = E_1 J_{x_1} + E_1 A_1 m_1^2 - E_1 J_{x_2} - E_1 A_2 m_2^2 + E_2 J_{x_2} + E_2 A_2 m_2^2.$$

В расширенном виде последнее выражение может быть представлено:

$$(E J_x)_{\text{пр}} = E_1 \left[\frac{v_1 h_1^3}{12} + v_1 h_1 m_1^2 - \frac{v_2 h_2^3}{12} - v_2 h_2 m_2^2 \right] + E_2 \left[\frac{v_2 h_2^3}{12} + v_2 h_2 m_2^2 \right] \\ (E J_x)_{\text{пр}} = 0,210^5 \left[\frac{100 \cdot 200^3}{12} + 100 \cdot 200 \cdot 29,09^2 - \frac{60 \cdot 30^3}{12} - 60 \cdot 30(-35,91)^2 \right] + \\ + 2 \cdot 10^5 \left[\frac{60 \cdot 30^3}{12} + 60 \cdot 30(-35,91)^2 \right] = 2113,942 \cdot 10^9 \text{ Н мм}^2.$$

На рисунке 5, а показано поперечное сечение балки и указана точками А, В, С и Д зоны в которых следует определить величины нормальных напряжений для построения эпюры распределения напряжений по высоте сечения.

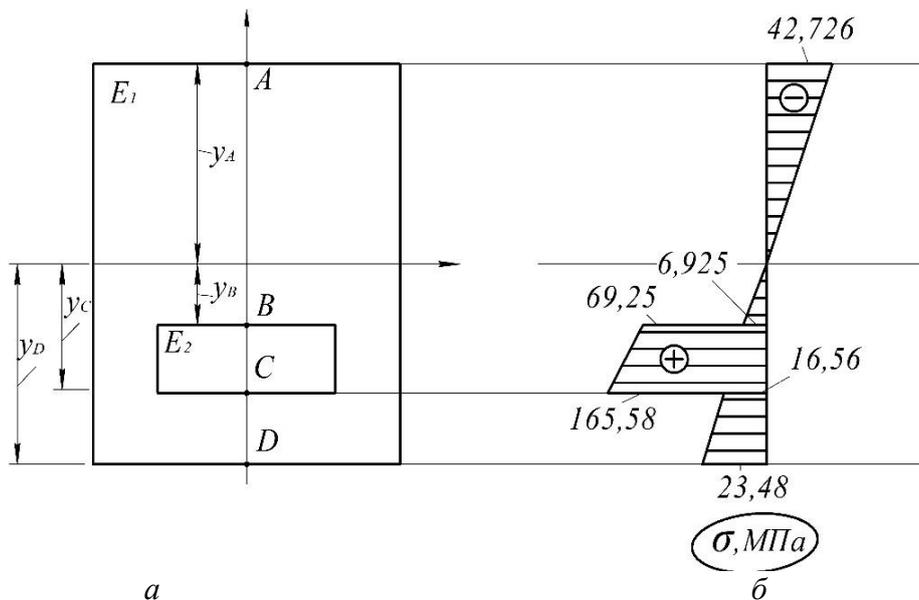


Рис. 5. Поперечное сечение балки (а), эпюра нормальных напряжений (б)

Координаты соответствующих точек относительно оси x_j будут равны: $y_A = 129,09$ мм; $y_B = 20,91$ мм; $y_C = 50,91$ мм; $y_D = 70,91$ мм.

Определяем величину нормального напряжения в точке A , используя формулу (10).

$$\sigma_A = -\frac{E_1 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_A = -\frac{0,2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942 \cdot 10^9} \cdot 129,09 = -42,726 \text{ МПа}$$

Определяем величину нормального напряжения в точке B в массе бетона.

$$\sigma_B = \frac{E_1 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_B = \frac{0,2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942 \cdot 10^9} \cdot 20,91 = 6,925 \text{ МПа}$$

Определяем величину нормального напряжения в точке B в массе стальной пластины.

$$\sigma_B = \frac{E_2 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_B = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942} \cdot 20,91 = 69,25 \text{ МПа}$$

Определяем величину нормального напряжения в точке C в массе стальной пластины.

$$\sigma_C = \frac{E_2 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_C = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942 \cdot 10^9} \cdot 50,91 = 165,58 \text{ МПа}$$

Определяем величину нормального напряжения в точке C в массе бетона.

$$\sigma_C = \frac{E_1 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_C = \frac{0,2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942 \cdot 10^9} \cdot 50,91 = 16,56 \text{ МПа}$$

Определяем величину нормального напряжения в точке Д.

$$\sigma_D = \frac{E_1 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_D = \frac{0,2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942 \cdot 10^9} \cdot 70,91 = 23,48 \text{ МПа}$$

По полученным результатам построена эпюра распределения нормальных напряжений по высоте сечения (рисунок 5, б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Методика расчета стержней из композиционных материалов / А. И. Дудяк [и др.] Перспективные направления развития технологии машиностроения и металлообработки. Технология – Оборудование – Инструмент – Качество: тезисы докладов 36-ой Международной научно-технической конференции в рамках международной специализированной выставки «Машиностроение / Металлообработка–2022»; редкол.: В. К. Шелег (отв. ред.) [и др.]. – Минск : Бизнесофсет, 2022. – С. 36–38.
2. Степин П. А. Сопротивление материалов. – М. : Высшая школа, 1987. – 303 с.
3. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов : учебник для вузов / М. Д. Подскребко. – Минск : Выш. шк., 2007. – 797 с.
4. Дудяк, А. И. Геометрические характеристики плоских сечений переменной жесткости: пособие для студентов специальностей 1–36 01 01 «Технология машиностроения», 1–36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства», 1–36 01 05 «Машины и технология обработки материалов давлением», 1–55 01 01 «Интеллектуальные приборы, машины и производства», 1–55 01 02 «Интегральные сенсорные системы», 1–55 01 03 «Компьютерная мехатроника» / А. И. Дудяк, Ж. Г. Дикан. – Минск : БНТУ, 2018. – 32 с.

Поступила: 18.04.2023

ТЕРМОДИНАМИКА ВОЗДЕЙСТВИЕ ИМПУЛЬСА ВОЗДУХА НА РОГОВИЦУ

¹Чигарев А. В., ²Михнович М. О.

¹Белорусский государственный университет

²Белорусский национальный технический университет

Введение. Пневмотонометр, предназначенный для измерения внутриглазного давления (IOP) сочетает механическое воздействие импульсом воздуха на роговицу глаза с оптическим измерением перемещения точек поверхности роговицы [1]. В работе рассмотрена биомеханика глаза под внешним действием. Оптическая составляющая измерения не рассматривается, т. к. оптические воздействия на динамику роговицы ничтожно малы по сравнению с механическими и будут отдельно рассмотрены в дальнейшем в рамках дифракции оптической волны на неровной поверхности роговицы при ее деформировании.

Экспериментальные исследования биомеханики глаза человека при пневмотонометрических испытаниях показывают, что движение точек поверхности роговицы представляет собой суперпозицию нескольких механических деформаций и перемещений под действием импульса воздуха [2; 3]. Точки поверхности роговицы вследствие деформации перемещаются вертикально, амплитуда убывает в виде быстро затухающей волны практически вдоль радиуса. Практически одновременно, глаз как целое тело поступательно перемещается вдоль оптической оси и одновременно совершает вращательные микродвижения вокруг центра масс глаза (прецессия и нутация). Собственное вращение глаза, вокруг оптической оси, экспериментально не наблюдается. Исследования выявляют микровибрации оболочки глаза вследствие кровообращения в микрососудах глаза. Это позволяет выделять максимальное давление в фазе систолы и минимальное в фазе диастолы и среднее за сердечный цикл [4; 8].

Передняя камера глаза, ограничена спереди роговицей, а задняя часть (мембрана) образуется совокупностью хрусталика, цилиарных мышц и заполнена жидкостью, создающей внутриглазное давление (IOP). Задняя камера глаза ограничена склерой, а дно выстлано сетчатой и сосудистой оболочкой. Следовательно, глаз имеет сложную структуру, сочетающую материалы с разной реологией.

Вовремя пневмотонометрических испытаний импульс объема воздуха движется вдоль оптической оси взаимодействуя с роговицей. Будем считать роговицу мягкой оболочкой, следовательно, предполагается, что ее материал имеет нулевую сдвиговую жесткость. Подобные материалы слабо сопротивляются сжатию, но хорошо сопротивляются растяжению, т. е. это двухмодульная модель [5; 7].

Основная часть. Воздух перемещается по трубке пневмотонометра имея ламинарный характер, который характеризуется параболическим профилем [2].

В первом приближении можно заменить профиль параболического импульса воздуха прямолинейным импульсом с некоторой средней высотой $H = \langle V \rangle$

$$H = \frac{1}{v_{\text{цим}}} \int_{-r}^r V(y) dy \quad (1)$$

Рассмотрим взаимодействие импульса воздуха с роговицей на основе решения классической задачи применяя теоремы Эйлера [2]. В этом случае роговица представляет собой плоскость, жесткость которой с одной стороны определяется только внутри-

глазным давлением, а с другой стороны на эту плоскую мембрану действует импульс воздуха.

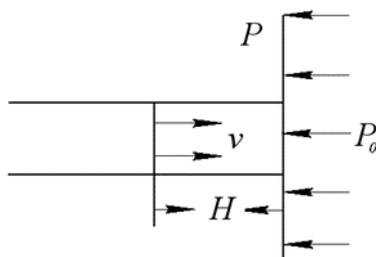


Рис. 1. Схема взаимодействия воздуха со стенкой–мембраной

Согласно теореме Эйлера, давление P на роговицу глаза (стенку) вычисляется по формуле [11]

$$P = S \frac{\rho}{g} V^2. \quad (2)$$

где S – площадь поперечного сечения импульса ($S = \pi r^2$), ρ – плотность воздуха в струе, V – средняя скорость падения импульса на роговицу.

Рассмотрим состояние глаза, изменяемое под действием импульса воздуха с точки зрения термодинамики. Полагаем, что та часть глаза, которая подвергается воздействию внешней среды за счет связи с остальной частью глаза и организма является открытой системой и происходящие в ней процессы обратимые. Глаз достаточно быстро после выведения его из устойчивого состояния возвращается в него, без возникновения колебательных переходных движений и температурных флуктуаций.

Рассмотрим и опишем фазы, которые можно условно выделять в данном процессе. В первой фазе под действием давления P роговица деформируется, достигает состояния апланации. Так как мембрана не оказывает сопротивления изгибу, то противодействует внешнему давлению P только внутриглазное давление P_0 . Если при этом внутренний объем передней камеры глаза уменьшается, то должно возрасти P_0 . Это сжатие идет без изменения температуры, т. е. изотермически и внутренняя энергия изменяется за счет механической энергии сжатия, переноса массы. Запишем первый закон термодинамики

$$U_2 - U_1 = A_1 + Z_1. \quad (3)$$

где A – механическая работа сжатия, Z – энергия переноса массы.

Экспериментальные данные отсутствуют, свидетельствующие об изменении химического состава глаза под действием давления P поэтому в формулу (3) не входят соответствующие члены.

Вторая фаза начинается с деформации мембраны от квази–плоского состояния до предельного вогнутого.

Так как мембрана оказывает сопротивление растяжению, то в вогнутом состоянии в ней появляется напряжение τ . Прогиб W увеличивается до некоторого значения $W_{\text{пред}}$, которому соответствует растягивающее предельное напряжение $\tau_{\text{пред}}$. Первый закон термодинамики имеет вид

$$U_3 - U_2 = A_{II} + Z_{II}. \quad (4)$$

Работа совершается в третьей фазе, а первый закон термодинамики имеет вид

$$U_4 - U_3 = A_{III} + Z_{III} \quad (5)$$

где A_{III} – работа, Z_{III} – перенос массы.

В третьей фазе помимо работы и переноса массы поступательного движения глазного яблока, имеет место быть вращательное движение глаза, о чем свидетельствуют экспериментальные данные [2; 3; 10]. Это происходит, когда ось цилиндра воздушного импульса не совпадает с оптической осью глаза.

В четвертой фазе устанавливается состояние равновесия, когда силы сопротивления деформирования и движения глаза достигают предельных значений, воздушный импульс исчерпал свою энергию.

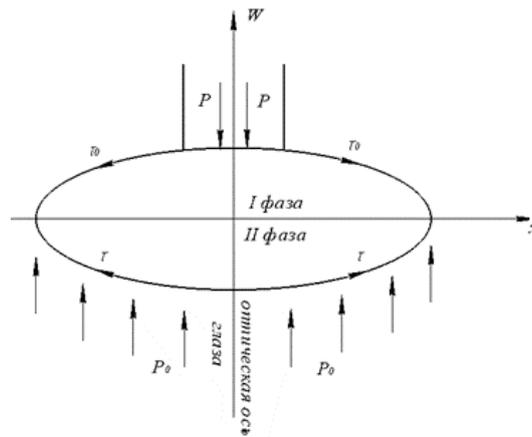


Рис. 2. Схема деформирования сечения мембраны (роговицы) в I и II фазах

Внутренняя энергия достигает максимума и под действием запасенной внутренней энергии упругого деформирования растяжения мембраны (роговицы), мышц глаза, напряженных при поступательно-вращательном движении глаза, начинается возвращение состояния глаза в свое исходное состояние. Глазное яблоко возвращается в исходное состояние в соответствии с первым законом

$$U_3 - U_4 = A_{IV} + Z_{IV} \quad (6)$$

В пятой фазе роговица под действием сил напряжений растяжения и внутриглазного давления переходит в состояние апланации

$$U_2 - U_3 = A_V + Z_V \quad (7)$$

В шестой стадии под действием внутриглазного давления происходит возвращение роговицы в исходное состояние. Возможно, в этой стадии в мембране возникают растягивающие напряжения, что увеличивает жесткость мембраны и может служить для диагностики внутриглазного давления

$$U_1 - U_2 = A_{VI} + Z_{VI} \quad (8)$$

Таким образом, делаем вывод, что, если рассматривать процесс с точки зрения термодинамики, он обратимый, циклический, что подтверждает суммирование всех соотношений (3–10). Левая часть обращается в ноль, правая тоже, потому что. работа по-

тенциальных сил на замкнутом пути равна нулю, а энергия переноса вещества без изменения состава также равна нулю [2; 3].

Затем применим второй закон термодинамики к пневмотонометрическим испытаниям глаза.

Обозначим начальное термически равновесное состояние глаза до воздействия воздушного импульса A_0 , другое термодинамическое равновесное состояние, в которое глаз переходит под воздействием воздушного импульса через A . Энтропия, характеризующая направление течения процессов в системе при переходе из состояния A_0 в состояние A [7]

$$S(A) = \int_{A_0}^A \frac{dQ}{T}. \quad (9)$$

где интегрирование проводится вдоль любого квазистатического процесса связывающего состояния A и A_0 . dQ – количество тепла, поглощаемое системой при температуре T за бесконечно малую часть всего процесса.

В дифференциальной форме

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (10)$$

Используя первый закон термодинамики в форме

$$dQ = dU - dA - dZ. \quad (11)$$

получим из (11)

$$\bar{d}S = \frac{1}{T} \left(\bar{d}U - \bar{d}A - \bar{d}Z \right). \quad (12)$$

Знак « $\bar{\leftarrow}$ » над дифференциалом обозначает, что дифференциал функции не является полным. В нашем случае силы потенциальные и поэтому дифференциалы полные.

Предположение что, процессы, которые рассматриваются как квазистатические оправдано потому что они изотермические без переноса тепла, скорость которого значительно меньше скоростей механических процессов.

Уравнение Гиббса объединяет первый и второй законы термодинамики [10]

$$dU = TdS - pdV + \sum_i X_i dx_i. \quad (13)$$

В (13) не учитываются члены, связанные с химическими превращениями, которые экспериментально не наблюдаются [2; 3]. Последний член характеризует работу обобщенных сил.

Запишем первый и второй законы термодинамики в виде

$$\int_{A_1}^{A_2} \sum dQ = \Delta U - A - Z, \quad \Delta U = U(A_2) - U(A_1). \quad (14)$$

$$\int_{A_1}^{A_2} \sum dQ = \Delta U - A - Z, \quad \Delta U = U(A_2) - U(A_1). \quad (15)$$

Процесс перехода между состояниями A_1 и A_2 может быть реализован только при выполнении неравенства (15). Таким образом, при сделанных предположениях неравенство (15) представляет собой условие возможности изменения состояния. Для циклического процесса $\Delta S = 0$, откуда следует, что если энтропию S рассмотреть как меру неопределенности, то глаз должен возвращаться в исходное состояние без каких-либо изменений в его начальном состоянии. В этом случае информация $Y = -S$ также остается неизменной и, таким образом, информация, полученная из пневмотонометрических испытаний имеет достоверное значение для диагностики ИОР.

Выводы. Мягкая оболочка в ненагруженном состоянии не имеет собственной формы. Под действием внутреннего давления она принимает форму, соответствующую среднему объему. В этом случае в материале оболочки возникают растягивающие напряжения, образующие вместе с внутренней средой самоуравновешенную систему, в которой формообразующая оболочка растянута, а внутренняя среда (жидкость, гель) сжаты. При любых внешних воздействиях и нагрузках возникают, вследствие избыточного давления, только растягивающие напряжения. Следовательно, внутреннее давление придает мембране необходимую конструктивную эффективную жесткость. Рассмотренные законы термодинамике применительно к нашей задаче, позволяют делать вывод, что процесс тонометрии обратимый, циклический, что подтверждает суммирование всех соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Maiseeva I. N. Estimation of the elastic characteristics of the eyeball from the response of the emulated eye to the introduction of given volumes of liquid / I. N. Maiseeva, A. A. Sdlin, G. A. Lyubimov // Russian Journal of Biomechanics, Perm National Research Polytechnic University, 24, № 4, 351–366 P.
2. Kopinski R. Automatic method of analysis and measurement of additional parameters of corneal deformation in the Corvis tonometer. BioMedical Engineering Online 2014, 13:150, – P. 1–15.
3. Kubo R. Thermodynamics, North – Holland, Publishing Company – Amsterdam, 1968, – 304 p.
4. Гундорова Р. А. Современная офтальмотравматология / Р. А. Гундорова, А. В. Степанов, Н. Ф. Курбанова – М., 2007.
5. Sródka W Effect of material properties of the eyeball coat on optical image stability / W. Sródka, B. W. Pierscionek // J. Biomedical Optics – 13(5).
6. Об энергозатратах глаза при чтении / С. М. Бауэр [и др.] // Сборник трудов конференции «Биомеханика глаза 2009». – М. : 2009 – С. 3–6.
7. Хусаинов Р. Р. Моделирование деформации глаза при изменении внутриглазного давления оптическим методом / Р. Р. Хусаинов, В. Р. Цибульский, В. Л. Якушев // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2011. – т. 51, № 2, – С. 349–362
8. Kopinski R. Automatic method of analysis and measurement of additional parameters of corneal deformation in the Corvis tonometer. BioMedical Engineering Online 2014 – 13:150 – P. 1–15.
9. Биомеханика глаз при их вынужденных и собственных колебаниях [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.dissercat.com/content/biomekhanika-glaz-pri-ikh-vynuzhdennykh-i-sobstvennykh-kolebaniyakh#ixzz2CEC1zc9U>

10. Whitham F. R. S. Linear and nonlinear waves. A Wiley – Interscience Publication, New – York – London – Sydney – Toronto, 1974 – 622 p.
11. Полянин А. Д. Справочник. Линейные уравнения математической физики, – М. : Физматлит, 2001 – 575 с.
12. Седов Л. Н. Механика сплошной среды. – Т. 1, 2. – М., Наука – 1970.
13. Чигарев А. В. Моделирование биомеханики глаза при пневмотонометрических испытаниях методом суперпозиции движений и деформаций вязкоупругого тела. / А. В. Чигарев, М. О. Михнович // МЕХАНИКА МАШИН, МЕХАНИЗМОВ И МАТЕРИАЛОВ. – 2020. – № 1 – С. 82–94.
14. Asejczyk-Widlicka Sródka W. Influence of Intraocular Pressure on Geometrical Properties of a Linear Model of the Eyeball: Effect of Optical Self-adjustment / W. Asejczyk-Widlicka Sródka, H. Kasprzak, R. Iskander // Optic 115 – № 11 (2004) – P. 517–524.

Поступила: 05.05.2023

БИОМЕХАНИКА И ЕЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ МОДЕЛИ ГЛАЗА ПРИ ПНЕВМОТОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЯХ

¹Чигарев А. В., ²Михнович М. О.

¹Белорусского государственного университета, Минск

²Белорусского национально технического университета, Минск

Общие сведения. Пневмотонометр, предназначенный для измерения внутриглазного давления (ИОД) сочетает механическое воздействие импульсом воздуха на роговицу глаза с оптическим измерением перемещения точек поверхности роговицы [10; 7]. В работе рассмотрена биомеханика глаза под внешним действием. Оптическая составляющая измерения не рассматривается, т. к. оптические воздействия на динамику роговицы ничтожно малы по сравнению с механическими и будут отдельно рассмотрены в дальнейшем в рамках дифракции оптической волны на неровной поверхности роговицы при ее деформировании.

Экспериментальные исследования биомеханики глаза человека при пневмотонометрических испытаниях показывают, что движение точек поверхности роговицы представляет собой суперпозицию нескольких механических деформаций и перемещений под действием импульса воздуха [18; 19; 22]. Точки поверхности роговицы вследствие деформации перемещаются вертикально, а амплитуда убывает в виде быстро затухающей волны практически вдоль радиуса. Практически одновременно, глаз как целое тело поступательно перемещается вдоль оптической оси и одновременно совершает вращательные микродвижения вокруг центра масс глаза (прецессия и нутация). Собственное вращение глаза вокруг оптической оси экспериментально не наблюдается. Исследования выявляют микровибрации оболочки глаза вследствие кровообращения в микрососудах глаза. Это позволяет выделять максимальное давление в фазе систолы и минимальное в фазе диастолы и среднее за сердечный цикл [5; 7; 8; 12; 13].

Передняя камера глаза, ограничена спереди роговицей, а задняя часть (мембрана) образуется совокупностью хрусталика, цилиарных мышц и заполнена жидкостью, создающей внутриглазное давление (ИОД). Задняя камера глаза ограничена склерой, а дно выстлано сетчатой и сосудистой оболочкой. Таким образом, глаз имеет сложную структуру, сочетающую материалы с разной реологией.

Существующие контактные и бесконтактные, статические и динамические методы имеют различную точность и дают довольно ощутимый разброс в результатах [13; 16; 18; 19; 22], имеющих сложный характер совместного влияния структуры глаза и материалов составляющих его структуру, в частности роговицы [1–4; 10]. Статические контактные методы с точки зрения механики исключают переходные процессы нагружения, т. к. за счет длительной экспозиции успевают закончиться релаксационные явления, однако могут начаться за счет аппланации явления ползучести, что естественно влияет на результаты измерения внутриглазного давления. Безаппланационные методы [7; 8] основанные на бесконтактном измерении вибраций кровеносных сосудов глаза также завязаны от физико-механических свойств оболочки глаза. Бесконтактные методы измерения внутриглазного давления обладают рядом технологических преимуществ, однако динамические методы имеют серьезный разброс измерений, погрешность также существенно зависит от влияния реакции материала глаза на статические и динамические воздействия. Роговица глаза восстанавливает свою геометрию после прекращения воздействия без видимых, ощущаемых колебаний роговицы [16; 19; 22], что свидетельствует, что материал роговицы и глаза в целом обладают памятью состояния,

что является одним из необходимых условий аккомодации глаза как оптической системы [1–19].

При пневмотонометрических испытаниях импульс объема воздуха движется вдоль оптической оси и взаимодействует с роговицей. Будем моделировать роговицу мягкой оболочкой, т. е. считать, что материал ее сам по себе имеет нулевую сдвиговую жесткость. Подобные материалы слабо сопротивляются сжатию, но хорошо сопротивляются растяжению, т. е. это двухмодульная модель [15; 21; 23].

Мягкая оболочка в начальном (ненагруженном) состоянии не имеет собственной формы. Под действием внутреннего давления мягкая оболочка принимает форму, соответствующую среднему объему. В этом случае в материале оболочки возникают растягивающие напряжения, образующие вместе с внутренней средой самоуравновешенную систему, в которой формообразующая оболочка растянута, а внутренняя среда (жидкость, гель) сжаты. При любых внешних воздействиях и нагрузках возникают, вследствие избыточного давления, только растягивающие напряжения. Таким образом внутреннее давление придает мембране необходимую конструктивную эффективную жесткость.

Математическая модель деформации роговицы под действием внешнего импульса.

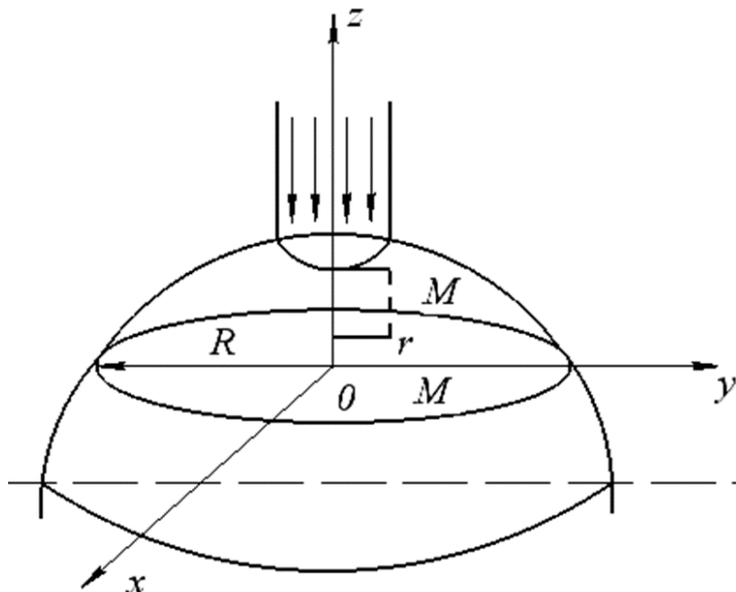


Рис. 1. Схема деформации модели роговицы глаза 1 импульсом воздуха 2

Оси x, y системы координат разместим в плоскости круга радиуса R – расстояние до точки, куда возмущение роговицы импульсом не доходит, т. е. деформация равна нулю. Произвольная точка роговицы M имеет координаты $M(x, y, z) = M(r, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, прогиб под действием импульса обозначим $W(t, x, y, z)$.

Будем считать, что сопротивление жидкости и роговицы зависит от скорости движения точки роговицы и от величины прогиба W . Причем в первом приближении эти зависимости имеют линейный характер.

Уравнение, описывающее динамику мембраны с учетом вязкоупругих сил сопротивления запишем в виде [14; 21; 23]

$$\frac{d^2W}{dt^2} + k \frac{dW}{dt} = a^2 \Delta_2 - bW + \Phi(x, y, t) \quad (1)$$

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}$$

Здесь коэффициент k характеризует вязкое, $a b$ – упругое сопротивление растяжению, $\Phi(x, y, t)$ – внешняя сила.

Уравнение (1) принадлежит к телеграфному типу [14]. Так как материал оболочки двухмодульный и при сжатии оказывает слабое сопротивление, то мембрана прогибается до состояния апланации средней части и затем прогиб меняет знак и деформируется вогнутостью вверх. Так как при этом происходит растяжение, то возникает сопротивление деформированию мембраны при достижении определенной величины прогиба часть энергии импульса совершает работу по перемещению глаза, как целого тела, вдоль оптической оси и угловые смещения как следствия несовпадения оси импульса и оптической оси. Это связано с тем, что энергия импульса активизирует степени свободы поступательного и вращательного движений.

Отметим, что в уравнении (1) не учитывается возможное действие сил поверхностного натяжения, т. к. об этом отсутствует экспериментальная информация.

Поскольку в первом приближении можем считать, что деформируемая область глаза имеет осевую симметрию, то перейдем от декартовых координат x, y к полярным считая, что $W(x, y, t) = W(r, t)$, тогда получим:

$$\frac{d^2W}{dt^2} + k \frac{dW}{dt} = a^2 \left(\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right) - bW + \Phi(r, t). \quad (2)$$

Представляя $W(r, t)$ в виде (3) и подставляя в (2)

$$W(r, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}kt\right)U(r, t), \quad (3)$$

получим для $U(r, t)$ уравнение:

$$\frac{d^2U}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right) - \left(b - \frac{1}{4}k^2\right)U + \exp\left(\frac{1}{2}kt\right)\Phi(r, t). \quad (4)$$

Решение неоднородного уравнения (4) записывается в общем случае в интегральном виде с помощью функции Грина и имеет очень громоздкий вид, поэтому упростим модель положив, что внутриглазное давление в передней камере глаза вместе с жидкостью и задней частью передней камеры, образованной хрусталиком и мышцами действуют на мембрану (роговицу) как линейно упругое основание Винклера с конструктивной жесткостью. Тогда можно положить $\Phi(r, t) \equiv 0$. Рассмотрим одномерное упрощенное уравнение (4) рассматривая его в плоскости Oxz и полагая $r = x, y = 0$.

В этом случае уравнение (4) запишется в виде уравнения Клейна-Гордона [21–23; 14].

$$\frac{d^2U}{dt^2} = a^2 \frac{d^2U}{dx^2} - \left(b - \frac{1}{4}k^2\right)U \quad (5)$$

Вид решений уравнения (5) зависят от знака выражения $b - \frac{1}{4}k^2 = \beta$, характеризующего зависимость между упругостью и вязкостью в рассматриваемой модели глаза. При $\beta > 0$ решение имеет вид [14]

$$W(x, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}kt\right)[AJ_0(\xi) + BY_0(\xi)]$$

$$\xi = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{a^2(t + C_1)^2 - (x + C_2)^2},$$
(6)

где $J_0(\xi)$, $Y_0(\xi)$ – функции Бесселя, A, B, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

При $\beta < 0$ решение имеет вид

$$W(x, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}kt\right)[AI_0(\xi) + BK_0(\xi)]$$

$$\xi = \frac{\sqrt{-\beta}}{a} \sqrt{a^2(t + C_1)^2 - (x + C_2)^2},$$
(7)

где $I_0(\xi)$, $K_0(\xi)$ – модифицированные функции Бесселя.

Для нахождения A, B, C_1, C_2 поставим начальные и другие необходимые условия для нахождения произвольных констант.

Начальные условия сформулируем в виде:

$$W(x, 0) = f(x);$$

$$d_t W(x, 0) = g(x),$$
(8)

тогда в зависимости от знака β получим:

При $\beta > 0$

$$f(x) = AJ_0(\xi_0) + BY_0(\xi_0), \quad \xi_0 = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{a^2 C_1^2 - (x + C_2)^2}.$$
(9)

В выражении (7) функция $Y_0(\xi)$ при $\xi = 0$ обращается в бесконечность. Это соответствует:

$$a^2(t + C_1)^2 - (x + C_2)^2 = 0.$$
(10)

Из (9) считая $\xi_0 = 0$, получим:

$$a^2 C_1^2 - (x + C_2)^2 = 0.$$
(11)

В центре роговицы $x = 0$, тогда из (11) получим:

$$a^2 C_1^2 - C_2^2 = 0, \quad C_2 = \pm a C_1.$$
(12)

Подставляя (12) в (11) находим:

$$\begin{aligned} a^2 C_1^2 - (x \pm a C_1)^2 &= 0, \\ \pm 2a C_1 - x^2 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

При $x = 0$ должно быть $C_1 = C_2 = 0$.

Таким образом,

$$\xi = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{(at - x)(at + x)}. \quad (14)$$

Чтобы решение в виде (7) было корректно, нужно положить $\beta = 0$, тогда соответственно начальное условие имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= A J_0(\xi_0), \quad \xi_0 = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{-x^2} = \pm \frac{\sqrt{\beta} x}{a} i, \\ J_0(iz) &= I_0(z), \end{aligned} \quad (15)$$

или

$$f(x) = A I_0\left(\pm \frac{\sqrt{\beta}}{a} x\right).$$

В начальный момент времени мембрана под действием внутреннего давления представляет собой часть сферической поверхности, ограниченную лимбом глаза.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(W(0,0) - R)^2} + \frac{W^2}{(W(0,0) - R)^2} &= 1; \\ x^2 + W^2 &= (W(0,0) - R)^2; \\ \frac{x^2}{R^2} + \frac{W^2}{R^2} &= 1; \\ \frac{x^2}{R^2} + \frac{(W + R - W_{00})^2}{R^2} &= 1; \\ x^2 + (W + R - W_n)^2 &= R^2; \\ W + R - W_n &= R; \\ x^2 + (R - W_{00})^2 &= R^2; \\ x^2 + R^2 - 2RW_{00} + W_n^2 &= R^2; \\ x &= \pm W_{00}^{1/2} \sqrt{R - W_{00}} = \pm a. \end{aligned}$$

В плоскости лимба расположим координатную плоскость Oxy .

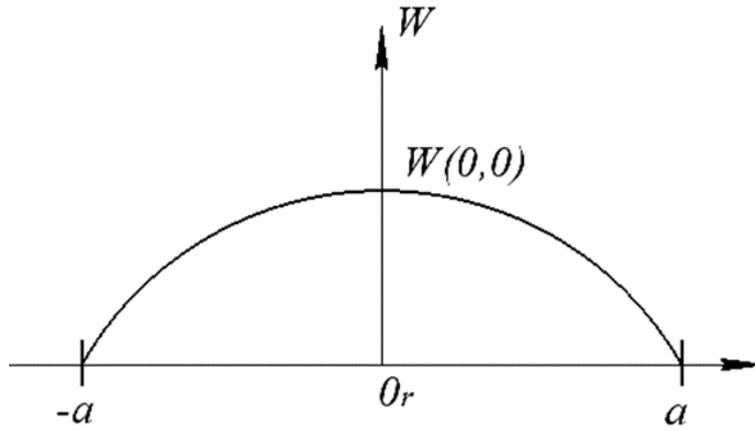


Рис. 2. Начальный профиль мембраны (роговицы)

Тогда начальный профиль мембраны представим в виде рисунка 4:

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} + W_{00} - R. \quad (16)$$

Представим (15, 16) в окрестности центра роговицы в виде разложений правой и левой частей в степенные ряды с учетом (16) тогда получим:

$$A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\beta x^2}{a^2 4}\right)^k}{k! \sqrt{k+1}} = W_{00} - R + R \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \dots\right). \quad (17)$$

Приравниваем члены при одинаковых степенях x

$$A \left(1 + \frac{\beta x^2}{4a^2 \Gamma(2)} + \dots\right) = W_{00} - R + R \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \dots\right), \quad (18)$$

$$A = W_{00} - R + R,$$

$$A \frac{\beta}{4a^2 \Gamma(2)} = \frac{R}{2} \frac{1}{R^2}.$$

Из (18) следует

$$W_{00} = A, \quad \frac{\beta W_{00}}{4a^2 \Gamma(2)} = \frac{1}{2R} \Rightarrow \beta > 0. \quad (19)$$

Рассмотрим теперь нахождение произвольных постоянных при $\beta < 0$ согласно формуле (7). Исходя из условия конечности перемещений в центре зрачка требуется положить $B = 0$, тогда решение (7) запишется в виде:

$$W(x, t) = A \exp\left(-\frac{1}{2} kt\right) I_0(\xi). \quad (20)$$

Начальное условие (9) имеет вид:

$$f(x) = AI_0(\xi_0), \quad \xi_0 = \frac{\sqrt{-\beta}}{a} \sqrt{a^2 C_1^2 - (x + C_2)^2}. \quad (21)$$

Полагая $\xi_0 = 0$, получим из (21)

$$a^2 C_1^2 - (x + C_2)^2 = 0. \quad (22)$$

В центре роговицы $x = 0$, тогда из (22) следует

$$a^2 C_1^2 - C_2^2 = 0, \quad C_2 = \pm a C_1. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (24) получим:

$$\begin{aligned} a^2 C_1^2 - (x \pm a C_1)^2 &= 0, \\ \pm 2a C_1 - x^2 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) находим при $x = 0$

Таким образом,

$$\xi = \frac{\sqrt{-\beta}}{a} \sqrt{a^2 t^2 - x^2}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (20) получим решение в общем виде.

Начальное условие записывается в виде

$$\begin{aligned} f(x) = AI_0(\xi_0), \quad \xi_0 &= \frac{\sqrt{-\beta}}{a} \sqrt{-x^2} = \pm \frac{\sqrt{-\beta} x}{a} i, \\ I_0\left(\pm \frac{\sqrt{-\beta} x}{a} i\right) &= J_0\left(\pm \frac{\sqrt{-\beta}}{a} x\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом

$$f(x) = AJ_0\left(\pm \frac{\sqrt{-\beta} x}{a}\right). \quad (27)$$

Подставим разложения правой и левой частей в степенные ряды

$$A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\pm \frac{\sqrt{-\beta} x}{a}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k+1)} = W_{00} - R + R\left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \dots\right).$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях x , получим:

$$A \left(\frac{1}{\Gamma(1)}\right) = W_{00}.$$

$$A \left(\frac{\pm (-\beta)}{a^2} x^2 \right) / 4 = \frac{1}{2} \frac{x^2}{R}. \quad (28)$$

Из (28) найдем

$$\begin{aligned} W_{00} &= A \\ \frac{-\beta W_{00}}{4a^2} &= \frac{x^2}{2R}. \end{aligned} \quad (29)$$

Рассмотрим второе начальное условие

$$d_t W|_{t=0} = g(x). \quad (30)$$

При $\beta > 0$ дифференцируя (5) при $t = 0$ получим

$$g(x) = -\frac{A}{2} k \frac{dJ_0}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\frac{Ak}{2} (-J_1(\xi_0(x))) \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{aC_1}{\sqrt{C_1^2 - (x+C_2)^2}}.$$

Будем считать, что импульс длится до момента, когда мембрана начинает оказывать сопротивление останавливаясь в нижнем положении так, что глазное яблоко начинает двигаться как целое тело. Это следует из модели мембраны как мягкой оболочки, почти не оказывающей сопротивления сжатию.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{1}{2\sqrt{\beta}} 2a^2(t+C_1) = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{2a^2 C_1}{2\sqrt{a^2 C_1^2 - (x+C_2)^2}}, \\ \xi &= \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{(at+C_1)^2 - (x+C_2)^2}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\sqrt{\beta} 2}{a} \frac{(at+C_1)a}{2\sqrt{(at+C_1)^2 - (x+C_2)^2}}, \\ \frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{aC_1}{\sqrt{C_1^2 - (x+C_2)^2}}, \\ \frac{d\xi}{dt} \Big|_{x=0} &= \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{a(at+C_1)}{\sqrt{(at+C_1)^2 - C_2^2}}, \\ \frac{d\xi}{dt} \Big|_{\substack{t=0 \\ x=0}} &= \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{aC_1}{\sqrt{C_1^2 - C_2^2}}. \end{aligned}$$

Тогда профиль $g(x)$ представляет собой параболу, которая описывает профиль скорости в трубке пневмотонометра.

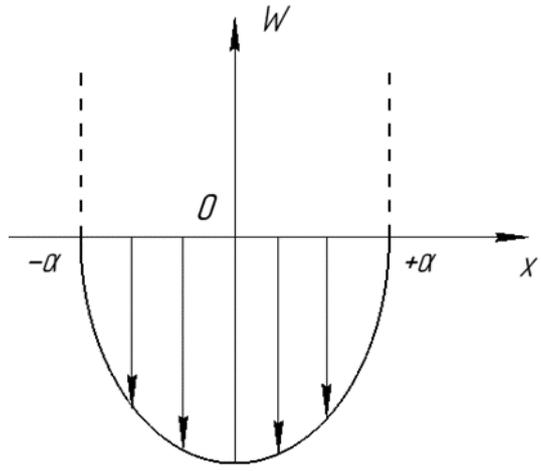


Рис. 3. Схема профиля скорости в тонометре: $g(x)$ представляет собой параболу

$$g(x) = V_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad (31)$$

При $x=0, t=0, g(x) = V_0$, тогда из (31) следует

$$V_0 = -\frac{Ak}{2} (-J_1(\xi_0(0))) \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{aC_1}{\sqrt{C_1^2 - C_2^2}}, \quad (32)$$

раскладывая $J_1(\xi_0)$ в ряд

$$J_1(\xi_0) = \left(\frac{\xi_0}{2}\right) \left[\frac{1}{\Gamma(1)} + \frac{(-\xi_0^2/4)}{\Gamma(3)} \dots \right];$$

$$\xi = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{(at + C_1)^2 - (x + C)^2};$$

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{C_1^2 - (x + C_2)^2};$$

$$V_0 = \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1 \left[1 - \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 - \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} (C_1^2 + C_2^2) + \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 C_1 - \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^4 C_1 \right];$$

$$0 = \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1 \left[2 \frac{C_2}{C_1} + \frac{\beta C_1^2 C_2 C_1}{2a^2 C_1} - \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \frac{\beta C_2 C_1}{4a^2 C_1} \right];$$

$$\frac{V_0}{a^2} = \left(-\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} \frac{C_1^2}{C_1} + \frac{\beta}{a^2} C_1 \frac{1}{8C_1^2} - \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} \frac{C_1}{C_1^2} \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 - \frac{\beta}{2a^2} \frac{C_1 C_2^2}{C_1^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \frac{\beta}{a^2} \frac{C_1}{C_1^2} \right) \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1;$$

$$-J_1(\xi_0(0)) \approx -\left(\frac{\xi_0(0)}{2}\right) = -\frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{C_1^2 - C_2^2} = V_0;$$

$$\begin{aligned}\xi_0(0) &= \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{C_1^2 - C_2^2}; \\ V_0 &= \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1, \quad C_1 = \frac{2V_0 a}{\sqrt{\beta}}; \\ \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \frac{\beta C_1}{a^2 4C_1} &= \frac{2}{C_1} + \frac{\beta C_1}{2a^2}; \\ C_2^2 &= \frac{4 \cdot 2C_1^2 a^2}{\beta} + \frac{\beta C_1 a^2 C_1^2}{2a^2 \beta}; \\ C_2 &= \pm \sqrt{C_1^3 + \frac{8C_1^2 a^2}{\beta}} = \pm \sqrt{\frac{8V_0^3 a^3}{\beta^{3/2}} + \frac{8a^2 4V_0^2 a^2}{\beta}} = \pm \sqrt{\frac{8V_0^3 a^3}{\beta^{3/2}} + \frac{32V_0^2 a}{\beta^2}}.\end{aligned}$$

Размерность: $(C_2 + x) - (C_1 + at)$, тогда размерность $C_2 - x$, $C_1 - at$, а размерность скорости $\frac{L}{T}$.

$$\beta = b - \frac{1}{4}k^2, \quad C_1 = \frac{2V_0 a}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{L^2}{T^2}, \quad \sqrt{\beta} \approx \frac{L}{T^2}.$$

где b – упругий коэффициент роговицы, k – коэффициент вязкого сопротивления роговицы, $k \frac{L}{T} \approx bL \approx F$ – сила, $a^2 \approx \frac{L^2}{T^2}$ – квадрат скорости.

Тогда должно быть $\sqrt{\beta} \approx \frac{L}{T^3}$.

Рассмотрим теперь уравнение волнового движения мембраны в полярной системе координат в виде [14]

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + k \frac{dW}{dt} = a^2 \left(\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right) - bW + \Phi(r, t). \quad (33)$$

Представим решение (33) в виде

$$W(r, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}kt\right)U(r). \quad (34)$$

Подставляя (34) в (33), получим $\frac{1}{4}k^2 U(r) - \frac{k^2}{2} U(r) = a^2 \left(\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right) - bU(r)$.

Приведя подобные члены, получим:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} + \left(\frac{k^2}{4a^2} - \frac{b}{a^2} \right) U = 0. \quad (35)$$

Решение уравнения (35) запишем в виде [14]

$$U(r) = AJ_0(\sqrt{\lambda}r) + BY_0(\sqrt{\lambda}r), \quad (36)$$

где $J_0(\sqrt{\lambda}r)$, $Y_0(\sqrt{\lambda}r)$ - функции Бесселя первого и второго рода.

$$\lambda = \frac{k^2}{4a^2} - \frac{b}{a^2} > 0.$$

Так как при $r=0$ решение по физическому смыслу должно быть конечным, то $B=0$.

