

ПОГРЕШНОСТЬ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ НАИЛУЧШИМ ОБРАЗОМ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ РЕЗУЛЬТАТАМ

В. В. НАДОЛЬСКИЙ^{1,2}

¹ к.т.н., доцент, доцент кафедры «Технологии строительного производства»,
УО «Брестский государственный технический университет»,

г. Брест, Республика Беларусь,

² доцент кафедры «Строительные конструкции имени
доктора технических наук, профессора Т. М. Пецольда»,

Белорусский национальный технический университет,

г. Минск, Республика Беларусь

Аннотация. Наблюдается явный тренд развития принципа проектирования на основе технологии компьютерного численного моделирования. Неоспоримые преимущества использования численных моделей демонстрируются в многих работах. Однако применение численного моделирования следует проводить с высокой степенью осторожности и скептицизма. Одной из важных проблем в этом направлении является отсутствие статистических параметров неопределенности (погрешности) численных моделей, необходимых для разработки формата безопасности и калибровки значений частных коэффициентов. Статистические характеристики погрешности численных моделей остаются наименее изученными, поэтому в большинстве случаев результаты, полученные с помощью численных моделей, считаются абсолютно точными, что не может быть истиной. Данный аспект послужил мотивом данного исследования, в котором представлены пилотные результаты анализа неопределенности численных моделей для моделей наилучшим образом соответствующих экспериментальным данным, т. е. параметры моделей подбирались таким образом, чтобы несущая способность наиболее близко соответствовала экспериментальной.

Ключевые слова: численная модель несущей способности, модель сопротивления, стальные конструкции, надежность, неопределенность, погрешность моделирования, метод конечных элементов.

THE UNCERTAINTY OF FINITE ELEMENT MODELS OF THE BEARING CAPACITY BEST FIT TO THE EXPERIMENTAL RESULTS

V. V. NADOLSKIY^{1,2}

¹ PhD in engineering, Associate Professor, Associate Professor of the Department of "Technologies of Construction Production", Brest State Technical University, Brest, Republic of Belarus,

² Associate Professor of the Department " Building structures named after Doctor of

Technical Sciences, Professor T. M. Petzold",

Belarusian National Technical University,

Minsk, Republic of Belarus

Abstract. There is a clear trend in the development of the design principle based on the technology of computer numerical modeling. The undeniable advantages of using numerical models are demonstrated in many works. However, the application of numerical modeling should be carried out with a high degree of caution and skepticism. One of the important problems in this direction is the lack of statistical parameters of uncertainty (error) of numerical models necessary for the development of a safety format and calibration of the values of partial coefficients. The statistical characteristics of the error of numerical models remain the least studied, so in most cases the results obtained using numerical models are considered absolutely accurate, which cannot be true. This aspect served as the motive for this study, which presents the pi-lot results of the uncertainty analysis of numerical models for models that best correspond to experimental data, i. e. the parameters of the models were selected in such a way that the load-bearing capacity most closely corresponded to the experimental one.

Keywords: numerical model of load-bearing capacity, resistance model, steel structures, reliability, uncertainty, modeling error, finite element method.

Введение.

Сейчас наблюдается явный тренд развития принципа проектирования на основе технологии компьютерного численного моделирования. Неоспоримые преимущества использования численных моделей демонстрируются в многих работах [1–16]. В работе [17] выделены случаи, когда применение численных моделей сопротивления необходимо или, по крайней мере, полезно: «1) при отсутствии классических моделей сопротивления; 2) при "ограниченных" классических моделях сопротивления; 3) при отсутствии адекватных классических моделей сопротивления; 4) при использовании большого количества однотипных конструктивных элементов; 5) для подтверждения предположений, сделанных в классических моделях сопротивления; 6) для сокращения объема и сроков экспериментальных исследований». В дополнение к работе [17] следует отметить, что численные модели сопротивления не исключают необходимости проведения физических экспериментов для расширения и наполнения экспериментальных баз данных, однако численные модели сопротивления могут помочь выполнить «проектирование на основе компьютерных экспериментов». Все больше исследователей отмечают тот факт, что численные модели становятся общедоступным инструментом, однако их гораздо сложнее стандартизировать, чем модели сопротивления, основанные на более низких уровнях аппроксимации [17].

Однако применение численного моделирования следует проводить со здоровой степенью осторожности и скептицизма. Существуют вопросы, на которые следует ответить с помощью научно обоснованных рекомендаций.

Первый из них – это выбор параметров численной модели. На первых этапах развития технологии компьютерного моделирования несущей способности основной фокус был сделан на применении моделей в научных исследованиях преимущественно в качестве инструмента параметрического исследования для отдельной модели, откалиброванной по экспериментальным данным (т. е. параметры модели были подобраны таким образом, чтобы модель наилучшим образом соответствовала экспериментальным данным). Однако для расширения области применения и стандартизации данного метода необходимо создание универсальных принципов создания моделей и указаний по назначению правил их реализации. В этом направлении будет полезна работа [18], в которой выполнен аналитический обзор параметров численных моделей и представлены общие рекомендации по их выбору и назначению. Также в ближайшем будущем планируется разработка национального стандарта в этом направлении и в 2025 г. ожидается издание нового европейского стандарта EN 1993-1-14 «Проектирование с использованием анализа конечных элементов».

Второй важной проблемой является отсутствие статистических параметров неопределенности численных моделей, необходимых для разработки формата безопасности и калибровки значений частных коэффициентов. Статистические характеристики погрешности численных моделей остаются наименее изученными. Это и послужило мотивом данного исследования, в котором представлены пилотные результаты неопределенности численных моделей. Результаты данного исследования представляют малую часть решаемой проблемы и являются стимулом для дальнейших исследований.

Результаты исследования.

Для изучения погрешности численной модели была составлена база данных на основании результатов, представленных в литературных источниках. Наибольший акцент сделан на численных моделях для потери устойчивости частей поперечного сечения. Одним из мотивов сфокусироваться именно на этих элементах является то, что классические модели являются наиболее сложными и консервативными [19; 20], и, таким образом, использование численных моделей улучшит оценку сопротивления.

Принята гипотеза, что статистические параметры, оцененные таким образом будут минимальными, так как исследователи в своих работах ставили целью разработку таких численных моделей, которые бы наилучшим образом описывали экспериментальные результаты. Следует ожидать, что среднее значение погрешности моделирования будет приближено максимально к единичному значению, а коэффициент вариации будет минимально возможным.

База данных представлена в табл. 1. В столбце таблицы «Источник» содержится ссылка на литературный источник, в котором представлено описание и собственно сама численная модель. В столбце таблицы «На основе» содержится ссылка на литературный источник, в котором представлены результаты экспериментальных исследований. Следует отметить, что базу данных можно разделить на две подгруппы. Первая подгруппа включает данные, в которых физический эксперимент и численная модель выполнены одним и тем же автором или группой авторов. Вторая подгруппа включает данные из разных источников. По этим двум подгруппам можно выполнить анализ чувствительности к наличию полноты исходной информации об экспериментальном исследовании и возможного субъективизма в разработке численной модели для подгонки к экспериментальным данным. Столбец «Шифр» содержит краткое обозначение экспериментального образца согласно оригинальному источнику. В последующих столбцах представлены значения несущей способности, определенные на основе физического эксперимента F_{exp} и на основе компьютерного численного моделирования F_{fea} .