Таким образом, имеем

$$U(r) = AJ_0(\sqrt{\lambda}r) \quad (37)$$

Решение $U \equiv 0$ удовлетворяет (36), поэтому представляет интерес найти условия существования нулевых решений при определении λ , которые являются собственными значениями. Для нахождения собственных значений обычно формулируется задача Штурма-Лиувилля для уравнения (36). Задаются нулевые краевые условия, которые в данной задаче можно сформулировать исходя из физических условий. Первое условие дало $B=0$. Второе условие сформулируем исходя из того, что деформация волнообразного изменения роговицы быстро затухает и на лимбе перемещение равно нулю. Поэтому положим, что при $r = \rho_0$, $U(r) = 0$. Из (37) тогда следует

$$J_0(\sqrt{\lambda}\rho_0) = 0. \quad (38)$$

Уравнение (38) представляет собой соотношение для нахождения простых вещественных корней функции Бесселя первого порядка которых имеется бесконечное число, и они связаны соотношением

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots \quad \lambda_k = \frac{\mu_k^2}{\rho_0^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (39)$$

Таким образом, собственными функциями задачи являются функции

$$J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}r\right), \quad (40)$$

а собственными значениями

$$\mu_k = \sqrt{\lambda_k}\rho_0. \quad (41)$$

Тогда общее решение (34) имеет вид

$$W(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k_n t} J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}r\right). \quad (42)$$

Коэффициент A_n находим из начальных условий

$$W(r, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_n e^{-k_n t} J_0 \left(\frac{\mu_n}{\rho_0} r \right). \quad (43)$$

Умножим обе части (43) на $r J_0 \left(\frac{\mu_k}{\rho_0} r \right)$ и проинтегрируем обе части равенства на промежутке $[0, \rho_0]$. Тогда, с учетом свойства ортогональности функций и формул для квадрата их нормы получим

$$\int_0^{\rho_0} r f(r) J_0 \left(\frac{\mu_k}{\rho_0} r \right) dr = A_k \frac{\rho_0^2}{2} \left[J_0'(\mu_k) \right]^2 \quad (44)$$

Из (44) получим

$$A_k = \frac{2}{\rho_0^2 \left[J_0'(\mu_k) \right]^2} \int_0^{\rho_0} r f(r) J_0 \left(\frac{\mu_k}{R} r \right) dr. \quad (45)$$

Второе начальное условие

$$d_t W(r, t) \Big|_{t=0} = g(r) \quad (46)$$

дает с учетом (41)

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} (-k_n) J_0 \left(\frac{\mu_n}{\rho_0} r \right). \quad (47)$$

Умножая $g(r)$ на $r J_0 \left(\frac{\mu_n}{\rho_0} r \right)$ и интегрируя аналогично предыдущему, получим

$$\int_0^{\rho_0} r g(r) J_0 \left(\frac{\mu_k}{R} r \right) dr = (-A_k k_k) \frac{\rho_0^2}{2} \left[J_0'(\mu_k) \right]^2. \quad (48)$$

Из (48) следует

$$-A_k k_k = \frac{2}{\frac{\rho_0^2}{2} \left[J_0'(\mu_k) \right]^2} \int_0^{\rho_0} r g(r) J_0 \left(\frac{\mu_k}{R} r \right) dr. \quad (49)$$

Подставляя A_k из (45) в (49) получим

$$k_k = \frac{\int_0^{\rho_0} rg(r)J_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)dr}{\int_0^{\rho_0} rf(r)J_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)dr}. \quad (50)$$

Ограничиваясь первыми двумя членами ряда запишем решение в виде

$$W(r, t) = A_1 e^{-k_1 t} J_0\left(\frac{\mu_1}{\rho_0} r\right) + A_2 e^{-k_2 t} J_0\left(\frac{\mu_2}{\rho_0} r\right). \quad (51)$$

Значения μ_1, μ_2 находятся по таблице нулей функций Бесселя [14]

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 2,4048 \\ \mu_2 &= 5,5201 \end{aligned}$$

Тогда из (51), получаем

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1^2}{\rho_0^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\mu_2^2}{\rho_0^2}. \quad (52)$$

Величина радиуса лимба ρ_0 является индивидуальной геометрической характеристикой роговицы глаза конкретного человека. Значения λ выражаются через механические характеристики роговицы глаза конкретного человека. Среднее значение коэффициентов упругости и вязкости зависят от возраста.

$$\lambda_1 = \frac{k_1^2}{4a_1^2 \frac{b_1}{a_1}}, \quad \lambda_2 = \frac{k_2^2}{4a_2^2 \frac{b_2}{a_2}}. \quad (53)$$

В (53) задаем известные коэффициенты, например, $\frac{b_1}{a_1^2}, \frac{b_2}{a_2^2}$ и находим $\frac{k_1}{2a_1}, \frac{k_2}{2a_2}$

или используем другие комбинации. На практике нужно брать значения ближайšie к экспериментальным данным.

Поступательное движение глазного яблока под воздействием импульса воздуха.

Экспериментальные наблюдения [7; 18; 22] показывают, что часть энергии импульсов воздуха вызывает не только деформацию роговицы, но и смещение глазного яблока как целого тела вдоль оптической оси. Отмечается, что это движение начинается с некоторым временным запаздыванием после воздействия импульса на роговицу. Это объясняется тем, что материал роговицы является двухмодульным, т. е. имеет разные модули упругости на растяжение и сжатие (рисунок 4.).

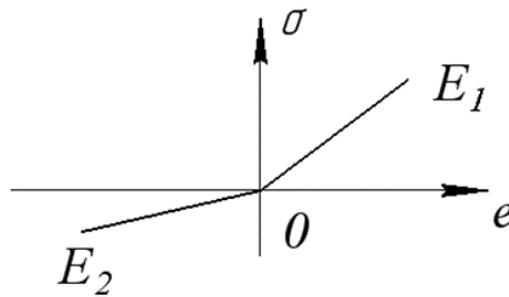


Рис. 4. Диаграмма нагружения для двухмодульного материала:
 E_1 – модуль Юнга растяжения, E_2 – модуль Юнга сжатие

Вследствие этого роговица под действием импульса воздуха деформируется в зоне действия (площади S) импульса до состояния апланации практически без сопротивления. После прохождения плоского состояния мембрана начинает работать на растяжение и испытывает сопротивление так, что при достижении некоторой величины растяжения сопротивление дальнейшему растяжению оказывается выше сопротивления поступательному движению глазного яблока как целого вдоль оптической оси.

Рассмотрим двухмассовую модель глазного яблока исходя из того, что передняя камера между роговицей и хрусталиком имеет структуру и физико-механические свойства отличные от структуры и физико-механических свойств стекловидного тела. Поэтому рассмотрим модель глаза, схематически изображенную на рисунке 5.

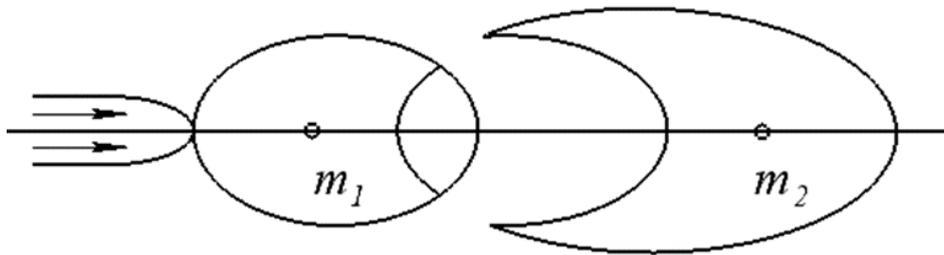


Рис. 5. Схема глазного яблока в виде двухмассовой системы, где m_1 – масса передней камеры, m_2 – масса стекловидного тела с сетчаткой

Часть глаза m_2 находится в глазнице и окружена слоем жироподобного материала, обладающего также свойствами упругости и вязкости.

Часть глаза m_1 обладает вязкоупругими свойствами.

Граница между m_1 , m_2 образована хрусталиком и мышечными тканями и в общем случае также обладает вязкоупругими свойствами.

Схема глазного яблока, учитывающая вышеперечисленные свойства изображена на рисунке 6.

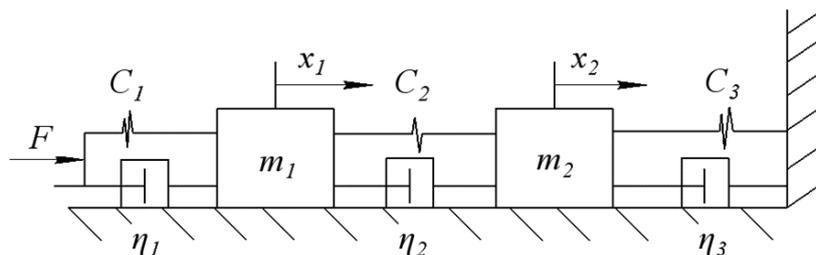


Рис. 6. Схема модели вязкоупругого глазного яблока

На рисунке 6 C_i – коэффициенты жесткости (упругости), η_i – коэффициенты вязкости, m_1, m_2 – масса передней и задней частей глазного яблока.

Для простоты считаем, что поверхность глазницы, по которой перемещаются m_1, m_2 абсолютно гладкая, однако не составляет труда обобщить модель с учетом сухого и жидкого трения.

Динамика поступательного движения модели глаза описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (\eta_1 + \eta_2) \dot{x}_1 - \eta_2 \dot{x}_2 + (C_1 + C_2)x_1 - C_2 x_2 &= F_1, \\ m_2 \ddot{x}_2 + (\eta_2 + \eta_3) \dot{x}_2 - \eta_2 \dot{x}_1 + (C_2 + C_3)x_2 - C_2 x_1 &= F_2, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_1^0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_1^0 = V_0, \\ x_2(0) &= x_2^0, \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_2^0 = V_1. \end{aligned} \quad (55)$$

В векторно-матричной форме уравнения движения (54) имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{M} \ddot{\bar{x}} + \hat{K} \dot{\bar{x}} + Cx &= \bar{F}; \\ \hat{M} &= \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{K} = \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_2 & -\eta_2 \\ -\eta_2 & \eta_2 + \eta_3 \end{pmatrix}, \\ \hat{C} &= \begin{pmatrix} C_1 + C_2 & -\eta_2 \\ -\eta_2 & C_2 + C_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда в выражениях для кинетической T и потенциальной Π энергий отсутствуют произведения x_1, x_2

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2),$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2). \quad (56)$$

Следовательно, x_1, x_2 являются главными (нормальными) координатами [6]. Диссипативная функция имеет вид:

$$\Phi = \frac{1}{2} (\eta_1 \dot{x}_1^2 + 2\eta_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \eta_3 \dot{x}_2^2). \quad (57)$$

Решение уравнений (54) ищется в виде:

$$x_1 = C_1 e^{kt} \quad x_2 = C_2 e^{kt} \quad (58)$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$m_1 m_2 k^4 + (m_1 \eta_2 + m_2 \eta_1) k^3 + (m_1 C_2 + m_2 C_1 + \eta_1 \eta_3 - \eta_2^2) k^2 + (C_1 \eta_3 + \eta_1 C_2) k + C_1 C_2 = 0. \quad (59)$$

Обозначим

$$\begin{aligned}x_1 &= -n_1 + ik_1, & \bar{x}_1 &= -n_1 - ik_1, \\x_2 &= -n_2 + ik_2, & \bar{x}_2 &= -n_2 - ik_2.\end{aligned}\tag{60}$$

Решение запишем в виде

$$\begin{aligned}x_1 &= e^{-n_1 t} [A_1^{(1)} \cos k_1 t + B_1^{(1)} \sin k_1 t] + e^{-n_2 t} [A_1^{(2)} \cos k_2 t + B_1^{(2)} \sin k_2 t], \\x_2 &= e^{-n_1 t} [A_2^{(1)} \cos k_1 t + B_2^{(1)} \sin k_1 t] + e^{-n_2 t} [A_2^{(2)} \cos k_2 t + B_2^{(2)} \sin k_2 t].\end{aligned}\tag{61}$$

Если сопротивление (вязкость) достаточно большое, то аperiodическое движение описывается уравнениями

$$\begin{aligned}x_1 &= e^{-n_1 t} [A_1^{(1)} \cos k_1 t + B_1^{(1)} \sin k_1 t] + C_1^{(2)} e^{-n_2 t} + C_1^{(3)} e^{-n_3 t}, \\x_2 &= e^{-n_1 t} [A_2^{(1)} \cos k_1 t + B_2^{(1)} \sin k_1 t] + C_2^{(2)} e^{-n_2 t} + C_2^{(3)} e^{-n_3 t}.\end{aligned}\tag{62}$$

Вращательное плоское движение глазного яблока вокруг центра масс.

Вращательные степени свободы глаза активизируются за счет части энергии воздушного импульса, если ось трубки пневмотонометра не совпадает точно с оптической осью. В этом случае имеется плечо силы и возникает момент силы под действием, которого глаз в глазнице совершает вращательное движение в плоскости оптической оси и плоскости действия силы (рисунок 7).

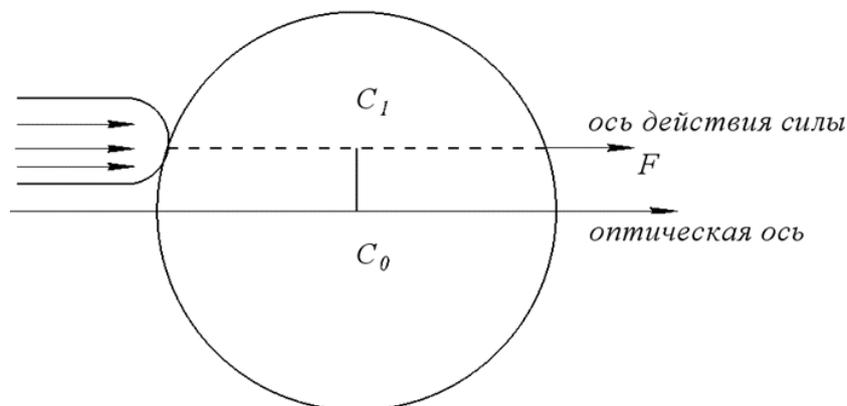


Рис. 7. На схеме $C_0 C_1 = d$ – плечо силы, C_0 – центр масс

Колебания глаза в плоскости можно описать, как колебания физического маятника сферической формы вокруг оси перпендикулярной плоскости и проходящей через точку C_1 . Будем считать колебания малыми описываемые вязкоупругой моделью.

Уравнение колебаний должно описывать восстановление положения глаза после его поворота на некоторый угол под воздействием момента силы.

В общем случае, уравнение вращательного движения глаза имеет вид [6]:

$$\frac{d}{dt} \left(Y_z \frac{d\varphi}{dt} \right) + 2\alpha \frac{d\varphi}{dt} + mgd\varphi = f(t),\tag{63}$$

где Y_z – момент инерции глаза относительно оси C_1, z , α – коэффициент вязкости, m – масса, g – ускорение свободного падения, d – расстояние C_0C_1 , $f(t)$ – момент силы, создаваемый воздушным импульсом.

Здесь учитывается, что форма глаза при воздействии импульса воздуха меняет свою форму сравнительно незначительно. Поэтому в данном случае $Y_z = \text{const}$.

В начальный момент времени

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0. \quad (64)$$

Преобразуем уравнение (63) к виду удобному для решения

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2n \frac{d\varphi}{dt} + k^2\varphi &= Q(t), \\ 2n &= \frac{\alpha}{Y_z}, \quad k^2 = \frac{mgd}{Y_z}, \quad Q(t) = \frac{f(t)}{Y_z}. \end{aligned} \quad (65)$$

Решение уравнения (63) при условии (64) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{Y_z k^*} \int_0^t Q(t_1) e^{-n(t-t_1)} \sin k^*(t-t_1) dt_1, \\ k^* &= \sqrt{k^2 - n^2}. \end{aligned} \quad (66)$$

Пусть сила действия воздушного импульса примерно постоянна на интервале $t_1 = 0$ и $t = t_1 + \tau$, тогда (66) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{ak^*} \int_0^t e^{-n(t-t_1)} \sin k^*(t-t_1) dt_1 = \\ &= \frac{Q}{ak^*} \frac{k^*}{n^2 + (k^*)^2} \left\{ 1 - e^{-nt} \left(\frac{n}{k^*} \sin k^* t + \cos k^* t \right) \right\} = \\ &= \frac{Q}{c\zeta} \left\{ 1 - e^{-nt} \left(\frac{n}{k^*} \sin k^* t + \cos k^* t \right) \right\}, \quad C = \frac{ak^* [n^2 + (k^*)^2]}{k^*}. \end{aligned} \quad (67)$$

Отклонение угла φ происходит в течении времени действия τ силы Q , $t \leq \tau$.

Максимальное отклонение глаза находится из уравнения, получаемого на основе уравнения (65)

$$\dot{\varphi} = \frac{Q}{c\zeta} \left\{ e^{-nt} (n \cos k^* t - k^* \sin k^* t) + n e^{-nt} \left(\frac{n}{k^*} \sin k^* t + \cos k^* t \right) \right\}. \quad (68)$$

Условие максимума отклонения, когда вращение глаза останавливается перед тем, как начать возвратное движение в нормальное положение (обратно) имеет вид $\dot{\varphi} = 0$, тогда получим

$$e^{-nt} \sin k^* t = 0. \quad (69)$$

Или при конечном t получим

$$e^{-nt} \sin k^* t = 0, \quad t = \frac{\pi}{k^*}. \quad (70)$$

Из (70) следует, что максимальное отклонение глаза достигается при $t = \frac{T^*}{2}$ т. е. в том случае, когда промежуток времени t равен половине периода T^* затухающих колебаний. Коэффициент динамичности λ для $\tau \geq \frac{T^*}{2}$ $\lambda = 1 + e^{-\frac{nT^*}{2}}$.

После прекращения действия воздушного импульса глаз возвращается в исходное состояние под действием вязкоупругих связей (мышц), приложенных к главному яблоку. При этом движение глаза описывается уравнением свободного движения, которое имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2n \frac{d\varphi}{dt} + k^2\varphi = 0. \quad (71)$$

В качестве начальных условий возьмем

$$\varphi(\tau) = \varphi_{\max}, \quad \dot{\varphi}(\tau) = 0. \quad (72)$$

Экспериментальные данные показывают, что возвращение глаза в нормальное состояние происходит без колебательных движений.

Решение (71) с начальными условиями (72) имеет вид

$$\varphi = \varphi_{\max} e^{-n(t-\tau)} \left(\cos k^*(t-\tau) + \frac{n}{k^*}(t-\tau) \right). \quad (73)$$

При возврате состояния глаза в исходное состояние в некоторый момент $t = t_{\text{кон}}$ угол поворота глаза должен быть равен нулю. Запишем (73) при $t = t_{\text{кон}}$

$$\varphi = \varphi_{\max} e^{-n(t_{\text{кон}}-\tau)} \left(\cos k^*(t_{\text{кон}}-\tau) + \frac{n}{k^*}(t_{\text{кон}}-\tau) \right). \quad (74)$$

Уравнение (74) при заданных k^*, n является уравнением относительно $t_{\text{кон}}$.

В случае, если задан момент вращения, когда глаз возвращается в исходное состояние, например $t_{\text{кон}} = T^*$, то уравнение (74) представляет уравнение относительно k^* и n т. е. параметров, определяющих упругость и вязкость элементов глаза при вращательном движении.

Из (74) получаем

$$1 = -\frac{n}{k^*} \operatorname{tg} k^*(t_{\text{кон}} - \tau) \quad (75)$$

Или

$$\operatorname{tg} k^* (t_{\text{кон}} - \tau) = \frac{k^*}{n}. \quad (76)$$

Трансцендентное уравнение решается графически (рисунок 8).

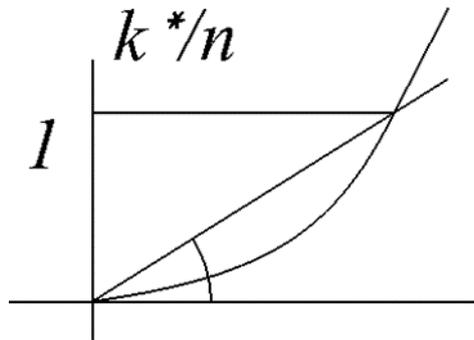


Рис 8. Графическое решение уравнения (76)

$$\frac{k^*}{n} = 1, \quad k^* (\tau - t_{\text{кон}}) = \frac{\pi}{4}, \quad t_{\text{кон}} = \frac{k^* \tau - \frac{\pi}{4}}{k^*}.$$

Если процессы циклов деформирования роговицы, поступательного и вращательного движения известны, то тогда возникает задача идентификации упругих и вязких коэффициентов элементов глаза для конкретных людей. Эти коэффициенты могут быть определены и соответствуют модели поведения глаза как деформируемого твердого тела, пассивно совершающего механическое движение под действием воздушного импульса. Однако на самом деле глаз такая адаптивная система, меняющая свои оптические, механические свойства в зависимости от решаемых задач. Очевидно, что и реакция глаза на внешнее механическое воздействие будет адаптивным, что выражается в способности живых биологических структур управлять своими упругими и вязкими свойствами. Влияние физико-механических, геометрических свойств роговицы на деформирование глазного яблока рассматривается в [1–4; 10]. В данной работе влияние толщины роговицы на величину деформации не учитывается.

Заключение.

Получена математико-механическая модель динамики глазного яблока под воздействием импульса воздуха, излучаемого пневмотонометром. Энергия импульса деформирует роговицу до состояния, когда она оказывает сопротивление и тело глаза начинает двигаться поступательно, как целое и испытывает вращательные движения за счет несоосности объема воздушного импульса и оптической оси, экспериментальные измерения суммарных и составляющих смещений глазного яблока показывают возвращение глаза в исходное состояние. Это делает целесообразным применение рассматриваемой вязкоупругой модели глазного яблока для более точной оценки ВГД.

Глаз под действием воздушного импульса, воздействующего на роговицу, старается уменьшить возможность повреждающего действия за счет распределения энергии по степеням свободы. Часть энергии совершает работу по деформированию роговицы, часть энергии идет на совершение работы поступательного перемещения глаза вдоль оптической оси и часть на вращательное движение. Когда энергия воздушного импульса исчерпана глаз автоматически возвращается в исходное состояние при этом энергия внешнего воздействия, запасенная за счет упругости элементов глаза, расходуется на совершение работы по восстановлению упругости формы.

Рассмотренная модель глаза, как пассивной системы, работающей в автоматическом режиме применима для тестовых воздействий простых типов. Однако глаз, как биологическая система относится к системам адаптивным, поэтому математическая модель глаза должна иметь вид системы уравнений, включающих модель аккомодации.

Предложенная модель пассивного поведения глаза может служить для решения задач диагностики внутриглазного давления, т. е. позволяет более точно оценивать энергетический баланс внешнего воздействия на глаз конкретного человека.

ЛИТЕРАТУРА

1. Об энергозатратах глаза при чтении / С. М. Бауэр [и др.] // Сборник трудов конференции «Биомеханика глаза 2009». – М, 2009. – С. 3–6.
2. Бауэр С. М. Оценка влияния формы роговицы и склеры на показатели внутриглазного давления / С. М. Бауэр, Е. Б. Воронкова, А. С. Типяев // Сборник трудов конференции «Биомеханика глаза 2009». – М, 2009. – С. 94–97.
3. О математическом моделировании измерения внутриглазного давления при тонометрии по методу Маклакова / С. М. Бауэр [и др.] // Сборник трудов конференции «Биомеханика глаза 2005». – М, 2005. – С. 121–122.
4. О влиянии толщины роговицы на показатели внутриглазного давления при измерении ВГД аппланационными методами / С. М. Бауэр [и др.] // Сборник трудов конференции «Биомеханика глаза 2007». – М, 2007. – С. 119–124.
5. Биомеханика глаз при их вынужденных и собственных колебаниях [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.dissercat.com/content/biomekhanika-glaz-pri-ikh-vynuzhdennykh-i-sobstvennykh-kolebaniyakh#ixzz2CEC1zc9U>
6. Бутенин Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – Санкт-Петербург, 1998 – 729 с.
7. Глаз. [Электронный ресурс], <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%BB%D0%B0%D0%B7>
8. Гундорова Р. А. Современная офтальмотравматология. / Р. А. Гундорова, А. В. Степанов, Н. Ф. Курбанова – М., 2007.
9. Дубровский В. И. Биомеханика : учебник для средних и высших учебных заведений / В. И. Дубровский, В. Н. Федорова – М., 2004.
10. Estimation of the elastic characteristics of the eyeball from the response of the emulated eye to the introduction of given volumes of lignid / Maiseeva I. N. [et al.] // Russian Journal of Biomechanics, Perm National Research Polytechnic University – 24, № 4, – P. 351–366.
11. Коскас Г. Комплексная диагностика патологии глазного дна / Г. Коскас, Ф. Коскас, А. Зурдан А.; пер. с фр. под общ. ред. В. В. Нероева, М. В. Рябиной – М. : Практическая медицина, 2007. – 496 с.
12. Межнародное руководство по глаукоме, Т. 1 – Минск, «Альтиора-Живые краски» – 2013. – 108 с.
13. Полянин А. Д. Справочник. Линейные уравнения математической физики – М. : Физматлит, 2001. – 575 с.
14. Седов Л. Н. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. – М. : Наука, 1970.
15. Хусаинов Р. Р. Моделирование деформации глаза при изменении внутриглазного давления оптическим методом / Р. Р. Хусаинов, В. Р. Цибульский, В. Л. Якушев // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2011. Т. 51, № 2. – С. 349–362.
16. Чигарев А. В. Моделирование биомеханики глаза при пневмотонометрических испытаниях методом суперпозиции движений и деформаций вязкоупругого тела /

А. В Чигарев, М. О Михнович // МЕХАНИКА МАШИН, МЕХАНИЗМОВ И МАТЕРИАЛОВ. – 2020. – № 1 – С. 82–94.

17. Asejczyk-Widlicka Sródka W. Influence of Intraocular Pressure on Geometrical Properties of a Linear Model of the Eyeball: Effect of Optical Self-adjustment / W. Asejczyk-Widlicka Sródka, H. Kasprzak, R. Iskander // Optic 115 – № 11 (2004). – P. 517–524.

18. Kopinski R. Automatic method of analysis and measurement of additional parameters of corneal deformation in the Corvis tonometer. BioMedical Engineering Onlirce. – 2014. – 13:150. – P. 1–15.

19. Kubo R. Thermodynamics – North – Holland, Publishing Compong – Amsterdam, 1968. – 304 p.

20. Sedt A. Active and nonlinear wave propagation in electronics. – Wiley – Intekscience, New York, London, Sydney, Toronto, 1970. – 367 p.

21. Sródka W. Effect of material properties of the eyeball coat on optical image stability / W. Sródka , B. W Pierscionek // J. Biomedical Optics – 13(5).

22. Whitham F. R. S. Linear and nonlinear wales. – Wiley – Interscience, New York, London, Sydney, Toronto, 1974. – 622 p.

Поступила: 12.04.2023

ОБОСНОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ СХЕМЫ СИЛОВОГО ПРИВОДА КОЛЕСНО-ШАГАЮЩЕЙ ХОДОВОЙ СИСТЕМЫ

Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Изготовленный в БНТУ образец колесно-шагающего движителя осуществляет перемещение комбинированным способом [1]. Одновременно происходит прокатывание по несущей поверхности опорных башмаков (колесный принцип) и осуществляется перемещение ступицы движителя за счет поворота штанг и кривошипов (шагающий принцип) [2; 3]. Конструкция этой ходовой системы позволяет перешагивать сравнительно невысокие препятствия (камни, бревна), подниматься или спускаться по ступеням и поверхностям с большим углом уклона, что недоступно для классического колеса [3; 4]. Эти преимущества позволяют применять колесно-шагающий движитель в сельском хозяйстве, лесной промышленности, для горных работ, при ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций [3; 5].

Существующий образец движителя был установлен на мотоблок, который приводился в действие двигателем внутреннего сгорания через сложную механическую передачу [3; 6]. На современном этапе развития производственных технологий, представляется более целесообразным электромеханический привод, когда каждый отдельный колесно-шагающий движитель получает мощность от собственного электродвигателя. Электродвигатели, в свою очередь, получают энергию либо от аккумулятора большой мощности, либо через электрогенератор от двигателя внутреннего сгорания. Таким образом, следует использовать опыт практического применения гибридных силовых установок на автомобильном транспорте, включая электронную систему управления работы движителей.

В предыдущих работах [6; 7] был выполнен динамический анализ данного движителя, как для постоянной угловой скорости входного вала, так и при наличии углового ускорения. Наличие методики динамического расчета для переменной угловой скорости очень значимо, поскольку, в реальных условиях работы, сельскохозяйственная и лесопромышленная техника обычно эксплуатируются на переменных скоростных режимах, когда возникают дополнительные инерционные нагрузки [1; 3; 5].

Тем не менее, даже при установившемся режиме работы этого движителя, возникают периодически действующие силы инерции. Одним из методов решения данной задачи, является применение некруглых зубчатых колес в приводе движителя. В предыдущих публикациях [8; 9] были разработаны различные методы вычисления геометрических параметров этих колес. При этом, ведущая зубчатая шестерня имела несимметричную форму. Помимо наличия статического дисбаланса, при высокой частоте входного вала возникала значительная динамическая неуравновешенность, которая ухудшала работу зацепления.

Следовательно, возникла необходимость изменить общее передаточное отношение в приводе движителя за полный рабочий цикл. Это значит, что в проектируемой зубчатой передаче, несмотря на переменное передаточное отношение, за один полный оборот ведомого колеса будут совершаться два полных оборота ведущей шестерни приводного вала. В этом случае, появляется возможность вычислить симметричные геометрические параметры ведущей шестерни. Следует отметить, что ведущая зубчатая шестерня имела несимметричную форму согласно работам [8; 9] тогда, когда за один

полный оборот ведомого колеса совершаются четыре полных оборота ведущей шестерни.

Основываясь на этих принципах, а также результатах предыдущих работ [8, 9], приступим к расчету конструкции силового привода колесно-шагающего движителя (КШД). Вертикальное положение оси ступицы движителя и аналог скорости движения по горизонтали выражаются соответственно формулами:

$$Y_{01} = a - b + c = \text{const} ; \quad (1)$$

$$\frac{dX_{01}}{d\varphi} = a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi . \quad (2)$$

Здесь: $a = 0,06$ м – расстояние между осями вращения ступицы движителя и кривошипов, $b = 0,1$ м – длина кривошипа, $c = 0,36$ м – длина стойки башмака, φ – угол поворота ступицы движителя в диапазоне $-\pi/4$ радиан $\leq \varphi \leq \pi/4$ радиан [8; 9].

Для обеспечения постоянной скорости перемещения движителя, зубчатое зацепление между шестерней приводного вала и колесом водила должно обеспечивать следующее переменное передаточное отношение [9]:

$$\frac{\omega}{\omega_H} = \frac{u \cdot \left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right)}{Y_{01}} . \quad (3)$$

Здесь рассматривается установившееся движение КШД, когда частота вращения приводного вала $\omega = \text{const}$. Тогда частота вращения водила:

$$\omega_H = \frac{\omega \cdot Y_{01}}{u \cdot \left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right)} .$$

Вращение колеса водила обеспечивает поступательное перемещение КШД, тогда скорость транспортного средства с КШД на установившемся режиме будет равна:

$$v = \omega_H \cdot \left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right) = \frac{\omega \cdot Y_{01}}{u} .$$

Для значений угловой скорости $\omega = \text{const}$, вертикальной координаты оси ступицы $Y_{01} = a - b + c = \text{const}$, коэффициента передаточного отношения $u = \text{const}$, получим линейную скорость перемещения $v = \text{const}$. Для зацепления некруглых колес величина коэффициента передаточного отношения u будет определена далее, с учетом того, что за один полный оборот ведомого колеса осуществляются два полных оборота ведущей шестерни. Уравнения начальных линий некруглых зубчатых колес определяются из условий [9]:

$$\frac{\omega}{\omega_H} = \frac{r_H}{r} ; \quad (4)$$

$$r + r_H = L = \text{const} . \quad (5)$$

Преобразуя уравнение (4) с учетом (1–3), получаем:

$$\frac{r_H}{r} = \frac{u \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)}{(a - b + c)} .$$

С учетом выражения (5) получим:

$$r_H = \frac{L \cdot u \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)}{(a - b + c) + u \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)} ; \quad (6)$$

$$r = \frac{L \cdot (a - b + c)}{(a - b + c) + u \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)} . \quad (7)$$

Обобщенной координатой является угол поворота φ ведомого колеса, связанный с углом поворота θ ведущей шестерни соотношением, вытекающим из выражений (1–3):

$$\omega_H = \frac{(a - b + c)}{u \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)} \cdot \omega . \quad (8)$$

Так как $\omega_H = \frac{d\varphi}{dt}$, а также $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, тогда из формулы (8) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{(a - b + c)}{u \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)} \cdot \frac{d\theta}{dt} ; \\ \frac{u \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)}{(a - b + c)} d\varphi &= d\theta ; \\ \frac{u}{a - b + c} \cdot \int (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi) d\varphi &= \int d\theta ; \\ \frac{u}{a - b + c} \cdot ((a - b + c) \cdot \varphi + \frac{3}{2} \cdot b \cdot \sin 2\varphi) + C &= \theta . \end{aligned} \quad (9)$$

Найдем постоянную C из условия, что при $\varphi = 0$ будет $\theta = 0$. Тогда из выражения (9) получим $C = 0$. С другой стороны, необходимо выполнение условия, что при $\varphi = \pi/4$ радиан будет $\theta = \pi/2$ радиан. Тогда из выражения (9) получим равенство:

$$\begin{aligned} \frac{u}{a - b + c} \cdot \left((a - b + c) \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \cdot b \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) &= \frac{\pi}{2} ; \\ u &= \frac{2 \cdot (a - b + c) \cdot \pi}{(a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b} . \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя полученное выражение (10) в формулу (9), находим зависимость между углом поворота φ ведомого колеса и углом поворота θ ведущей шестерни:

$$\theta = \frac{\pi \cdot (2 \cdot (a - b + c) \cdot \varphi + 3 \cdot b \cdot \sin 2\varphi)}{(a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b}. \quad (11)$$

Преобразуем формулы (6–7) с учетом выражения (10):

$$r_H = \frac{L \cdot 2 \cdot \pi \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)}{((a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b) + 2 \cdot \pi \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)}; \quad (12)$$

$$r = \frac{L \cdot ((a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b)}{((a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b) + 2 \cdot \pi \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)}. \quad (13)$$

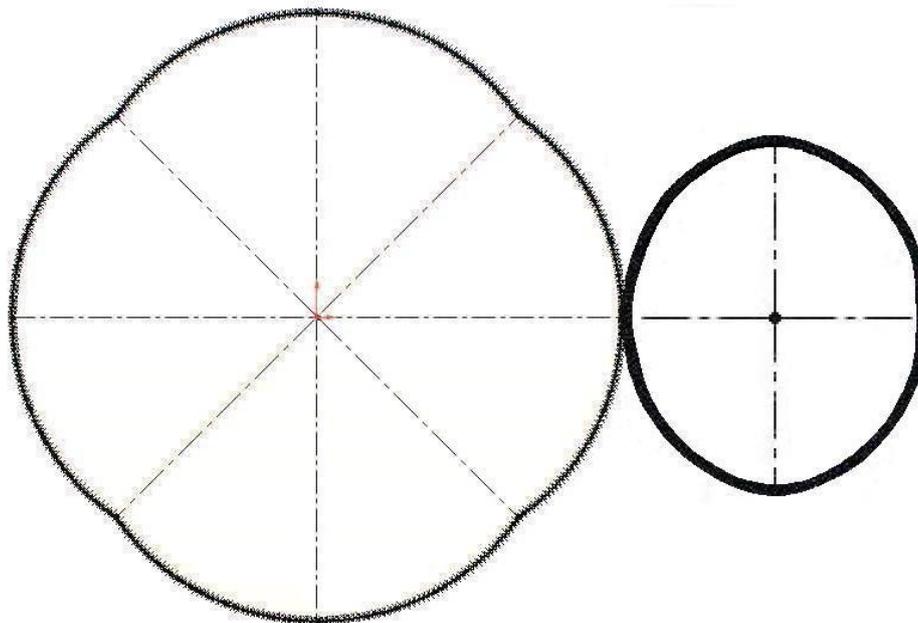


Рис. 1. Начальные линии зубчатой передачи силового привода колесно-шагающего движителя

По формуле (12) строится в полярных координатах начальная линия ведомого колеса, как функция вида $r_H = f(\varphi)$. Начальная линия ведущей шестерни должна описываться функцией вида $r = f(\theta)$. Однако, из-за сложности формулы (11), более целесообразно для значений обобщенной координаты φ вычислять по формулам (11, 13) значения $\theta = f(\varphi)$ и $r = f(\varphi)$, заносить их в таблицу, и ставить между собой в соответствие как $r = f(\theta)$.

Таким образом, используя начальные линии (рисунок 1), в дальнейшем следует приступить к профилированию зубчатых венцов. Применение данной конструкции зубчатого зацепления в приводе движителя позволит значительно повысить равномерность скорости движения.

Используя формулы (4, 12, 13), запишем выражения для нахождения значений переменного передаточного отношения [9]:

$$U(\varphi) = \frac{r_H}{r} = \frac{\omega}{\omega_H} = \frac{d\theta}{d\varphi}; \quad (14)$$

$$U(\varphi) = \frac{2 \cdot \pi \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)}{(a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b} \quad (15)$$

Выражения (14–15) описывают теоретический закон изменения передаточного отношения, представляющий собой гладкую непрерывную функцию. В реальном зубчатом зацеплении передаточное отношение будет изменяться дискретно, поэтому $U(\varphi)$ будет кусочной функцией, соответствующей выражению (15) с определенной степенью приближения.

Осуществим разбиение проектируемых некруглых зубчатых колес на условные сектора, каждый из которых будет представлять собой часть круглого зубчатого колеса с одним зубом. Каждый сектор имеет свое значение радиуса начальной окружности и свое значение углового интервала дуги. При этом, у всех секторов должны быть равные длины дуг соответствующих участков начальных окружностей. Начнем разбиение на сектора с ведомого зубчатого колеса. Так как, это колесо уже было условно разделено на четыре больших сектора, при разбиении на более мелкие сектора будем рассматривать один большой сектор для значений $-\pi/4$ радиан $\leq \varphi \leq \pi/4$ радиан.

При разбиении одного большого сектора на множество меньших секторов, где i – число условных секторов разбиения, должны выполняться равенства [9]:

$$r_{H_1} \cdot \Delta\varphi_1 = r_{H_2} \cdot \Delta\varphi_2 = \dots = r_{H_i} \cdot \Delta\varphi_i; \quad (16)$$

$$\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \dots + \Delta\varphi_i = \pi/2; \quad (17)$$

Значения $r_{H_1}, r_{H_2}, \dots, r_{H_i}$ вычисляются согласно формуле (12) для соответствующих углов $\varphi_1 + 0,5 \cdot \Delta\varphi_1; \varphi_2 + 0,5 \cdot \Delta\varphi_2; \dots; \varphi_i + 0,5 \cdot \Delta\varphi_i$ как:

$$r_{H_1} = \frac{L \cdot 2 \cdot \pi \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos(2 \cdot \varphi_1 + \Delta\varphi_1))}{((a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b) + 2 \cdot \pi \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos(2 \cdot \varphi_1 + \Delta\varphi_1))}; \quad (18)$$

$$r_{H_2} = \frac{L \cdot 2 \cdot \pi \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos(2 \cdot \varphi_2 + \Delta\varphi_2))}{((a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b) + 2 \cdot \pi \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos(2 \cdot \varphi_2 + \Delta\varphi_2))}; \quad (19)$$

.....

$$r_{H_i} = \frac{L \cdot 2 \cdot \pi \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos(2 \cdot \varphi_i + \Delta\varphi_i))}{((a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b) + 2 \cdot \pi \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos(2 \cdot \varphi_i + \Delta\varphi_i))}. \quad (20)$$

Значения углов определяются равенствами:

$$\varphi_1 = -\pi/4; \quad (21)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi_1; \quad (22)$$

.....

$$\varphi_i = \varphi_1 + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \dots + \Delta\varphi_{i-1} = \varphi_{i-1} + \Delta\varphi_{i-1}; \quad (23)$$

$$\pi/4 = \varphi_1 + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \dots + \Delta\varphi_i = \varphi_i + \Delta\varphi_i. \quad (24)$$

Итак, для проведения вычислений следует определить величины угловых интервалов $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \dots, \Delta\varphi_i$. Запишем условия равенства длин дуг:

$$\begin{aligned} r_{H_1} \cdot \Delta\varphi_1 &= r_{H_2} \cdot \Delta\varphi_2; \\ &\dots \dots \dots \\ r_{H_{i-1}} \cdot \Delta\varphi_{i-1} &= r_{H_i} \cdot \Delta\varphi_i. \end{aligned}$$

Преобразуем данные уравнения и запишем как:

$$\Delta\varphi_2 = \frac{r_{H_1} \cdot \Delta\varphi_1}{r_{H_2}}; \quad (25)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta\varphi_i = \frac{r_{H_{i-1}} \cdot \Delta\varphi_{i-1}}{r_{H_i}}. \quad (26)$$

Используя формулы (25–26), определим значения угловых интервалов методом последовательных приближений [9]. Первоначально задаем значение угла $\varphi_1 = -\pi/4$ и интервала $\Delta\varphi_1$ для самого первого цикла расчетов согласно формуле:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\pi}{2 \cdot i}. \quad (27)$$

Далее по формуле (22) вычисляется φ_2 . Для значения $\varphi_1 + 0,5 \cdot \Delta\varphi_1$ по формуле (18) вычисляется величина r_{H_1} . После этого, для самого первого цикла расчетов принимается $\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_1$. Для значения $\varphi_2 + 0,5 \cdot \Delta\varphi_2$ по формуле (19) вычисляется величина r_{H_2} . Затем по формуле (25) вычисляется уточненное значение $\Delta\varphi_2$. Для значения $\varphi_2 + 0,5 \cdot \Delta\varphi_2$ по формуле (19) опять вычисляется величина r_{H_2} . Потом опять по формуле (25) вычисляется уточненное значение $\Delta\varphi_2$. Величина $\Delta\varphi_2$ уточняется до тех пор, пока расхождение между циклами превышает 0,000001 радиан. Затем вычисляется φ_3 . Принимается для нового цикла расчетов $\Delta\varphi_3 = \Delta\varphi_2$, где $\Delta\varphi_2$ равно последнему уточненному значению. Затем, по аналогии, для значения $\varphi_3 + 0,5 \cdot \Delta\varphi_3$ вычисляется величина r_{H_3} . После этого уточняем значение $\Delta\varphi_3$. Затем, найдя значения интервалов $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \dots, \Delta\varphi_i$, производим первое контрольное вычисление по формуле:

$$\Delta\varphi_1 = \pi / 2 - (\Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3 + \dots + \Delta\varphi_i). \quad (28)$$

Вычисленное по формуле (28) значение $\Delta\varphi_1$ следует сравнить со значением $\Delta\varphi_1$ в первом приближении, т. е. вычисленным по формуле (27). Если расхождение превышает 0,000001 радиан, расчеты следует продолжить. Для следующего этапа расчетов задаются новые значения интервалов, вычисляемые как:

$$\Delta\varphi_{i_{k+1}} = \Delta\varphi_{i_k} + 0,5 \cdot (\pi / 2 - (\Delta\varphi_{1_k} + \Delta\varphi_{2_k} + \Delta\varphi_{3_k} + \dots + \Delta\varphi_{i_k})) / i; \quad (29)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta\varphi_{i_{k+1}} = \Delta\varphi_{i_k} + 0,5 \cdot (\pi / 2 - (\Delta\varphi_{1_k} + \Delta\varphi_{2_k} + \Delta\varphi_{3_k} + \dots + \Delta\varphi_{i_k})) / i. \quad (30)$$

Здесь k – номер цикла расчетов, i – число секторов разбиения.