Таблица 1 – Погрешность моделирования на основе литературных источников

№ п/п	Источник	Шифр	F_{exp} , кН	F_{fea} , кН	F_{exp} / F_{fea}	№ п/п	Источник	Шифр	F_{exp} , кН	F_{fea} , кН	F_{exp} / F_{fea}
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1	[1]	B3-3	70.5	77.1	0.915	58	[9]	G3	1412	1412	1.000
2	[1]	B3-7	90.7	88.7	1.022	59	[9]	G4	1591	1500	1.061
3	[1]	B3-12	111.3	115.9	0.961	60	[10]	1	754.2	748.7	1.007
4	[1]	B3-20	130.6	135.2	0.966	61	[10]	2	956.5	915.7	1.045
5	[1]	LS1	808	811	0.996	62	[10]	3	764.8	756.6	1.011
6	[1]	H1-T1	2542	2413	1.053	63	[10]	4	949	941.9	1.008
7	[1]	G8	996	973	1.024	64	[10]	5	1192	1131	1.054
8	[1]	T01-4	535	515.8	1.037	65	[10]	6	1119	1079	1.037
9	[1]	T02-4	480	456.3	1.052	66	[10]	7	1077	1047	1.029
10	[1]	T03-4	500	488.3	1.024	67	[10]	8	1263	1239	1.019
11	[1]	VT03-4	715	649.8	1.100	68	[10]	9	1220	1193	1.023
12	[1]	VT05-4	410	404.7	1.013	69	[10]	10	1090	1074	1.014
13	[1]	PG1-2SP1	205	204.4	1.003	70	[10]	11	1281	1245	1.029
14	[1]	PG1-2SP2	208	206.5	1.007	71	[10]	12	772.4	732.1	1.055
15	[1]	PG3-3SP2	106	109.7	0.966	72	[11]	G1	132.2	143.1	0.924
16	[1]	PG4-3SP2	44	43.6	1.009	73	[11]	G2	158.9	162.1	0.980
17	[1]	PG5-1BSP	79	83.7	0.944	74	[11]	G3	206.3	201.2	1.025
18	[2]	SP1200	1030	1013	1.017	75	[11]	G4	249.2	254.6	0.979
19	[3]	SP1200	1030	1027	1.003	76	[11]	G5	274.2	264.5	1.037
20	[3]	SP600	846	892	0.948	77	[11]	G6	301.4	300.2	1.004
21	[4]	I	659	636.8	1.035	78	[12]	P200	544	540	1.007
22	[4]	II	1034	1075	0.962	79	[12]	P660	660	678	0.973
23	[4]	III	949	909.7	1.043	80	[12]	P808	808	833	0.970
24	[5]	I	659	657	1.003	81	[13]	1a	727	710	1.024
25	[5]	II	1034	1010	1.024	82	[13]	1b	790	778	1.015
26	[5]	III	949	914	1.038	83	[13]	2a	1209	1298	0.931
27	[6]	A15	143.3	142.7	1.004	84	[13]	2b	1250	1300	0.962
28	[6]	A12	154.6	144.3	1.071	85	[13]	G1	1453	1494	0.973
29	[6]	A1	165	166.0	0.994	86	[13]	G2	1569	1524	1.030
30	[6]	A11	199	204.1	0.975	87	[13]	G3	1412	1428	0.989

1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
31	[6]	A2	215	224.5	0.958	88	[13]	G4	1591	1468	1.084
32	[6]	A13	230	242.3	0.949	89	[13]	G1	1453	1408	1.032
33	[6]	A14	165.9	148.0	1.120	90	[13]	G2	1569	1446	1.085
34	[6]	A4	180	156.8	1.147	91	[13]	G3	1412	1355	1.042
35	[6]	A3	183	174.5	1.048	92	[13]	G4	1591	1408	1.130
36	[6]	A17	194.3	193.0	1.006	93	[14]	SO	1934	1991	0.971
37	[6]	A5	225	227.1	0.991	94	[14]	SC	2049	2134	0.960
38	[6]	A6	259	251.7	1.029	95	[14]	UO	2173	2186	0.994
39	[6]	A7	255	281.2	0.907	96	[14]	UC	2087	2125	0.982
40	[6]	A16	244.6	254.7	0.960	97	[18]	G6-T1	516	542	0.952
41	[7]	C-3-0	85.9	86.8	0.990	98	[18]	G7-T1	623	649	0.960
42	[7]	C-3-50	107.6	104.2	1.033	99	[18]	G7-T2	645	649	0.994
43	[7]	C-3-100	102.9	102.9	1.000	100	[18]	G8-T1	378	403	0.938
44	[7]	C-6-150	360.2	358.3	1.005	101	[18]	G8-T2	445	562	0.792
45	[7]	C-6-0	239.9	236.3	1.015	102	[18]	G8-T3	516	562	0.918
46	[7]	C-6-50	275.9	274.4	1.005	103	[18]	2.2	75	75	1.000
47	[7]	C-6-100	300.3	293.5	1.023	104	[18]	US3/5	90	99	0.909
48	[8]	nr700ad15	309.2	319.2	0.969	105	[18]	STG1	60	53	1.132
49	[8]	r700ad15	327.1	354.6	0.923	106	[18]	STG4	35	25	1.400
50	[8]	nr600ad2	260.6	270.8	0.962	107	[18]	RTG1	40	40	1.000
51	[8]	r600ad2	262.9	287.8	0.913	108	[18]	RTG2	41	40	1.025
52	[8]	nr500ad25	228.0	231.3	0.986	109	[18]	MSO	94	100	0.940
53	[8]	r500ad25	236.5	232.5	1.017	110	[18]	CP1/1	88	88	1.000
54	[8]	nr400ad32	217.9	210.4	1.036	111	[18]	S-2	161	158	1.019
55	[8]	r400ad325	215.3	210.5	1.023	112	[18]	S-3	198	208	0.952
56	[9]	G1	1453	1466	0.991	113	[16]	M12	109.2	112.5	0.971
57	[9]	G2	1569	1552	1.011	114	[16]	G7A	242.3	243.8	0.994

Аналитический обзор литературы показал, что качественного и количественного с инженерной степенью точности совпадения результатов эксперимента и численной модели можно добиться при большом разнообразии параметров модели. Однако есть ряд результатов, в которых, даже при попытках наиболее полного воспроизведения физического эксперимента, не удалось достичь близости результатов. Так, в работе [15] результаты численной модели для экспериментально образца G8-T2 отличаются в качественном (деформированная форма отсека в отказ был локализована в другом отсеке) и численном (значение несущей способности отличалось более чем на 20 %) плане. Также один из результатов работы [15] существенно отличался по значению несущей способности от экспериментального, при этом форма деформирования была близкой. Возможной причиной такого отличия может служить очень гибкая стенка испытываемого образца и, как следствие, существенные несовершенства, связанные с геометрической формой стенки и возможными эксцентриситетами приложения нагрузок. Традиционно точность приложения нагрузок (эксцентриситеты приложения, идеализации в направлении приложения и т. д.) относят к вероятностным параметрам моделей эффектов нагрузок и учитывают их при калибровке частных коэффициентов для нагрузок. Это требует особого внимания при анализе экспериментальных данных для идентификации случаев с возможными отклонениями в приложениях сил, чтобы эти неопределенности не перешли на неопределенности численного моделирования.

Статистический анализ данных, представленных в табл. 3, показал, что среднее значение и коэффициент вариации погрешности моделирования равны 1,0 и 4,5 % соответственно. Разде-

ление выборки на две подвыборки по признаку принадлежности экспериментальных данных и результатов компьютерного моделирования к одному или разным источникам показало незначительное изменение среднего и коэффициента вариации.

В общем случае прямое сравнение экспериментальных и численных результатов приводит к оценке неопределенности модели, которая включает в себя неопределенность экспериментального значения. Как правило, погрешность экспериментального значения игнорируется, предполагая, что хорошо спланированный эксперимент точно отражает поведение исследуемой физической структуры. Однако, если в экспериментальных данных имеются существенные различия, для отдельных результатов следует провести детальный анализ причин возможных отклонений.