Циклы расчетов должны продолжаться до выполнения условия:

$$|\Delta\varphi_{1_{k+1}} - \Delta\varphi_{1_k}| \leq 0,000001 \text{ радиан. (31)}$$

Вычислив значения $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3, \dots, \Delta\varphi_i$, и $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_i$, далее следует провести разбиения на угловые сектора ведущей зубчатой шестерни приводного вала. Для этого должны соблюдаться равенства:

$$r_{H_1} \cdot \Delta\varphi_1 = r_1 \cdot \Delta\theta_1; \quad (32)$$

... ..

$$r_{H_i} \cdot \Delta\varphi_i = r_i \cdot \Delta\theta_i; \quad (33)$$

$$r_1 \cdot \Delta\theta_1 = r_2 \cdot \Delta\theta_2; \quad (34)$$

... ..

$$r_{i-1} \cdot \Delta\theta_{i-1} = r_i \cdot \Delta\theta_i; \quad (35)$$

$$r_{H_1} + r_1 = L; \quad (36)$$

... ..

$$r_{H_i} + r_i = L; \quad (37)$$

$$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 + \dots + \Delta\theta_i = \pi. \quad (38)$$

В этой системе уравнений известными величинами являются лишь ранее вычисленные значения угловых интервалов $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \dots, \Delta\varphi_i$. Для определения остальных величин выполним преобразования, чтобы получить выражения:

$$\Delta\theta_2 = \frac{\Delta\theta_1 \cdot \Delta\varphi_1 \cdot \Delta\varphi_2}{\Delta\theta_1 \cdot (\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1) + \Delta\varphi_1 \cdot \Delta\varphi_2}; \quad (39)$$

... ..

$$\Delta\theta_i = \frac{\Delta\theta_{i-1} \cdot \Delta\varphi_{i-1} \cdot \Delta\varphi_i}{\Delta\theta_{i-1} \cdot (\Delta\varphi_i - \Delta\varphi_{i-1}) + \Delta\varphi_{i-1} \cdot \Delta\varphi_i}; \quad (40)$$

$$r_{H_1} = \frac{\Delta\theta_1 \cdot L}{\Delta\varphi_1 + \Delta\theta_1}; \quad (41)$$

... ..

$$r_{H_i} = \frac{\Delta\theta_i \cdot L}{\Delta\varphi_i + \Delta\theta_i}; \quad (42)$$

$$r_1 = L - r_{H_1}; \quad (43)$$

... ..

$$r_i = L - r_{H_i}. \quad (44)$$

$$\theta_1 = -\pi/2; \quad (45)$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \Delta \theta_1; \quad (46)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\theta_i = \theta_{i-1} + \Delta \theta_{i-1}. \quad (47)$$

Итак, для проведения нужных вычислений необходимо определить величину углового интервала $\Delta\theta_1$. Первоначально задаем значение интервала $\Delta\theta_1$ для самого первого цикла расчетов согласно формуле:

$$\Delta\theta_1 = \frac{\pi}{i}. \quad (48)$$

После вычисления значений $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3, \dots, \Delta\theta_i$, производим первое контрольное вычисление по формуле:

$$\Delta\theta_1 = \pi - (\Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 + \dots + \Delta\theta_i). \quad (49)$$

Вычисленное по формуле (49) значение $\Delta\theta_1$ следует сравнить со значением $\Delta\theta_1$, вычисленным по формуле (48). Если расхождение превышает 0,000001 радиан, расчеты следует продолжить. Для обеспечения более быстрой сходимости результатов, для каждого последующего цикла расчетов задается значение, вычисляемое по формуле:

$$\Delta\theta_{1k+1} = \Delta\theta_{1k} + 0,5 \cdot (\pi - (\Delta\theta_{1k} + \Delta\theta_{2k} + \dots + \Delta\theta_{ik}))/i. \quad (50)$$

Здесь k – номер цикла расчетов, i – число секторов разбиения. Циклы расчетов должны продолжаться до выполнения условия:

$$|\Delta\theta_{1k+1} - \Delta\theta_{1k}| \leq 0,000001 \text{ радиан}. \quad (51)$$

Определив с заданной точностью значения интервалов $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots, \Delta\theta_i$, далее найдем по формулам (39–47) величины радиусов $r_{H_1}, r_{H_2}, \dots, r_{H_i}$ и r_1, r_2, \dots, r_i , значения углов $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i$. В качестве проверки убедимся в соблюдении условия [9]:

$$l_{\text{инт}} = r_{H_1} \cdot \Delta\varphi_1 = \dots = r_{H_i} \cdot \Delta\varphi_i = r_1 \cdot \Delta\theta_1 = \dots = r_i \cdot \Delta\theta_i. \quad (52)$$

Далее выполним расчеты указанных параметров шестерни приводного вала и колеса водила. Исходные данные: межосевое расстояние расчетное $L_P = 143,5$ мм, межосевое расстояние установочное $L_{УСТ} = 144$ мм, $a = 60$ мм, $b = 100$ мм, $c = 360$ мм, число зубьев шестерни приводного вала $z = 48$, число зубьев колеса водила $z_H = 96$. Шестерня приводного вала условно разделена на 2 сектора по 24 зуба. Зубчатое колесо водила, соответственно, разделено на 4 сектора по 24 зуба. Таким образом, число секторов разбиения $i = 24$. Значения угла поворота колеса водила находятся в интервале $-\pi/4$ радиан $\leq \varphi \leq \pi/4$ радиан, угол поворота шестерни принимает значения $-\pi/2$ радиан $\leq \theta \leq \pi/2$ радиан. Значения углов φ_i, θ_i , угловых интервалов $\Delta\varphi_i, \Delta\theta_i$

используются при расчетах в радианах, а для удобства заносятся в таблицу 1 также в градусах, значения r_{Hi} и r_i используются при расчетах и заносятся в таблицу 1 в миллиметрах.

Таблица 1 – Параметры разбиения начальных линий зубчатого зацепления

i	φ_i , рад	φ_i , градусы	$\Delta\varphi_i$, рад	$\Delta\varphi_i$, гра- ду- сы	r_{Hi} , мм	θ_i , рад	θ_i , гра- дусы	$\Delta\theta_i$, рад	$\Delta\theta_i$, гра- ду- сы	r_i , мм
1	-0,7854	-45,00	0,0756	4,33	82,20	-1,5708	-90,00	0,1013	5,81	61,30
2	-0,7098	-40,67	0,0719	4,12	86,37	-1,4695	-84,19	0,1087	6,23	57,13
3	-0,6379	-36,55	0,0692	3,97	89,76	-1,3607	-77,96	0,1156	6,62	53,74
4	-0,5687	-32,58	0,0671	3,85	92,53	-1,2451	-71,34	0,1219	6,98	50,97
5	-0,5016	-28,74	0,0655	3,75	94,80	-1,1232	-64,36	0,1276	7,31	48,70
6	-0,4360	-24,98	0,0643	3,68	96,66	-0,9957	-57,05	0,1326	7,60	46,84
7	-0,3718	-21,30	0,0633	3,63	98,16	-0,8630	-49,45	0,1370	7,85	45,34
8	-0,3085	-17,67	0,0625	3,58	99,35	-0,7260	-41,60	0,1407	8,06	44,15
9	-0,2459	-14,09	0,0620	3,55	100,27	-0,5853	-33,54	0,1437	8,23	43,23
10	-0,1840	-10,54	0,0615	3,53	100,94	-0,4416	-25,30	0,1459	8,36	42,56
11	-0,1224	-7,01	0,0613	3,51	101,37	-0,2957	-16,94	0,1475	8,45	42,13
12	-0,0612	-3,50	0,0612	3,50	101,59	-0,1482	-8,49	0,1482	8,49	41,91
13	0,0000	0,00	0,0612	3,50	101,59	0,0000	0,00	0,1482	8,49	41,91
14	0,0612	3,50	0,0613	3,51	101,37	0,1482	8,49	0,1475	8,45	42,13
15	0,1224	7,01	0,0615	3,53	100,94	0,2957	16,94	0,1459	8,36	42,56
16	0,1840	10,54	0,0620	3,55	100,27	0,4416	25,30	0,1437	8,23	43,23
17	0,2459	14,09	0,0625	3,58	99,35	0,5853	33,54	0,1407	8,06	44,15
18	0,3085	17,67	0,0633	3,63	98,16	0,7260	41,60	0,1370	7,85	45,34
19	0,3718	21,30	0,0643	3,68	96,66	0,8630	49,45	0,1326	7,60	46,84
20	0,4360	24,98	0,0655	3,75	94,80	0,9957	57,05	0,1276	7,31	48,70
21	0,5016	28,74	0,0671	3,85	92,53	1,1232	64,36	0,1219	6,98	50,97
22	0,5687	32,58	0,0692	3,97	89,76	1,2451	71,34	0,1156	6,62	53,74
23	0,6379	36,55	0,0719	4,12	86,37	1,3607	77,96	0,1087	6,23	57,13
24	0,7098	40,67	0,0756	4,33	82,20	1,4695	84,19	0,1013	5,81	61,30

Ниже приведена диаграмма вычисленных значений (рисунок 2) фактической (ломаная линия) и теоретической (плавная линия) передаточной функций по формулам (14–15).

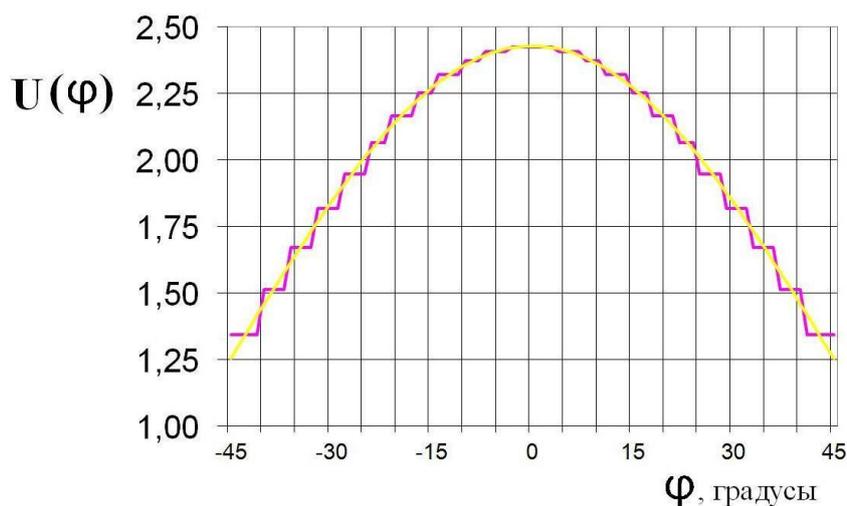


Рис. 2. Диаграмма фактической и теоретической передаточных функций

Разработанная методика расчета обеспечивает качественную сходимость реальной и теоретической передаточной функций, позволяет выполнить построение некруглых зубчатых колес симметричной геометрической формы. Далее, следует выполнить профилирование зубчатого зацепления силового привода колесно-шагающего двигателя, чтобы построить его трехмерную модель [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Беккер М. Г. Введение в теорию систем местность–машина. – М. : «Машиностроение», 1973. – 520 с.
2. Скойбеда А. Т. Колесно-шагающий движитель и его динамические преимущества по сравнению с колесом / А. Т. Скойбеда, И. М. Комяк, В. Н. Жуковец // Механика-2011: сб. науч. тр. V Белорусского конгресса по теорет. и прикладной механике, Минск, 26–28 окт. 2011 г.: в 2 т. – Минск, 2011. – Том 1. – С. 138–144.
3. Скойбеда А. Т. Колесно-шагающие движители для транспортного средства высокой проходимости / А. Т. Скойбеда, В. Н. Жуковец // Теоретическая и прикладная механика. Международный научно-технический сборник. – Выпуск 28. – 2013. – С. 228–233.
4. Скойбеда А. Т. Рациональный профиль опорных башмаков колесно-шагающего движителя / А. Т. Скойбеда, В. Н. Жуковец // Наука и техника. Международный научно-технический журнал. – 2013. – № 6. – С. 38–42.
5. Шагающие движители – перспективное направление создания агрофильных ходовых систем мобильных машин / А. Т. Скойбеда [и др.] // Сборник научных трудов «Актуальные вопросы машиноведения». Выпуск 3. – Минск, 2014. – С. 102–105.
6. Скойбеда А. Т. Динамика и нагруженность привода колесно-шагающего движителя / А. Т. Скойбеда, А. А. Калина, В. Н. Жуковец // «ВЕСТНИК БелГУТа: НАУКА И ТРАНСПОРТ». Научно-практический журнал № 1 (32) 2016 года. Спец. выпуск. – Гомель, 2016. – С. 289–291.
7. Скойбеда А. Т. Динамика колесно-шагающего движителя при переменной частоте вращения входного вала / А. Т. Скойбеда, В. Н. Жуковец // Сборник научных трудов «Актуальные вопросы машиноведения». Выпуск 10. – Минск, 2021. – С. 172–176.

8. Скойбеда А. Т. Применение некруглых зубчатых колес в приводе колесно-шагающего движителя / А. Т. Скойбеда, И. М. Комяк, В. Н. Жуковец // Республиканский межведомственный сборник научных трудов «Машиностроение». – Выпуск 27. – Минск : БНТУ, 2013. – С. 113–117.

9. Скойбеда А. Т. Расчет начальных линий некруглых зубчатых колес / А. Т. Скойбеда, В. Н. Жуковец // Теоретическая и прикладная механика. Международный научно-технический сборник. – Выпуск 31. – 2016. – С. 110–117.

10. Жуковец В. Н. Построение трехмерных моделей некруглых зубчатых колес / В. Н. Жуковец, Е. В. Гасперович // Материалы студенческой научно-технической конференции, проводимой в рамках международного молодежного форума «Креатив и инновации 2020», 14–23 апреля 2020 года. – Минск : БНТУ, 2020. – С. 369–371.

Поступила: 11.04.2023

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ИМПЛАНТАТА НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КОСТНОЙ ТКАНИ И СЛИЗИСТОЙ ОБОЛОЧКИ НИЖНЕЙ ЧЕЛЮСТИ

¹Назаренко Д. В., ²Рубникович С. П., ¹Босяков С. М.

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Белорусский государственный медицинский университет, Минск

Введение. В настоящее время существует большое количество доступных для использования в стоматологической практике конструкций зубных имплантатов [1; 2]. Для их корректной установки необходимо прогнозировать распределение напряжений, возникающих в костной ткани, а также в слизистой оболочке нижней и верхней челюсти при действии окклюзионных сил, особенно при установке балочных протезов [3; 4]. Оценка напряженно-деформированного состояния биомеханической системы «имплантат – костная ткань – слизистая оболочка» для различных клинических ситуаций, как правило, осуществляется с использованием конечно-элементного моделирования [5; 6]. В большом количестве исследований, посвященных этому направлению, рассматривался вопрос влияния геометрической формы имплантата и площади его соприкосновения с костной тканью на нагружение биологических тканей, окружающих имплантат. В то же время, такие работы, в основном сосредоточены на сравнительном анализе напряженно-деформированного состояния челюстей или фрагментов челюстей, возникающего при действии жевательной нагрузки, для различных длин и диаметрах имплантата, а также при различном шаге резьбы и углах ее наклона по отношению к оси имплантата [7]. Вопрос о влиянии геометрической поверхности имплантата на нагружение костной ткани при воздействии продуктов питания на коронку имплантата практически не рассматривался. При этом, моделирование клинических ситуаций, связанных с установкой зубных имплантатов, выполняется как для имплантатов с резьбой, так и для имплантатов с гладкой поверхностью. Настоящая работа развивает это актуальное направление и посвящена определению напряженно-деформированного состояния тканей нижней челюсти с установленным на имплантаты с различной поверхностью балочным протезом при действии окклюзионной нагрузки.

Механико-математическая модель.

Конечно-элементная модель нижней челюсти с протезом разработана на основании томографических данных. В среднем толщина слоя кортикальной костной ткани и слизистой оболочки составляют 3,4 мм и 2,5 мм соответственно [8]. Длина имплантата с цилиндрической поверхностью (модель 1), диаметр сферического элемента, высота соединения составили 10,0 мм 4,2 мм и 9,4 мм соответственно. Модель имплантата с резьбой на внешней поверхности (модель 2) разработана посредством преобразования цилиндрической поверхности к поверхности с резьбой и пазами, в соответствии геометрическим параметрами имплантата SEVEN внутренний шестигранник. Шаг внешней резьбы 1 мм, количество оборотов резьбы – 10, начальный угол и наружный угол резьбы 90° и 6° соответственно. Предполагалось, что имплантаты полностью остеоинтегрированы в костную ткань и компоненты имплантатов корректно затянуты (между элементами модели задается контакт типа Bonded). Установка балочного зубного протеза осуществлялась на два имплантата, расположенных в области первых премоляров. Сечение нижней челюсти с установленным зубным протезом на модели 1 и 2 имплантатов представлены на рисунках 1 и 2.

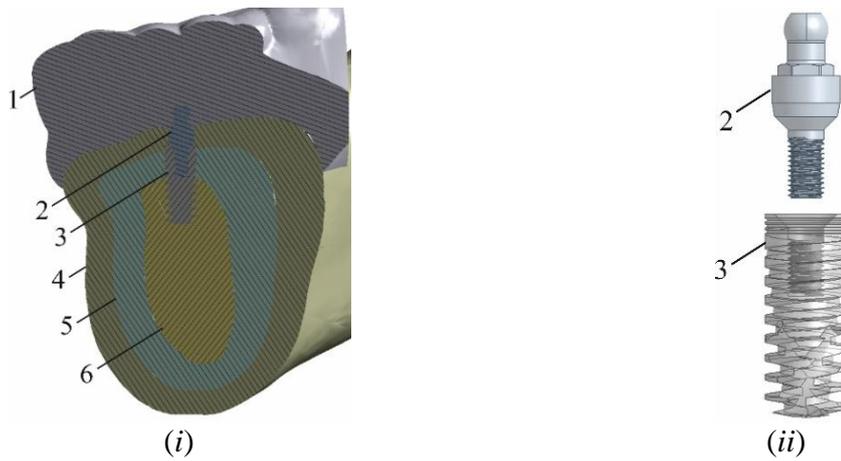


Рис. 1. Поперечное сечение модели верхней челюсти в области установки одного из имплантатов модели 1 (i) и компоненты модели зубного имплантата модели 1 (ii): 1 – зубной протез, 2 – абатмент, 3 – имплантат, 4 – слизистая оболочка, 5 – кортикальная костная ткань, 6 – губчатая костная ткань

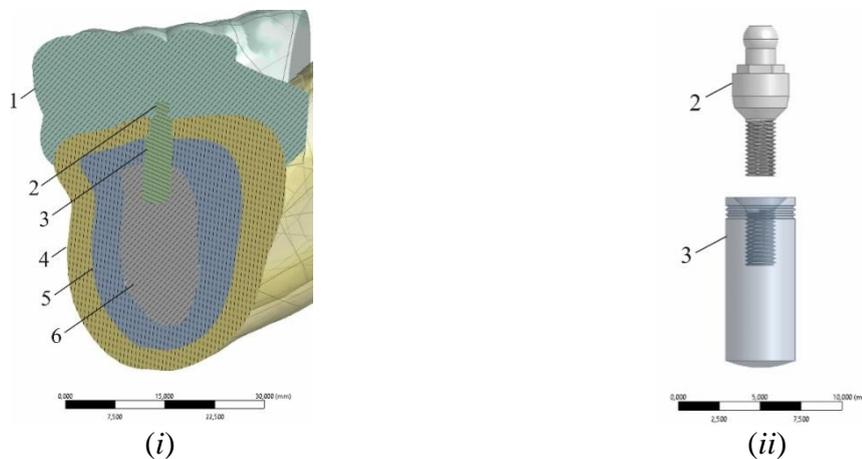


Рис. 2. Поперечное сечение модели верхней челюсти в области установки одного из имплантатов модели 2 (i) и компоненты модели зубного имплантата модели 2 (ii): 1 – зубной протез, 2 – абатмент, 3 – имплантат, 4 – слизистая оболочка, 5 – кортикальная костная ткань, 6 – губчатая костная ткань

Конечно-элементное разбиение модели выполнено в автоматическом режиме. Размер ребра конечного элемента для всех компонентов зубочелюстной системы и имплантата равен 1,0 мм и 0,3 мм соответственно. Физико-механические свойства для элементов модели представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Физико-механические свойства материалов модели

Материал	Модуль Юнга, МПа	Коэффициент Пуассона
Губчатая костная ткань [9]	1 370,0	0,30
Кортикальная костная ткань [10]	13 700,0	0,30
Слизистая оболочка [11]	19,6	0,30
Имплантат, атакмент (абатмент) [12]	110 000,0	0,35
Протез (акрил) [13]	8300,0	0,28

Прикладываемая к модели нагрузка и граничные условия имитировали действие мышечных сил, соответствующие физиологической жевательной нагрузке, а также воздействие продуктов питания на поверхность премоляра и моляра [11; 14; 15]. Это подразумевало фиксацию поверхностей височно-нижнечелюстного сустава модели нижней челюсти. Для сил, развиваемых группами мышц при пережевывании пищи, задавались усредненные значения. Предполагалось, что мышечные силы приложены к центру тяжести узлов элементов, соответствующих области прикрепления мышц. Направление мышечных сил определялось направляющими косинусами в соответствии с данными исследования [14]. Граничные условия для модели нижней челюсти с протезом, установленным на имплантаты с резьбой (модель 1), представлены на рисунке 3.

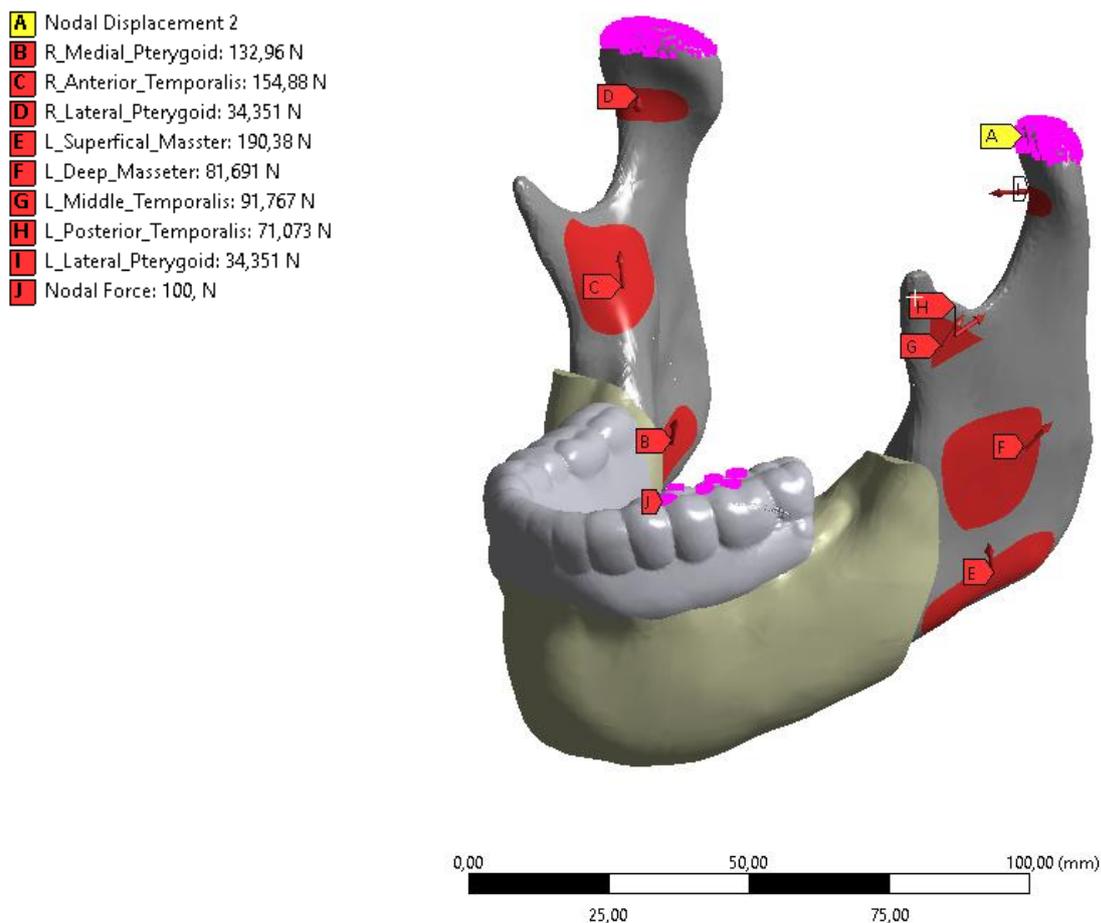


Рис. 3. Граничные условия для модели нижней челюсти с прикрепленным балочным протезом: маркер *A* – зафиксированные узлы на поверхностях нижнечелюстных суставов; маркер *E* – результирующая сил от действия поверхностной жевательной мышцы, равная 190,38 Н; маркер *F* – результирующая от действия глубокой жевательной мышцы, равная 81,691 Н; маркер *B* – результирующая от действия медиальной крыловидной мышцы, равная 132,96 Н; маркер *C* – результирующая от действия передней височной мышцы, равная 154,88; маркер *G* – результирующая от действия средней височной мышцы, равная 91,767 Н; маркер *H* – результирующая от действия задней височной мышцы, равная 71,073 Н; маркеры *D* и *I* – результирующая от действия боковой крыловидной мышцы, равная 34,351 Н; маркер *J* – область окклюзионного контакта жевательных поверхностей второго премоляра и первого моляра

Для модели нижней челюсти с установленным балочным протезом на имплантаты без резьбы применялись те же граничные условия.

Распределение напряжений в костной ткани и слизистой оболочке.

Результаты расчета эквивалентных напряжений, возникающих в элементах биомеханической системы «нижняя челюсть – имплантаты – балочный протез» при пережевывании продуктов питания, расположенных в области второго премоляра и первого моляра, представлены на рисунках 4–6.

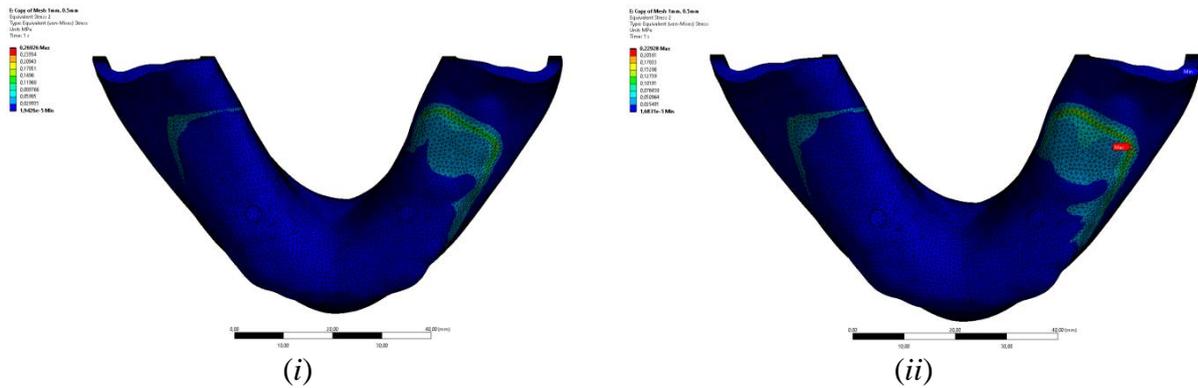


Рис. 4. Распределение эквивалентных напряжений в слизистой оболочке нижней челюсти с протезом, установленным на сферических имплантатах с резьбой (i) и без резьбы (ii), возникающее при пережевывании продуктов питания

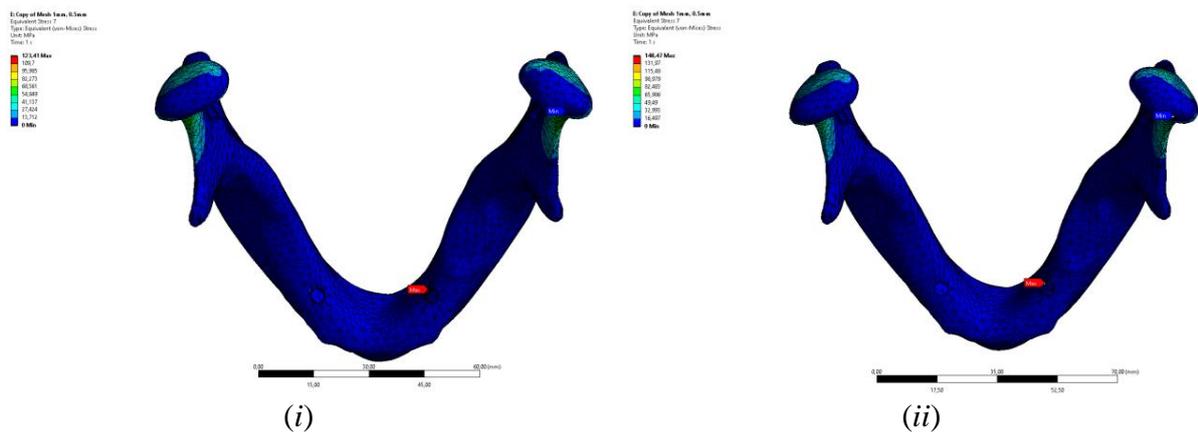


Рис. 5. Распределение эквивалентных напряжений в кортикальной костной ткани нижней челюсти с протезом, установленным на сферических имплантатах с резьбой (i) и без резьбы (ii), возникающее при пережевывании продуктов питания

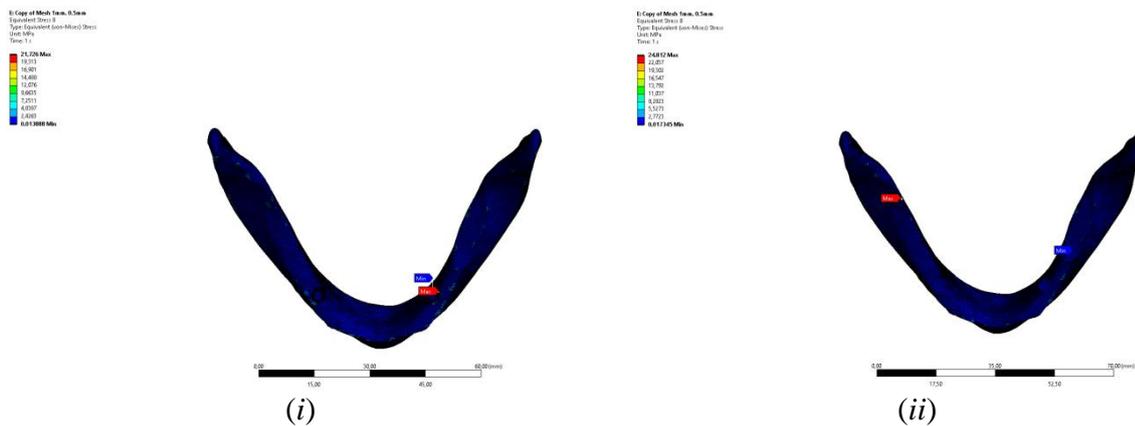


Рис. 6. Распределение эквивалентных напряжений в губчатой костной ткани нижней челюсти с протезом, установленным на сферических имплантатах с резьбой (i) и без резьбы (ii), возникающее при пережевывании продуктов питания

Из рисунков 4 и 5 видно, что качественное распределение эквивалентных напряжений в слизистой оболочке и кортикальной костной ткани при заданных граничных условиях практически одинаково. Наибольшие напряжения возникают в слизистой оболочке по контуру протеза, в кортикальной костной ткани – в области мыщелков височно-нижнечелюстного сустава. Значение наибольших напряжений в случае использования моделей 1 и 2 имплантатов составляют для слизистой оболочки 0,27 МПа и 0,23 МПа, для кортикальной костной ткани 123,4 МПа и 148,5 МПа соответственно. Отличие между наибольшими напряжениями для слизистой оболочки и кортикальной костной ткани в случае использования моделей 1 и 2 имплантатов составляет около 15 % и 17 %.

Рисунок 6 показывает, что использование модели 1 имплантата приводит к возникновению достаточно высоких напряжений в области расположения имплантата с правой стороны челюсти (со стороны противоположной расположению продуктов питания). Наибольшие напряжения в этой области составляют приблизительно 7,25 МПа (при наибольших напряжениях 21,73 МПа для модели губчатой кости). Максимальные напряжения возникают в губчатой костной ткани, окружающей имплантат со стороны, на которой располагаются продукты питания. В случае использования модели 2 имплантата, наибольшие напряжения возникают в той части губчатой костной ткани, которая расположена в области височно-нижнечелюстного сустава. Следует отметить, что при использовании модели 2 наибольшие напряжения в губчатой костной ткани возрастают по сравнению со случаем использования модели 1.

Заключение.

Полученные результаты показывают, что при действии достаточно высокой нагрузки, возникающей при пережевывании продуктов питания, эквивалентные напряжения в слизистой оболочке, губчатой и кортикальной костной ткани не превышают пределов упругости для соответствующих биологических тканей для случаев моделирования имплантатов с резьбой и без резьбы. Расхождение наибольших значений напряжений, возникающих в слизистой оболочке, кортикальной и губчатой костной ткани для модели 2 по сравнению с моделью 1 находится в диапазоне от 14 % до 17 %. Таким образом, для оценки напряженно-деформированного состояния биомеханической системы «нижняя челюсть – балочный протез – имплантаты» при действии жевательной нагрузки можно использовать имплантаты конической или цилиндрической формы без резьбы для устранения необоснованно высоких напряжений в области края резьбы и ускорения вычислений. Полученные результаты также могут быть использованы для прогнозирования функционирования балочного протеза при действии жевательной на-

грузки, а также для планирования эффективной установки имплантатов для фиксации протеза.

Благодарности. Работа выполнена в рамках задания 1.7.1.4 «Разработка дифференциальных и дробно-дифференциальных методов и их применение к моделированию сложных биомеханических и экономических систем ГПНИ Конвергенция».

ЛИТЕРАТУРА

1. Numerical analysis of the effect of implant geometry to stress distributions of three different commercial dental implant system / T. Topkaya [et al.] // Cumhuriyet Dental Journal. – 2015. – Vol. 18, No. 1. – P. 17–44.
2. Facial bone dynamics under the load of different dental implant geometries of same manufacturer: A fem study / S. Kurhade [et al.] // International Journal of Health Sciences. – 2022. – Vol. 6, No. 7. – P. 2697–2715. <https://doi.org/10.53730/ijhs.v6nS7.11930>
3. Petrie, C. S. Comparative evaluation of implant designs: influence of diameter, length, and taper on strains in the alveolar crest. A three-dimensional finite-element analysis / C. S. Petrie, J. L. Williams // Clinical Oral Implants Research. – 2005. – Vol. 16. – P. 486–494.
4. Effect of different implant configurations on biomechanical behavior of full-arch implant-supported mandibular monolithic zirconia fixed prostheses / J. Zhong [et al.] // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. – 2020. – Vol. 102. 103490. DOI: 10.1016/j.jmbbm.2019.103490
5. Geng, J. P. Application of finite element analysis in implant dentistry: a review of the literature / J. P. Geng, K. B. Tan, G. R. Liu // Journal of Prosthetic Dentistry. – 2001. – Vol. 85, No. 6. – P. 585–598. doi: 10.1067/mpr.2001.115251. PMID: 11404759.
6. Büyük, F. N. Review on finite element analysis of dental implants / F. N. Büyük, E. Savran, F. Karpat // Journal of Dental Implant Research. – 2022. – Vol. 41, No. 3. – P. 50–63.
7. Sadr, K. A 3-D finite element analysis of the effect of dental implant thread angle on stress distribution in the surrounding bone / K. Sadr, S. M. V. Pakdel // Journal of Dental Research, Dental Clinics, Dental Prospects. – 2022. – Vol. 16, No. 1. – P. 53–61. – doi: 10.34172/joddd.2022.009
8. Anthropometric analysis of the human mandibular cortical bone as assessed by cone-beam computed tomography / D. Swasty [et al.] // Journal of Oral Maxillofacial Surgery. – 2009. – Vol. 67, No. 3. – P. 491–500. doi: 10.1016/j.joms.2008.06.089
9. Bozkaya, D. Evaluation of load transfer characteristics of five different implants in compact bone at different load levels by finite elements analysis / D. Bozkaya, S. Muftu, A. Muftu // Journal of Prosthetic Dentistry. – 2004. – Vol. 92. – P. 523–530.
10. Stress distribution in maxillary bone surrounding overdenture implants with different overdenture attachments / H. J. Chun [et al.] // Journal of Oral Rehabilitation. – 2005. – Vol. 32. – P. 193–205.
11. Moldoveanu, S. A. B. Impact of implant-retained mandibular overdenture on oral mucosa - a finite element analysis / S. A. B. Moldoveanu, F. Munteanu, N. C. Forna // Romanian Journal of Oral Rehabilitation. – 2020. – Vol. 12, No. 1. – P. 6–12.
12. Grandin, H. M. A review of titanium zirconium (TiZr) alloys for use in endosseous dental implants / H. M. Grandin, S. Berner, M. Dard // Materials. – 2012. – Vol. 5. – P. 1348–1360.
13. Finite element analysis of stress distribution at the toothdenture base interface of acrylic resin teeth debonding from the denture base / U. R. Darbar [et al.] // Journal of Prosthetic Dentistry. – 1995. – Vol. 74. – P. 591–594.

14. Three-dimensional finite element stress analysis of a cuneiform-geometry implant / M. Cruz [et al.] // International Journal of Oral and Maxillofacial Implants. – 2003. – Vol. 18, No. 5. – P. 675–684.

15. A complete finite element model of a mandibular implant-retained overdenture with two implants: Comparison between rigid and resilient attachment configurations / M. Daas [et al.] // Medical Engineering and Physics. – 2008. – Vol. 30. – P. 218–225.

Поступила: 18.04.2023

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НОЖЕ ГИЛЬОТИННЫХ НОЖНИЦ ПРИ ДЕЙСТВИИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЛОКАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА НАГРЕВА

к.ф.-м.н. Веремейчик А. И., к.т.н. Хвисевич В. М., к.т.н. Холодарь Б. Г.

Брестский государственный технический университет, Брест

Введение. В реальных условиях работы элементы кузнечно-прессового оборудования подвергаются воздействиям агрессивной среды, механическим усилиям. Для повышения надежности и долговечности таких деталей используются различные методы. Анализ литературных источников и ряд проведенных экспериментов позволяют выделить из существующих способов термообработки поверхностную закалку с помощью плазменной струи, применение которой позволяет реализовать процесс упрочнения детали на заданную глубину, сохраняя сердцевину с исходными свойствами. Плазменное упрочнение по технико-экономическим показателям является более перспективным способом по сравнению с лазерным и электронно-лучевыми технологиями упрочнения [1].

При плазменном поверхностном упрочнении используется действие движущихся концентрированных источников энергии, создающих направленную высокотемпературную газовую струю, тепловой поток которой и является главным действующим фактором процесса. Поверхностная закалка деталей связана с изменением фазовой структуры материала и созданием в нем мартенситной структуры с мелким размером зерна. Для обеспечения этого процесса производится нагрев материала до температур, превышающих температуру точки фазового превращения, определяемой содержанием углерода и других компонентов сплава, с последующим быстрым охлаждением. Скорость процесса охлаждения является фактором, существенно влияющим на результат термообработки – ее увеличение способствует созданию более дисперсной мелкозернистой структуры материала, и, соответственно, более мелких по размерам дефектов и более высоких показателей твердости и износостойкости [2; 3]. В связи с наличием движения струи вдоль поверхности обрабатываемой детали величина достигаемой температуры разогрева материала и величина скорости охлаждения его после прохода струи оказываются жестко связанными, особенно в случае, когда дополнительные мероприятия по интенсификации процесса охлаждения не предпринимаются. Процессы нагрева и охлаждения зависят от интенсивности теплового потока q , характеристик материала и скорости движения источника нагрева V . Так как имеют место большие градиенты температур по пространственным координатам обрабатываемой детали, теплофизические коэффициенты материала оказываются переменными и в связи с большими сложностями учета подобного рода обстоятельств используются осредненные значения этих параметров, принимаемые по результатам обработки расчетных и экспериментальных данных. Согласно [1], величины упомянутых параметров при обработке стали следует принимать соответствующими температуре $T \approx 900^\circ\text{C}$.

В основе поверхностного плазменного упрочнения металлов лежит способность плазменной струи (дуги) создавать на небольшом участке поверхности высокие плотности теплового потока, достаточные для нагрева, плавления или испарения практически любого металла. Основной физической характеристикой плазменного воздействия является температурное поле, уровень и форма которого дают возможность оценить температуру в точках тела (в разные моменты времени), скорость нагрева и охлаждения, а в конечном итоге структурное состояние и фазовый состав поверхностного слоя

материала [4]. В научно-технической литературе известны решения тепловых задач, посвященных определению пространственно-временных распределений температуры, создаваемых стационарными или движущимися источниками тепла. В зависимости от требуемых условий источники тепла могут быть распределенными по всей нагружаемой поверхности тела либо сосредоточенными на ее ограниченном участке. В последнем случае речь может идти о форме пятна нагрева и о законе распределения теплового воздействия по этому пятну. В классической теории теплопроводности получены аналитические решения многих наиболее важных для практики задач [5–9]. Например, в [7] рассматривается аналитическое решение задачи теплопроводности в среде, подверженной воздействию движущегося источника тепла. С использованием рядов Фурье оценивается распределение температуры вокруг источника прямоугольной формы, движущегося с постоянной скоростью вдоль оси стержня. Наиболее интересным результатом теории является вывод единой формулы, способной предсказывать время охлаждения и скорость охлаждения с довольно хорошей точностью для рассмотренных диапазонов температур. В [8] выполнен анализ распределения температуры по поверхности заготовки при воздействии движущегося источника тепла в процессе плазменно-дуговой резки. Статья [9] посвящена эффективному численному исследованию двумерных задач теплопроводности материала, подвергаемого воздействию нескольких движущихся гауссовых точечных источников тепла, располагающихся внутри материала и движущимися по некоторым заданным прямым линиям или кривым с зависящими от времени скоростями. Разработан эффективный метод подвижной сетки, который непрерывно корректирует двумерную сетку на основании уравнения в частных производных для одномерной подвижной сетки с соответствующей функцией контроля температурного поля. Затем задача теплопроводности решается на этой адаптивной подвижной сетке.

При плазменной обработке поверхности с целью поверхностного упрочнения детали важную роль играет также время нагружения, т. к. в интересующем возможном диапазоне интенсивностей теплового воздействия и требований к достижению температур, значительно не превышающих температур плавления материала, с одной стороны, но достаточных для прохождения фазовых превращений и требуемой трансформации структуры материала, с другой, глубина проникновения тепла внутрь тела и соответственно возникающая зона теплового воздействия измеряется долями миллиметра. Поэтому фактическая толщина детали большой роли не играет и может рассматриваться как бесконечная. Аналогичный геометрический порядок зона теплового воздействия имеет и в направлении вдоль поверхности, поэтому для решения задач наиболее удобным методом является использование функций Грина (метод мгновенно-приложенного точечного источника) при соответствующем интегрировании воздействия по площади пятна нагрева. В статье использован именно этот способ в соответствии с литературой [1–3].

1. Постановка задачи. Математическая модель задачи теплопроводности. Для определения оптимальных режимов процесса поверхностной плазменной закалки проведено исследование теплового поля в теле ножа размерами 540×60×16 мм (рисунок 1) из стали 6ХВ2С при различных режимах теплового нагружения. Нож является режущим элементом гильотинных ножниц с наклонным ножом для листового металла НК3416.

Для описания поля температур в ноже при нагреве его струей плазмы используется линейное краевое уравнение теплопроводности с граничным условием второго рода [5]. Рассматривается задача в пространственной постановке для теплового потока в форме кругового пятна с интенсивностью, распределенной по нормальному закону:

$$q(r) = q_0 \exp(-kr^2), \quad (1)$$

где r – радиус сечения струи (сопла плазмотрона); k – коэффициент сосредоточенности потока, характеризующий концентрацию энергии в пятне нагрева, определяется по формуле через радиус пятна нагрева r_f :

$$k = \frac{1}{(r_f)^2}. \quad (2)$$

Интенсивность потока во времени принимается постоянной.

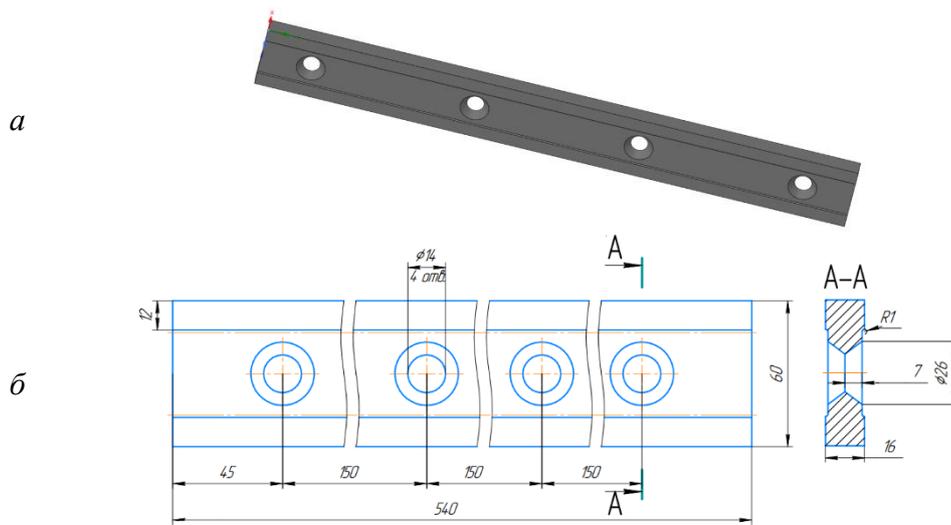


Рис. 1. Нож гильотины: *а* – внешний вид; *б* – чертеж

Уравнение для расчета температуры в точке тела от действия перемещающегося с постоянной скоростью V нормально-кругового источника теплоты в подвижной системе координат имеет вид [2]:

$$T(x, y, z, t) = \left[2P_0 \exp\left(-\frac{Vx}{a}\right) (c\rho(4\pi a)^{3/2}) \right] \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\xi}(t_0 + \xi)} \exp\left[-\frac{z^2}{4a\xi} - \frac{r^2}{4a(t_0 + \xi)} - \frac{V^2(t_0 + \xi)}{4a}\right] d\xi, \quad (3)$$

где $P_0 = q_0 \frac{\pi}{k}$ – эффективная мощность источника тепла; q_0 – плотность теплового потока; $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности; λ – коэффициент теплопроводности материала; c – удельная теплоемкость; ρ – плотность материала; $t_0 = \frac{1}{4ak}$ – постоянная времени; t – время; z – координата вдоль оси воздействия; ξ – переменная интегрирования.