Основываясь на данных анализа погрешности моделирования, оценим значение частного коэффициента надежности на основе статистического метода. Данный метод является очень условным и приближенным, однако позволяет качественно отразить влияние погрешности моделирования. Сделаем несколько предположений для определения значения коэффициента (достоверность данных предположений должна быть проверена в дальнейших исследованиях). Предположим, что базисная переменная, описывающая погрешность моделирования, является сопутствующей, тогда коэффициент чувствительности теории надежности первого порядка αR можно принять равным $0,4 \cdot 0,8 = 0,32$ [21]. Значение целевого уровня надежности принято согласно базовому документу в области нормирования надежности строительных конструкций СН [21]. Тогда значение частного коэффициента для погрешности моделирования можно определить на основе логнормального закона согласно следующему выражению:

$$\gamma_{fea} = 1 / \mu \times \exp(-\alpha R \times \beta \times V) = 1,02 \quad (1)$$

Результаты данного анализа подтверждают предпосылку большинства исследователей касательно пренебрежения погрешности моделирования для хорошо верифицированных и валидированных моделей, которые используются для параметрических исследований. Однако в работах [2; 5; 6; 9; 14; 16] отмечается, что для некоторых параметров моделей погрешность моделирования может достигать 10 %. В этом случае предпосылка о второстепенном влиянии погрешности моделирования будет не справедлива и тогда значение частного коэффициента будет достигать значений 1,35.

Как видно из представленного анализа, значения частного коэффициента существенно зависят от статистических параметров погрешности моделирования, которые в свою очередь зависят от параметров конечно-элементной модели. Для научно обоснованного назначения статистических параметров погрешности модели и дальнейшего обеспечения надежности конструкций, проектируемых на основе численных моделей, предлагается выполнить следующие задачи:

- сформировать базу данных экспериментальных исследований с наиболее полным описанием параметров тестируемых образцов и процедуры испытания;

- выполнить анализ базы данных на наличие потенциальных выбросов или нерепрезентативных данных, связанных с процедурой испытания (потенциальные неопределенности в описании процесса нагружения, условий раскрепления и т. д.), тестируемыми образцами (масштабные факторы, редкие параметры исполнения), описанием результатов экспериментов, в том числе нечеткие критерии отказов и т. д.;

- выполнить анализ чувствительности статистических параметров погрешности моделирования от разных параметров численных моделей и от набора стратегий численного решения. Следует ожидать, что погрешность моделирования в пределах одной стратегии будет наименьшей. Можно предположить, что какие-то параметры численных моделей будут оказывать существенное влияние на погрешность моделирования, а какие-то только ограниченное влияние. Также научный и практический интерес представляет вопрос какие параметры численных моделей будут зависеть от специфики реализации программного комплекса, а какие могут быть отделены;

- большая сложность применения численных моделей в повседневном проектировании связана с тем, что численная модель представляет собой «черный ящик», который содержит информацию в большинстве случаев известную и понятную только разработчику программы и самой модели, что затрудняет обеспечение точности и достоверности использования численных моделей в повседневном проектировании.

Выводы.

Погрешность моделирования несущей способности строительных конструкций с помощью конечно-элементарных программ практически не изучена. Основная сложность заключается в разнообразии решаемых задач и в отсутствии достаточного набора эталонных значений. По этой причине в большинстве случаев погрешностью (неопределенностью) численной модели пренебрегают, считая численную модель абсолютно точной.

Выполненное исследование показало, что для численных моделей, разработанных в рамках исследовательских задач с высокой степенью верификации (калибровки) моделей на основе экспериментальных данных, среднее значение и коэффициент вариации погрешности моделирования составили 1,0 и 4,5 %. При этом значение частного коэффициента погрешности моделирования равно 1,02 в предпосылке сопутствующего влияния данной базисной переменной. Отмеченные результаты подтверждают сложившуюся практику в отношении пренебрежения неопределенностями моделирования для хорошо откалиброванных моделей. Такая точность численных моделей в основном достигалась за счет подгонки модели к известному экспериментальному значению.