Полагая в (3) $x = y = z = 0$, получим температуру в центре пятна нагрева:

$$T(0,0,0,t) = \frac{P_0}{2\lambda\sqrt{4\pi a t_0}} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t}{t_0}}. \quad (4)$$

В соответствии с (4), в начальный момент нагрева ($t \ll t_0$), $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t}{t_0}} \approx \sqrt{\frac{t}{t_0}}$ и $T = \frac{P_0}{\pi\lambda t_0 \sqrt{4\pi a}} \sqrt{t}$, т. е. температура растет пропорционально \sqrt{t} . Далее ее рост замедляется, устанавливается квазистационарное состояние, и температура приближается к значению температуры предельного состояния, при которой не наблюдается расплавление материала:

$$T_{np} = T(0,0,0,\infty) = \frac{P_0}{2\lambda} \sqrt{\frac{k}{\pi}} = \frac{q_0}{2\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{k}}. \quad (5)$$

Для движущегося с постоянной скоростью V источника тепла температура в центральной точке пятна нагрева в подвижной системе координат определяется по формуле:

$$T(0,0,0,t) = \frac{P_0}{\lambda} \sqrt{\frac{k}{\pi^3}} \operatorname{arctg}(4akt). \quad (6)$$

Отметим, что после некоторого периода времени наступления квазистационарного состояния, зависящего от теплофизических свойств материала, нагретая зона материала начинает перемещаться вслед за источником, однако температура в точках тела не может превысить значения T_{np} , определяемого по формуле (5).

Критическая плотность потока $q_0^{пл}$ и время τ достижения на поверхности тела температуры плавления $T^{пл}$:

$$q_0^{пл} = 2\lambda T^{пл} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}} = 1,128\lambda T^{пл} \sqrt{k}, \quad \tau = 0,79 \frac{(\lambda(T^{пл})^2)}{q_0^2 a}. \quad (7)$$

Время τ возрастает с ростом температуры плавления, теплопроводности, удельной теплоемкости и уменьшается при росте плотности теплового потока.

Величина теплового потока плазмотрона вычисляется по формуле:

$$Q = U \cdot I \cdot \eta, \quad (8)$$

где I – ток дуги, U – напряжение дуги, η – коэффициент полезного действия плазмотрона.

При выборе величины r_f использовался следующий подход. Распределение интенсивности нормально-кругового потока по радиусу r сечения струи описывается выражением $q(r) = q_m \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right)$, где r_0 – некоторый характерный радиус поперечного сечения струи; q_m – максимальная интенсивность потока. Отсюда видно, что при $r = r_0$

интенсивность потока падает в e раз и составляет $1/e = 0,368$ от своего значения на оси струи. Если при расчетах температуры принимать во внимание только поток, ограниченный зоной $0 < r < r_0$, то значительная часть его энергии окажется неучтенной. Поэтому поток ограничивают некоторой цилиндрической поверхностью радиуса r_f , пренебрегая энергией отсеченной части струи. Величина исходящего из сопла радиуса R равномерного потока струи равна $Q = q_m \cdot \pi R^2$, нормально-кругового потока $Q = q_m \int_0^{r_f} \exp\left(-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \cdot 2\pi r dr = Q_0 \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{r_f}{R}\right)^2\right)\right)$. График функции $\exp\left(-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$ показан на рисунке 2.

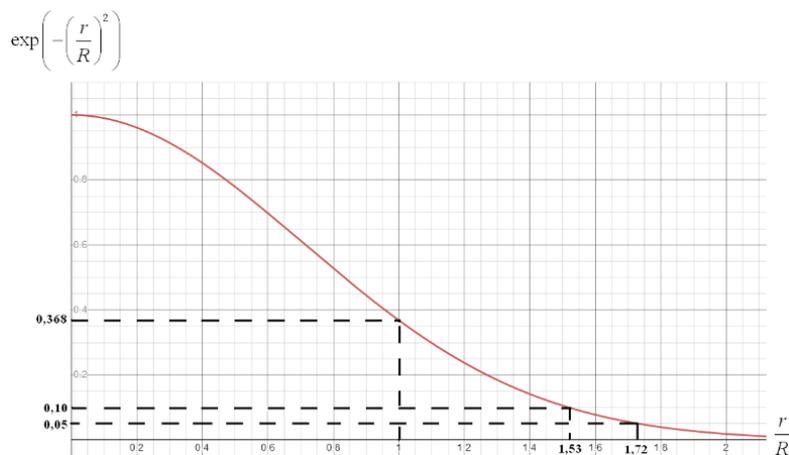


Рис. 2. Зависимость функции $\exp\left(-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$ от соотношения $\frac{r}{R}$

Задавшись для отсекаемого участка потока уровнями $Q = 0,05Q_0$ или $Q = 0,1Q_0$ (по [1; 2]), определяем соответствующие им граничные радиусы $r_f = 1,73R$ или $r_f = 1,52R$ (рисунок 2). Ориентируясь на эти значения и используя данные эксперимента, учитывая наличие не вполне определенной доли энергии струи, расходуемой на световое излучение, а также ее зависимости от расстояния между срезом сопла плазмотрона и обрабатываемой поверхностью, необходимо назначать используемую в расчетах величину r_f , которая в соответствии с [1; 2] называется условным радиусом пятна нагрева. Фигурирующий в [1; 2] коэффициент сосредоточенности потока k вычисляется при этом по формуле (2).

2. Некоторые результаты и их обсуждение. С использованием приведенных выше зависимостей разработана программа на языке *FORTRAN*, которая позволяет определять температуру в полупространстве (обрабатываемой детали) при действии подвижным нормально-круговым тепловым потоком на границу полубесконечной среды (обрабатываемую поверхность). Исходное положение центра пятна нагрева вдоль оси движения x задается в точке с координатой $x = 0$. Начальная температура принималась равной $T_0 = 0$.

В качестве исходных данных задаются ток дуги I , напряжение дуги U , коэффициент полезного действия η плазмотрона, время конца расчета t_k , глубина исследуемой зоны проникновения тепла и число разбиений этой глубины на уровни, а также характеристики материала ножа (коэффициент теплопроводности λ , удельная теплоемкость

c , плотность ρ , температура плавления $T_{пл}$), радиус пятна нагрева поверхности r_f , размер исследуемой зоны распространения тепла на поверхности (радиус R_k), скорость V движения источника нагрева.

Удельный поток, при котором за заданное время счета $t = t_k$ температура поверхности достигнет температуры плавления материала $T = T_{пл}$, вычисляется по формуле:

$$q_0 = T_{пл} \lambda \sqrt{\frac{\pi}{4at_k}}. \quad (9)$$

Температура предельного состояния в центре пятна нагрева при $t \rightarrow \infty$ определяется по формуле (3), критический тепловой поток при $T = T_{пл}$ – по формуле (5). Для заданных значений x температура $T = T(x, 0, z, t)$ в центре пятна нагрева по глубине z , $T = T(x, y, 0, t)$ на поверхности вдоль оси y , $T = T(x, y, z, t)$ по оси z в плоскостях, параллельных координатной xOz , определяются по формуле (1).

Проведен расчет температурных полей в ноже при действии движущегося нормально-кругового источника теплоты в широком диапазоне параметров обработки ($I = 10\text{--}35$ А, $U = 8\text{--}50$ В, $V = 1\text{--}100$ мм/с, $r_f = 0,05\text{--}10$ мм). Расчет проводился в центре пятна нагрева по глубине z , на поверхности вдоль оси y , а также по оси z в плоскостях, параллельных координатной xOz . Типичные зависимости температурного поля от времени при $I = 35$ А, $U = 25$ В, $\eta = 0,72$, мощности плазмотрона $P_0 = 630$ Вт, $T_{пл} = 1550$ °С, $\rho = 7860 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\lambda = 38 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{°С}}$, $c = 745 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{°С}}$ приведены в таблице 1 и на рисунках 3–9.

Таблица 1 – Максимальные значения температур T и время t их достижения при скорости движения источника $V = 10$ мм/с, $r_f = 1$ мм

Глубина z , мм	Координаты точек									
	$x = 0$ мм		$x = 10$ мм		$x = 20$ мм		$x = 30$ мм		$x = 40$ мм	
	t , с	T_{\max} , °С	t , с	T_{\max} , °С	t , с	T_{\max} , °С	t , с	T_{\max} , °С	t , с	T_{\max} , °С
0	0,05	2141,9	1,03	3330,6	2,02	3341,9	3,02	3341,9	4,02	3341,9
1	0,16	522,5	1,10	1023,2	2,10	1024,8	3,10	1024,8	4,10	1024,8
2	0,34	203,8	1,22	435,1	2,23	436,9	3,23	436,9	4,23	436,9

Результаты показали, что стабилизация температуры происходит по логарифмической зависимости в течение нескольких секунд и далее максимальная температура в различных точках остается неизменной на всем пути движения плазмотрона.

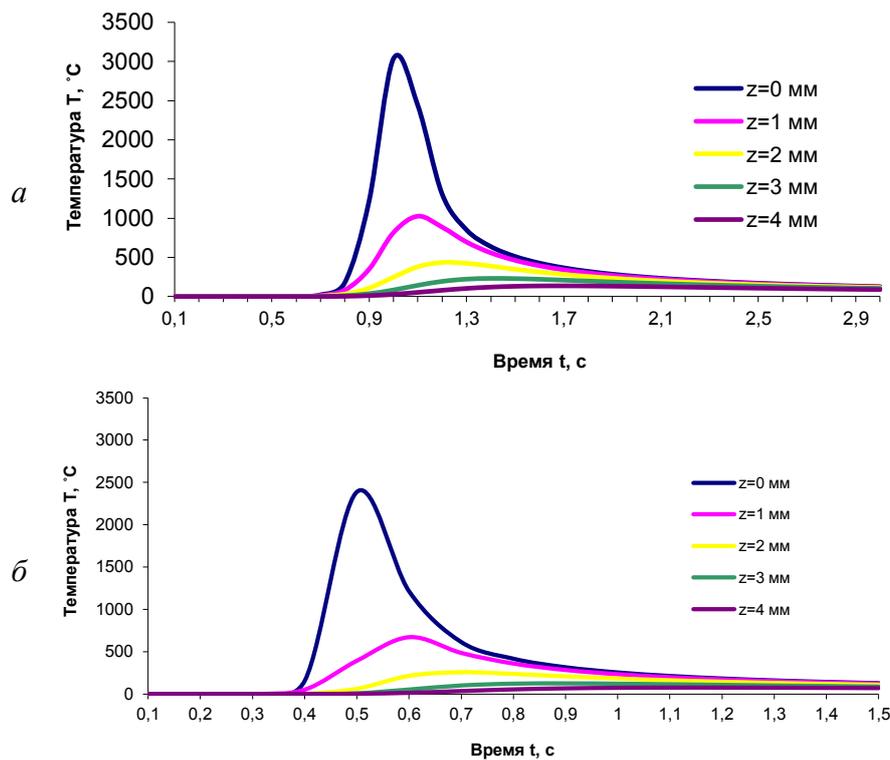


Рис. 3. Зависимости температуры от времени в плоскости движения оси плазматрона на различной глубине при $x = 10$ мм для разных скоростей движения, $r_f = 1$ мм: а) $V = 10$ мм/с, б) $V = 20$ мм/с

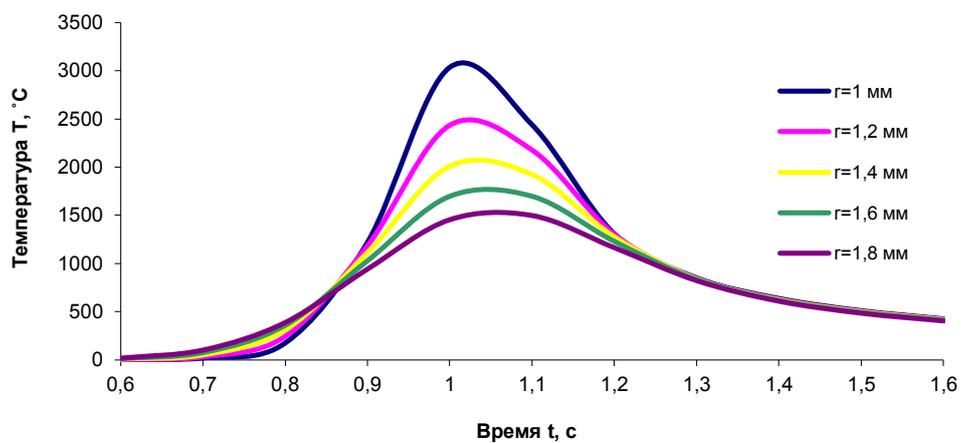


Рис. 4. Зависимости температуры от времени на термообрабатываемой поверхности ($z = 0$) в точках, лежащих на траектории движения центра пятна нагрева с различными радиусами пятна при $V = 10$ мм/с, $x = 10$ мм

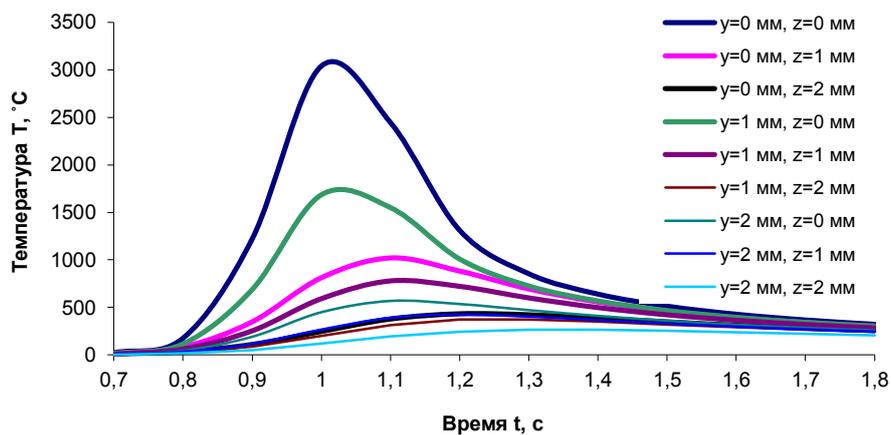


Рис. 5. Зависимость температуры от времени по оси z в плоскостях, параллельных координатной плоскости xOz , $x = 10$ мм, $V = 10$ мм/с, $r_f = 1$ мм

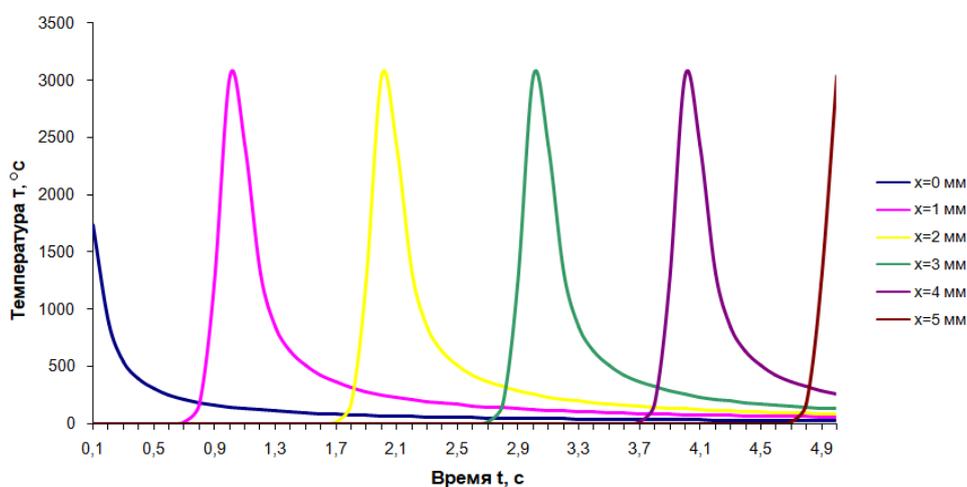
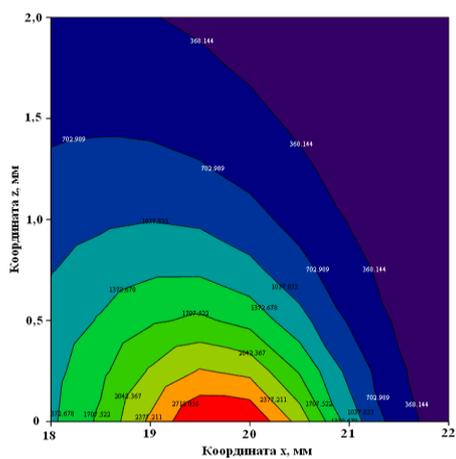


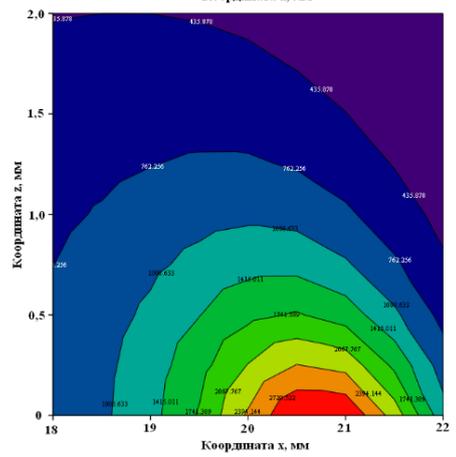
Рис. 6. Зависимости температуры от времени на обрабатываемой поверхности ($z = 0$) в точках, лежащих на траектории движения центра пятна нагрева с различными координатами при $V = 10$ мм/с, $r_f = 1$ мм

Рисунки 4–6 показывают, что распространение температуры вглубь детали происходит значительно медленнее, чем по ее поверхности. На рисунках 7–9 приведены уровни температуры (изотермы) в различных плоскостях, которые позволяют определить характер распространения температуры в заданный момент времени.

а) $t = 2,0$ с



б) $t = 2,1$ с



в) $t = 2,2$ с

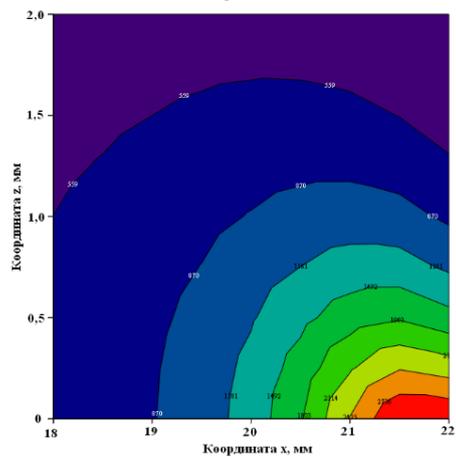


Рис. 7. Уровни температуры в плоскости xOz движения источника нагрева, $V = 10$ мм/с, $r_f = 1$ мм

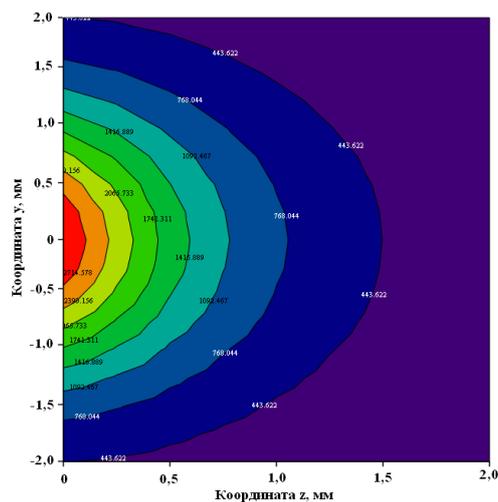


Рис. 8. Изотермы в плоскости yOz перпендикулярной траектории движения пятна нагрева, при $P_0 = 630$ Вт, $t = 2$ с, $x = 10$ мм, $V = 10$ мм/с, $r_f = 1$ мм

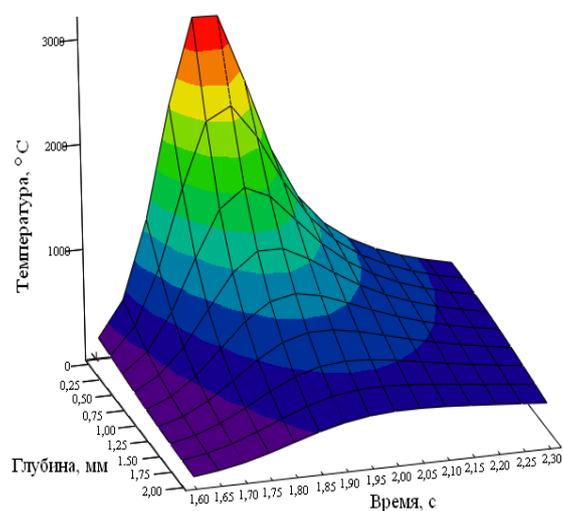
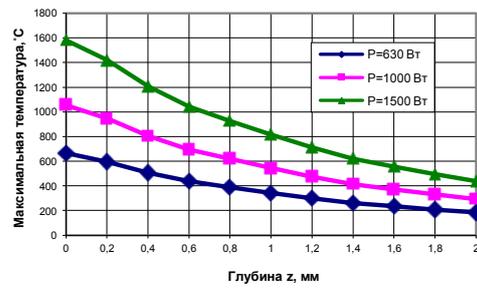
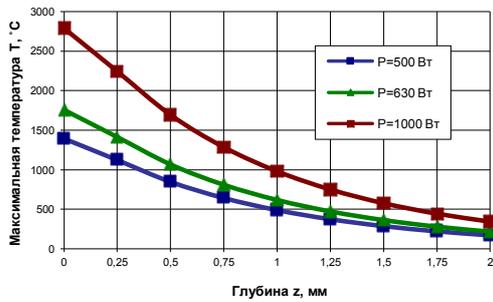


Рис. 9. Распределение температуры по времени и глубине при $x = 18$ мм, $P_0 = 630$ Вт, $V = 10$ мм/с, $r_f = 1$ мм

Результаты исследований показывают, что температуры в точках отрицательной части оси x (позади центра пятна нагрева) выше, чем в точках, расположенных перед плазмотроном и максимумы температур в них достигаются в разное время [10].

Проведены исследования влияния мощности плазмотрона на тепловые процессы в зоне нагрева. Типичная зависимость максимальной температуры от глубины для различных мощностей и радиусов пятна приведены на рисунке 10.



а) $x_0 = 15 \text{ мм}$, $r_f = 1,557 \text{ мм}$, $V = 10 \text{ мм/с}$

б) $x_0 = 25 \text{ мм}$, $r_f = 2,929 \text{ мм}$,
 $V = 17,5 \text{ мм/с}$

Рис. 10. Зависимость максимальной температуры от глубины

Исследования изменения максимальной температуры по глубине необходимы для определения взаимосвязи между температурным полем и характеристиками материала упрочненной зоны путем сопоставления полученных зависимостей с графиком изменения микротвердости.

Темп изменения температуры при нагревании или охлаждении определяет величину температурных градиентов и напряжений и безусловно влияет на фазовые превращения в металле. Поэтому совершенно ясно, что скорости нагрева или охлаждения должны оказывать огромное влияние на структуру материала в зоне нагрева. Из-за малого объема разогреваемого под дугой металла высокая скорость охлаждения может обеспечиваться лишь теплопроводностью (отводом тепла в ненагретые области изделия). Из рисунков 4–6 видно, что нагрев и охлаждение материала происходят с разными скоростями, поэтому проведены теоретические исследования скоростей нагрева (охлаждения) при различных режимах теплового воздействия. Типичные зависимости максимальных значений температуры, скоростей нагрева и охлаждения от скорости движения источника тепла при $r_f = 2,929 \text{ мм}$, $P_0 = 1000 \text{ Вт}$ приведены на рисунке 11. Сравнение полученных результатов с расчетами [11] показало хорошее их совпадение.

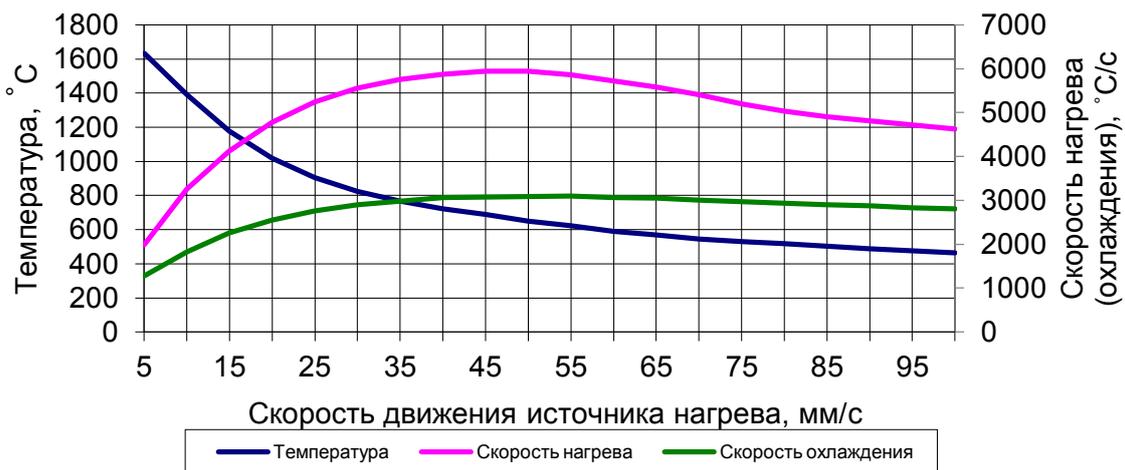


Рис. 11. Зависимости максимальной температуры, скоростей нагрева и охлаждения от скорости движения источника тепла при $z = 0$, $r_f = 2,929 \text{ мм}$, $P_0 = 1000 \text{ Вт}$

Заключение. Проведено исследование тепловых процессов в ноже гильотинных ножниц из стали 6ХВ2С при поверхностной плазменной закалке рабочей зоны. Рассмотрен случай действия подвижного нормально-кругового теплового потока на материал режущей зоны ножа. На основе разработанного алгоритма решения задачи нестационарной теплопроводности с использованием разработанной компьютерной программы для широкого диапазона режимов работы плазмотрона получены зависимости температурного поля, скоростей нагрева и охлаждения от времени и координат. Исследовано влияние параметров процесса поверхностной плазменной закалки (характеристик плазмотрона, радиуса пятна нагрева, скорости движения источника нагрева и др.) на температурное поле в зоне нагрева. Установлено, что при увеличении скорости обработки наблюдается уменьшение глубины зоны термического влияния и снижение твердости материала.

Полученные в результате расчетов трехмерные нестационарные поля температур позволяют определить параметры режима плазменного упрочнения изделий, которые обеспечивают формирование зоны термического влияния заданной глубины. Дальнейшее развитие разработанной механико-математической модели процесса плазменного упрочнения позволит установить соответствие между полученными в расчетах полями температур, скоростями охлаждения и структурой упрочненного слоя.

С использованием полученных результатов на основе данных по техническим характеристикам плазмотрона, теплофизическим и механическим свойствам обрабатываемых материалов и их прогнозируемым структурным параметрам после теплового воздействия могут быть назначены конкретные режимы термообработки с последующим их уточнением в процессе технологических экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гречнева, М. В. Краткий анализ результатов работ в области плазменного поверхностного упрочнения сталей и сплавов / М. В. Гречнева // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2017. – Т. 21, № 5. – С. 10–23.
2. Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов: справочник / Н. Н. Рыкалин [и др.] – М. : Машиностроение, 1985. – 496 с.
3. Рыкалин, Н. Н. Расчеты тепловых процессов при сварке / Н. Н. Рыкалин. – М. : ГНТИ Машиностроительной литературы, 1951. – 296 с.
4. Лещинский, Л. К. Плазменное поверхностное упрочнение / Л. К. Лещинский, С. С. Смотугин, И. И. Пирч. – Киев : Техника, 1990. – 109 с.
5. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 488 с.
6. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер – М. : Мир, 1964. – 518 с.
7. Chi-Kyung Kim. An analytical solution to heat conduction with a moving heat source (2011) // Journal of Mechanical Science and Technology 25(4) – P. 895–899. – DOI:10.1007/s12206–011–0214–5.
8. Naik, D. K. and Maity, K. (2019), Temperature analysis by moving heat source during plasma arc cutting process: an analytical approach, World Journal of Engineering – Vol. 16 No. 4 – P. 569–572. – <https://doi.org/10.1108/WJE-11–2018–0400>.
9. Zhicheng Hu, Zhihui Liu. Heat Conduction Simulation of 2D Moving Heat Source Problems Using a Moving Mesh Method Advances in Mathematical Physics Volume 2020, Article ID 6067854 – 16 pages. – <https://doi.org/10.1155/2020/6067854>.

10. Веремейчик, А. И. Температурное поле в ноже гильотинных ножниц при действии движущегося нормально-кругового источника нагрева / А. И. Веремейчик, В. М. Хвисевич, Б. Г. Холодарь // Новые технологии и материалы, автоматизация производства: сборник статей / Брестский государственный технический университет. – Брест : Издательство БрГТУ, 2022. – С. 188–193.

11. Коротков, В. А. Поверхностная плазменная закалка / В. А. Коротков; М-во образования и науки РФ; ФГАОУ ВПО «УрФУ им. первого Президента России Б. Н. Ельцина», Нижнетагил. технол. ин-т (фил.). – Нижний Тагил : НТИ (филиал), УрФУ, 2012. – 64 с.

Поступила: 08.03.2023

СТАЛЬНАЯ ТРЕХСЛОЙНАЯ ОРТОТРОПНАЯ ПЛИТА И ЕЕ РАБОТА ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Яковлев А. А., Мойсейчик А. Е., Мойсейчик Е. А.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Введение. Трехслойная плита представляет собой систему, состоящую из двух внешних листов и среднего слоя. Внешние слои также как в балках в основном воспринимают изгибающие, а средний слой – поперечные усилия. Средний слой часто выполняется в форме конструкции, соединенной с внешними листами и состоящей из периодических замкнутых ячеек. Средний слой наряду с восприятием усилий обеспечивает устойчивость внешних листов в зонах их сжатия. Такая трехслойная плита имеет повышенное сопротивление кручению. Внешние слои можно изготавливать из более прочных, чем средние, материалов.

Достоинством трехслойных плит является их способность при относительно малом весе обеспечивать повышенную жесткость плиты на изгиб и кручение. Опыт эксплуатации судостроительных объектов с применением трехслойных плит и оболочек показал высокую эффективность таких конструкций [1]. Вне судостроения трехслойная плитная конструкция была впервые применена английским инженером Р. Стефенсоном при строительстве моста «Британия» (рисунок 1, а).

Пролетные строения моста изготавливались в форме трубы прямоугольного сечения из ковального листового железа толщиной 16 мм. Ширина трубы 4,5 м. Листы сопрягались заклепочными соединениями. Пролетные балки изготавливались последовательным их наращиванием из отдельных секций (см. рисунок 1, в). Коробчатая форма и применение трехслойных плит для верхнего и нижнего поясов балки обеспечили балке высокую изгибную, крутильную жесткость и ее прочность в течение более 120 лет [3].

Впоследствии трехслойные облегченные конструкции широко использовались в разнообразных строительных, транспортных, авиационных, космических и других объектах. Конструкции находят применение и в виде плит, опирающихся на упругое основание и нагруженных большими распределенными и сосредоточенными силами (элементы карьерных самосвалов, взрывозащитные ворота и др.). Для таких инженерных систем плиты должны иметь небольшую толщину при больших нагрузках и разнообразных опирациях.

Целью настоящей статьи является расчетно-экспериментальное обоснование конструктивного решения стальной ортотропной плиты минимальной толщины с учетом технологических ограничений.

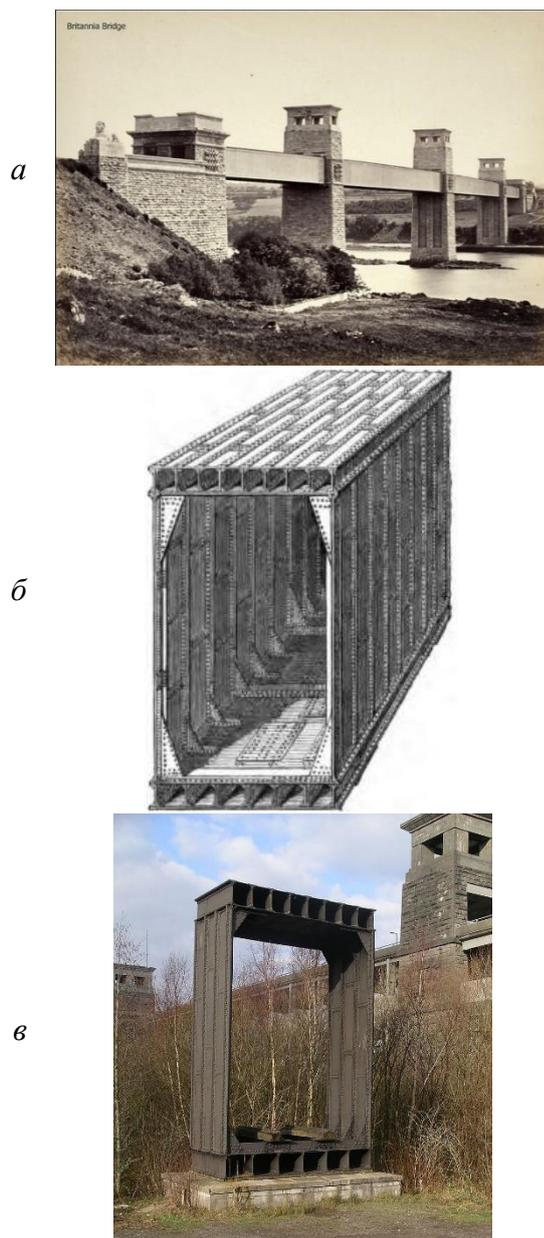


Рис. 1. Металлические конструкции трубчатого моста «Британия»: *а* – трубчатый мост «Британия» (1846 – 1970) [2]; *б* – вид пролетного строения моста [3]; *в* – монтажная секция моста [2]

Обоснование конструктивного решения.

Предполагается, что плита будет работать на восприятие больших нагрузок (до 1000 кН/м^2) при небольшой относительной высоте ($h/L \approx 1/20 - 1/40$). Возникающие в плите при таких нагрузках изгибающие моменты и поперечные усилия будут иметь значительные величины. В этом случае слои плиты (внешние и средний) должны быть выполнены из достаточно прочных материалов (металлические листы и др.). Кроме этого, соединения слоев, воспринимающие сдвигающие усилия должны обеспечивать требуемую прочность и быть технологичными в изготовлении (например, сварными). Названным условиям может удовлетворять компоновочная схема ортотропной плиты, представленная на рисунке 2. Наиболее близким аналогом приведенной на рисунке 2 схемы плиты являются некоторые судостроительные корпусные конструкции (двойное днище и др. [4]). Однако их высота h не менее чем в 4–5 раз больше рассматриваемой плиты.

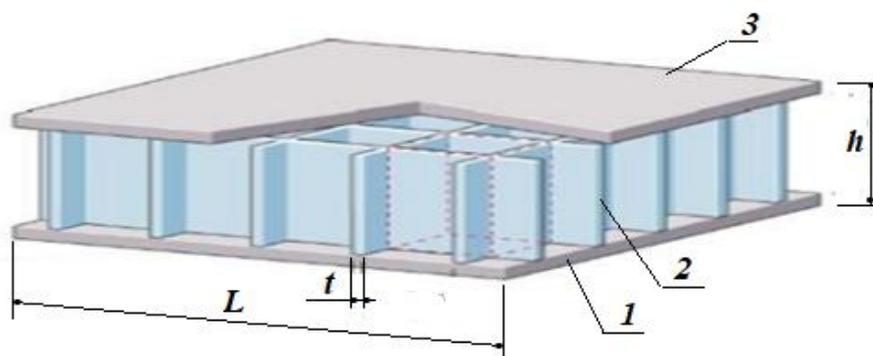


Рис. 2. Схема стальной трехслойной ортотропной плиты с прямоугольными ячейками в среднем слое: 1 – нижний слой; 2 – средний слой; 3 – верхний слой (покрывочный)

Для конструктивного исполнения примем стальную ортотропную плиту с соединениями на сварке. Твердотельная модель такой плиты представлена на рисунке 3, а конечно-элементная – на рисунке 4. Распределенная внешняя нагрузка к такой плите прикладывается в средней части верхней плиты. Опирания плиты шарнирные, в углублениях со стороны нижней плиты.

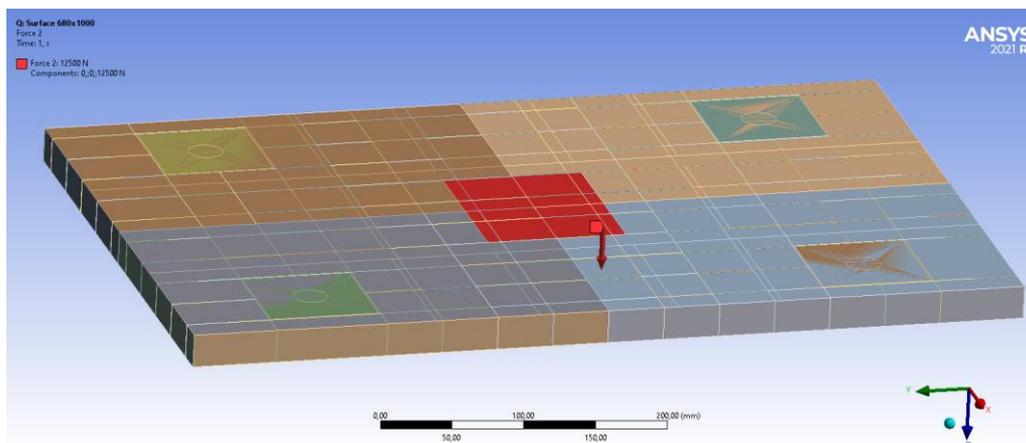


Рис. 3. Трехмерная твердотельная модель 3-слойной ортотропной плиты размерами 600×400×30 со схемой приложения внешней равномерно распределенной нагрузки

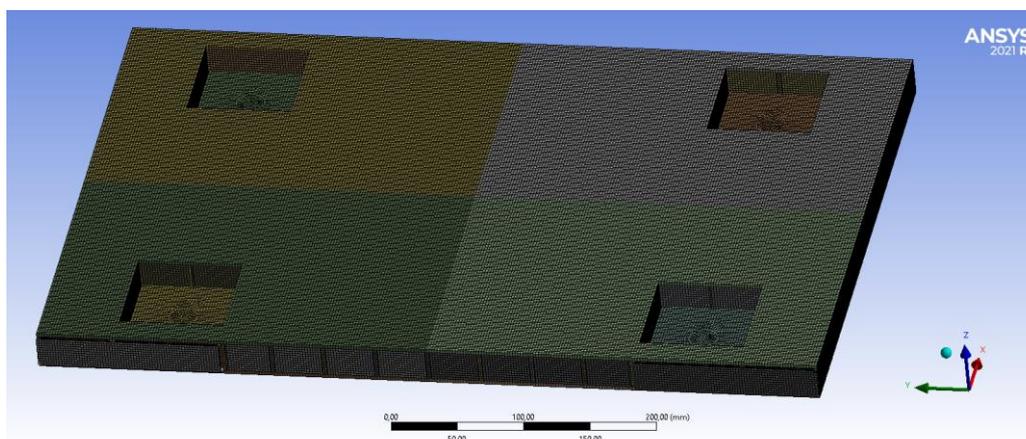


Рис. 4. Конечно-элементная модель 3-слойной ортотропной плиты размерами 600×400×30

В современном мостостроении широко применяется ортотропный стальной настил проезжей части. Такой настил представляет собой плоский лист, подкрепленный системой взаимно перпендикулярных пластинчатых ребер, можно рассматривать как двухслойную ортотропную плиту. На рисунке 5 представлена модель двухслойной ортотропной плиты с размерами и расположением ребер, аналогичными ребрам среднего слоя плиты, показанной на рисунке 4.

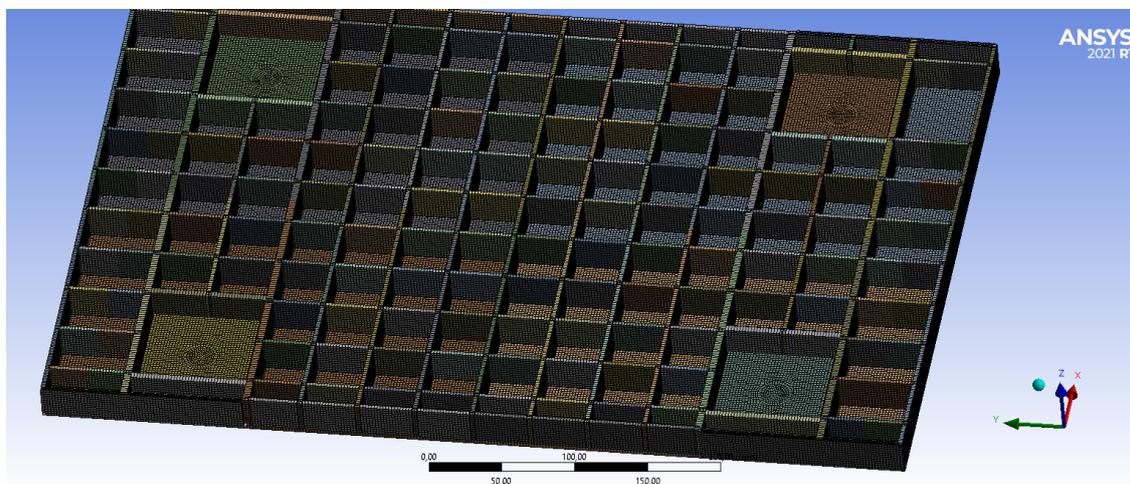


Рис. 5. Конечно-элементная модель 2-хслойной ортотропной плиты размерами 600×400×27

При изготовлении плиты по рисунку 5 все технологические требования несложно выполнить. При изготовлении 3-хслойной плиты (рисунок 4) проблемы возникают с приваркой покрывочной плиты (рисунок 2). В этом случае приварка возможна с использованием прорезных швов полного заполнения [5] и обварки угловыми швами по периметру покрывочного листа. При этом оси прорезных швов должны совпадать с осями продольных или поперечных ребер среднего слоя, а прорезы под швы должны быть не больше толщины t ребер. Такая трехслойная плита содержит ряд конструктивных и технологических концентраторов, влияние которых на прочность можно изучить экспериментальным путем

Нагружая модели плит (см. рисунок 4 и 5) распределенной нагрузкой и принимая за предельное состояние достижение максимальными напряжениями в опасных точках предела текучести материала, можно по данным расчета в программе ANSYS убедиться, что грузоподъемность трехслойной плиты превышает соответствующую для 2-хслойной плиты примерно в 6 раз.

Данные конечно-элементного моделирования и эксперимента.

Для трехслойной плиты опасные зоны выявлялись конечно-элементным расчетом по программе ANSYS (рисунок 6) и экспериментальным нагружением модели плиты (рисунок 7). В процессе испытаний сопоставлялись прогибы модельной плиты по данным расчета и испытаний. Экспериментом подтверждена качественная картина вертикальных перемещений плиты, полученных в расчете.

Численные величины расчетных и экспериментальных перемещений отличались до 50 %.

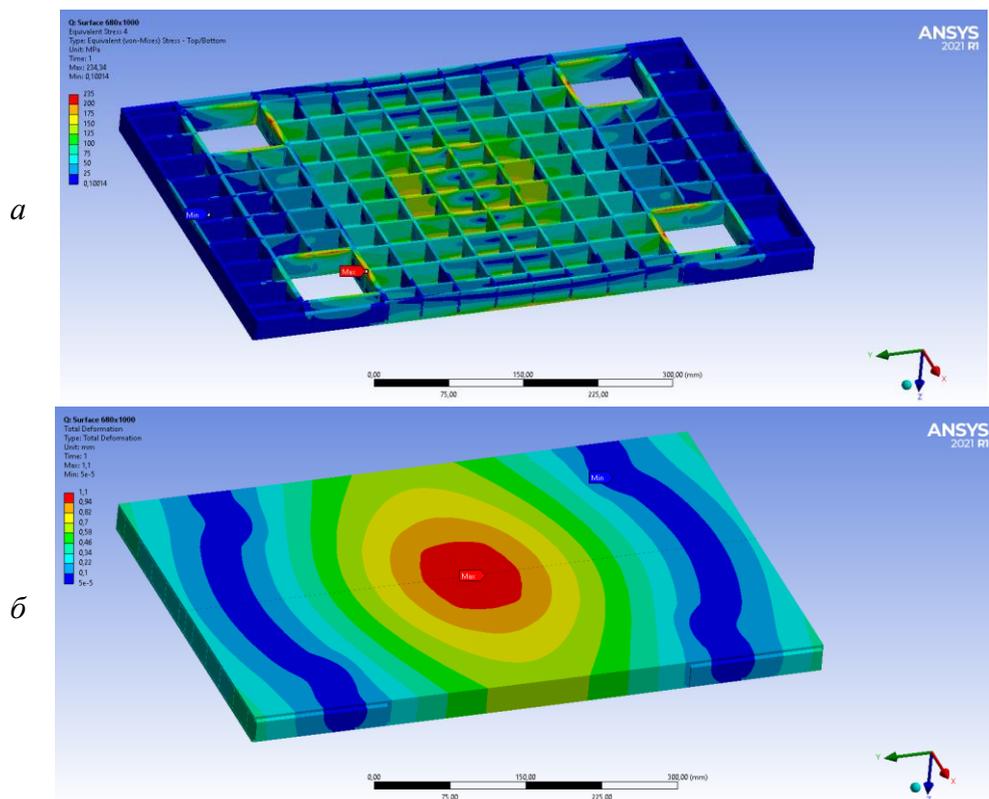


Рис. 6. Результаты конечно-элементного расчета модели 3-хслойной ортотропной плиты: *а* – распределение эквивалентных напряжений в ребрах и нижнем листе плиты 3-хслойной плиты; *б* – вертикальные перемещения плиты 3-хслойной плиты



Рис. 7. Плита на стадии испытаний: *а* – вид модели плиты со стороны нижнего листа; *б* – модель плиты в испытательном стенде

Обсуждение результатов. Фактическая геометрия изготовленной модели отличалась от твердотельной наличием начальных напряжений (сварочных) и начальных искривлений, вызванных внутренними напряжениями (рисунок 7, *а*). Этим можно объяснить различия экспериментальных и расчетных величин вертикальных перемещений. При испытании не было выявлено разрушений прорезных швов. Трещины при предельной нагрузке на модель появлялись только в сварных швах, расположенных по периметру покрывочной плиты.

Конструкции сварных 3-хслойных плит имеют многочисленные пересечения сварных швов. При ручной или полуавтоматической сварке в зонах швов вероятно по-

явление сварочных дефектов, которые могут инициировать зарождение трещин в натурных плитах при низких температурах, переменных нагрузках. Это требует выявления трещиноопасных зон в плитах с использованием методов неразрушающего контроля и экспериментального исследования прочности конструктивных форм, содержащих конструктивные и сварочные концентраторы напряжений [6].

Выводы.

1. В статье обоснована возможность конструктивного исполнения стальной трехслойной ортотропной плиты большой грузоподъемности с применением электродуговой сварки.

2. Большое количество пересечений сварных швов в соединениях элементов плит требует выполнения работ приемами, ведущими к снижению сварочных деформаций и предотвращению трещинообразования в элементах плит при действии низких температур и переменных нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хьюз О. Ф. Проектирование судовых корпусных конструкций. – Л. : Судостроение, 1988. – 360 с.
2. Мост Британия - Britannia Bridge. – https://ru.wikibrief.org/wiki/Britannia_Bridge.
3. Clark, E. Britannia and Conway Tabular Bridges/Edwin Clark. – London, 1849. – 55 p. – http://books.google.com/books?id=_GsOAAAAYAAJ&oe=UTF-8.
4. Барабанов Н. В. Конструкция корпуса морских судов / Н. В. Барабанов // Ленинград : Судостроение, 1969. – 696 с.
5. Алексеев Г. П. Справочник конструктора-машиностроителя / Г. П. Алексеев И. С. Мазовер. – Ленинград : Судпромгиз, – 1961. – 449 с.
6. Бельчук Г. А. Сварные соединения в корпусных конструкциях / Г. А. Бельчук // Ленинград : Судпромгиз, 1969. – 279 с.

Поступила: 18.04.2023

ОЦЕНКА УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ ТИПОВЫХ СВАРНЫХ УЗЛОВ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ В СРЕДЕ ANSYS

¹Мартыненко Т. М., ²Пронкевич С. А., ²Мартыненко И. М., ³Скляр О. Н.

¹Университет гражданской защиты МЧС Беларуси, Минск;

²Белорусский государственный университет, Минск

³Белорусский национальный технический университет, Минск

Введение. При строительстве различных зданий и сооружений широко применяются стержни открытого профиля, которые воспринимают нагрузки от выше расположенных элементов и передают их на фундамент. Усилия, возникающие при этом в стержнях, зависят от конструкции соединения примыкающих элементов. Одним из вариантов соединения является сварное соединение. С точки зрения эксплуатации зданий сварные узлы представляют особый интерес, так как они наиболее часто подвергаются разрушению, что влечет за собой потерю прочности и выход из строя всей конструкции. Сложность получения сварных узлов приводит к появлению концентраторов напряжений, а сварные швы могут иметь различные дефекты, приводящие к разрушению.

Разрушение сварных швов происходит в три этапа. В начале в месте соединения появляются микротрещины. Затем происходит их рост, с увеличением скорости под действием циклических внешних нагрузок. В дальнейшем конструкция начинает спонтанно разрушаться, так как ослабленное поперечное сечение не обладает достаточным моментом сопротивления для противодействия внешним нагрузкам [1; 2]. Исследования сварных швов на микро уровне показали, что микротрещины появляются уже после выработки 1 % ресурса работы соединения. К тому же, небольшие поверхностные дефекты, выступающие в роли источников зарождения трещин, уже могут присутствовать при поставке изделия производителем и монтаже сварных узлов. Усталость напрямую зависит от геометрических аспектов конструкции, таких как размеры и расположение трещин в узлах конструкции. Основной причиной появления концентраторов напряжений является наличие резкого изменения размеров элементов конструкции.

Таким образом, на усталостную долговечность сварного соединения влияют множество различных факторов, таких как геометрия узла, направление и вид внешней нагрузки, диапазон распределения напряжений [3; 4], появления остаточных напряжений и деформаций, наличие дефектов сварных швов. Оценка усталостного ресурса сварных швов является сложной задачей, зависящей от вида внешней нагрузки, геометрических параметров сварного шва и др. Так же оценка усталостного ресурса на концах сварных швов ограничена, и зачастую это самое слабое место сварного шва. Циклические воздействия нагрузок приводит к изменению усталостной долговечности сварной конструкции.

Экспериментальные исследования. Проведено исследование конструкции узла в виде прямого стыкового соединения с накладкой. Для создания трехмерной модели конструкции использован программный комплекс Autodesk Inventor Professional, который позволяет работать со сборкой из твердых тел, находящихся в параметрических зависимостях между собой, что дает возможность варьировать геометрические размеры конструкции при проведении расчетных экспериментов (рисунок 1). Далее был произведен экспорт геометрии сварного соединения в ANSYS [5; 6].

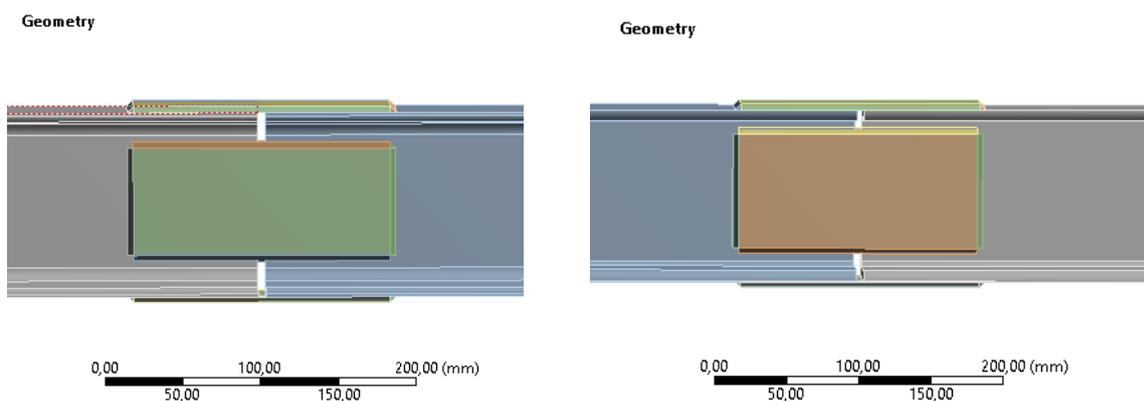


Рис. 1. Модель сварного соединения двутаврового и таврового соединений балок

Переходим от тел к конечным элементам, для чего нужно выбрать характерный размер элемента, форму элемента, способы разбиения. Для моделирования объемных сплошных тел ANSYS Workbench по умолчанию использует 3D элементы типа SOLID186 и SOLID187. Конечный элемент SOLID 186 – трехмерный элемент объемного напряженно-деформированного состояния (НДС) с двадцатью узлами, при этом каждый узел обладает шестью степенями свободы – три перемещения вдоль осей и три поворота вокруг осей узловой системы координат. Конечный элемент SOLID 187 – трехмерный элемент объемного напряженно-деформированного состояния с десятью узлами в форме тетраэдра, при этом каждый узел обладает тремя степенями свободы – три перемещения вдоль осей узловой системы координат. Элементы SOLID186 и SOLID187 возможно использовать как в задачах с линейной постановкой, так и в задачах с нелинейной постановкой с большими деформациями [7]. Конечные элементы имеют произвольную ориентацию в пространстве и обладают свойствами пластичности, ползучести, гиперупругости, изменения жесткости под действием нагрузок.

Исследуемая конечно-элементная модель включала 53 676 конечных элементов двух основных типов: SOLID 186 (трехмерный НДС призматической формы с двадцатью узлами) и SOLID 187 (трехмерный элемент объемного НДС с десятью узлами в форме тетраэдра), средний «габаритный» размер соединения составлял 1 мм, открытый профиль 5 мм (рисунок 2) [8].

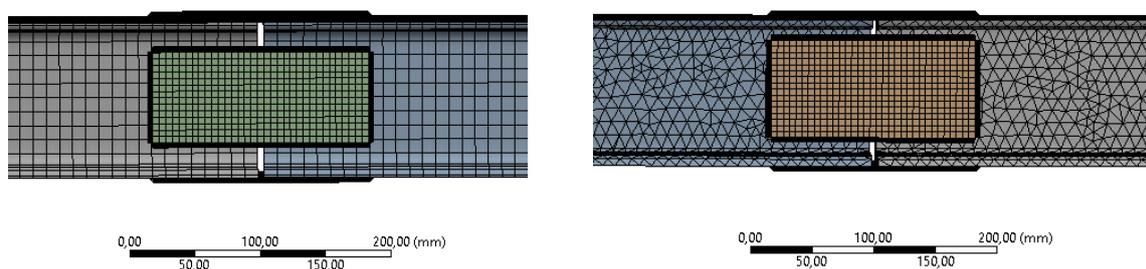


Рис. 2. Вид конечно-элементной модели сварного соединения двутавровой и тавровой балки

Предусмотрен следующий вид нагружения исследуемого объекта: концы балки жестко закреплены, приложена нагрузка вдоль соединительной накладке. Края конструкции жестко заделаны для болтового таврового и двутаврового соединений в точках (AB, AC), для сварных соединений в точках (B, C). Точка (A) – место приложения нагрузки в 10 кН (рисунок 3).

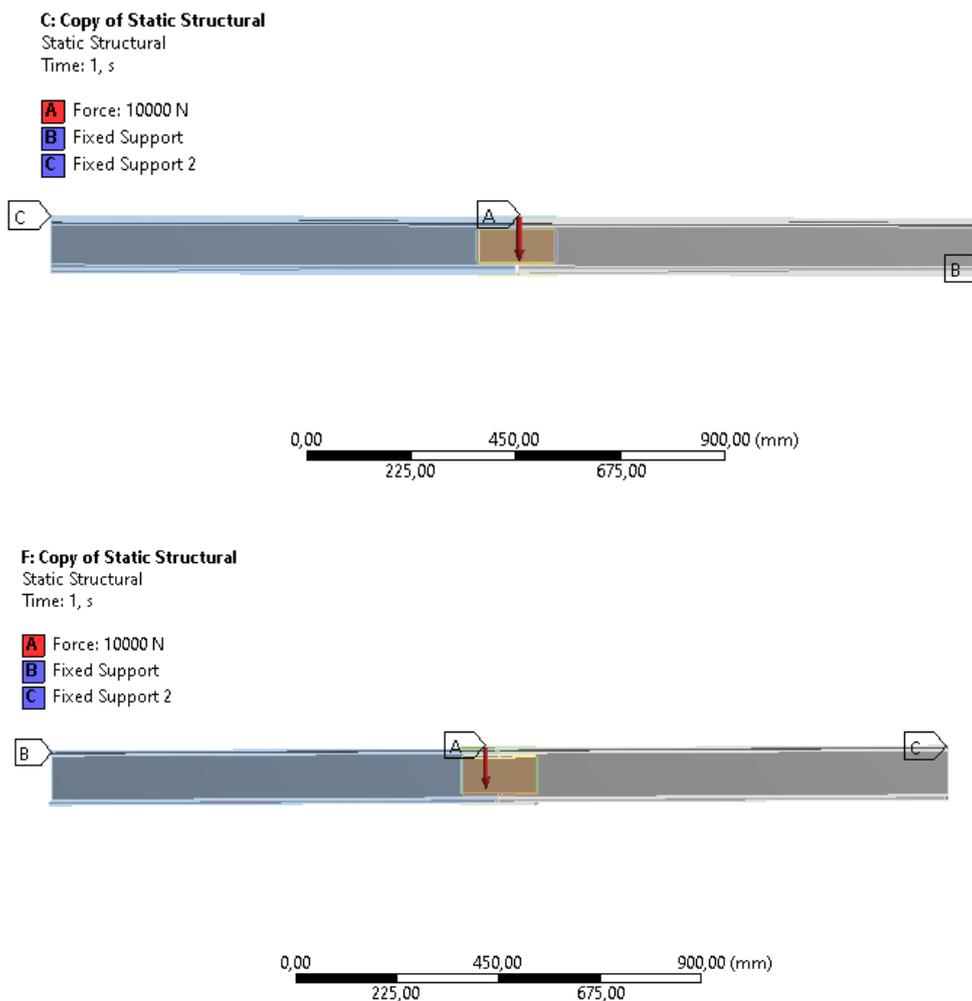
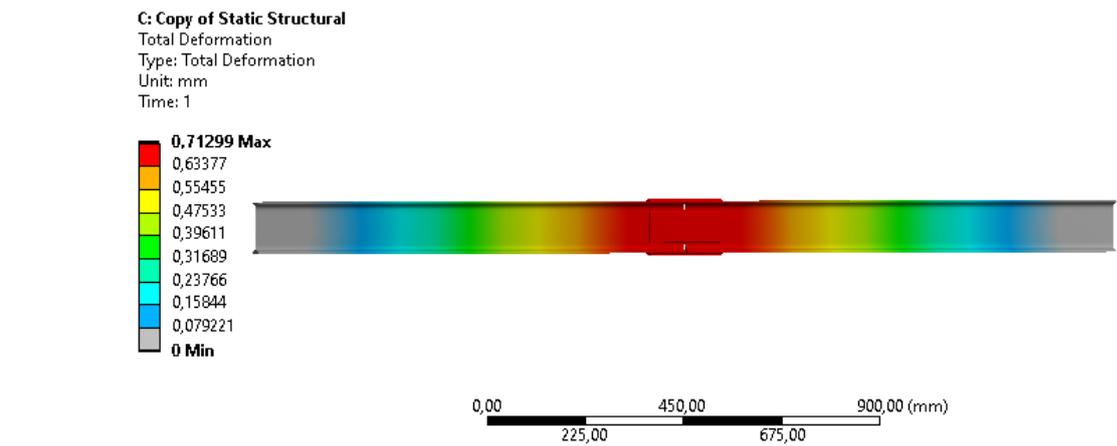
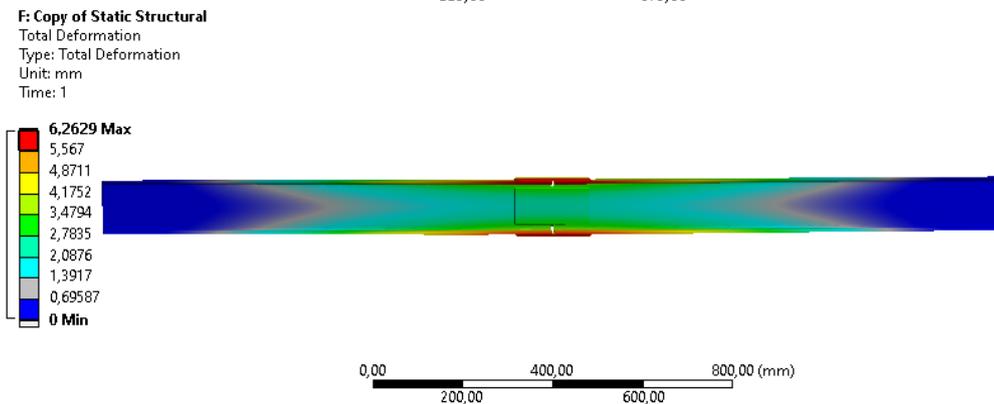
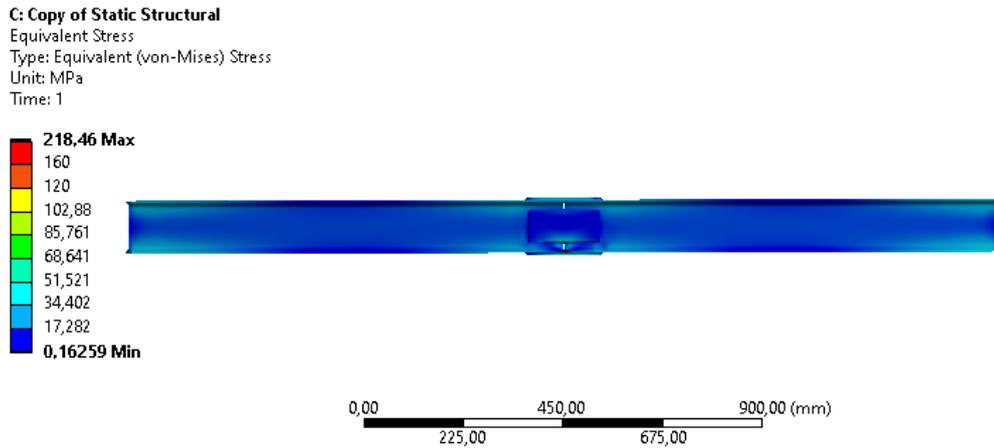


Рис. 3. Физическая модель расчета сварного двутаврового и таврового соединений, нагрузка приложена вдоль соединительной накладки

Для данной конечно-элементной модели проводим статический расчет конструкции, оцениваем распределение как нормальных, так и эквивалентных напряжений, выделяем значения относительных удлинений и полных перемещений (рисунок 4).



a



б

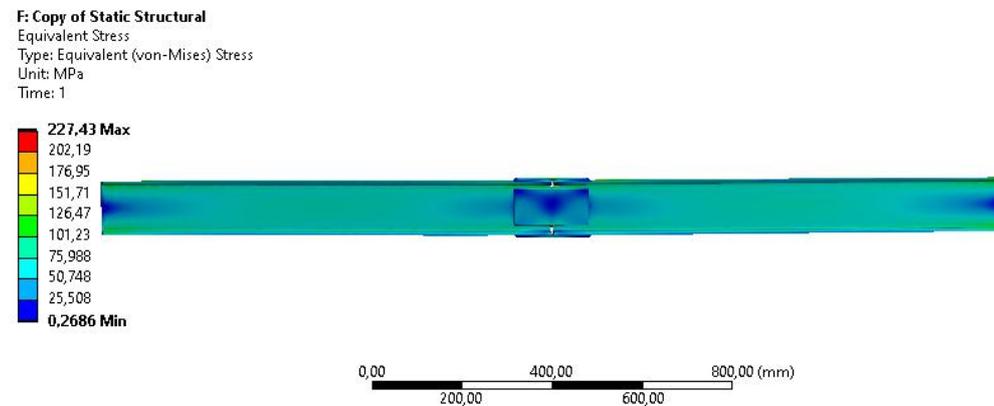


Рис. 4. Результаты статического расчета двутаврового и таврового соединений: *a* – схема деформирования сварного двутаврового соединения; *б* – схема напряжения сварного таврового соединения

Для расчета прочностных характеристик данных соединений при вертикально сжимающей нагрузке, долговечность характеризуется кривой S / N (от напряжения S к количеству циклов нагружения $N = 2 \cdot 10^6$ или кривой Веллера) [9] (рисунок 5).

Fatigue Life – Этот результирующий контурный график показывает доступный срок службы для данного анализа усталости. Если нагрузка имеет постоянную амплитуду, это представляет собой количество циклов до тех пор, пока звено не выйдет из строя из-за усталости. Если нагрузка непостоянна, это представляет количество блоков загрузки до отказа.

Fatigue Damage – Усталостное повреждение представляет собой контурный график усталостного повреждения при заданном расчетном сроке службы. Усталостное повреждение определяется как расчетный срок службы, деленный на имеющийся срок службы. Этот результат может быть ограничен. Расчетный срок службы по умолчанию можно установить с помощью панели управления. Для усталостного повреждения значения больше 1 указывают на отказ до достижения расчетного срока службы.

Fatigue safety factor – Коэффициент запаса прочности по усталости представляет собой контурную диаграмму коэффициента запаса прочности по отношению к усталостному разрушению при заданном расчетном сроке службы. Максимальный отображаемый коэффициент запаса прочности равен 15. Как и в случае повреждений и жизни, этот результат может быть ограничен. Для коэффициента запаса по усталости значения меньше единицы указывают на отказ до достижения расчетного срока службы.

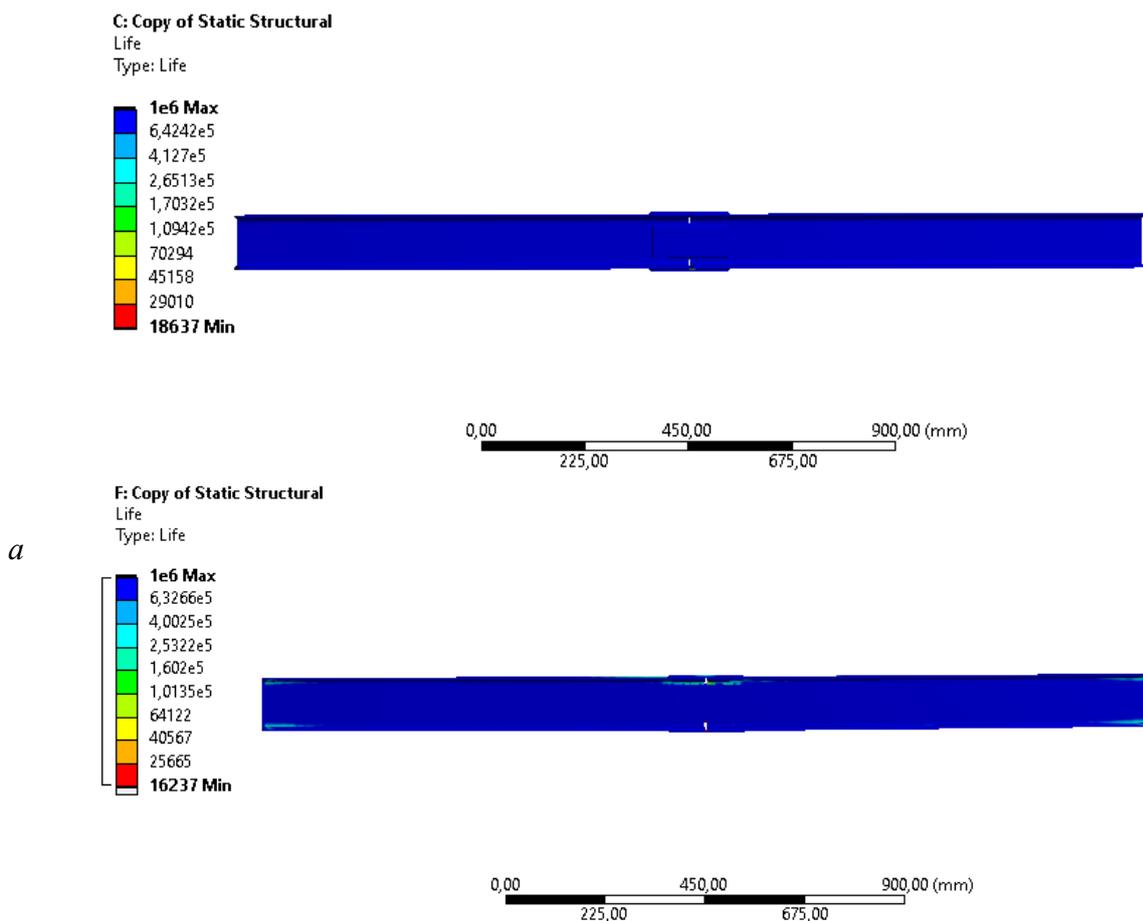
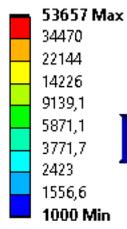


Рис. 5. Результаты циклического расчета двутаврового и таврового соединений: *a* – схема срока службы сварного двутаврового и таврового соединений, *б* – схема усталостного повреждения сварного двутаврового и таврового соединений, *в* – схема коэффициента запаса прочности сварного двутаврового и таврового соединений

C: Copy of Static Structural

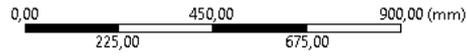
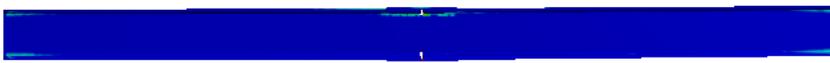
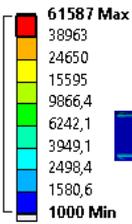
Damage
Type: Damage



6

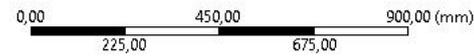
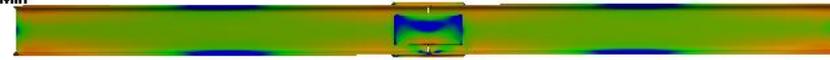
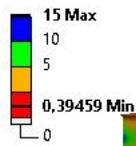
F: Copy of Static Structural

Damage
Type: Damage



C: Copy of Static Structural

Safety Factor
Type: Safety Factor



6

F: Copy of Static Structural

Safety Factor
Type: Safety Factor

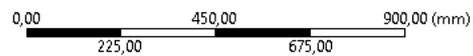
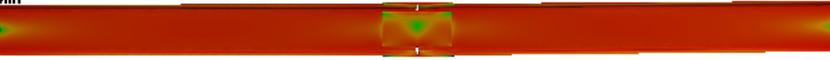
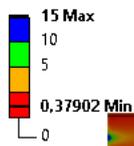


Рис. 5. (окончание)

Заключение. Испытания в среде ANSYS проведены для сварного узла соединения двутавровой и тавровой балки. Показан характер передачи усилий в рассмотренных узлах, учтены конструктивные особенности сварных узлов.

В результате испытаний было выявлено, что непрерывный сварной шов имеет более высокую усталостную прочность, чем прерывистый сварной шов, и что начальная трещина в обоих видах шва в основном распространяется от корня шва. Усталостная прочность, когда начальная трещина начинается в корне шва, выше, чем когда трещина начинается в носке шва. Усталость сварного шва можно считать самым слабым звеном процесса разрушения, когда наихудшая комбинация напряжений, дефектов и свойств материала приводит к зарождению трещины. Таким образом, более короткие сварные швы демонстрируют худшие усталостные характеристики, чем более длинные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1967. – 984 с.
2. Дарков А. В. Строительная механика / А. В. Дарков Н. Н. Шапошников. – М. : Высш. Шк., 1986. – 607 с.
3. Перельмутер А. В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А. В. Перельмутер В. И. Сливкер. – М. : Изд-во: ДМК Пресс, 2002 г. – 618 с.
4. Лещенко, А. П. Фундаментальная строительная механика упругих систем / А. П. Лещенко. – М. : Издательство ЛКИ, 2008 – 976 с.
5. Дьяков, И. Ф. К расчету оболочки, укрепленной тонкостенными стержнями /И. Ф. Дьяков С. А. Чернов. // Автоматизация и современные технологии. – 2008. – № 1. – С. 16–20.
6. Басов, К. А. ANSYS в примерах и задачах / К. А. Басов; под ред. Д. Г. Красковского. – М. : КомпьютерПресс, 2002. – 223 с.
7. Конструирование зданий и сооружений. Легкие стальные тонкостенные конструкции: учеб. руководство / Н. И. Ватин [и др.]. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 266 с.
8. Икрин В. А. Соппротивление материалов с элементами теории упругости и пластичности : учебник для студентов, обучающихся по направлению 653500 «Строительство» / В. А. Икрин. – М : Изд.АСВ, 2004. – 424 с.
9. Проектирование стальных конструкций: ТИП 1993–1–9–2009 – Введ. 10.12.09 – Минск, 2021. – 89 с.

Поступила: 05.03.2023

МКЭ-АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ БЕТОННОГО УСИЛЕНИЯ ПОРТАЛЬНОГО СТАНКА

Довнар С. С.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Объект исследования и его 3D-модель. В работе в аспекте виртуальных испытаний рассматривается распространенный вид портального станка – продольно-строгальный станок (ПСС; рисунок 1). Это крупногабаритная портальная машина. В мире накоплен большой парк долговечных ПСС, работающих десятилетиями. Такие машины есть и в линейке продукции белорусских станкостроителей (ОАО «МЗОР»). Рассматриваемый ПСС относится к семейству 7212–7216.

ПСС сконструирован (рисунок 1) из группы робастных литых чугунных структурных деталей (СД). По станине *Base* (рисунок 1, *а*) возвратно-поступательно перемещают вдоль продольных направляющих *G-long* (ось *X*) стол *Tab* с заготовкой. Неподвижный портал, состоящий из колонн *C1*, *C2* и поперечины *Cb*, охватывает трассу стола. На портале вертикально (по *Z* – вдоль направляющих *G-vert*) передвигают траверсу *Tr*. Траверса имеет поперечные направляющие *G-trans* (по *Y*). Они служат для движения суппортов *S1*, *S2* (рисунок 1, *б*) с инструментами *T1*, *T2*. На колоннах могут располагаться боковые суппорты (например, *S3* с инструментом *T3*).

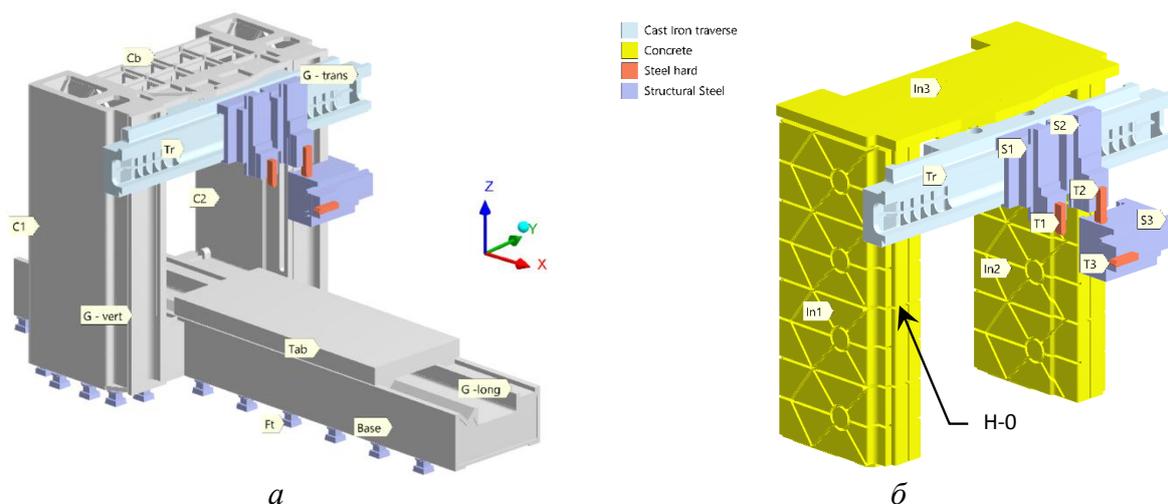


Рис. 1. Геометрическая модель портального станка (*а*) с наружным чугунным порталом *C1 – Cb – C2* и предлагаемый внутренний бетонный портал *In1 – In3 – In2* (*б*)

Станки выполняют рутинное, преимущественно черновое, строгание крупных деталей. Тенденцией является изменение инструментальной базы (*T1*, *T2*, *T3*). Строгальные резцы заменяют на компактные фрезерные головки. Инструментом может быть концевая фреза. При условии повышения жесткости несущей системы (НС) станка такая замена позволяет повысить и точность, и производительность обработки резанием. Поэтому рационально заниматься реновацией исторических ПСС, превращая их в многооперационные порталные станки (МПС), конкурирующие технически и экономически даже с продольно-шлифовальными станками.

Станок с большим сроком службы ценен тем, что в его СД практически полностью разрядились остаточные напряжения. Поэтому НС обрела размерную стабиль-

ность. После реновации должна возникнуть ценная прецизионная крупногабаритная машина. Наличие таких станков в данном производящем сообществе обеспечивает его технологический суверенитет.

Необходимым условием реновации является усиление станка. Оно заключается прежде всего в увеличении статической и динамической жесткости портала. В данном исследовании в продолжение работы [1] для усиления портала предлагается использовать заливку полимербетоном. На рисунок 1 показано, что в колоннах $C1$, $C2$ после затвердевания бетона возникают вставки $In1$, $In2$. В поперечине появляется вставка $In3$. Солиды $In1 - In3 - In2$ создают внутренний бетонный портал, заключенный в чугунном наружном портале $C1 - Cb - C2$. Эту схему будем называть «Порталом в портале».

Полимербетон класса УНРС (далее – бетон) является известным и освоенным материалом [2]. Он обладает размерной стабильностью и высокой демпфирующей способностью. Заполнение бетоном полостей низко лежащих СД, например, чугунных станин, является типовым решением для ослабления вибраций станков при переменном резании [3].

Высота колонн рассматриваемого ПСС (рисунок 1) составляет 3150 мм при поперечном сечении 1475×595 мм. Сечение колонн в поперечном направлении в 2,47 раз меньше, чем в продольном. Это сделано, чтобы выдерживать большие продольные силы при строгании.

На рисунке 2, *a* траверса показана в среднем положении « $h0$ », а на рисунке 2, *б* – в крайнем верхнем положении « $h650$ » (на 650 мм выше). Нижнее положение траверсы (на 650 мм ниже среднего) не моделировалось. Здесь жесткость полагалась обеспеченной.

Высота траверсы составляет 640 мм при длине 3675 мм. Технологическая высота проема портала равна 2160 мм, а ширина его меньше – 1860 мм. Такой портал является узкой и возвышенной структурой («высокий портал»). Чаще проемы портала делают с шириной, превышающей высоту («широкий портал») [4]. Соответственно, можно говорить о высоко-портальных станках (ВПМ, данная машина) и широко-портальных станках (ШПМ).

Цель работы. Данная работа посвящена виртуальным испытаниям портала станка с помощью МКЭ [5]. Целью работы является освещение вопроса о допустимости усиления возвышенной структуры (портала) полимербетоном. С одной стороны, эта мера повышает статическую жесткость. С другой стороны, высоко расположенные вставки могут усилить резонансные раскачки портала.

Для «широких» порталов [4] усиление бетоном признано в рамках МКЭ-анализа положительной мерой. «Высокие» порталы станков моделировались [6] и создавались, но, насколько известно, ни виртуально, ни натурно не подвергались бетонированию.

Конечно-элементное моделирование. Станок моделировался в МКЭ-пакете ANSYS как в исходном пустотелом состоянии («чугун-пусто»), так в состоянии полного заполнения отливок бетоном («чугун-пусто»). Механические свойства материалов взяты в соответствии с работой [7].

Используется линейная упругая МКЭ-модель. Материалы подчиняются закону Гука. Все контактные пары находятся в состоянии схватывания (*bonded*). Бетонные вставки плотно прилегают изнутри к чугунным отливкам и сцеплены с ними. Все направляющие моделируются заблокированными. Такие режимы могут включаться на всех современных вариантах направляющих: гидростатических, скольжения и качения на танкетках.

Сила тяжести не рассматривается. Привода подачи и шпиндельные узлы не рассматриваются. Деформации стола и заготовки лежат вне фокуса исследования.

Для данного ПСС результаты статического анализа уже описаны [1]. Бетонирование дает двукратный рост статической жесткости. Настоящая работа сфокусирована на

модальном и гармоническом анализе. Это важно при осциллирующем нагружении, например, при фрезеровании. Так, к инструменту $T2$ на суппорте $S2$ (рисунок 2, *а*) приложена продольная сила (маркер FL), соответствующая уравнению $F_L^{S2} = A_{FL} \sin(2\pi f/t)$, где: A_{FL} – амплитуда силы (Н); f – частота испытания (Гц); t – текущее время (с). Для линейной МКЭ-модели амплитуда силы не принципиальна. В работе она бралась для всех направлений равной 1 кН. При совпадении частоты возбуждения с частотой какой-либо резонансной моды может начаться раскачка портала ABCD (рисунок 3, *б*). Это будет зафиксировано, как пик на АЧХ.

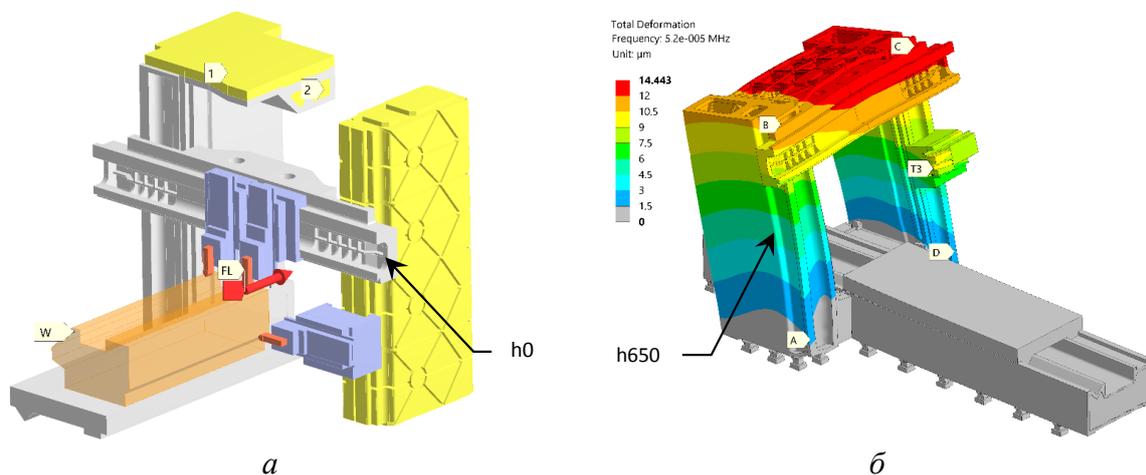


Рис. 2. Виртуальные испытания станка «Портал в портале»: *а* – нагружение суппорта $S2$ продольной силой (FL); *б* – возбуждение в портале $A - B - C - D$ резонанса **Мрепк** «Клевки» силой резания $F_L^{T3} = 1 \text{ kN}$ (боковой суппорт $S3$) на частоте 52 Гц ($\times 60000$). W – обрабатываемая деталь; 1, 2 – слои полимербетона, сцепленные с поперечиной

АЧХ строилось в диапазоне 0–160 Гц с шагом 1 Гц. Входом была сила, прилагаемая на режущие поверхности инструмента. Перебирались все инструменты, продольное (L) и поперечное (T) направления силы. В качестве выхода бралось перемещение каретки под инструментом. Деформации инструмента исключались из рассмотрения.

Для проведения гармонического анализа требуется учет демпфирующей способности материалов модели. В соответствии с накопленными данными [3; 5; 6] стали был приписан коэффициент демпфирования $\xi_{ст} = 1 \%$, чугуна $\xi_{ч} = 2 \%$, а бетону $\xi_{бет} = 3 \%$.

Резонансные моды портала. Для рассматриваемого станка выявлено четыре общестаночных резонанса. Все они связаны с колебаниями портала и касаются как варианта «чугун – пусто», так и «чугун – бетон». Раскачивание портала ABCD в продольном направлении (рисунок 2, *б*) происходит при возбуждении моды «Клевки», которую будем обозначать **Мрепк**. Энергия в резонансные колебания эффективно накачивается силой $F_L^{S1, S2, S3}$ с любого суппорта, например, с суппорта $S3$ на рисунке 2, *б*.

Поперечная сила на одном из верхних суппортов ($S1$ на рисунок 3, *а*) может вызвать поперечные раскачивания портала. Он перекашивается, теряет прямоугольность и становится похожим на *параллелограмм* (мода **Мпар**). Частоты мод **Мрепк** и **Мпар** обычно близки. Для данного портала мода **Мпар** является главной (самой низкочастотной) потому, что сечение колонн в поперечном сечении примерно вдвое меньше, чем в продольном.

Обсужденные моды являются изгибными. Выше их по частоте лежит крутильная мода **Мtors** (рисунок 3, *б*). Здесь портал ABCD совершает возвратно-крутильное движе-

ние вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O . Возбуждение моды происходит от осцилляции продольных или поперечных сил. На рисунке 3, б поперечная сила F_T^{S2} приложена на втором верхнем суппорте $S2$ (маркер FT).

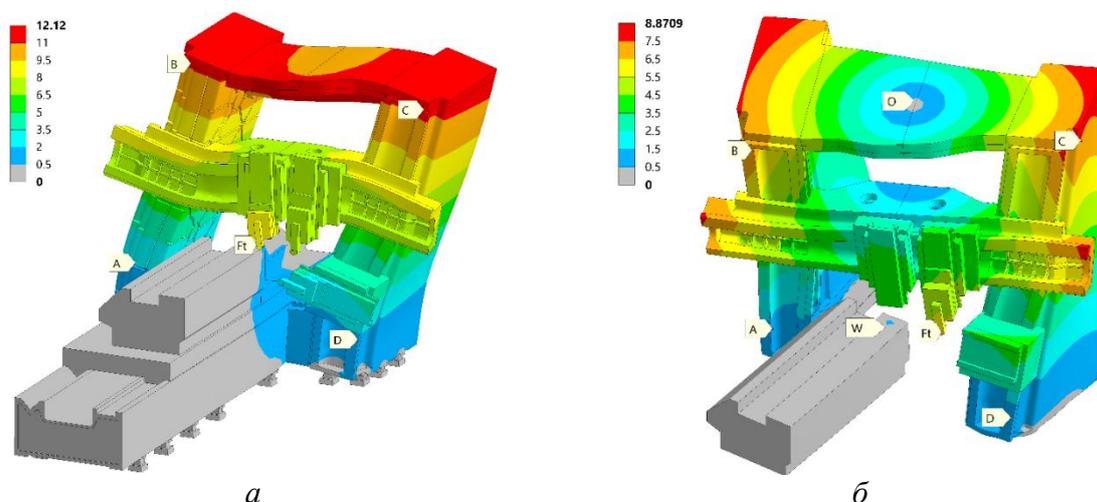


Рис. 3. Картины суммарных перемещений (мкм) при резонансном возбуждении портала $ABCD$ (чугун – бетон) поперечной силой (F_t): a – мода M_{par} ; сила $F_T^{S1} = 1kN$ на суппорте $S1$ с частотой 45 Гц ($\times 80000$); b – мода M_{tors} ; сила $F_T^{S2} = 1kN$ ($\times 95000$; 79 Гц; $S2$)

Рисунок 4 иллюстрирует локальные резонансные моды, важные для точности станка. При передаче через $T3$ продольной осциллирующей силы на частоте резонанса $MS31$ (рисунок 4, а) суппорт закручивается на направляющих колонны. Линия $T3-1$ теряет перпендикулярность к продольной оси. На частоте резонанса $MS32$ (рисунок 4, б) похожее закручивание суппорта сопровождается прогибами стенок колонн (1) и движением углов (2). Однако, в целом на рисунке 4 портал остается неподвижным.

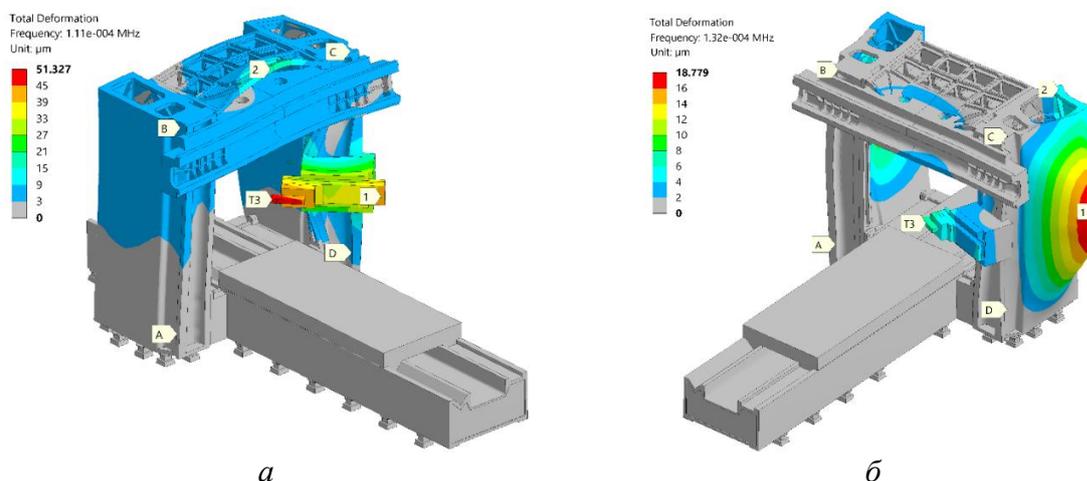


Рис. 4. Локальные резонансные колебания (мкм) под действием силы $F_L^{T3} = 1kN$ на инструменте $T3$: a – 111 Гц (мода $MS31$; $\times 20000$); b – 132 Гц (мода $MS32$; $\times 40000$)

Локализованная мода M_{trav} (рисунок 5, а) является переходной между общестаночными и локальными модами. Резонанс M_{trav} заключается в закручивании траверсы вокруг ее оси. Линия 1–2 отклоняется от вертикали. Портал стабилен, но немного прогибается под траверсой в продольном направлении. Наблюдаются локализованные пучности 3, 4.

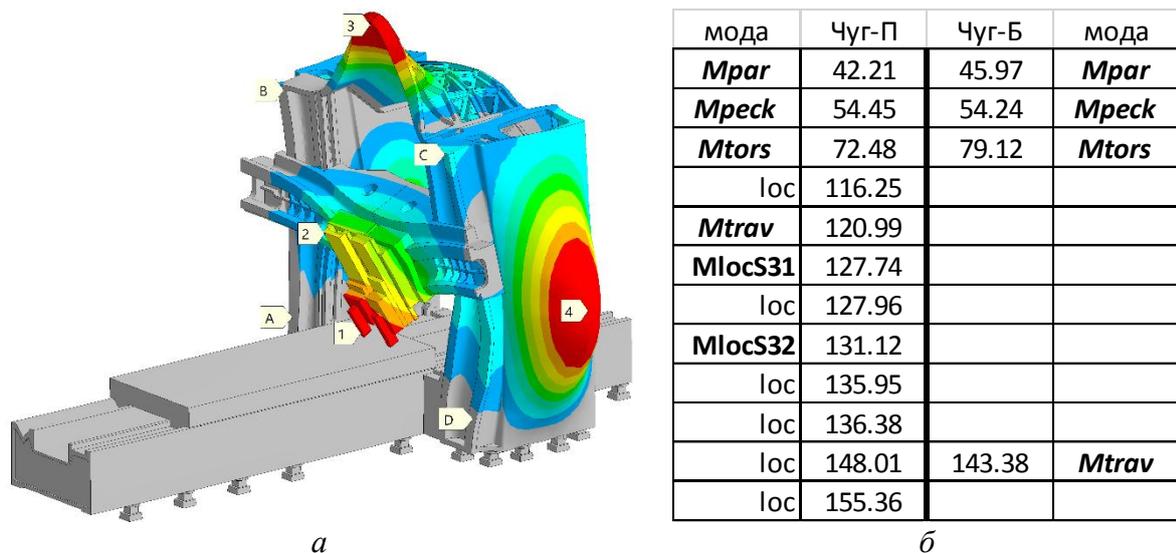


Рис. 5. Крутильный резонанс траверсы **Mtrav** (а) и последовательности мод и частот (б; Гц; $h0$) для случаев «Чугун – пусто» (Чуг-П) и «Чугун – бетон» (Чуг – Б»). Лос – локальная мода

Очередность и частоты нижних 12-ти резонансных мод даны на рисунке 5, б. Видно, что после бетонирования портала (правая часть рисунка) локальные моды исчезают из диапазона частот 0–150 Гц. Там остаются только четыре общестаночные моды. Бетонирование умеренно, а иногда слабо, влияет на их частоты. Можно говорить, что усиление бетоном прореживает шкалу резонансов за счет локальных мод. Это облегчает демпфирование станка.

Гармонический анализ. На представленных ниже АЧХ двойные стрелки всегда указывают на резонансные пики парных кривых, отличающихся только отсутствием или наличием бетонирования портала. АЧХ на рисунке 6 описывает возбуждение портала продольной компонентой силы резания с верхнего суппорта.

На нижних частотах наблюдается возбуждение резонанса **Mpeck**. Маркер Mpeck1 указывает на соответствующие пики для поднятой траверсы («h650»). Бетонирование понижает высоту пика в 2,03 раза, но слабо влияет на частоту резонанса (повышается только с 47 до 50 Гц).

Аналогично, для траверсы в среднем положении («h0»; маркер Mpeck2) бетон существенно, в 1,73 раза, ослабляет продольную раскачку, но лишь немного увеличивает резонансную частоту (с 53 до 54 Гц).

Получается, что независимо от состояния станка опасный резонанс **Mpeck** лежит в диапазоне 47–54 Гц. В создаваемой в ходе реновации и усиления ПСС машине будет присутствовать УЧПУ. Она позволит программно обходить данные нежелательные частоты и наладить межрезонансную обработку (в дорезонансном интервале I или в межрезонансном интервале II – рисунок 6).

На «продольной» АЧХ на рисунке 6 резонанс **Mpeck** является единственным наблюдаемым общестаночным резонансом. Пики «поперечного» **Mpar** и «крутильного» **Mtors** отсутствуют. Следовательно, данный станок с высоким порталом не склонен к кроссингу колебаний. Станки с «широкими» порталами показывают довольно сильный, нежелательный кроссинг колебаний между разными координатными осями [8; 9].

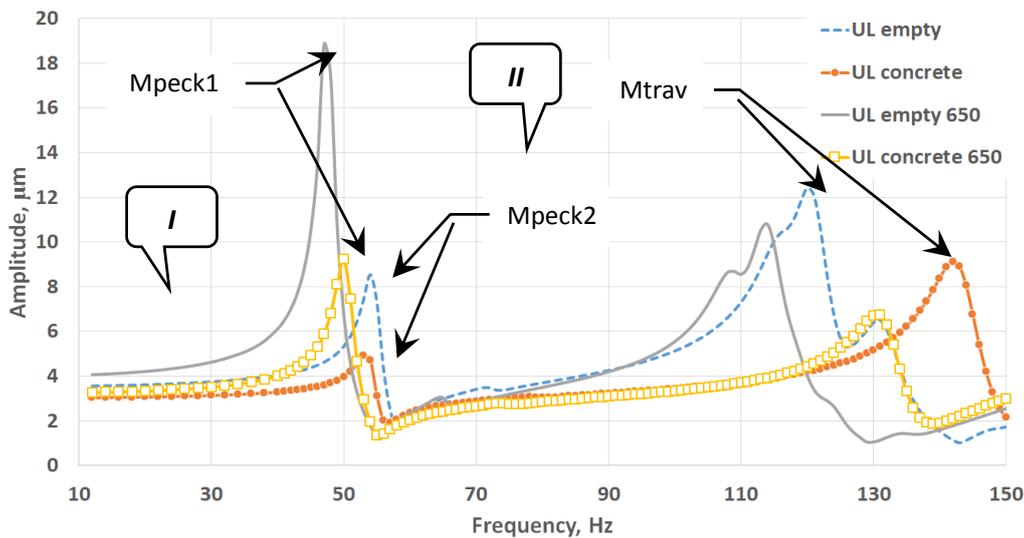


Рис. 6. АЧХ для верхнего суппорта $S1$ в продольном направлении (сила F_L^{S1} – перемещение U_L^{S1}): empty – портал «чугун – пусто»; concrete – портал «чугун – бетон»: маркер «650» – верхнее положение траверсы $h650$ (иначе – среднее положение $h0$)

На рисунке 6 проявляет себя, кроме **Mpeak**, только крутильный резонанс траверсы **Mtrav**. Он является высокочастотным и локализованным. Поэтому бетонирование портала влияет на него умеренно. Высота пика падает в 1,36–1,59 раза. Отметим, что подъем траверсы из $h0$ в $h650$ всегда смещает резонансный пик **Mtrav** существенно влево.

При поперечном возбуждении портала (рисунок 7) проявляют себя только переко́с (**Mpar**) и кручение портала (**Mtors**). Введение в портал бетона для $h650$ снижает пик резонанса «Параллелограмм» в 2,63 раза (маркер Mpar1). Для среднего положения $h0$ бетонирование дает примерно такое же ослабление поперечного раскачивания (в 2,48 раз – маркер Mpar2).

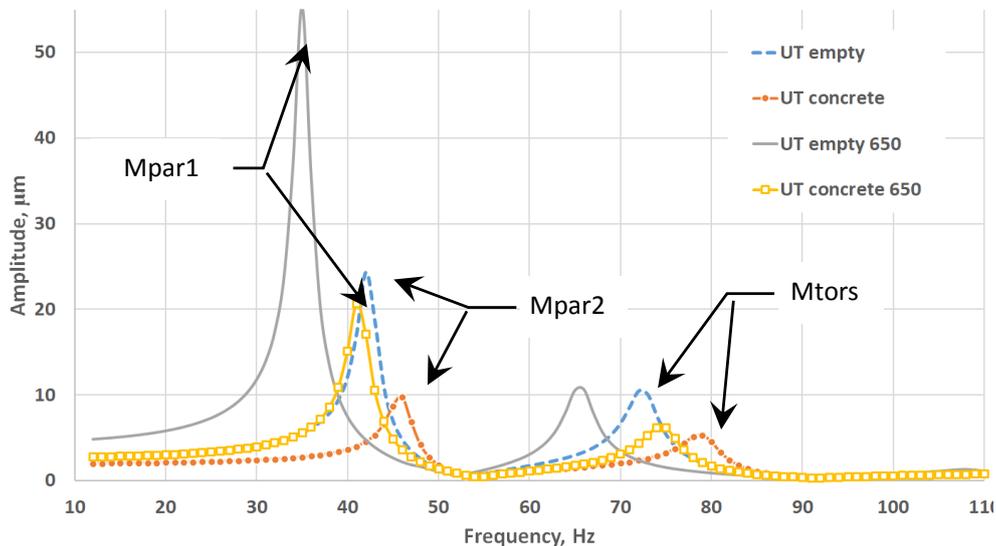


Рис. 7. АЧХ для верхнего суппорта $S1$ в поперечном направлении (сила F_T^{S1} – перемещение U_T^{S1}). Обозначения линий по рисунку 6.

На рисунок 7 наблюдается также возбуждение моды **Mtors**. Усиление портала бетоном снижает амплитуды пиков в 1,71 и в 1,96 раз для $h650$ и $h0$ соответственно.

Важно отметить, что в среднем положении траверсы меры усиления почти не влияют на частоты обоих общестаночных резонансов.

АЧХ на рисунке 8 описывает возбуждаемость бокового суппорта продольной осциллирующей силой (положение суппорта – рисунок 2, *a* и рисунок 4). Кривая «Port conc», получающаяся после бетонирования портала, должна быть признана удовлетворительной и желательной. Она имеет минимальные проявления резонансов.

Резонанс «Клевки» проявляется небольшим пиком. Усиление бетонированием снижает его в 1,56 раз (маркер Mpek). Частота резонанса стабильна.

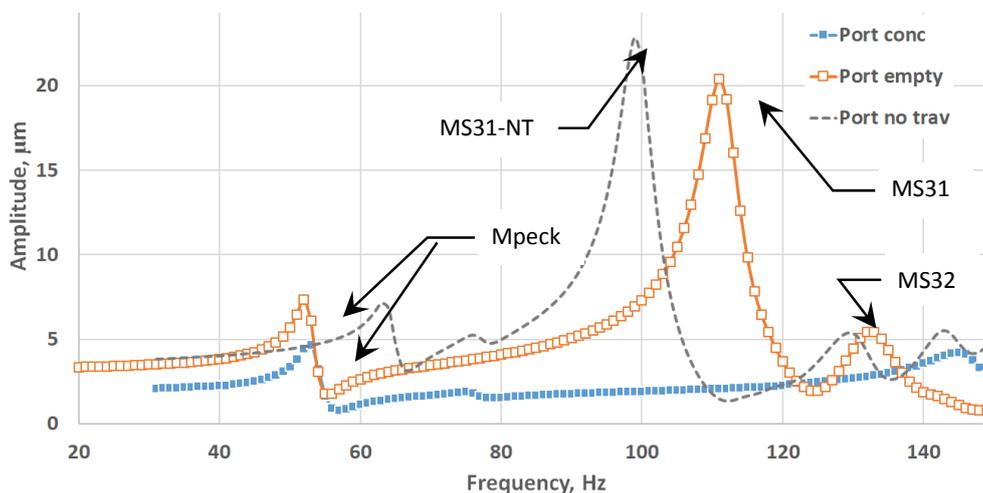


Рис. 8. АЧХ портала для бокового суппорта $S3$ в продольном направлении в положении «h650». (сила F_L^{S3} – перемещение U_L^{S3}). Обозначения линий: empty – портал «чугун – пусто»; conc – портал «чугун – бетон»; «no trav» – траверса с суппортами $S1$, $S2$ снята

Главным эффектом усиления портала для суппорта $S3$ является подавление локальных мод $MS31$ и $MS32$. Маркеры $MS31$ и $MS32$ отмечают эти моды только для пустотелого портала (кривая «Port empty»). После усиления локальные пики разглаживаются и смещаются из рисунка на существенно более высокие частоты.

Кривая «Port no trav» соответствует виртуальному снятию траверсы с пустотелого портала. Смещение пика $MS31$ влево в положение $MS31-NT$ показывает, что зафиксированная траверса способствовала обеспечению жесткости портала. Однако, поскольку высота резонансного пика почти не изменилась, чугунная траверса само по себе не обеспечивала сильного демпфирования колебаний.

Обсуждение результатов. Интересно в дальнейшем исследовать вопрос об усилении полимербетоном собственно траверсы. Это может быть эффективно для демпфирования резонанса $Mtrav$.

Также можно проанализировать вариант бетонирования неразборного портала. Здесь бетон заливается в собранные вместе колонны и поперечину. Для рисунка 1, *b* это соответствует слиянию вставок In1, In2, In3. Такое конструктивное решение позволило бы поднять жесткость в углах портала.

Следует учитывать, что бетонирование литых деталей изнутри связано с расходами. Для сцепления бетона и чугуна требуется тщательная зачистка поверхности металла. Это достаточно сложно и трудоемко для поверхностей внутреннего оребрения отливки.

Выводы.

1. Бетонирование портала примерно двукратно (в 1,73–2,63 раз) ослабляет его динамические раскочки на изгибных резонансах *Мрпек*, *Мпар*. Крутильные колебания портала при возбуждении моды *Mtors* уменьшаются по амплитуде в 2,48–2,63 раза. Пик крутильного резонанса траверсы *Mtrav* можно снизить в 1,71–1,96 раз. Пики опасных локальных резонансов *MS31*, *MS32* падают до 4-х раз.

2. Усиление портала бетоном слабо влияет на частоту большинства общестаночных резонансных мод. Это полезно для обхода резонансных диапазонов.

3. Бетонирование портала резко уменьшает число локальных резонансов. Они полностью исчезают или смещаются вверх из диапазона частот 0–160 Гц.

4. Усиление портала станка бетоном рекомендуется при реновации рассмотренного типа станков с «высоким» порталом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Довнар С. С. Концепция усиления и виртуальные МКЭ-испытания прецизионного порталного станка / С.С. Довнар // БЕЛАРУСЬ-УЗБЕКИСТАН: ФОРМИРОВАНИЕ РЫНКА ИННОВАЦИОННОЙ ПРОДУКЦИИ. Сборник материалов научно-практической конференции (Минск, 14–15 марта 2023 г.). – Минск : БНТУ, 2023. – С. 278–280.

2. New development of ultra-high-performance concrete (UHPC). / Du Jiang [et al.] // Composites, Part B: Engineering, 2021, Volume 224, 109220

3. Hermansky D. An impact of the steel-concrete composite supporting structure on the dynamic parameters of the machining center / D. Hermansky, J. Marek // MM Science Journal, March 2022, pp.5571–5574. https://doi.org/10.17973/MMSJ.2022_03_2020017

4. Василевич Ю.В. Конечно-элементный анализ влияния бетонного наполнителя на динамическую жесткость портала тяжелого станка / Василевич Ю. В., Довнар С. С., Карабанюк И. А. // Наука и техника. 2016. – Т. 15, № 3. – С. 233–241.

5. ZIENKIEWICZ, O. C. and TAYLOR, R.L. (2000) The finite element method. // Butterworth-Heinemann, vol. 1: Basis. Oxford.

6. Dounar, S., Iakimovitch, A. & Jakubowski, A. (2021) Finite element analysis of the dynamically created portal in the huge machine tool of "travelling column" type. Scientific Journals of the Maritime University of Szczecin, Zeszyty Naukowe Akademii Morskiej w Szczecinie. – 2021. – 65 (137). <https://doi.org/10.17402/458>

7. Довнар С. С. МКЭ-анализ бетонно-бионического банджа подвижной колонны станка / С. С. Довнар, А. М. Якимович, А. Д. Лапука // Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник / Белорусский национальный технический университет ; редкол.: Ю. В. Василевич (пред. редкол., гл. ред.). – Минск : БНТУ, 2022. – Вып. 37. – С.132–137. <https://rep.bntu.by/handle/data/125456>

8. Гармонический анализ порталов тяжелых продольно-фрезерных станков типа «Гентри» с помощью МКЭ / С. С. Довнар [и др.] // Вестник ПГУ. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. – 2014. – № 11. – С. 25–36.

9. МКЭ-анализ влияния конструктивных вариантов портала на динамику порталного станка / С. С. Довнар [и др.] // Машиностроение, 2015. – № 29. – С. 14–22.

Поступила: 23.04.2023

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ КОНСТРУКЦИОННЫХ УПРОЧНЯЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ РЕЗЕРВУАРОВ ЦИСТЕРН ПОЖАРНЫХ АВТОМОБИЛЕЙ

Короткевич С. Г., Ковтун В. А.

Университет гражданской защиты, Республика Беларусь

Введение. Анализ работы аварийно-спасательных подразделений Министерства по чрезвычайным ситуациям Республики Беларусь, направленной на ликвидацию последствий чрезвычайных ситуаций различного характера, свидетельствует о том, что фактор времени оказывает решающее влияние на процесс развития пожаров и размер причиняемого ущерба. Статистика свидетельствует, что 98 % от общего числа погибших приходится на начальный период развития пожаров [1]. Одним из определяющих факторов в борьбе с пожарами является своевременное прибытие аварийно-спасательных подразделений, которое во многом зависит от наличия современной и надежной техники. К основным транспортным средствам специального назначения относятся пожарные автоцистерны, количество которых в подразделениях МЧС в 2021 году составило 2027 единиц, из них 61,8 % смонтировано на шасси Минского автомобильного завода (МАЗ).

Ежедневное следование пожарных автомобилей к месту возникновения чрезвычайных ситуаций происходит в режимах «ускорение», «торможение», «поворот» [2]. Большое количество пожаров происходит в сельской местности, а также в природных экосистемах, что вызывает необходимость осуществлять движение пожарных автоцистерн по проселочным дорогам, а также в условиях бездорожья. При таких условиях конструкции резервуаров цистерн испытывают значительные инерционные нагрузки, передаваемые через раму шасси и от перевозимой жидкости. Проведенный анализ показал, что часто встречающейся причиной ремонтов пожарных автомобилей является нарушение сварных соединений элементов металлоконструкции резервуаров цистерны. Одним из путей решения данной проблемы является научно-обоснованное проектирование цистерн, а также исследование уровня напряжений, возникающих в наиболее ответственных узлах при различных условиях эксплуатации пожарных автомобилей, что является сложной технической задачей.

Методика исследований. Объектом исследований выбраны наиболее распространенные модели цистерн объемом 8 м³ пожарных автомобилей на шасси МАЗ-6317. Для оценки напряженного состояния конструкций цистерн, возникающего при различных режимах и условиях движения пожарных автомобилей, предложена новая расчетная методика, основанная на двухэтапном подходе, включающем экспериментальное установление максимальных значений ускорений, возникающих под действием инерционных нагрузок в конструкциях резервуаров цистерн, и разработку адаптированных к режимам движения пожарных автомобилей 3D конечно-элементных моделей [3].

Для проведения исследований значений ускорений определены параметры и условия, характеризующие особенности режимов движения пожарных автомобилей к месту возникновения чрезвычайных ситуаций: режим № 1 – движение по прямому участку асфальтированной дороги со скоростью 50±2 км/ч; режим № 2 – движение по грунтовой дороге категории VI-б с допустимой скоростью 20–30 км/ч [4]; режим № 3 – движение по прямому участку асфальтированной дороги со скоростью 50±2 км/ч с последующим замедлением двигателем до скорости 10–15 км/ч для вхождения в левый

поворот на 90°; режим № 4 – ускорение с места по прямому участку асфальтированной дороги до скорости 30±2 км/ч и экстренное торможение до полной остановки.

Создание 3D моделей резервуаров цистерн объемом 8 м³ пожарных автомобилей на шасси МАЗ-6317 в масштабе 1:1 проводились в программном комплексе SolidWorks (рисунок 1), а разработка их конечно-элементных моделей и расчет – в программном комплексе ANSYS.

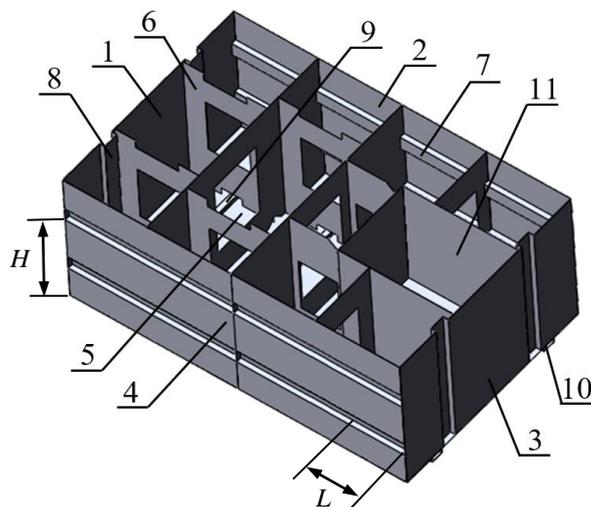


Рис. 1. 3D модель резервуара серийной цистерны объемом 8 м³ пожарных автомобилей на шасси МАЗ-6317 (вид без крыши): 1, 3 – передняя и задняя стенки; 2, 4 – боковые стенки; 5 – дно; 6 – волноломы (внутренние продольные и поперечные); 7, 8 – ребра жесткости; 9 – поперечные усиления в виде профилей П-образного сечения; 10 – продольные лонжероны; 11 – пенобак

Конструкции цистерн пожарных автомобилей включают расположенные внутри волноломы и элементы, повышающие их прочность (ребра жесткости), дно цистерн опирается через демфирующие элементы на два лонжерона. Резервуары цистерн выполнены из нержавеющей стали марки AISI 430 2В. Разработанные их конечно-элементные модели содержат более 300 000 элементов и узлов [5]. Для каждого режима движения пожарных автомобилей заданы гидравлическое давление на стенки цистерны с учетом вектора действующей силы (по осям XYZ) и плотности жидкости, а также установленное экспериментально максимальное значение ускорения, возникающего под действием инерционных нагрузок в конструкции: режим № 1 – 9,2 м/с², режим № 2 – 24,6 м/с², режим № 3 – 18,1 м/с², режим № 4 – 22,7 м/с² [6; 7].

Расчет 3D конечно-элементных моделей цистерн пожарных автомобилей позволил исследовать характер формирования и распределения полей напряжений, возникающих в конструкциях, а также установить наиболее нагруженные соединения элементов резервуаров (рисунок 2).

Анализ полученных результатов расчета позволил установить (рисунок 3), что наибольшие эквивалентные напряжения по Мизесу в конструкциях резервуаров цистерн объемом 8 м³ пожарных автомобилей на шасси МАЗ-6317 возникают при моделировании режима № 2 (движение по грунтовой дороге категории VI-б с допустимой скоростью 20–30 км/ч). При этом, максимальные значения эквивалентных напряжений по Мизесу составляют $\sigma_{\text{экв.}} = 137\text{--}176$ МПа.

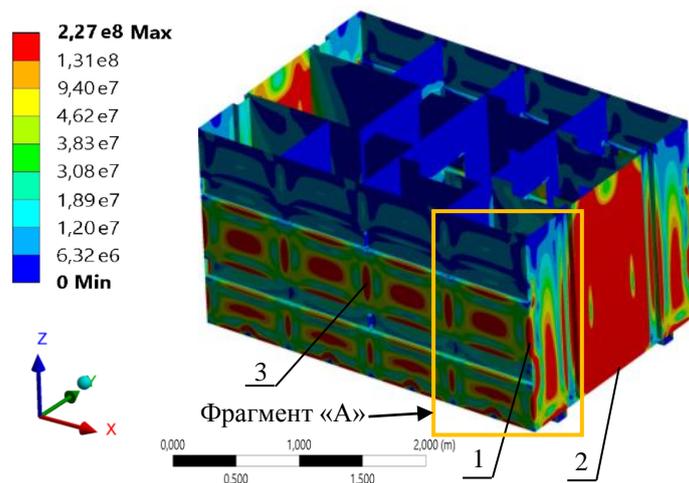


Рис. 2. 3D модель распределения полей эквивалентных напряжений, возникающих в конструкции резервуара серийной цистерны объемом 8 м^3 , при моделировании режима движения № 2 пожарных автомобилей на шасси МАЗ-6317, Па: 1 – угловые соединения стенок; 2 – угловые соединения передней, задней стенок и дна; 3 – тавровые соединения волноломов и стенок

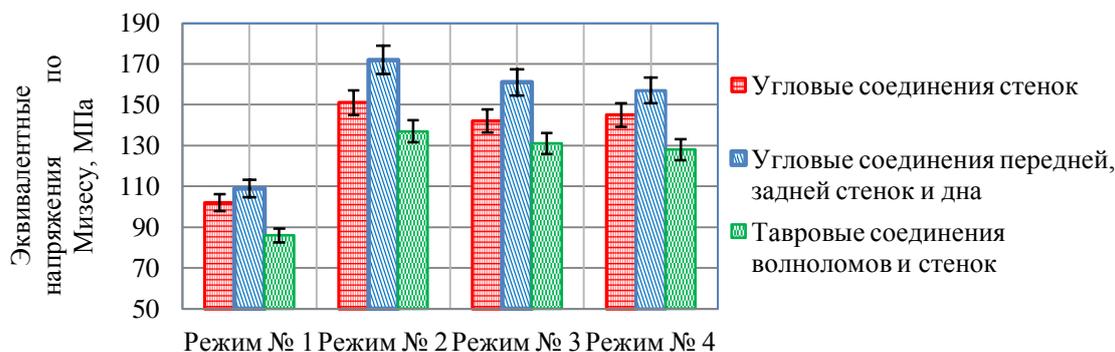


Рис. 3. Зависимости эквивалентных напряжений, возникающих в наиболее нагруженных соединениях резервуара серийной цистерны объемом 8 м^3 , от режимов движения пожарных автомобилей на шасси МАЗ-6317

В связи с этим, режим движения № 2 пожарных автомобилей принят для проведения дальнейших проектных расчетов. Для наиболее полного анализа распределения полей эквивалентных напряжений при проведении расчетов на рисунок 2 представлена расчетная модель резервуара цистерны с указанием фрагмента «А» – вид снаружи углового соединения передней и боковой стенок и таврового соединения поперечных волноломов и боковой стенки конструкции.

Проектные расчеты. Для повышения надежности резервуаров цистерн пожарных автомобилей проведен комплекс исследований, который позволил разработать ряд конструктивных изменений. Для снижения напряжений, возникающих в областях угловых соединений стенок цистерны, проведены исследования рациональных геометрических параметров элементов, повышающих прочность конструкции, в частности, горизонтальных ребер жесткости на ее боковых стенках, выполненных штамповкой. При проведении расчетов рассматривалось изменение величины отступа L от каждой стороны угловых соединений стенок резервуара (рисунок 1). На рисунке 4 представлены результаты проектных расчетов.

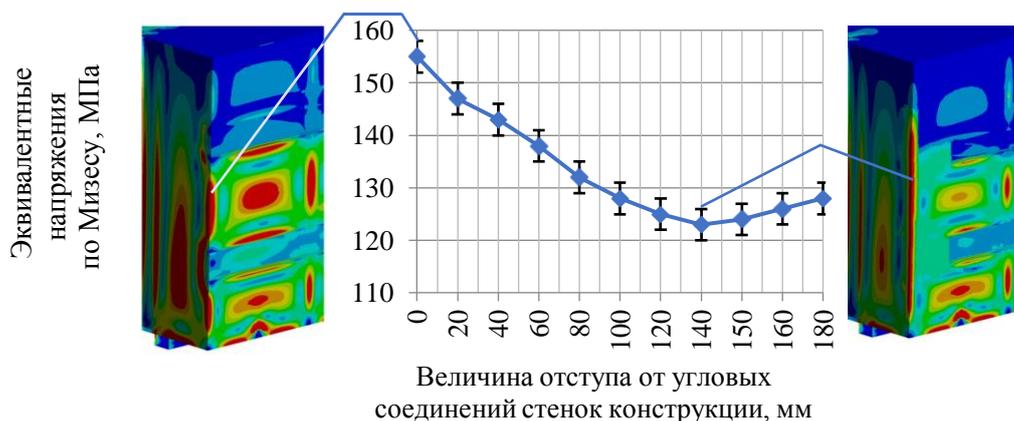


Рис. 4. Зависимость эквивалентных напряжений, возникающих в областях угловых соединений резервуара цистерны объемом 8 м^3 пожарных автомобилей на шасси МАЗ-6317, от геометрических параметров горизонтальных ребер жесткости на ее боковых стенках и вид распределения полей напряжений в характерных точках на фрагменте «А» цистерны

В результате установлено, что при выполнении горизонтальных ребер жесткости на боковых стенках цистерны без контакта с угловыми соединениями передней, задней и боковых стенок резервуара на отступ равный $L = 140 \text{ мм}$ от каждой стороны данных соединений обеспечивается снижение на 32–34 МПа уровня напряжений, возникающих в исследуемых областях.

Для снижения напряжений, возникающих в областях тавровых соединений поперечных волноломов и боковых стенок цистерны пожарных автомобилей, проведены расчеты по оптимизации с учетом изменения высоты H расположения верхнего горизонтального ребра жесткости на ее боковых стенках от дна резервуара (рисунок 1). На рисунке 5 представлены результаты проектных расчетов.

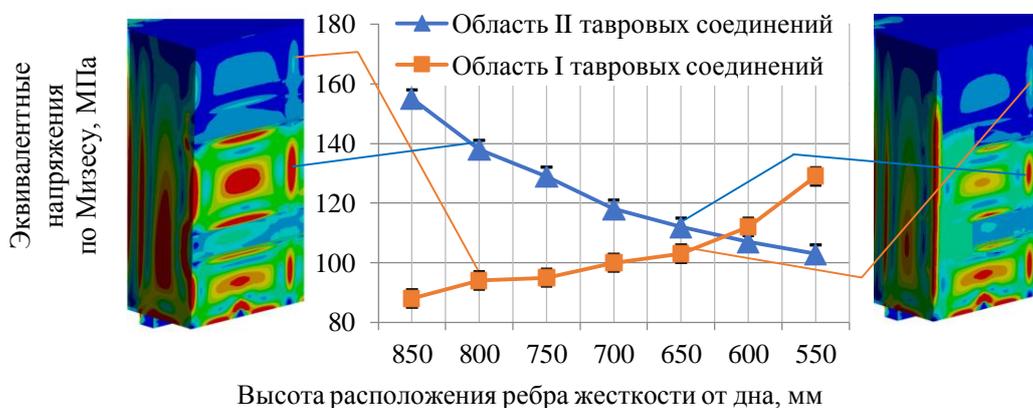


Рис. 5. Зависимости эквивалентных напряжений, возникающих в областях тавровых соединений резервуара цистерны объемом 8 м^3 пожарных автомобилей на шасси МАЗ-6317, от высоты расположения верхнего горизонтального ребра жесткости и вид распределения полей напряжений в характерных точках на фрагменте «А» цистерны

В результате исследований установлено, что снижение высоты верхнего ребра жесткости со стандартной (серийное исполнение) $H = 800 \text{ мм}$ до $H = 650 \text{ мм}$ в модернизированной цистерне, обеспечивает снижение на 24–26 МПа уровня напряжений, возникающих в областях II тавровых соединений поперечных волноломов и боковых стенок. При этом в областях I данных соединений рост напряжений составляет 9–11 МПа. Дальнейшее снижение высоты расположения верхнего ребра жесткости способствует

критическому росту напряжений в областях I тавровых соединений поперечных волноломов и боковых стенок (рисунок 5).

Заключение. В работе представлены результаты применения новой расчетной методики, позволяющей проектировать элементы и узлы конструкций резервуаров цистерн пожарных автомобилей. Отличительной особенностью разработанной методики является учет эксплуатационных нагрузок, характеризующих режимы движения пожарных автомобилей к месту ликвидации чрезвычайных ситуаций. На основании результатов исследований получены новые зависимости, связывающие уровень напряжений, возникающих в областях угловых соединений резервуаров цистерн *объемом* 8 м³, с режимами движения пожарных автомобилей МАЗ-6317, а также геометрическими параметрами элементов, повышающих прочность их конструкций. Проведенный комплекс расчетов позволил обосновать выбор рациональных геометрических параметров горизонтальных ребер жесткости на стенках резервуаров цистерн прямоугольного сечения пожарных автомобилей, применение которых обеспечивает повышенную эксплуатационную надежность данных конструкций.

Комплексная практическая реализация разработанных научно-обоснованных рекомендаций по проектированию осуществлена в модернизированной цистерне объемом 8 м³ пожарных автомобилей на шасси МАЗ-6317. Полученные результаты обеспечили снижение уровня напряжений на 32–34 МПа и 24–26 МПа, возникающих в областях угловых соединений стенок и тавровых соединений поперечных волноломов и боковых стенок соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анализ обстановки с чрезвычайными ситуациями в Республике Беларусь в 2016 году / А. В. Жовна [и др.] // Чрезвычайные ситуации: предупреждение и ликвидация. – 2017. – № 1 (41). – С. 24–30.
2. Высоцкий, М. С. Динамика автомобильных и железнодорожных цистерн / М. С. Высоцкий, Ю. М. Плескачевский, А. О. Шимановский. – Минск : Белавтотракторостроение, 2006. – 320 с.
3. Ковтун, В. А. Компьютерное моделирование и исследование напряженно-деформированного состояния конструкций цистерн пожарных автомобилей / В. А. Ковтун, С. Г. Короткевич, В. А. Жаранов // Вестник Ун-та. граждан. защиты МЧС Беларуси. – 2018. – Т. 2, № 1. – С. 81–90.
4. Автомобильные дороги = Аўтамабільныя дарогі : СН 3.03.04–2019. – Введ. 26.12.19 (с отменой ТКП 45–3.03–19–2006 (02250)). – Минск : Минстройархитектуры, 2020. – 55 с.
5. Короткевич, С. Г. Экспериментально-теоретическое исследование напряженно-деформированного состояния цистерн пожарных автомобилей в процессе их эксплуатации / С. Г. Короткевич, В. А. Ковтун // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 112–118.
6. Ковтун, В. А. Исследование напряженного состояния цистерн водоизмещением восемь тонн при движении пожарных автомобилей к месту ликвидации чрезвычайных ситуаций / В. А. Ковтун, С. Г. Короткевич // Вестник ГГТУ имени П. О. Сухого. – 2022. – № 1. – С. 39–47.
7. Инженерный анализ в ANSYS Workbench : учеб. пособие / В. А. Бруйка [и др.]. – Самара : Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 271 с.

Поступила: 18.03.2023

ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ

Лачугина Е. А.

Белорусский государственный университет транспорта

Введение. За последние годы слоистые элементы конструкций получили широкое применение в народном хозяйстве, включая строительство и машиностроение. Это обуславливает требование по созданию расчетных механико-математических моделей, учитывающих как квазистатический, так и динамический характер нагрузок. В связи с этим исследование собственных частот колебаний круговой пятислойной пластины является актуальным.

В монографии [1] описываются подходы к построению математических моделей статического и динамического деформирования многослойных элементов конструкций в различных физико-механических полях. В ней также изложены методы решения соответствующих краевых и начально-краевых задач. В работах [2–5] рассмотрены результаты исследования динамики слоистых оболочек. В источниках [6–10] содержатся исследования колебаний неоднородных балок и трехслойных упругих и вязкоупругих пластин. Публикации [11; 12] посвящены деформированию трехслойных круговых пластин со сжимаемым наполнителем. В статьях [13–16] исследовано деформирование трехслойных пластин, связанных с упругим грунтовым основанием. Неосесимметричное деформирование трехслойных пластин в своей плоскости рассмотрено в публикациях [17; 18]. Изгиб трехслойных пластин в тепловом потоке исследован в статье [19].

В работе [20] содержится вывод уравнений движения круговой пятислойной симметричной по толщине пластины. Здесь рассмотрены собственные колебания подобной пластины, получены формулы для вычисления частот собственных колебаний и проведен их численный анализ в зависимости от толщины внутреннего несущего слоя.

1. Постановка начально-краевой задачи. Рассматривается симметричная по толщине пятислойная круговая пластина. Постановка краевой задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат r, φ, z , которая связана со срединной плоскостью центрального несущего слоя (1). В тонких внешних (2, 4) и внутреннем (1) несущих слоях (рисунок 1) справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности слоев. В относительно толстых легких заполнителях (3, 5) принимается гипотеза Тимошенко о несжимаемости и прямолинейности нормали, которая поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r, t)$ – относительный сдвиг в наполнителе.

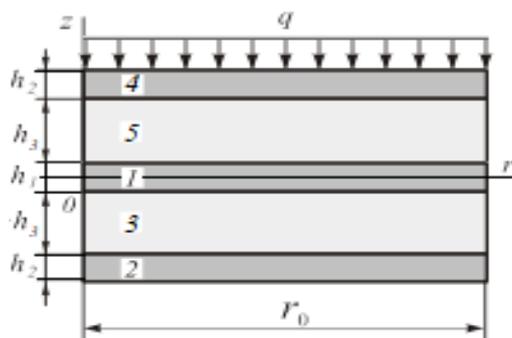


Рис. 1. Расчетная схема пятислойной пластины

Внешняя вертикальная распределенная нагрузка осесимметрична и не зависит от координаты φ : $q = q(r, t)$. На контуре пластины ($r = r_0$) предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi(r_0, t) = 0$). Через $w(r, t)$ обозначен прогиб пластины, h_1, h_2 – толщина *внутреннего и внешних несущих слоев*, h_3 – толщина заполнителей. Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и выражаются через две искомые функции: $w(r, t), \psi(r, t)$:

– в несущих слоях $k = 1, 2, 4$

$$\begin{aligned} u_r^{(4)} &= -zw_{,r} + h_3\psi, & (0,5h_1 + h_3 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3 + h_2), \\ u_r^{(1)} &= -zw_{,r}, & (-0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1), \\ u_r^{(2)} &= -zw_{,r} - h_3\psi, & (-0,5h_1 - h_3 \leq z \leq -0,5h_1 - h_3), \end{aligned}$$

– в заполнителях $k = 3, 5$

$$\begin{aligned} u_r^{(5)} &= -zw_{,r} + (z - 0,5h_1\psi), & (0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3), \\ u_r^{(3)} &= -zw_{,r} + (z + 0,5h_1\psi), & (-0,5h_1 - h_3 \leq z \leq -0,5h_1), \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Уравнения движения рассматриваемой пластины получены в [20] при помощи вариационного принципа Лагранжа и принципа Даламбера:

$$\begin{aligned} L_2(a_4\psi - a_5w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) - M_0\ddot{w} &= -q, \end{aligned} \quad (2)$$

где $M_0\ddot{w}$ – поперечные инерционные силы; $M_0 = (\rho_1h_1 + \rho_2h_2 + \rho_3h_3 + \rho_4h_4 + \rho_5h_5)r_0^2$; a_i – коэффициенты;

$$\begin{aligned} a_4 &= \left[2K_2^+h_2h_3^2 + 2K_3^+\frac{h_3^3}{3} \right], \quad a_5 = \left[K_2^+h_2h_3(h_1 + 2h_3 + h_2) + 2K_3^+h_3\left(\frac{h_1h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3}\right) \right], \\ a_6 &= \left[2K_2^+h_2\left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1h_2}{2} + h_1h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2h_3 + h_3^2\right) + K_1^+\frac{h_1^3}{12} + 2K_3^+h_3\left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3}\right) \right], \\ K_k^+ &= K_k + \frac{4}{3}G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k; \end{aligned}$$

G_k, K_k – модули сдвига и объемного деформирования; L_2, L_3 – операторы;

$$\begin{aligned} L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

Начальные условия движения принимаются однородными. В качестве граничных принимаются кинематические условия заделки контура пластины:

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0, \text{ при } r = r_0. \quad (3)$$

2. Собственные колебания. Соответствующая система дифференциальных уравнений следует из (2) при $q = 0$:

$$\begin{aligned} L_2(a_4\psi - a_5w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) - M_0\ddot{w} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

После некоторых элементарных преобразований система приводится к виду

$$\begin{aligned} \psi &= b_1w_{,r} + C_1r + C_2/r, \\ L_3(w_{,r}) + M^4\ddot{w} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$b_1 = \frac{a_5}{a_4}, \quad M^4 = M_0D, \quad D = \frac{a_4}{a_4a_6 - a_5^2}.$$

В связи с ограниченностью искомого решения в начале координат для сплошных пластин необходимо положить $C_2 = 0$.

Искомый прогиб принимается в виде

$$w(r, t) = v(r)(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)), \quad (6)$$

где $v(r)$ – искомая координатная функция;

ω – частота собственных колебаний пластины;

A и B – константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

После подстановки выражения (6) в последнее уравнение системы (5) получим бибесселево уравнение для определения координатной функции $v(r)$:

$$L_3(v_{,r}) - \beta^4v = 0. \quad (7)$$

В развернутом виде

$$v_{,rrrr} + \frac{2}{r}v_{,rrr} - \frac{1}{r^2}v_{,rr} + \frac{1}{r^3}v_{,r} - \beta^4v = 0,$$

где

$$\beta^4 = M^4\omega^2.$$

Решение уравнения (7) можно представить в виде

$$v(\beta r) = C_3J_0(\beta r) + C_4I_0(\beta r) + C_5Y_0(\beta r) + C_6K_0(\beta r), \quad (8)$$

где J_0, Y_0 – функции Бесселя нулевого порядка (нижний индекс) первого и второго рода (функция Неймана), соответственно; I_0, K_0 – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевых порядков; C_3, \dots, C_6 – константы интегрирования.

Не останавливаясь на описании указанных функций, отметим, что $Y_0(\beta r)$ и $K_0(\beta r)$ имеют особенность типа логарифма в начале координат, то есть в центре пластины. Поэтому необходимо положить $C_5 = C_6 = 0$.

В результате, решение системы (5) принимает вид

$$\begin{aligned} \psi(r, t) &= b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r, \\ w(r, t) &= v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \end{aligned} \quad (9)$$

где A, B – константы интегрирования, следующие из начальных условий движения; $v(r)$ – координатная функция

$$v(r) = C_3 J_0(\beta r) + C_4 I_0(\beta r).$$

Если контур пластины зашпелен, то на нем должны выполняться условия (3). Подставив в два последних из них решение (9), получим однородную систему алгебраических уравнений для определения констант интегрирования C_3, C_4 :

$$\begin{aligned} C_3 J_0(\beta r_0) + C_4 I_0(\beta r_0) &= 0, \\ -C_3 J_1(\beta r_0) + C_4 I_1(\beta r_0) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где J_1, I_1 – функции Бесселя первого порядка.

Система (10) имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю ее детерминанта. Следовательно,

$$I_1(\beta r_0) J_0(\beta r_0) + I_0(\beta r_0) J_1(\beta r_0) = 0. \quad (11)$$

Трансцендентное уравнение (11) служит для вычисления собственных чисел β_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) уравнения (7).

После вычисления β_n частоты собственных колебаний следуют из уравнения (8):

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D},$$

где параметр M^4 определяется формулой (6).

В таблице 1 приведены собственные числа β_n и собственные частоты ω_n для пяти-слойной пластины единичного радиуса ($r_0 = 1$), составленного из слоев Д16Т–фторопласт-4–Д16Т–фторопласт-4–Д16Т. Толщины несущих слоев и заполнителей, отнесенные к радиусу пластины, следующие: $h_2 = h_4 = h_1 = 0,02, h_3 = h_5 = 0,2$.

Таблица 1 – Собственные числа и собственные частоты пятислойной пластины

Номер n	β_n/ω_n	Номер n	β_n/ω_n
0	3,196 / $0,278 \cdot 10^5$	8	28,279 / $1704,949 \cdot 10^5$
1	6,306 / $4,216 \cdot 10^5$	9	31,378 / $2692,786 \cdot 10^5$
2	9,439 / $21,162 \cdot 10^5$	10	34,561 / $3803,649 \cdot 10^5$
3	12,577 / $66,706 \cdot 10^5$	11	37,702 / $5386,576 \cdot 10^5$
4	15,716 / $162,638 \cdot 10^5$	12	40,844 / $7419,392 \cdot 10^5$
5	18,857 / $337,090 \cdot 10^5$	13	43,985 / $9978,693 \cdot 10^5$
6	21,997 / $624,179 \cdot 10^5$	14	47,126 / $13149,149 \cdot 10^5$
7	25,138 / $1064,580 \cdot 10^5$		

3. Численные результаты получены для пятислойной пластины единичного радиуса, составленной из слоев Д16-Т-фторопласт-Д16-Т-фторопласт-Д16-Т. Толщины заполнителей приняты $h_3 = h_5 = 0,2$ м.

На рисунок 2 приведены графики, иллюстрирующие зависимость собственной частоты ω_0 пластины от толщины внутреннего несущего слоя h_1 при различной толщине внешних несущих слоев: 1 – $h_2 = h_4 = 0,02$ м; 2 – $h_2 = h_4 = 0,04$ м; 3 – $h_2 = h_4 = 0,06$ м. С увеличением толщины несущих слоев частота основного тона ω_0 возрастает нелинейно.

Рисунок 3 содержит графики изменения частоты основного тона ω_0 от толщины слоя h_1 при постоянной суммарной толщине несущих слоев: 1 – $h_1 + h_2 + h_4 = 0,03$; 2 – $h_1 + h_2 + h_4 = 0,06$; 3 – $h_1 + h_2 + h_4 = 0,09$.

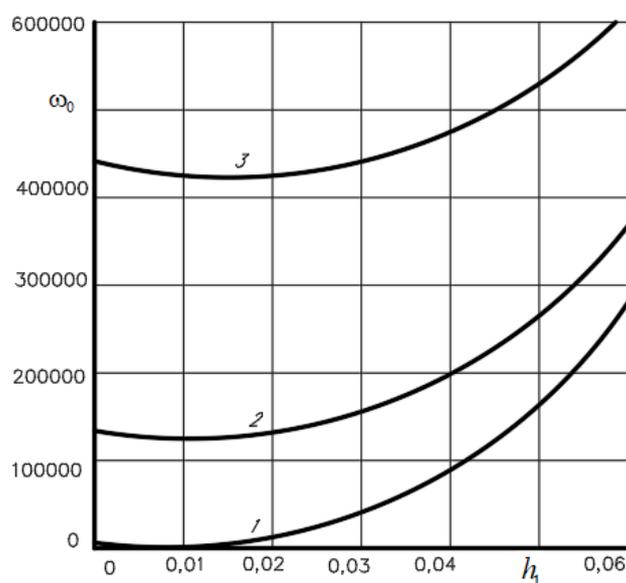


Рис. 2. Зависимость собственной частоты ω_0 от толщины внутреннего несущего слоя h_1

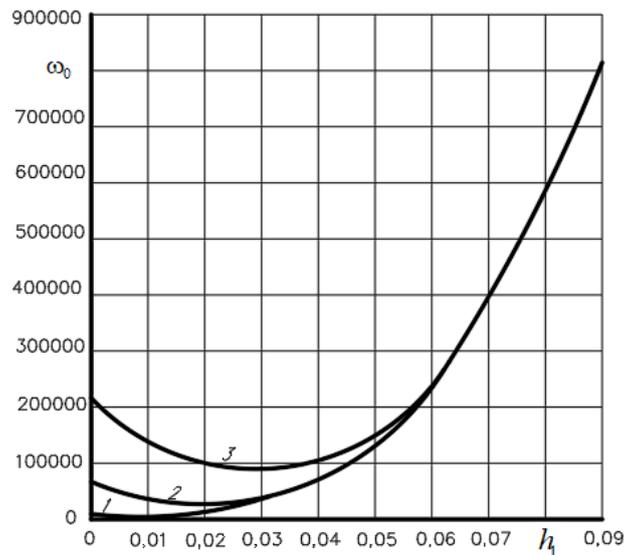


Рис. 3. Собственная частота ω_0 при постоянной суммарной толщине всех несущих слоев

Выводы. Предложенная механико-математическая модель позволяет исследовать собственные частоты колебаний пятислойной круговой пластины, симметричной по толщине.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция».

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
2. Могилевич Л. И. Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым наполнителем / Л. И. Могилевич, В. С. Попов, Э. И. Старовойтов // Наука и техника транспорта. – 2006. – № 2. – С. 56–63.
3. Старовойтов Э. И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.
4. Tarlakovskii, D. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.
5. Старовойтов Э. И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.
6. Fedotenkov, G. V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2019. – Vol.40, № 4. – P. 439–447.
7. Vakhneev, S. Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol. 18, no. 4. – P. 699–704.

8. Pronina, P. F. Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects / P. F. Pronina, O. V. Tushavina, E. I. Starovoitov // *Periódico Tchê Química*. – 2020. – Vol. 17, no 35. – P. 753–764.
9. Леоненко Д. В. Собственные колебания трехслойного стержня на упругом основании / Д. В. Леоненко, Э. И. Старовойтов // *Прикладная механика*. – 2016. – Т. 52. – № 4. – С. 37–46.
10. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, А. В. Яровая // *Проблемы прочности*. – 2002. – Т. 34, № 5. – С. 70–79.
11. Захарчук Ю. В. Влияние сжимаемости заполнителя на перемещения в трехслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // *Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках*. – 2018. – № 2. – С. 14–27.
12. Захарчук, Ю. В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2017. – № 10 (8). – С. 55–66.
13. Козел А. Г. Влияние сдвиговой жесткости основания на напряженное состояние сэндвич пластины / А. Г. Козел // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–34.
14. Козел А. Г. Влияние сдвиговой жесткости основания на напряженное состояние сэндвич пластины / А. Г. Козел // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–34.
15. Трацевская Е. Ю. Закономерности развития суффозионно-просадочных явлений на территории Белоруссии / Е. Ю. Трацевская, А. Н. Галкин // *Инженерная геология массивов лессовых пород: труды международной научной конференции; под ред. В. Т. Трофимова, В. А. Королева*. – М., 2004. – С. 108–109.
16. Трацевская Е. Ю. Особенности освоения техногенных грунтов г. Гомеля в современных условиях / Е. Ю. Трацевская, А. Н. Галкин // *Многообразие грунтов: морфология, причины, следствия. Труды Международной научной конференции; под ред. В. Т. Трофимова и В. А. Королева*. – М., 2003. – С. 123.
17. Нестерович А. В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при несимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации*. – 2018. – № 11 (9). – С. 195–203.
18. Нестерович А. В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации*. – 2019. – № 12 (11). – С. 152–157.
19. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field / É. I. Starovoitov [et al.] // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2015. – Vol. 88, No. 4. – P. 1023–1029.
20. Лачугина Е. А. Задача о свободных колебаниях пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // *Проблемы безопасности на транспорте: матер. XII Междунар. научн.-практ. конф.: в 2 ч., Гомель, 24–25 ноябр. 2022 г. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп. ; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко*. – Гомель : БелГУТ, 2022. – Ч. 2. – С. 202–204.

Поступила: 19.05.2023

ИЗГИБ КРУГОВОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Салицкий В. С.

Белорусский государственный университет транспорта

Рассмотрен изгиб круговой симметричной по толщине пятислойной пластины под действием равномерно распределенной нагрузки. Принимается, что для тонких несущих слоев выполняются кинематические гипотезы Кирхгофа. Сравнительно толстый наполнитель деформируется в соответствии с гипотезой Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Уравнения равновесия получены с помощью вариационного метода Лагранжа. Учтена работа тангенциальных напряжений в наполнителе. Получено аналитическое решение краевой задачи и проведена его численная апробация.

Введение. В последнее время значительно возрос спрос на использование слоистых тонкостенных элементов конструкций в авиа-, ракето-, машиностроении и строительстве. Это обуславливает необходимость разработки математических моделей и методов их расчета на различные виды и типы нагрузок.

Методы расчета и постановки краевых задач для расчета слоистых элементов конструкций приведены в монографиях [1–4]. В статьях [5–7] рассмотрены задачи динамики слоистых оболочек. В работах [8–11] содержатся результаты исследования колебаний неоднородных балок и круговых трехслойных пластин. Публикации [12; 13] посвящены деформированию трехслойных круговых пластин со сжимаемым наполнителем, или связанных с упругим основанием Пастернака [14; 15]. Неосесимметричное растяжение-сжатие трехслойных пластин рассмотрено в [16; 17]. Изгиб трехслойных пластин и стержней в тепловом потоках исследован в статьях [18; 19]. Постановка краевой задачи о динамическом деформировании пятислойной круговой пластины приведена в [20]. Уравнения равновесия круговой пятислойной пластины в усилиях получены в [21]. Здесь рассмотрен изгиб защемленной по контуру упругой симметричной по толщине круговой пятислойной пластины с жесткими наполнителями.

1. Постановка и решение задачи.

Рассматривается симметричная по толщине пятислойная круговая пластина (рисунк 1). Постановка задачи и ее решение проведены в цилиндрической системе координат, которая связана со срединной плоскостью центрального несущего слоя. В тонких внутреннем и внешних несущих слоях (1, 2, 4) справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности слоев. В жестких несжимаемых по толщине наполнителях (3, 5), воспринимающих нагрузку в тангенциальном направлении, нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины и поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$.

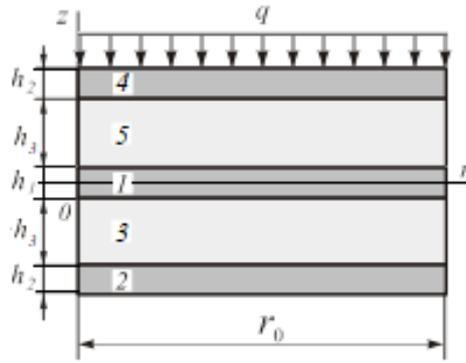


Рис. 1. Расчетная схема

На внешний слой пластины действует осесимметричная равномерно распределенная поперечная нагрузка q . На контуре пластины ($r = r_0$) предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi(r_0) = 0$). Через $w(r)$ обозначен прогиб пластины, h_k – толщина k -го слоя. Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и выражаются через две искомые функции: $w(r)$ – прогиб пластины и $\psi(r)$ – относительный сдвиг в заполнителях. В результате

– в несущих слоях 1, 2, 4

$$\begin{aligned} u_r^{(4)} &= -zw_{,r} + h_3\psi, & 0,5h_1 + h_3 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3 + h_2, \\ u_r^{(1)} &= -zw_{,r}, & -0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1, \\ u_r^{(2)} &= -zw_{,r} - h_3\psi, & -0,5h_1 - h_3 - h_2 \leq z \leq -0,5h_1 - h_3, \end{aligned}$$

– в заполнителях – 3, 5

$$\begin{aligned} u_r^{(5)} &= -zw_{,r} + (z - 0,5h_1)\psi, & 0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3, \\ u_r^{(3)} &= -zw_{,r} + (z + 0,5h_1)\psi, & -0,5h_1 - h_3 \leq z \leq -0,5h_1. \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из перемещений (1) и соотношений Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(4)} &= -zw_{,rr} + h_3\psi_{,r}; & \varepsilon_\varphi^{(4)} &= \frac{1}{r}(-zw_{,r} + h_3\psi); & \varepsilon_{rz}^{(4)} &= 0; \\ \varepsilon_r^{(5)} &= -zw_{,rr} + (z - 0,5h_1)\psi_{,r}; & \varepsilon_\varphi^{(5)} &= \frac{1}{r}(-zw_{,r} + (z - 0,5h_1)\psi); & \varepsilon_{rz}^{(5)} &= \frac{1}{2}\psi; \\ \varepsilon_r^{(1)} &= -zw_{,rr}; & \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r}(-zw_{,r}); & \varepsilon_{rz}^{(1)} &= 0; \\ \varepsilon_r^{(3)} &= -zw_{,rr} + (z + 0,5h_1)\psi_{,r}; & \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{r}(-zw_{,r} + (z + 0,5h_1)\psi); & \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2}\psi, \\ \varepsilon_r^{(2)} &= -zw_{,rr} - h_3\psi_{,r}; & \varepsilon_\varphi^{(2)} &= \frac{1}{r}(-zw_{,r} - h_3\psi), & \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука

$$s_{\alpha}^{(k)} = 2G_k \vartheta_{\alpha}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_{rz}^{(3)}, \quad (3)$$

где $s_{\alpha}^{(k)}, \vartheta_{\alpha}^{(k)}$ – девиаторы, $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $s_{rz}^{(3)}, \vartheta_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и деформация в заполнителе; G_k, K_k – модули сдвига и объемной деформации материала k -го слоя, причем $G_1 = G_2, K_1 = K_2$.

С помощью компонентов тензора напряжений $\sigma_{\alpha}^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi; k = 1, 2, 3, 4, 5$), вводятся обобщенные внутренние усилия и моменты:

$$\begin{aligned} T_{\alpha} =, M_{\alpha} &= \sum_{k=1}^5 M_{\alpha}^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_{\alpha}^{(k)} z \, dz, \\ H_{\alpha} &= (M_{\alpha}^{(3)} + M_{\alpha}^{(5)}) + h_3 (T_{\alpha}^{(4)} - T_{\alpha}^{(2)}) + 0,5h_1 (T_{\alpha}^{(3)} - T_{\alpha}^{(5)}), \\ Q &= \int_{0,5h_1}^{0,5h_1+h_3} \sigma_{rz}^{(3)} \, dz + \int_{-0,5h_1}^{-0,5h_1-h_3} \sigma_{rz}^{(5)} \, dz. \end{aligned} \quad (4)$$

Считается, что к контуру пластины приложены заданные силы и моменты T_r^0, H_r^0, M_r^0, Q^0 . Вариация работы внешней поверхности нагрузки будет

$$\delta A_1 = \iint_S q \delta w r \, dr \, d\varphi. \quad (5)$$

Виртуальная работа контурных усилий

$$\delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \psi + M_r^0 \delta w_{,r} + Q^0 \delta w) \, d\varphi. \quad (6)$$

Вариация работы сил упругости

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^5 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_{\varphi}^{(k)} \delta \varepsilon_{\varphi}^{(k)}) \, dz + \int_{0,5h_1}^{0,5h_1+h_3} \sigma_{rz}^{(3)} \delta \psi \, dz + \int_{-0,5h_1}^{-0,5h_1-h_3} \sigma_{rz}^{(5)} \delta \psi \, dz + \right] r \, dr \, d\varphi. \quad (7)$$

Проведя необходимые преобразования и приравнявая виртуальную работу внутренних усилий (7) к работе внешних и контурных нагрузок (5), (6) получим систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях [21]:

$$H_{r,r} + \frac{1}{r} (H_r - H_{\varphi}) - Q = 0,$$

$$M_{r,rr} + \frac{1}{r} (2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q. \quad (8)$$

На контуре пластины $r = r_0$ должны выполняться силовые граничные условия

$$H_r = H_r^0; M_r = M_r^0; M_{r,rr} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0. \quad (9)$$

Используя закон Гука (3), деформации (2) и соотношения (4), получим выражение обобщенных усилий через две неизвестные функции: $w(r, t)$, $\psi(r, t)$. После подстановки полученных выражений в уравнения (8) имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия для определения перемещений $w(r)$ и $\psi(r)$:

$$\begin{aligned} L_2(a_4\psi - a_5w_{,r}) - 2h_3G_3\psi &= 0, \\ L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) &= -q, \end{aligned} \quad (10)$$

где, коэффициенты a_i вычисляются через механические и геометрические характеристики слоев

$$\begin{aligned} a_4 &= \left[2K_2^+ h_2 h_3^2 + 2K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right], \quad a_5 = \left[K_2^+ h_2 h_3 (h_1 + 2h_3 + h_2) + 2K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right], \\ a_6 &= \left[2K_2^+ h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right], \\ a_7 &= \left[2K_2^- h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^- \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^- h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right]; \end{aligned}$$

L_2, L_3 – дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

На контуре пластины должны выполняться силовые (9) или кинематические граничные условия. В дальнейшем принимаем, что контур пластины шарнирно оперт, т. е. при $r = r_0$ должны выполняться условия

$$\psi = 0, \quad w = w_{,r} = 0. \quad (11)$$

Решение краевой задачи (10, 11) получено в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{a_5 q}{4a_6 h_3 G_3} \left(\frac{I_1(\beta r)}{I_1(\beta r_0)} r_0 - r \right), \\ w &= \frac{a_5^2 q}{4a_6^2 h_3 G_3} \left(r_0 \frac{I_0(\beta r) - I_0(\beta r_0)}{\beta I_1(\beta r_0)} - \frac{r^2 - r_0^2}{2} \right) + \frac{q}{64a_6} (r^2 - r_0^2)^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где I_0, I_1 – модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков.

2 Численные результаты. Численно исследован максимальный прогиб (12) в заземленной по контуру пятислойной пластине, несущие слои которой набраны из дюралюминия, заполнители – фторопласт-4. Упругие характеристики этих материалов приведены в [1]. Величина нагрузки – $q_0 = 10$ МПа, Геометрические параметры пластины и радиальная координата отнесены к ее радиусу r_0 .

На рисунке 2 показана зависимость максимального прогиба от толщины внутреннего несущего слоя при различных значениях суммарной толщины несущих слоев $H = h_1 + h_2 + h_4$: 1 $H = 0,03$; 2 – $H = 0,06$; 3 – $H = 0,09$. толщина заполнителей постоянна $h_3 = h_4 = 0,2$. Увеличение толщины центрального несущего слоя за счет внешних слоев приводит сначала к некоторому росту прогиба, т. е. увеличению жесткости конструкции. Затем жесткость и, соответственно прогиб уменьшаются

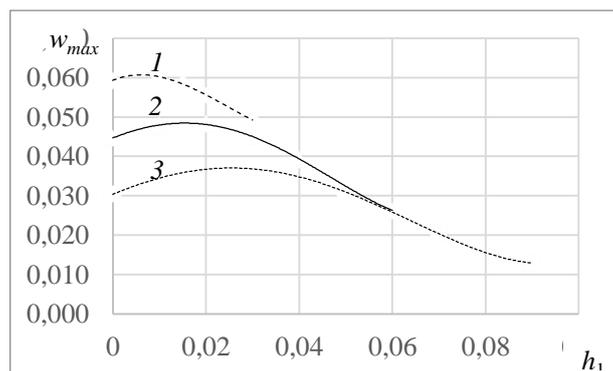


Рис. 2. Максимальный прогиб в центре пятислойной пластины

Выводы. Механико-математическая модель изгиба пятислойной упругой пластины и предложенное аналитическое решение краевой задачи позволяют исследовать ее перемещения не только при постоянной, но и при любой осесимметричной нагрузке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
2. Aghalovyan L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan – Singapore–London : World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
3. Журавков, М. А. Математические модели механики твердого тела // М. А. Журавков Э. И. Старовойтов – Минск : БГУ, 2021 – 535 с.
4. Старовойтов Э. И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.
5. Pronina, P. F. Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects / P. F. Pronina, O. V. Tushavina, E. I. Starovoitov // Periódico Tchê Química. – 2020. – Vol. 17, No. 35. – P. 753–764.
6. Tarlakovskii D. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, No. 2. – P. 145–152.
7. Kuznetsova E. L. Methods of diagnostic of pipe mechanical damage using functional analysis, neural networks and method of finite elements / E. L. Kuznetsova, G. V. Fedotenkov, E. I. Starovoitov // INCAS Bulletin. – Volume 12, Special Issue. – 2020. – P. 79–90.

8. Fedotenkov G. V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2019. – Vol. 40 № 4. – P. 439–447.
9. Vakhneev, S. Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol. 18, No 4. – P. 699–704.
10. Starovoitov, É. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, No. 5. – P. 474–481.
11. Старовойтов Э. И. Термоупругие свободные колебания трехслойной круговой пластины / Э. И. Старовойтов М. А. Журавков А. В. Яровая // Теоретическая и прикладная механика. – Мн. : БНТУ. – 2022. – Вып. 36. – С. 15–20.
12. Захарчук, Ю. В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – № 10 (10). – С. 55–66.
13. Захарчук Ю. В. Влияние сжимаемости наполнителя на перемещения в трехслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2. – С. 14–27.
14. Козел А. Г. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – № 11 (11). – С. 127–133.
15. Козел А. Г. Влияние сдвиговой жесткости основания на напряженное состояние сэндвич пластины / А. Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018 – № 6 (332). – С. 25–34.
16. Нестерович А. В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при несимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – № 11 (11). – С. 195–203.
17. Нестерович А. В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – № 12 (12). – С. 152–157.
18. Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле / Э. И. Старовойтов [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 4. – С. 987–993.
19. Старовойтов, Э. И. Изгиб с растяжением трехслойного термоупругого стержня / Э. И. Старовойтов, А. В. Попченко, Д. В. Тарлаковский // Теоретическая и прикладная механика. – Мн. : БНТУ, 2013. – Вып. 28. – С. 23–26.
20. Лачугина Е. А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими наполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – № 15 (15). – С. 212–219.
21. Салицкий В. С. Уравнения равновесия круговой пятислойной пластины в усилиях / В. С. Салицкий // Мат. XXVII Междунар. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. – 2021. – Т. 1. – С. 199–201.

Поступила: 25.05.2023

О ПРОЛЕГОМЕНАХ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ МАШИН И ПРИБОРОВ ВОЛЬФРИДА НИКОЛАЕВИЧА ТРЕЙЕРА

¹Т. Н. Микулик, ²В. Л. Николаенко, ³Г. В. Сечко

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²Белорусская государственная академия авиации, Минск

³ООО «Стримцентр», Минск

Введение

Важность проблемы обеспечения и повышения надежности машин и приборов не вызывает сомнений. Решением этой проблемы инженеры занялись с момента появления первой машины или прибора. С течением времени наработки в этой области распространились на радиоэлектронные приборы и аппараты. Прогнозирование надежности и долговечности машин и их деталей чаще всего проводилось с помощью усталостных испытаний деталей на долговечность. Исследования в этой области выполняли специалисты-механики, прогнозирование же надежности радио- и микроэлектронной аппаратуры с помощью ускоренных форсированных испытаний на надежность развивали специалисты-радиоэлектроники. Ниже рассмотрены наиболее интересные достижения как радиоэлектроников, так и механиков.

Основная часть

1. Прогнозирование надежности радио- и микроэлектроники. Особый прогресс по обеспечению и прогнозированию надежности этих объектов был достигнут в 1960-х годах в части надежности микроэлектронных приборов [1–4], что в будущем помогло создать высоконадежные микроэлектронные чипы, число компонентов которых во много раз *превышает* число деталей в машине. Этот прогресс был достигнут за счет особого подхода к надежности, названного физикой отказов. В 1975 году в СССР был издан указатель зарубежной и советской литературы [5] по физике отказов.

Методы физики отказов полагают, что пересчет результатов ускоренных форсированных испытаний прибора или микроэлектронного элемента на нормальные условия эксплуатации осуществляется путем построения линий Аррениуса (рисунок).

При этом полагается, что время t_{\aleph} , прошедшее с начала эксплуатации элемента при некоторой абсолютной температуре T , до момента, при котором процент отказов равен некоторому заданному числу \aleph , обратно пропорционально скорости v физико-химического процесса, вызывающего отказ объекта. Таким образом, при некоторых постоянных B_{\aleph} , A_0 , E , G

$$t_{\aleph} = \frac{B_{\aleph}}{v}, \quad (1)$$

где

$$v = A_0 \exp\left(-\frac{E}{GT}\right). \quad (2)$$

Выражение (2) представляет собой зависимость скорости v химической реакции износа объекта от температуры T (в градусах Кельвина) и называется уравнением Аррениуса. В нем E – это введенное Сванте Аррениусом понятие энергии активации, а G – универсальная газовая постоянная (константа, численно равная работе расширения одного моля идеального газа в изобарном процессе при увеличении температуры на 1 К).

Энергия активации E – это эмпирически определяемый параметр, характеризующий показательную зависимость константы скорости реакции от температуры (выражается в джоулях на моль).

Логарифмируя (1) после подстановки в него (2), получим уравнение линии Аррениуса при некотором проценте отказов \aleph :

$$\ln t_{\aleph} = \ln \frac{B_{\aleph}}{A_0} + \frac{E}{G} \frac{1}{N}. \quad (3)$$

На рисунке показана линия Аррениуса, построенная для трех температур испытаний T_1 , T_2 и T_3 ($T_3 > T_2 > T_1$), по которой можно прогнозировать $m_{\text{нор}}$ – среднюю наработку до отказа при проценте отказов $\aleph = 50\%$ (медианную наработку, как ее принято именовать в американской литературе [1, 4]) объекта при нормальной температуре эксплуатации $T_{\text{нор}}$.

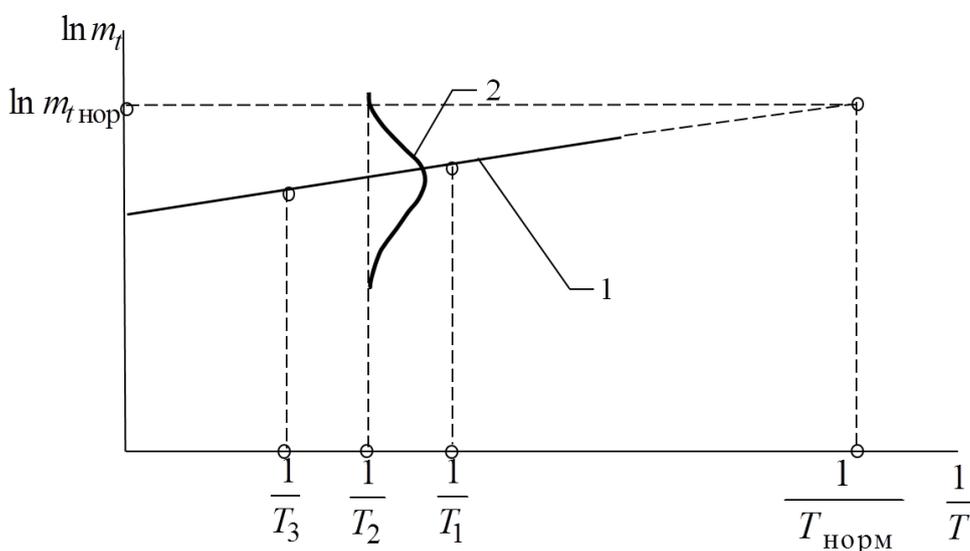


Рис. 1. Линия Аррениуса для медианной наработки

При этом на рисунке линия Аррениуса помечена цифрой 1, а плотность распределения наработки до отказа при температуре T_2 – цифрой 2. Для оценки с помощью линии Аррениуса характеристики m_t распределения времени работы объекта до отказа, соответствующей нормальным условиям эксплуатации, такие же характеристики для каждой из температур ускоренных испытаний отмечаются точками в координатах $\left(\ln t, \frac{1}{T} \right)$. Затем через полученные точки проводится прямая (линия Аррениуса) (3).

Далее эта линия продляется в область нормальных температур $T_{\text{нор}}$.

2. Прогнозирование надежности и долговечности машин и их деталей с помощью усталостных испытаний на долговечность. На наш взгляд, особый интерес в этой области представляют собой работы В. Н. Трейера, который еще в 1931 году [6] занялся проблемой оценки надежности и долговечности деталей машин в нормальных условиях эксплуатации с помощью ускоренных форсированных их испытаний, которые системно изложил в 1964 году в монографии [7]. Развитие своих идей, заложенных в [6], В. Н. Трейер продолжил в работах [7–14]. При этом проведенные им исследования общих причин и закономерностей развития отказов позволили ему создать строй-

ную теорию, которую сам В. Н. Трейер назвал кинетической теорией долговечности и надежности маши и приборов [12–14]. Большое внимание в этой теории В. Н. Трейер уделял аргументации всеобщности ее пролегомен [13], под которыми он понимал рассуждения, формулирующие исходные понятия и дающие предварительные сведения о теории.

Согласно этой теории долговечность (расчетный срок службы T_{cc}) деталей машин и приборов (ДМП) определяется формулой

$$T_{cc} = \tau_0 \left(1 + \frac{U_0 - \gamma X}{fkT} \right)^f, \quad (4)$$

где τ_0 – длительность сублимации;

U_0 – энергия сублимации (сублимация или возгонка – это переход вещества из твердого состояния в газообразное без пребывания в жидком состоянии);

γ – коэффициент приведения X к его энергетическому эквиваленту;

X – напряженность эксплуатационного (нагрузочного) воздействия; воздействия;

f – частота энергетических флуктуаций, порожденных активацией тепловых колебаний атомов материала ДМП;

k – постоянная Больцмана;

T – температура, К.

При этом выражение (4) вытекает из следующих температурно-временных соотношений:

$$fkTT_{cc} = \gamma XT_{cc} = \tau_0 U_0 = \text{const.} \quad (5)$$

Если c_1 – скорость реакции материала на воздействие X_1 при соответствующем значении температуры T_1 , выдерживаемая материалом лишь в течение времени $(T_{cc})_1$,

где $X_1 / (T_{cc})_1 = c_1$, то температурно-временные соотношения (5) приводят к общеизвестной формуле скорости протекания физико-химических реакций Сванте Аррениуса (у В. Н. Трейера – формуле химической кинетики о скоростях течения реакций) (2),

которая у В. Н. Трейера записана в виде $c_1 = c_0 \exp\left(-\frac{B}{T_1}\right)$, где c_0 и B – параметры,

характеризующие физическое состояние реальных ДМП при предельно высоких допустимых скоростях c_1 течения в них термоактивационных процессов, принимаемых за основу при оценке их долговечности [12] (в [14] – работоспособности).

В [14] была сделана попытка применить идеи В. Н. Трейера к изделиям радиоэлектроники – конденсаторам. Для этого определялось значение такой величины предельно форсированной нагрузки X_f , которая не выводила бы объект испытаний из течения физических явлений, протекающих в объекте в нормальных эксплуатационных условиях работы [14]. Другими словами, В. Н. Трейер добивался автономности (одинаковости) течения процесса износа детали в нормальных условиях и условиях испытаний. Значение X_f В. Н. Трейер определял [14] при помощи ступенчатого нагружения объекта испытания методом суммирования частей утраты его ресурса под разными по величине нагрузками. При этом считалось, что разные нагрузки связаны соотношением

$$X = X_f \left(\frac{t_{mf}}{t_m} \right)^{1/k_1},$$

где X и X_f – эксплуатационное расчетное и форсированное нагрузочные воздействия;
 t_m и t_{mf} – соответственно медианные сроки службы;
 k_1 – некоторый коэффициент, принимаемый ориентировочно с последующим его уточнением.

Согласно [14] допускаемая вероятность отказа испытуемого объекта $q(t)$

$$q(t) = \exp(-at^{-b}), \quad (6)$$

где a и b – параметры распределения (9), определяемые опытным путем. Тогда расчетный срок службы T_{cc} испытуемого объекта (детали).

$$T_{cc} = \frac{t_{mf}}{z} \left(\frac{X_t}{X} \right),$$

где

$$z = \left[\frac{\lg q(t)}{\lg 0,5} \right]^{1/b}.$$

Анализируя формулу (6), несложно заметить, что она является модификацией формулы общеизвестного экспоненциального распределения, в которой время t в отличие от общеизвестной формулы возводится в степень « $-b$ ».

Определяемая опытным путем предельно допустимая форсированная нагрузка X_f при ступенчатом нагружении рассчитывается как [14]

$$X_f = \left(\frac{\sum_1^n \frac{t_s X_s^k}{t_{mf}} \right)^{1/k_1},$$

где t_s и X_s – соответственно длительность выдержки на s -й ступени нагружения и нагрузка на этой ступени при общем числе ступеней n . Таким образом в [14] была показана возможность применения в радиоэлектронике идей В. Н. Трейера, разработанных им для механики.

Заключение

Анализ наиболее интересных работ в области прогнозирования надежности объектов радиоэлектроники (см. п. 1) и механики (см. п. 2) показывает общность примененного в них подхода – исследование кинетики отказов. Поскольку этот подход хорошо показал себя в радиоэлектронике, на наш взгляд, следует продолжить развитие идей В. Н. Трейера для обеспечения надежности деталей машин и приборов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nelson, W. Graphical analysis of accelerated life test data with a mix of failure modes / W. Nelson // IEEE Transactions on Reliability. – 1975. – Vol. R-24, No 4. – P. 230–237.
2. Сотсков, Б. С. Физика отказов и определение интенсивности отказов / Б. С. Сотсков // О надежности сложных технических систем: сб. науч. трудов. – М. : Советское Радио, 1966. – С. 289–306.
3. Гречин, Д. Н. Подход к оценке надежности интегральных схем на основе изучения физики отказов / Д. Н. Гречин // Технические средства управления и вопросы их надежности: сб. статей / Памяти чл.-кор. АН СССР Б. С. Сотскова / АН СССР; М-во приборостроения, средств автоматизации и систем управления СССР; Ин-т проблем управления (автоматики и телемеханики). – М. : Наука, 1974. – С. 171–178.
4. Vaccaro, J. Semiconductor reliability within the U. S. Department of defence / J. Vaccaro // Proceedings of the IEEE. – 1974. – Vol. 62, No. 2. – P. 162–184.
5. Физика отказов: (указ. рус. и иностр. литературы) / сост.: Е. О. Вильдт, В. В. Яшина, науч. ред. И. Е. Декабрун, Б. И. Филипович. – М. : АН СССР, Библиотека по естественным наукам, Библиотека технической литературы, 1975. – 69 с.
6. Трейер, В. Н. Шарико- и роликоподшипники в автомобиле и тракторе: руководство по монтажу и уходу для техников и механиков / В. Н. Трейер. – М.-Л. : Государственное издательство сельскохозяйственной и колхозно-кооперативной литературы, 1931. – 59 с.
7. Трейер, В. Н. Теория надежности и долговечности машин / В. Н. Трейер. – Минск : Наука и техника, 1964. – 136 с.
8. Трейер, В. Н. Основные вопросы теории долговечности машин / В. Н. Трейер. // Труды Таллинского политехнического института. – № 42. – Таллин : Эстон. гос. изд-во, 1953. – 31 с.
9. Трейер, В. Н. О методике исследования и расчета долговечности машин и их деталей / В. Н. Трейер. // Труды Таллинского политехнического института. – № 49. – Таллин: Эстон. гос. изд-во, 1953. – 31 с.
10. Трейер, В. Н. Расчеты деталей машин на долговечность / В. Н. Трейер. – М. : Машгиз, 1956. – 134 с.
11. Трейер, В. Н. Совмещенный расчет надежности и долговечности механизмов радиоэлектронной аппаратуры: пособие по вопросам надежности и долговечности, предусмотренным программами по курсам «Конструирование механизмов радиоэлектронной аппаратуры» и «Механика» / В. Н. Трейер. – Минск : МРТИ, 1970. – 49 с.
12. Трейер, В. Н. Кинетические основы теории надежности и долговечности машин и приборов / В. Н. Трейер // Доклады АН БССР. – 1974. – Т. 18. – № 4. – С. 333–336.
13. Трейер, В. Н. Аргументация всеобщности пролегомен кинетической теории надежности и долговечности машин и приборов / В. Н. Трейер // Доклады АН БССР. – 1976. – Т. 20. – № 2. – С. 130–133.
14. Трейер, В. Н. Ускоренное испытание керамических конденсаторов для совмещенной оценки их надежности и долговечности / В. Н. Трейер, В. С. Рыбов // Доклады АН БССР. – 1974. – Т. 18. – № 5. – С. 425–427.

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Можаровский Валентин Васильевич — доктор технических наук, профессор с 1994 года. Родился 4 апреля 1948 года на Житомирщине в семье инженера-землеустроителя. В 1966 году он окончил среднюю общеобразовательную школу № 1 в г. Остроге Ровенской области. Выбор своей профессии Валентин определил с детства, всегда любил точные науки, принимал участие в математических олимпиадах.



После окончания школы В. Можаровский поступил на механико-математический факультет Львовского госуниверситета им. И. Франко, который окончил в 1971 году. Уже в дипломной работе, написанной под руководством известного профессора Д.В. Грилицкого, он затрагивает проблему математического моделирования, контактных взаимодействий упругих тел. Это определило его научную судьбу. После окончания университета В. В. Можаровский был направлен на работу в АН БССР в Институт механики метало-полимерных систем в г. Гомеле, начав свою трудовую деятельность в должности стажера-исследователя.

Начиная с 1975 года, В. В. Можаровский совмещает научную деятельность с педагогической работой в Гомельском филиале БПИ, а затем, будучи доцентом на кафедрах «Математические проблемы управления» и «Вычислительная математика и программирование» Гомельского госуниверситета имени Ф. Скорины.

В 1976–1979 – учеба в аспирантуре Московского института электронного машиностроения (МИЭМ, Москва). Специальность – механика деформируемого твердого тела. Дальнейший профессиональный путь деятельности Валентина Васильевича проходил в ИММС НАН Беларуси, ГГУ им. Ф. Скорины, БелГУТ.

С 2003 – профессор кафедры вычислительной математики и программирования УО «Гомельский госуниверситет имени Франциска Скорины»; с 1998 – научный руководитель исследовательской лаборатории «Математическое моделирование сложных систем» гл. научный сотрудник ГГУ им. Ф. Скорины. Можаровский В. В. награжден дипломом, Почетными грамотами и нагрудным знаком «Отличник образования» Минобразования, почетной грамотой ВАК РБ.

Редакция Международного научно-технического журнала «Теоретическая и прикладная механика», членом которой является юбиляр, поздравляет Валентина Васильевича с прекрасной датой в его жизни, желает ему крепкого здоровья счастья, плодотворных успехов в научной и педагогической областях трудовой деятельности.

Редакция Международного научно-технического журнала «Теоретическая и прикладная механика».

РЕФЕРАТЫ

УДК 531/534:93/94

Плескачевский Ю. М. **Развитие механики в Беларуси: исторические факты и определяющие факторы** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 3–20. Изложены исторические факты и важнейшие этапы развития механики в Беларуси. Описаны исторические предпосылки и названы ученые, которых можно считать первыми белорусскими механиками. Хронологически корректно представлены факты, события и имена из истории институтов и университетов, профильных кафедр и лабораторий по механике. Названы развиваемые в Беларуси актуальные разделы механики, источники и формы финансирования исследований и разработок в области механики. Показана важная роль организации в стране конгрессов, конференций, периодических изданий и советов по защите диссертаций. Признанием вклада белорусских ученых-механиков в развитие механики является представительство в престижных зарубежных изданиях, советах, комитетах и обществах. – Ил. 2. Табл. -. Библиогр.: 17 назв.

УДК 539.374

Старовойтов Э. И., Журавков М. А., Яровая А. В. **Вынужденные колебания трехслойной круговой пластины в стационарном температурном поле факторы** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 21–29. Исследованы вынужденные колебания круговой трехслойной пластины, защемленной по контуру. Предполагается, что пластина находится в стационарном однородном температурном поле. Приведена система уравнений движения, описывающая ее поперечные колебания. Сформулированы граничные и начальные условия. Решение соответствующей системы дифференциальных уравнений в частных производных получено методом Фурье с разложением координатной функции в ряд по собственным функциям. Выписаны формулы для функций времени. Проведен численный параметрический анализ зависимости перемещений от температуры, площади нагрузки и материалов слоев. – Ил. 4. Табл. -. Библиогр.: 30 назв.

УДК 539.3+51-74, 539.214, 539.42, 622.23

Журавков М. А., Николайчик М. А., Климкович Н. М. **Оценка напряженно-деформированного состояния породного массива при ведении горных работ вблизи шахтного ствола** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 30–38. В статье представлены результаты трехмерного компьютерного моделирования процесса отработки широким очистным забоем породного массива в окрестности шахтного ствола. Построена геомеханическая модель, основанная на алгоритмах метода конечных элементов и позволяющая моделировать НДС породного массива от глубины ведения горных работ до дневной поверхности. Определены и верифицированы характеристики мульды оседания (максимальное оседание и ширина мульды) на дневной поверхности при разработке породного массива. Исследовано взаимное влияние проходки лавы и шахтного ствола. – Ил. 10. Табл. 3. Библиогр.: 8 назв.

УДК 539.3

Маркова М. В., Леоненко Д. В. **Колебания круговой трехслойной ступенчатой пластины, побуждаемые многократно повторной нагрузкой** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 39–49. Рассмотрены вынужденные колебания круговой трехслойной пластины со ступенчато-переменной толщиной внешних несущих слоев, побуждаемые многократно повторной внешней нагрузкой. Решение поставленной задачи основано на су-

перпозиции квазистатических и динамических составляющих функций перемещений, возникающих в пластине при колебаниях, и делении временной области внешнего воздействия на повторяющиеся циклы. Общее решение для пластины в целом составлено из частных решений для отдельных участков с помощью функции Хевисайда. Представлены численные результаты расчета. Проанализировано влияния времени приложения нагрузки и интервала между повторяющимися нагрузками на характер колебаний пластины. – Ил. 3. Табл. -. Библиогр.: 26 назв.

УДК539.3:629

Можаровский В. В., Кузьменков Д. С., Василевич Ю. В. **Применение методов математического программирования и конечных элементов при исследовании качения и зоны контакта автошины с основанием** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 50–54. Предложена математическая модель о качении двух ортотропных (из композитов) цилиндров с параллельными осями, прижатых друг к другу, и кратко изложена программная реализация расчета, то есть определения параметров качения – касательных усилий и областей сцепления и скольжения. Разработан алгоритм и создана программа по методу конечных элементов для определения зон контакта, напряжений и перемещений. – Ил. 4. Табл. -. Библиогр.: 7 назв.

УДК 539.3: 621.8

Можаровский В. В., Киргинцева С. В. **Влияние расположения волокон на параметры контакта «вал – втулка» для подшипников скольжения из композитов** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 55–60. Создана математическая модель расчета давления при контактном взаимодействии для системы «вал – втулка из волокнистого материала» на основе математической теории упругости анизотропного тела. Разработано приложение определения контактных параметров (давление, зона контакта) при взаимодействии системы «вал – втулка из композита». Исследовано влияние расположения волокон на изменение численных значений параметров контакта. – Ил. 3. Табл. 1. Библиогр.: 5 назв.

УДК 539.3

Василевич Ю. В., Мойсейчик А. Е., Мойсейчик Е. А., Яковлев А. А. **Анализ напряженно-деформированного состояния и температурного поля деформируемого растяжением образца** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 61–71. Выполнены исследования по созданию стандартных образцов для тепловой пассивной и активной диагностики. Показано, что такими образцами могут служить трехмерные металлические элементы, содержащие ряд цилиндрических концентраторов напряжений (имитирующих дефекты), образованных сверлением различной глубины. Исследованы особенности напряженно-деформированного состояния и деформационного теплообразования в таких образцах при растяжении. Проведены исследования температурного поля образцов и установлены ограничения на выявление дефектов при пассивном и активном тепловых методах диагностики. – Ил. 10 Табл. -. Библиогр.: 10 назв.

УДК 539.3

Москалев С. А. **Моделирование и расчет винтовых цилиндрических пружин сжатия и растяжения из стали предназначенных для амортизации стрелкового оружия** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 72–81. Разработана методика по расчету цилиндриче-

ских пружин, предназначенных для амортизации систем стрелкового оружия. Используя информационный ресурс, изложенный в статье, можно осуществлять инженерно-технические исследования в области конструирования амортизаторов по их назначению. – Ил. 2. Табл. 5. Библиогр.: 8 назв.

УДК 539.4

Михасев Г. И., Radi E. **Постановка задачи о свободных колебаниях плоской системы параллельно ориентированных нанобалок с учетом ван-дер-ваальсовых сил взаимодействия** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 82–89. Предложена модель малых свободных плоскостных колебаний системы N вертикально ориентированных нанобалок на жесткой подложке с учетом ван-дер-ваальсовых сил взаимодействия. Изгибающий момент в балках находится в рамках двухфазной нелокальной теории упругости Эрингена. Для ядра Гельмгольца в законе физического состояния, система интегродифференциальных уравнений сведена к эквивалентной системе дифференциальных уравнений 6-го порядка. Получены дополнительные $2N$ граничных условий, обеспечивающих исключение «ложных» решений на множестве функций класса $C^6[0, 1]$. – Ил. 1. Табл. -. Библиогр.: 19 назв.

УДК 539.3

Хвусевич В. М., Веремейчик А. И., Мазырка М. В. **Применение теории потенциала к решению задачи стационарной термоупругости для цилиндрически анизотропной среды** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 90–97. В статье поставлена и сведена к интегральным уравнениям краевая задача стационарной термоупругости для цилиндрически анизотропной среды. – Ил. -. Табл. -. Библиогр.: 12 назв.

УДК 539.3

Щербаков С. С., Полеицук М. М. **Ускорение гранично-элементных расчетов в механике с помощью распараллеливания вычислений на графическом процессоре** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 98–105. В работе показан подход к распараллеливанию гранично-элементного моделирования, включая модификацию метод Галеркина. Для распараллеливания использовалась технология NVidia CUDA. Проводился анализ точности и сходимости метода Галеркина и колокационного. Гладкий метод Галеркина обладает большей точностью чем гладкий колокационный метод. О высокой эффективности распараллеливания матрицы взаимовлияний и распределения потенциала внутри расчетной области свидетельствует ускорение вычислений в 22 и 52 раза соответственно. Для малой дискретизации расчетной области метод Галеркина оказывается более эффективным при распараллеливании и обладает большей точностью чем гладкий колокационный метод. – Ил. 11. Табл. -. Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.3

Ботогова М. Г., Ле Н. Д., Михасев Г. И. **Сравнительный анализ свободных колебаний двухслойных пластин с высококонтрастными механическими свойствами на основе моделей эквивалентных однослойных пластин** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 106–111. В статье рассматриваются свободные колебания слоистых пластин, содержащих магнитореологический эластомер. Исследовано влияние индукции магнитного поля на частоты и декременты собственных колебаний пластин. – Ил. -. Табл. 2. Библиогр.: 12 назв.

УДК 629.539.3

Яковлев А. А., Мойсейчик А. Е., Мойсейчик Е. А. **Удельная энергоемкость и теплообразование в стальных образцах при квазистатическом растяжении** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 112–117. В статье рассмотрены особенности расчета температуры поверхности нагружаемых растяжением элементов на основе анализа накапливаемой в металле потенциальной энергии деформации. Расчет выполнялся на основе конечно-элементного анализа деформирования таких элементов и в ручном режиме. Полученные данные сопоставлены с экспериментальными величинами температур, измеренными при деформировании образцов. Показано, что экспериментальные величины температур поверхности при непрерывном квазистатическом деформировании могут значительно (до 5 раз) превышать их расчетные значения. Эксперимент показал, что фиксирование температурных полей металлических элементов при их деформировании следует выполнять дистанционно, в форме термофильмов, с использованием измерительных инфракрасных приборов. – Ил. 7. Табл. 1. Библиогр.: 3 назв.

УДК 539.3: 624.131

Трацевская Е. Ю. **Исследование деформируемости дисперсных грунтов и связанных с ними трехслойных пластин** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 118–126. Исследовано деформирование грунтов в упругом и пластичном состояниях и, связанных с ними, композитных пластин. Объектом исследований служили супесчаные неводонасыщенные грунты различного генезиса. Наиболее характерной их чертой является резкое изменение деформируемости и прочности при увлажнении. Исследованы основные показатели физических свойств супесей различного генезиса, которые определяют их пластичность. Установлено, что максимальными значениями показателя гидрофильности обладают грунты первой надпойменной террасы. В качестве примера исследованы перемещения в круговой трехслойной пластине, связанной с грунтами различной жесткости – Ил. 3. Табл. 2. Библиогр.: 23 назв.

УДК 534-16:534-8:621.9.048.6

Степаненко Д. А., Киндрук А. Н. **Декомпозиция импульсных характеристик ультразвуковых колебательных систем с помощью преобразования Лапласа** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 127–135. В статье рассмотрена методика определения параметров (собственных частот ω , коэффициентов затухания β , амплитуд A и начальных фаз φ_0) компонент импульсных характеристик ультразвуковых колебательных систем, основанная на использовании взвешенного энергетического спектра преобразования Лапласа. Разработанная методика применяется итеративным образом для последовательной идентификации параметров всех компонент импульсной характеристики в порядке возрастания их демпфирования. Эффективность и точность применения описанной методики продемонстрирована на примере синтетической двухкомпонентной импульсной характеристики. – Ил. 6. Табл. -. Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.3

Дудяк А. И., Дикан Ж. Г., Гончарова Е. А., Костюк И. Г. **Расчет на прочность стержневых систем из композиционных материалов** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 136–142. В качестве объекта исследований выбрали стержень составленных из прочно соединенных между собой разнородных материалов, отличающихся между собой модулями продольной упругости. В результате проведенной работы разработана

новая методика расчета нормальных напряжений таких стержней. Показано отличие в распределении нормальных напряжений в зависимости от модуля продольной упругости материала. Установлено, что изменение нормальных напряжений по высоте сечения носят линейный характер и максимальные напряжения возникают в зонах наиболее удаленных от нейтрального слоя. – Ил. 5. Табл. -. Библиогр.: 5 назв.

УДК 53.047

Чигарев А. В., Михнович М. О. **Термодинамика воздействия импульса воздуха на роговицу** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 143–148. Глаз под действием воздушного импульса, воздействующего на роговицу, старается уменьшить возможность повреждающего действия за счет распределения энергии по степеням свободы. Часть энергии совершает работу по деформированию роговицы, часть энергии идет на совершение работы поступательного перемещения глаза вдоль оптической оси и часть на вращательное движение. Когда энергия воздушного импульса исчерпана, глаз автоматически возвращается в исходное состояние при этом энергия внешнего воздействия, запасенная за счет упругости элементов глаза, расходуется на совершение работы по восстановлению упругости формы. – Ил. 2. Табл. -. Библиогр.: 14 назв.

УДК 539.388

Чигарев А. В., Михнович М. О. **Биомеханика и ее моделирование вязкоупругой модели глаза при пневмотонометрических испытаниях** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 149–169. Рассмотрено моделирование деформаций поверхности роговицы и перемещения глазного тела под действием импульса воздуха, эмитируемого пневмотонометром. Вследствие деформации роговицы ее точки перемещаются практически вертикально от центра зрачка вдоль радиуса глаза, а энергия распространяется в виде волны с быстро затухающей амплитудой. Исследования выявляют микровибрационные движения оболочки глаза вследствие кровообращения в микрососудах глаза. Это позволяет выделять максимальное внутриглазное давление в фазе систолы, минимальное в фазе диастолы и среднее за сердечный цикл. Слоистая мембрана (мягкая оболочка глаза) в начальном (ненагруженном) состоянии не имеет собственной формы. Под действием внутреннего давления мягкая оболочка принимает форму, соответствующую среднему объему глаза. В этом случае в материале оболочки возникают растягивающие напряжения, образующие вместе с внутренней средой самоуравновешенную систему, в которой формообразующая оболочка растянута, а внутренняя среда (жидкость, гель) сжаты. При любых внешних воздействиях и нагрузках возникают, вследствие избыточного давления, только растягивающие напряжения. Таким образом, внутреннее давление придает мягкой мембране необходимую конструктивную жесткость. – Ил. 8. Табл. -. Библиогр.: 22 назв.

УДК 621.835-41

Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н. **Обоснование рациональной схемы силового привода колесно-шагающей ходовой системы** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 170–180. В статье обоснована рациональная схема силового привода колесно-шагающей ходовой системы. Разработана методика расчета конструкции некруглых зубчатых колес, имеющих симметричные геометрические параметры. Вычислена функция переменного передаточного отношения в силовом приводе, определены основные размеры начальных линий зубчатых колес. – Ил. 2. Табл. 1. Библиогр.: 10 назв.

УДК 531/534:[57+61]

Назаренко Д. В., Рубникович С. П., Босяков С. М. **Влияние геометрической поверхности имплантата на напряженно-деформированное состояние костной ткани и слизистой оболочки нижней челюсти** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 181–187. Для корректной установки балочных протезов необходимо прогнозировать распределение напряжений, возникающих в костной ткани, а также в слизистой оболочке нижней и верхней челюсти при действии окклюзионных сил. Целью работы является оценка напряженно-деформированного состояния биологических тканей нижней челюсти с установленным на имплантатах с резьбой и без резьбы балочным протезом при пережевывании продуктов питания, расположенных в области второго премоляра и первого моляра. Граничные условия соответствуют фиксации поверхностей височно-нижнечелюстного сустава модели нижней челюсти. Моделировалось действие семи мышечных сил, действующих на нижнюю челюсть при пережевывании пищи. Предполагалось, что мышечные силы приложены к центру тяжести узлов элементов, соответствующих области прикрепления мышц. Полученные результаты показывают, что расхождение наибольших значений напряжений, возникающих в слизистой оболочке, кортикальной и губчатой костной ткани для модели без резьбы по сравнению с моделью с резьбой находится в диапазоне от 14 % до 17 %. Для оценки напряженно-деформированного состояния биомеханической системы «нижняя челюсть – балочный протез – имплантаты» при действии жевательной нагрузки можно использовать имплантаты конической или цилиндрической формы без резьбы для устранения необоснованно высоких напряжений в области края резьбы и ускорения вычислений. – Ил. 6. Табл. 1. Библиогр.: 16 назв.

УДК 539.3:536.2

Веремейчик А. И., Хвиевич В. М., Холодарь Б. Г. **Исследование тепловых процессов в ноже гильотинных ножниц при действии движущегося локального источника нагрева** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 188–200. По результатам аналитического решения пространственной задачи нестационарной теплопроводности исследовано температурное поле в ноже гильотины НК3416 при действии теплового потока в форме пятна с интенсивностью, распределенной по нормальному закону. Моделирование температурных полей, скоростей нагрева (охлаждения) на основе разработанных алгоритмов решения температурных задач проводится с использованием созданной в среде *FORTRAN* компьютерной программы, позволяющей выполнить и представить результаты расчетов в графическом и текстовом формате. Рассмотрен случай нагрева режущей кромки ножа подвижным нормально-круговым тепловым потоком. Для широкого диапазона режимов работы плазмотрона получены зависимости температурного поля от времени и координат. Исследовано влияние параметров процесса плазменной закалки на температурное поле в зоне пятна нагрева. С использованием полученных результатов могут быть установлены режимы термообработки, позволяющие повысить физико-механические характеристики его режущей кромки без изменения свойств сердцевины. – Ил. 11. Табл. 1. Библиогр.: 11 назв.

УДК 62.419

Яковлев А. А., Мойсейчик А. Е., Мойсейчик Е. А. **Стальная трехслойная ортотропная плита и ее работа при квазистатическом нагружении** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 201–206. В статье обоснована возможность конструктивного исполнения стальной трехслойной ортотропной плиты большой грузоподъемности с применением электро-

дуговой сварки. Показано, что большое количество пересечений сварных швов в соединениях элементов таких плит требует выполнения работ приемами, ведущими к снижению сварочных деформаций и предотвращению трещинообразования в подобных плитах при действии низких температур и переменных нагрузок. – Ил. 7. Табл. -. Библиогр.: 6 назв.

УДК 624.078.4:004.94

Мартыненко Т. М., Пронкевич С. А., Мартыненко И. М., Скляр О. Н. **Оценка усталостной прочности типовых сварных узлов строительных конструкций на основе моделирования в среде ANSYS** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 207–213. В статье исследована прочность наиболее распространенных в практике строительства сварные соединения при вертикально сжимающей нагрузке, приложенной вдоль оси соединительной накладки. Рассмотрено влияние конструктивного исполнения узловых соединений на напряженно-деформированное состояние пространственной конструкций из стержней открытого профиля и возникающих крутящих воздействий в зависимости от вида закрепления элементов. Расчет конструкции сводится к определению напряжений, перемещений, срока службы, усталостного повреждения, коэффициента запаса прочности в узлах закрепления, по которым затем определяют изменение механических характеристик стали. – Ил. 5. Табл. -. Библиогр.: 9 назв.

УДК 621.9.06

Довнар С. С. **МКЭ-анализ эффективности бетонного усиления порталного станка** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 214–221. Проведен МКЭ-анализ порталного станка при усилении его несущей системы полимербетоном. Бетонирование внутренних полостей двукратно ослабляет динамические раскочки портала на изгибных резонансах. Крутильные колебания уменьшаются по амплитуде в ~2,5 раза. Эффективно подавляются опасные локальные резонансы стенок колонн. Заполнение портала бетоном слабо влияет на частоту большинства резонансных мод. Это облегчает обход резонансных диапазонов при обработке резанием.

Заполнение портала бетоном рекомендуется при реновации станков с высокими чугунными порталами. – Ил. 8. Табл. -. Библиогр.: 9 назв.

УДК 614.846.63:004.94

Короткевич С. Г., Ковтун В. А. **Исследование влияния геометрических параметров конструктивных упрочняющих элементов на напряженное состояние резервуаров цистерн пожарных автомобилей** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 222–226. Исследовано напряженное состояние конструкций резервуаров цистерн пожарных автомобилей, возникающее в процессе движения к месту ликвидации чрезвычайных ситуаций. С использованием компьютерного моделирования разработаны новые 3D модели цистерн прямоугольного сечения объемом 8 м³ и исследовано влияние геометрических параметров элементов, повышающих прочность их конструкций, на уровень напряжений, возникающих в наиболее нагруженных узлах, к которым относятся угловые и тавровые соединения элементов. Приведены некоторые результаты проектных расчетов рациональных геометрических параметров упрочняющих элементов конструкций цистерн. – Ил. 5. Табл. -. Библиогр.: 7 назв.

УДК 539.374

Лачугина Е. А. **Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 227–233. Предложена механико-математическая модель для исследования собственных колебаний пятислойной круговой пластины, симметричной по толщине. Выписано трансцендентное уравнение для определения собственных чисел в случае заделки контура пластины. Приведены первые 14 собственных чисел и собственных частот колебаний рассматриваемой пластины. Численно исследовано изменение частот основного тона в зависимости от толщины внутреннего несущего слоя. Показано, что при увеличении толщины этого слоя частоты колебаний возрастают. – Ил. 3. Табл. 1. Библиогр.: 20 назв.

УДК 539.3

Салицкий В. С. **Изгиб круговой пятислойной пластины** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 234–239. Рассмотрен изгиб круглой пятислойной пластины, симметричной по толщине, под действием равномерно распределенной нагрузки. Предполагается, что кинематические гипотезы Кирхгофа выполняются для тонких несущих слоев. Сравнительно толстый наполнитель деформируется в соответствии с гипотезой Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Уравнения равновесия получены с использованием вариационного метода Лагранжа. Учитывается действие касательных напряжений в наполнителе. Получено аналитическое решение краевой задачи и проведена его численная апробация. – Ил. 2. Табл. -. Библиогр.: 21 назв.

УДК 004.421

Микулик Т. Н., Николаенко В. Л., Сечко Г. В. **О пролегоменах кинетической теории надежности и долговечности машин и приборов Вольфрида Николаевича Трейера** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2023, вып. 38, стр. 240–244. Предлагается продолжить забытые работы В. Н. Трейера по обеспечению надежности деталей машин и приборов, потому что использованный в них подход изучения кинетики отказов хорошо показал себя в радиоэлектронике. – Ил. 1. Табл. -. Библиогр.: 14 назв.

ABSTRACTS

UDC 531/534:93/94

Pleskachevsky Yu. M. **Development of mechanics in belarus: historical facts and leading factors** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 3–20. The historical facts and the most important stages in the development of mechanics in Belarus are stated. The historical background is described and the scientists who can be considered the first Belarusian mechanics are named. The facts, events and names from the history of institutes and universities, specialized departments and laboratories in mechanics are presented chronologically correctly. Topical branches of mechanics being developed in Belarus, sources and forms of funding for research and development in the field of mechanics are named. The important role of organizing congresses, conferences, periodicals and councils for the defense of dissertations in the country is shown. Recognition of the contribution of Belarusian scientists-mechanics to the development of mechanics is their representation in prestigious foreign publications, councils, committees and societies. – Fig. 2. Tab. -. Ref.: 17 titles.

UDC 539.374

Starovoitov E. I., Zhuravkov M. A., Yarovaya A. V. **Forced vibrations of a three-layer circular plate in a stationary temperature field** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 21–29. Forced vibrations of a circular three-layer plate clamped along the contour are investigated. It is assumed that the plate is located in a stationary homogeneous temperature field. A system of equations of motion describing its transverse vibrations is given. Boundary and initial conditions are formulated. The solution of the corresponding system of partial differential equations is obtained by the Fourier method with the expansion of the coordinate function in a series of eigenfunctions. Formulas for time functions are written out. Numerical parametric analysis of the dependence of displacements on temperature, load area and layer materials is carried out. – Fig. 4. Ref.: 30 titles.

UDC 539.3+51-74, 539.214, 539.42, 622.23

Zhuravkov M. A., Nikolaychik M. A., Klimkovich M. M. **Estimation of stress-strain state of the rock mass during mining near the mine shaft** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 30–38. The article presents the results of a three-dimensional computer modelling of the process of mining by wide working face near the mine shaft. A geomechanical model based on the algorithms of the finite element method and allows modeling the stress-strain state (SSS) of a rock mass from the depth of mining to the Earth's surface is constructed. The characteristics of the surface subsidence (maximum subsidence and width of the surface) on the Earth's surface during the mining of the rock mass were determined and verified. The mutual influence of mining by wide working face and mine shaft sinking is investigated. – Fig. 10. Tab. 3. Ref.: 8 titles.

UDC 539.3

Markova M. V., Leonenko D. V. **Oscillations of a circular three-layer stepped plates driven by repeated loading** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 39–49. Forced oscillations of a circular three-layer plate with a stepwise variable thickness of the outer bearing layers are considered. Fluctuations are induced by repeated load. The solution of the problem is based on the superposition of the quasi-static and dynamic components of the displacement functions that occur in the plate during vibrations, and the decomposition of the time domain on repeating cycles. The general solution for the plate integrally is made using the Heaviside function from the

particular solution for individual sections of the plate. Numerical calculation results are presented. The influence of the time of application of the load and the interval between repetitive loads on the oscillatory character of plate is analyzed. – Fig. 3. Tab. -. Ref.: 26 titles.

UDC539.3:629

Mozharovsky V. V., Kuzmenkov D. S., Vasilevich Y. V. **Application of methods of mathematical programming and finite elements in the study of rolling and the contact zone of a tire with a base** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 50–54. A mathematical model is proposed for the rolling of two orthotropic (made of composites) cylinders with parallel axes pressed against each other, and the software implementation of the calculation is briefly described, that is, the determination of the rolling parameters – tangential forces and areas of adhesion and sliding. An algorithm has been developed and a program has been created, according to the finite element method, to determine contact zones, stresses and displacements. – Fig. 4. Tab. -. Ref.: 7 titles.

UDC 539.3: 621.8

Mozharovsky V. V., Kirhintsava S. V. **The influence of the fiber arrangement on the parameters of the shaft–sleeve contact for sliding bearings made of composites** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 55–60. A mathematical model has been created for calculating the pressure during contact interaction for the "shaft – sleeve made of fibrous material" system based on the mathematical theory of elasticity of an anisotropic body. An application for determining contact parameters (pressure, contact zone) during the interaction of the "shaft – sleeve composite" system has been developed. The influence of the fiber arrangement on the change in the numerical values of the contact parameters is investigated. – Fig. 3. Tab. 1. Ref.: 5 titles.

UDC 539.3

Vasilevich Yu. V., Moiseichik A. E., Moiseichik E. A., Yakovlev A. A. **Analysis of the stress-strain state and temperature field of a sample deformed by tension** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 61–71. The issues of creating standard samples for thermal passive and active diagnostics are considered. It is shown that elements with a number of cylindrical defects of various depths formed by drilling can serve as solutions for such samples. The features of the stress-strain state and deformational heat generation in such samples under tension are studied. Analytical studies of the temperature field of the samples are given and restrictions on the detection of defects in passive and active thermal diagnostic methods are established. – Fig. 10 Tab. -. Ref.: 10 titles.

UDC 539.3

Moskalev S. A. **Modeling and calculation of helical cylindrical compression and tension springs made of steel for small arms amortization** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 72–81. The methodology of calculation of cylindrical springs intended for small arms systems damping is developed. Using the information resource outlined in the article, it is possible to carry out engineering research in the design of shock absorbers according to their purpose. – Fig. 2. Tab. 5. Ref.: 8 titles.

UDC 539.4

Mikhasev G. I., Radi E. **Setting the problem on free vibrations of a plane system of parallelly oriented nanobeams taking into account the van der Waals interaction forces** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 82–89. A model of small free in-plane vibrations of a system of N vertically aligned nanobeams on a rigid substrate is proposed taking into account the van der Waals forces of interaction. The bending moments in the nanobeams are calculated within the framework of the two-phase non-local Eringen theory of elasticity. For the Helmholtz kernel in the constitutive equations, the system of integro-differential equations is reduced to an equivalent system of differential equations of the 6th order. Additional $2N$ boundary conditions are obtained that ensure the exclusion of "false" solutions on the set of functions of class C^6 [0,1]. – Fig. 1. Tab. -. Ref.: 19 titles.

UDC 539.3

Khvisevich V. M., Veremeychik A. I., Mazyrka M. V. **Application of potential theory to the solution of the problem of stationary thermoelasticity for a cylindrically anisotropic medium** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 90–97. In the article, the boundary value problem of stationary thermoelasticity for a cylindrical anisotropic medium is posed and reduced to integral equations. – Fig. -. Tab. -. Ref.: 12 titles.

UDC 539.3

Sherbakov S. S., Polestchuk M. M. **Acceleration of boundary element calculations in mechanics using parallelization of computations by a graphics processor** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 98–105. The article presents an approach to parallelizing boundary element modeling, including a modification of the Galerkin method. The NVidia CUDA technology was used for parallelization. Collocation and Galerkin method were analyzed for accuracy and convergence. Smooth Galerkin method has higher accuracy than the smooth collocation method. High efficiency of parallelization of the mutual influences matrix and potential distribution within the computational domain is shown by the acceleration of calculations by 22 and 52 times, respectively. Galerkin method is more efficient in parallelization and has greater accuracy than the smooth collocation method for low discretization of the computational domain. – Fig. 11. Tab. -. Ref.: 6 titles.

UDC 539.3

Botogova M. G., Le N. D., Mikhasev G. I. **Comparative analysis of free vibrations of sandwich plates with high contrast mechanical properties based on the models of equivalent single layer plates** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 106–111. The article investigates free vibrations of laminated plates containing a magnitorheological elastomer. The influence of the magnetic induction on the frequencies and decrements of natural vibrations of plates has been investigated. – Fig. -. Tab. 2. Ref.: 12 titles.

UDC 629.539.3

Yakovlev A. A., Moiseichik A. E., Moiseichik E. A. **Specific energy intensity and heat generation in steel samples under quasi-static tension** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 112–117. The article discusses the features of calculating the surface temperature of elements loaded with tension based on the analysis of the potential energy of deformation accumulated in the metal. The calculation was carried out on the basis of a finite element analysis of the deformation of

such elements and in manual mode. The obtained data are compared with the experimental values of temperatures measured during the deformation of the samples. It is shown that the experimental values of surface temperatures during continuous quasi-static deformation can significantly (up to 5 times) exceed their calculated values. The experiment showed that the fixation of the temperature fields of metal elements during their deformation should be performed remotely, in the form of thermal films, using infrared measuring instruments. – Fig. 7. Tab. 1. Ref.: 3 titles.

UDC 539.3: 624.131

Tratsevskaya Elena Yu. **Study of deformability of dispersed soils and associated three-layer plates** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 118–126. The deformation of soils in elastic and plastic states and associated composite plates is investigated. The object of research was sandy loam non-watered soils of various genesis. Their most characteristic feature is a sharp change in deformability and strength when moistened. The main indicators of the physical properties of sandy loams of various genesis, which determine their plasticity, are investigated. It is established that the soils of the first above-floodplain terrace have the maximum values of the hydrophilicity index. As an example, displacements in a circular three-layer plate connected with soils of different stiffness are investigated. – Fig. 3. Tab. 2. Ref.: 23 titles.

UDC 534-16:534-8:621.9.048.6

Stepanenko D. A., Kindruk A. N. **Decomposition of impulse responses of ultrasonic vibratory systems by means of Laplace transform** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 127–135. The article considers methodology for determination of parameters (eigenfrequencies ω , damping factors β , amplitudes A and initial phases φ_0) for the components of impulse responses of ultrasonic vibratory systems based on application of weighted energy spectrum of Laplace transform. The proposed methodology is applied iteratively for successive identification of parameters for all components of the frequency response in the order of ascending damping factors. Efficiency and precision of the described methodology is demonstrated by numerical example for synthetic two-component impulse response. – Fig. 6. Tab. -. Ref.: 6 titles.

UDC 539.3

Dudyak A. I., Dikan Zh. G., Goncharova E. A., Kostyuk I. G. **Calculation of the strength of rod systems made of composite materials** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 136–142. As an object of research, we chose a rod composed of firmly connected heterogeneous materials, which differ from each other by moduli of longitudinal elasticity. As a result of the work, a new methodology for calculating the normal stresses of such rods has been developed. The difference in the distribution of normal stresses depending on the modulus of longitudinal elasticity of the material is shown. It was found that the change of normal stresses along the section height has a linear character and the maximum stresses occur in the areas furthest from the neutral layer. – Fig. 5. Tab. -. Ref.: 5 titles.

UDC 53.047

Chigarev A. V., Mikhnovich M. O. **Thermodynamic process under the impact of air pulse on the cornea** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 143–148. The eye, under the action of an air pulse acting on the cornea, tries to reduce the possibility of a damaging effect due to the distribution of energy over degrees of freedom. Part of the energy does work to deform the cornea, part of the energy goes to the translational movement of the eye along the optical axis, and part to

rotational movement. When the energy of the air impulse is exhausted, the eye automatically returns to its original state, while the energy of the external influence, stored due to the elasticity of the elements of the eye, is spent on the work of restoring the elasticity of the form. – Fig. 2. Tab. -. Ref.: 14 titles.

UDC 539.388

Chigarev A. V., Mikhnovich M. O. **Simulation of the biomechanics of a viscoelastic eye model during pneumotometric tests by the method of superposition of movements and deformations**// International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 149–169. The modeling of the displacement of points on the surface of the cornea is considered. Due to deformation of the cornea, its points move in waves almost from the center of the pupil along the radius of the eye, and the energy propagates in the form of a wave with a rapidly decaying amplitude. Studies reveal microvibrational movements of the eye shell due to blood circulation in the microvessels of the eye. This allows you to highlight the maximum intraocular pressure in the systole phase and the minimum in the diastole phase. The soft shell in the initial (unloaded) state does not have its own form. Under the action of internal pressure, the soft shell takes the shape corresponding to the largest volume. In this case, tensile stresses arise in the shell material, forming together with the internal medium a self-balanced system in which the molding shell is stretched and the internal medium (liquid, gel) is compressed. Under any external influences and loads, due to excessive pressure, only tensile stresses arise. Thus, the internal pressure gives the membrane the necessary structural rigidity. – Fig. 8. Tab. -. Ref.: 22 titles.

UDC 621.835-41

Skoybeda A. T., Zhukavets V. M. **Substantiation of the rational scheme of the power drive of a wheel-step running system** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 170–180. The article substantiates the rational scheme of the power drive of a wheel-step running system. A method for calculating the design of non-circular gears with symmetrical geometric parameters has been developed. The function of the variable gear ratio in the power drive is calculated, the main dimensions of the initial lines of the gears are determined. – Fig. 2. Tab. 1. Ref.: 10 titles.

UDC 531/534:[57+61]

Nazarenko D. V., Rubnikovich S. P., Bosyakov S. M. **Influence of the geometric surface of the implant on the stress-strain state of bone tissue and mucous membrane of the mandible** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 181–187. For the correct attachment of full-arch prostheses, it is necessary to predict the distribution of stresses arising in the bone tissue, as well as in the mucous membrane of the mandibula and maxilla under the action of occlusal forces. The aim of the study is to assess the stress-strain state of the biological tissues of the mandibula with a bar prosthesis attached on implants with and without thread during food stuff located in the region of the second premolar and first molar. The boundary conditions correspond to the fixation of the temporomandibular joint surfaces of the mandibula model. The action of seven muscle forces acting on the lower jaw during chewing is modeled. It was assumed that muscle forces are applied to the gravity center of the node elements corresponding to the area of muscle attachment. The obtained results indicate that the discrepancy between the highest values of equivalent stresses in the mucous membrane, cortical and cancellous bone tissue for model without thread compared to model with thread is in the range from 14 % to 17 %. To assess the stress-strain state of the biomechanical system "mandibula - full-arch prosthesis - implants" under the action of a masticatory load, one can use conical or cylindrical implants

without thread to eliminate unreasonably high stresses in the region of the thread edge and speed up calculations. – Fig. 6. Tab. 1. Ref.: 16 titles.

UDC 539.3:536.2

Veremeychik A. I., Khvisevich V. M., Kholodar B. G. **Study of thermal processes in the knife of guillotine shears under the action of a moving local heat source** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 188–200. Based on the results of the analytical solution of the spatial problem of non-stationary thermal conductivity, the temperature field in the knife of the NK3416 guillotine was investigated under the action of a heat flow in the form of a spot with an intensity distributed according to the normal law. Modeling of temperature fields, heating (cooling) rates based on the developed algorithms for solving temperature problems is carried out using a computer program created in the *FORTRAN* environment, which allows to produce and present the results of calculations in graphical and text format. The case of heating the cutting blade of a knife by a movable normally circular heat flow is considered. For a wide range of operating modes of the plasma torch, the dependences of the temperature field on time and coordinates are obtained. The influence of the parameters of the plasma quenching process on the temperature field in the heating spot zone is investigated. Using the results obtained, the modes of heat treatment of the knife can be established, allowing to increase the physical and mechanical characteristics of its cutting edge without changing the properties of the core. – Fig. 11. Tab. 1. Ref.: 11 titles.

UDC 62.419

Yakovlev A. A., Moiseichik A. E., Moiseichik E. A. **Steel three-layer orthotropic plate and its operation under quasi-static loading** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 201–206. The article substantiates the possibility of designing a steel three-layer orthotropic plate with a large load capacity using electric arc welding. It is shown that a large number of intersections of welds in the joints of elements of such plates requires the performance of work by methods leading to a decrease in welding deformations and the prevention of cracking in such plates under the action of low temperatures and variable loads. – Fig. 7. Tab. -. Ref.: 6 titles.

UDC 624.078.4:004.94

Martynenko T. M., Pronkevich S. A., Martynenko I. M., Sklyar O. N. **Assessment of fatigue strength of typical welded joints of building structures based on ANSYS simulation** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 207–213. The paper studies the strength of the most common in the practice of construction welded joints under the vertically compressive load applied along the axis of the connecting pad. The paper considers the influence of the structural design of joints on the stress-strain state of the spatial constructions made of open section rods and the arising torsional effects depending on the type of fixing of the elements. The design calculation is reduced to determining the stresses, displacements, service life, fatigue damage, safety factor in the fastening nodes, by which the change in the mechanical characteristics of steel is then determined. – Fig. 5. Tab. -. Ref.: 9 titles.

UDC 621.9.06

Dounar S. S. **FEA of concrete filling efficiency for planer's portal reinforcement** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 214–221. FEA of portal machine reinforced with polymer concrete pouring is provided. Rather high iron portal was eventually filled by UHPC. It brought twofold lowering of amplitudes of bending resonant oscillations. Torsional FRF's peaks are weakened up

to ~2.5 times. Dangerous local support-wall resonances are suppressed. Concrete filling slightly affects frequencies of the main whole machine resonances. It alleviates resonant interval omitting during cutting. Reinforcement by concrete filling should be recommended for portal machine renovation. – Fig. 8. Tab. -. Ref.: 9 titles.

UDC 614.846.63:004.94

Korotkevich S. G., Kovtun V. A. **The research on the geometric parameters' influence of reinforcing elements on the stress state of fire trucks tanks** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 222–226. The stress state of tank structures of fire trucks that occurs during the movement to the place of emergency response is investigated. Using computer modeling, new 3D models of rectangular tanks with a volume of 8 m³ have been developed and the influence geometric parameters location of elements that increase the rigidity of their structures on the level of stresses arising in the most loaded nodes, which include corner and T-joints of elements, has been studied. Some results of design calculations of rational geometric parameters of reinforcing elements of tank structures are given. – Fig. 5. Tab. -. Ref.: 7 titles.

UDC 539.374

Lachugina E. A. **Natural oscillation frequencies of a five-layer circular plate** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 227–233. A mechanical-mathematical model is proposed for studying natural oscillations of a five-layer circular plate symmetrical in thickness. A transcendental equation is written for determining the eigenvalues in the case of sealing the plate contour. The first 14 eigenvalues and natural vibration frequencies of the plate under consideration are given. A numerical study was made of the change in the frequencies of the fundamental tone depending on the thickness of the inner carrier layer. It is shown that with an increase in the thickness of this layer, the oscillation frequencies increase. – Fig. 3. Tab. 1. Ref.: 20 titles.

UDC 539.3

Salicky V. S. **Bending of a circular five-layer plate** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 234–293. The bending of a circular five-layer plate symmetrical in thickness under the action of a uniformly distributed load is considered. It is assumed that Kirchhoff's kinematic hypotheses are fulfilled for thin load-bearing layers. The comparatively thick filler is deformed in accordance with Tymoshenko's hypothesis about the straightness and incompressibility of the deformed normal. The equilibrium equations are obtained using the Lagrange variational method. The operation of tangential stresses in the filler is taken into account. The analytical solution of the boundary value problem is obtained and its numerical approbation is carried out. – Fig. 2. Tab. -. Ref.: 21 titles.

UDC 004.421

Mikulik T. N., Nikolaenko V. L., Sechko G. V. **On the Prolegomena of the Kinetic Theory of Reliability and Durability of Machines and Instruments by Wolfrid Nikolayevich Treyer** // International Scientific and Technical Collection "Theoretical and Applied Mechanics" Minsk, 2023, issue 38, p. 240–244. It is proposed to continue the forgotten works of V. N. Treyer on ensuring the reliability of machine parts and devices, because the approach used in them to study the kinetics of failures has shown itself well in radio electronics. – Fig. 1. Tab. -. Ref.: 14 titles.

ПРАВИЛА ПРИЕМА СТАТЕЙ

В сборник «Теоретическая и прикладная механика» принимаются статьи, авторами которых являются профессорско-преподавательский состав, аспиранты, соискатели, докторанты, научные сотрудники, инженеры и ведущие специалисты, работающие в учебных учреждениях, исследовательских и научно-технических организациях Республики Беларусь. Также в сборнике могут публиковаться статьи студентов и магистрантов в соавторстве с научными руководителями. В сборнике могут публиковаться работы зарубежных авторов. Статьи могут присылаться на английском языке.

Материалы статей авторы могут предоставить в редакцию на электронном носителе или прислать на электронную почту (sborn.tpm@yandex.ru, sborn.tpm@gmail.com). Материалы, присланные в редакцию сборника автору(-ам) не возвращаются. Редакция берет на себя обязательства по недопущению распространения сторонним лицам присланных автором(-ами) материалов.

Основные требования к присылаемым статьям основываются на требованиях ВАК Республики Беларусь к оформлению научных публикаций (статей). Требования составлены в соответствии с главой № 5 «Инструкции о порядке оформления квалификационной научной работы (диссертации) на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук, автореферата и публикаций по теме диссертации», утвержденной постановлением Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь 28.02.24 г. № 3.

Статьи, поступившие в редакцию сборника, рассматриваются редакционной коллегией сборника в двухнедельный срок на предмет соответствия статьи профилю издания и требованиям к оформлению. В случае несоответствия материалов указанным требованиям редакция может отправить статью ответственному автору на доработку или отказать в публикации данной статьи. В случае грубого нарушения правил подготовки статей или очевидного несоответствия тематики статьи тематике издания – статья не принимается к рассмотрению. Максимальное количество статей, принимаемых к публикации от одного автора или от одного коллектива авторов – не более четырех штук.

Редакция не принимает статьи, опубликованные ранее в других журналах или научных изданиях, а также материалы дублирующие предшествующие работы автора(-ов) или доподлинно копирующие части из общедоступных и известных учебных пособий или публикаций. Возможна публикация расширенного варианта какой-либо работы с обязательным упоминанием исходного ее варианта в списке литературных источников и тексте. **Поступившие в редакцию материалы проверяются на антиплагиат посредством российской системы обнаружения текстовых заимствований «Антиплагиат» (на странице сервиса – <https://bntu.antiplagiat.ru>).** Авторы статей несут всю ответственность за достоверность и точность содержащейся в них информации, корректность имеющихся в тексте ссылок на интернет-ресурсы и литературу. Все ссылки на литературу и источники должны соответствовать общепринятому формату ГОСТ. В частности – ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления», ГОСТ 7.82-2001 «Библиографическая запись. Библиографическое описание электронных ресурсов. Общие требования и правила составления», а так же ГОСТ 7.80-2000, ГОСТ 7.0.12-2011, СТБ 7.12-2001, ГОСТ 7.11-2004 (ИСО 832:1994).

По содержанию статьи должны быть современными, на актуальные и востребованные темы теоретической и прикладной механики, механики материалов, механики деформируемого твердого тела и др. В статье должна быть представлена ее научная и практическая ценность. Статьи должны содержать следующие основные разделы или их аналоги: «Введение», «Постановка задачи», «Решение задачи», «Заключение/Выводы». Статьи должны содержать четкую логическую структуру повествования, проходящую через весь текст. Задача и ее решение должны быть изложены научным языком с лингвистически и грамматически верными пояснениями. В тексте повествования допускается использование только общеизвестных и «не двусмысленных» научных концепций и понятий без двоякого изложения материала. Предоставляемая статья должна описывать решение поставленной проблемы, в ней должна быть представлена возможность проверки методов и результатов исследования.

В представляемой статье не допускается использование неприемлемых с морально-этической точки зрения читателей выражений и смысловых концептов. Автор несет полную ответственность за информацию, представляемую в статье. В случае, если редакция журнала не может проанализировать структуру или смысловую последовательность информации, представленной в статье, то такие материалы либо отправляются на доработку автору(-ам), либо не принимаются к рассмотрению.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Вышедшие электронные версии Сборника «Теоретическая и прикладная механика» можно найти на портале Репозитория БНТУ (<https://rep.bntu.by/handle/data/51116>) или на портале Национальной библиотеки Беларуси (<https://e-catalog.nlb.by/Collection/BY-NLB-br77969/CollectionList#holdings>).

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Оформление статьи должно удовлетворять следующим требованиям:

Формат документа – *Microsoft Word 2007, 2010* и выше, Размер бумаги – А4 (210×297 мм).

Поля. Верхнее – 20 мм, нижнее – 25 мм, левое – 25 мм, правое – 25 мм.

Объем статей не должен превышать 14 страниц (не менее 14 тысяч печатных знаков). В случае значительного превышения установленного допустимого количества страниц на статью рекомендуется разделить статью на две последовательные статьи с соответствующей нумерацией. Структура статьи должна включать основные разделы: «Введение», «Основная часть», «Выводы», «Литература»; а также дополнительные разделы необходимые для раскрытия смысла статьи.

Язык статьи. Статья должна быть написана на русском, белорусском или английском языках.

Заголовок. УДК – указывается(-ются) индекс(-ы) публикации по универсальной десятичной классификации, в верхнем левом углу листа (**прописными буквами, шрифт 14 пт., курсив, выравнивание по левому краю**). Затем указывается **название доклада (прописными буквами, шрифт 14 пт., полужирный, выравнивание текста по центру), затем фамилия(-ии) и инициалы автора(-ов) (шрифт 14 пт., полужирный, выравнивание текста по центру)**. Затем – **название(-я) учреждения(-ий), организации(-ий)** (выравнивание текста по центру, шрифт 12 пт., курсив). Фамилия(-ии) и названия организации(-ий) имеют верхний индекс, указывающий на принадлежность одного к другому.

Основной текст. Статья должна быть оформлена в соответствии с ГОСТ 7.5–98 «Журналы, сборники, информационные издания. Издательское оформление публикуемых материалов», ГОСТ 2.105–95 «Межгосударственный стандарт. Общие требования к текстовым документам». Шрифт текста Times New Roman – обычный – 14 пт. Межстрочный интервал – одинарный, абзац (отступ первой строки) – 1 см. Отступ: слева – 0, справа – 0. Интервал: перед – 0, после – 0. Автоматическая расстановка переносов. Запрет висячих строк. Выравнивание текста по ширине. Страницы нумеруются внизу страницы по центру.

Формулы. Формулы должны быть подготовлены в программе *MathType* (Размер формул: Обычный – 14 пт., Индекс – 11 пт., Малый индекс – 9 пт., Символ – 16 пт., Малый символ – 14 пт.; только одно условие: «Переменная – Курсив»). В случае невозможности использования программы *MathType*, допускается использование приложения *Microsoft Equation*, входящего в состав *MS Word*, с таким же шрифтом и размером, как и основной текст статьи. Формулы располагаются по центру страницы. Нумерация формул сквозная.

Буквенные обозначения. Буквы (прописные и строчные) латинского алфавита (*E, V, K, t, a* и др.), обозначающие физико-математические величины, набираются курсивом. Русские, греческие ($\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \pi$, град, и др.) буквы и целостные выражения ($\cos, \sin, \log, \max, \min, Ra$ и др.) набираются прямым шрифтом.

Размерность всех физических величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ).

Принятые обозначения расшифровываются непосредственно в тексте статьи.

Заголовки набираются шрифтом 14 пт. полужирным, курсивным, полужирным – курсивным начертанием. Переносы заголовков запрещаются.

Таблицы набираются шрифтом 14 пт. Если таблица не помещается на страницу, допускается уменьшение шрифта до 11 пт. Таблицы размещаются после первого упоминания о них в тексте. Заголовки таблиц выравниваются по левому краю, шрифт 12 пт. Линии таблиц стандартные – 0,5 пт. Размеры таблиц не должны выходить за границы текста.

Иллюстрации размещаются по тексту сразу после первого упоминания о них в тексте. Иллюстрации должны быть четкими и контрастными (в формате .jpg, .png). Каждая иллюстрация должна иметь подрисуючную подпись (выравнивание по центру, шрифт 12 пт.). **Графики** и **диаграммы** представляются как рисунки. Графический материал должны быть оформлен в соответствии с требованиями Р 50–77–88 «Рекомендации ЕСКД. Правила выполнения диаграмм».

Литература приводится в конце статьи. Список литературы должен быть составлен в порядке появления ссылок в тексте, которые помещаются в квадратные скобки. Сведения об источниках, включенных в список, необходимо давать в соответствии с требованиями ГОСТ 7.1–2003 «Библиографическое описание» и ГОСТ 7.82–2001 «Библиографическое описание электронных ресурсов».

Резюме. В конце статьи через 1 интервал печатается «Резюме» на русском языке и «Summary» (не более 75 слов) на английском языке. Так же прилагается перевод на английский язык фамилия(-ии) автора(-ов) и название статьи.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Плескачевский Ю. М.</i> Развитие механики в Беларуси: исторические факты и определяющие факторы	3
<i>Старовойтов Э. И., Журавков М. А., Яровая А. В.</i> Вынужденные колебания трехслойной круговой пластины в стационарном температурном поле	21
<i>Журавков М. А., Николайчик М. А., Климкович Н. М.</i> Оценка напряженно-деформированного состояния породного массива при ведении горных работ вблизи шахтного ствола.....	30
<i>Маркова М. В., Леоненко Д. В.</i> Колебания круговой трехслойной ступенчатой пластины, побуждаемые многократно повторной нагрузкой.....	39
<i>Можаровский В. В., Кузьменков Д. С., Василевич Ю. В.</i> Применение методов математического программирования и конечных элементов при исследовании качения и зоны контакта автошины с основанием	50
<i>Можаровский В. В., Кургинцева С. В.</i> Влияние расположения волокон на параметры контакта «вал – втулка» для подшипников скольжения из композитов.....	55
<i>Василевич Ю. В., Мойсейчик А. Е., Мойсейчик Е. А., Яковлев А. А.</i> Анализ напряженно-деформированного состояния и температурного поля деформируемого растяжением образца	61
<i>Москалев С. А.</i> Моделирование и расчет винтовых цилиндрических пружин сжатия и растяжения из стали предназначенных для амортизации стрелкового оружия	72
<i>Михасев Г. И., Ради Е.</i> Постановка задачи о свободных колебаниях плоской системы параллельно ориентированных нанобалок с учетом ван-дер-ваальсовых сил взаимодействия.....	82
<i>Хвисевич В. М., Вермейчик А. И., Мазырка М. В.</i> Применение теории потенциала к решению задачи стационарной термоупругости для цилиндрически анизотропной среды.....	90
<i>Щербаков С. С., Полещук М. М.</i> Ускорение гранично-элементных расчетов в механике с помощью распараллеливания вычислений на графическом процессоре	98
<i>Ботогова М. Г., Ле Н. Д., Михасев Г. И.</i> Сравнительный анализ свободных колебаний двухслойных пластин с высококонтрастными механическими свойствами на основе моделей эквивалентных однослойных пластин	106
<i>Яковлев А. А., Мойсейчик А. Е., Мойсейчик Е. А.</i> Удельная энергоемкость и теплообразование в стальных образцах при квазистатическом растяжении.....	112
<i>Трацевская Е. Ю.</i> Исследование деформируемости дисперсных грунтов и связанных с ними трехслойных пластин	118
<i>Степаненко Д. А., Киндрук А. Н.</i> Декомпозиция импульсных характеристик ультразвуковых колебательных систем с помощью преобразования Лапласа.....	127
<i>Дудяк А. И., Дикан Ж. Г., Гончарова Е. А., Костюк И. Г.</i> Расчет на прочность стержневых систем из композиционных материалов.....	136
<i>Чигарев А. В., Михнович М. О.</i> Термодинамика воздействия импульса воздуха на роговицу	143
<i>Чигарев А. В., Михнович М. О.</i> Биомеханика и ее моделирование вязкоупругой модели глаза при пневмотонометрических испытаниях.....	149
<i>Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н.</i> Обоснование рациональной схемы силового привода колесно-шагающей ходовой системы	170
<i>Назаренко Д. В., Рубникович С. П., Босяков С. М.</i> Влияние геометрической поверхности имплантата на напряженно-деформированное состояние костной ткани и слизистой оболочки нижней челюсти	181

Вермейчик А. И., Хвисевич В. М., Холодарь Б. Г. Исследование тепловых процессов в ноже гильотинных ножниц при действии движущегося локального источника нагрева	188
Яковлев А. А., Мойсейчик А. Е., Мойсейчик Е. А. Стальная трехслойная ортотропная плита и ее работа при квазистатическом нагружении	201
Мартыненко Т. М., Пронкевич С. А., Мартыненко И. М., Скляр О. Н. Оценка усталостной прочности типовых сварных узлов строительных конструкций на основе моделирования в среде ANSYS	207
Довнар С. С. МКЭ-анализ эффективности бетонного усиления порталного станка	214
Короткевич С. Г., Ковтун В. А. Исследование влияния геометрических параметров конструкционных упрочняющих элементов на напряженное состояние резервуаров цистерн пожарных автомобилей	222
Лачугина Е. А. Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины	227
Салицкий В. С. Изгиб круговой пятислойной пластины	234
Микулик Т. Н., Николаенко В. Л., Сечко Г. В. О пролегоменах кинетической теории надежности и долговечности машин и приборов Вольфрида Николаевича Трейера	240
Наши юбиляры	245
Рефераты	246
Abstracts	254
Правила приема статей	261
Правила оформления статей	262

Научное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Международный
научно-технический сборник

Выпуск 38

Подписано в печать 13.11.2023. Формат 60×84 ¹/₈. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 30,80. Уч.-изд. л. 16,35. Тираж 100. Заказ 787.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.