Обзор литературы показал, что результаты моделирования и экспериментов могут отличаться на 7–10 % при качественном совпадении результатов (т. е. поведение элементов под нагрузкой очень близкое, однако численное значение отличается). Можно выделить ряд наиболее важных параметров конечно-элементных моделей, влияющих на неопределенность: описание свойства материала, размер и тип конечного элемента, величина и форма несовершенства. Для «универсальных» численных моделей следует ожидать более высокие значения погрешности моделирования. Отмеченные результаты подчеркивают важность исследований в области оценки погрешности моделирования также и по разработке и стандартизации параметров компьютерных моделей несущей способности.

Литература:

1. Graciano, C. Steel plate girder webs under combined patch loading, bending and shear / C. Graciano, A. Ayestarán // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2013. – Vol. 80. – P. 202–212.
2. Kövesdi, B. Interaction behaviour of steel I-girders Part I: Longitudinally unstiffened girders / B. Kövesdi, J. Alcaine, L. Dunai, B. Braun // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2014. – Vol. 103. – P. 327–343.
3. Braun, B. Stability of steel plates under combined loading / B. Braun // *Mitteilungen. Institut für Konstruktion und Entwurf der Universität Stuttgart*, 2010. – 226 p.
4. Kövesdi, B. Interaction behaviour of steel I-girders; part II: Longitudinally stiffened girders / B. Kövesdi, J. Alcaine, L. Dunai, B. Braun // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2014. – Vol. 103. – P. 344–353.
5. Seitz, M. Tragverhalten längsversteifter Blechträger unter quergerichteter Krafteinleitung (Longitudinally stiffened girder webs subjected to patch loading) / M. Seitz // *Institute for Structural Design. Universität Stuttgart*, 2005. – 186 p.
6. Kovacevic, S. Influence of patch load length on plate girders. Part II: Numerical research / S. Kovacevic, N. Markovic, D. Sumarac, R. Salatic // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2019. – Vol. 158. – P. 213–229.
7. Rogač, M. Influence of patch load length on resistance of I-girders. Part-II: Numerical research / M. Rogač, S. Aleksić, D. Lučić // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2021. – Vol. 176. – P. 106 – 138.
8. Estrada, E. General behaviour and effect of rigid and non-rigid end post in stainless steel plate girders loaded in shear. Part II: Extended numerical study and design proposal / Estrada, E. Real и E. Mirambell, // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2007. – Vol. 63. –P. 985–996.
9. Pavlovčić, L. Shear resistance of longitudinally stiffened panels. Part 1: Tests and numerical analysis of imperfections / L. Pavlovčić, A. Detzel, U. Kuhlmann, D. Beg // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2007. – Vol. 63(3). – P. 337–350.
10. Kövesdi, B. Combined shear and patch loading of girders with corrugated webs. / B. Kövesdi, U. Kuhlmann, L. Dunai // *Periodica Polytechnica Civil Engineering*. – 2010. – Vol. 54 (2). – P. 79–88.

11. Hansen, T. Theory of Plasticity for Steel Structures – Solutions for Fillet Welds, Plate Girders and Thin Plates / Thomas Hansen. Department of Civil Engineering, Technical University of Denmark, Report No. : R-146. – 2006. – 239 p.
12. Gozzi, J. Patch loading resistance of plated girders – ultimate and serviceability limit state : Doctoral Thesis. / Jonas Gozzi. Sweden, Luleå University of Technology, – 2007. ISSN 1402-1544, ISRN LTU-DT-07/30-SE.
13. COMBRI. Competitive Steel and Composite Bridges by Improved Steel Plated Structures. Final Report, RFCS research project RFS-CR-03018, 2007.
14. Sinur, F. Moment–shear interaction of stiffened plate girders – Tests and numerical model verification / Franc Sinur, Darko Beg // Journal of Constructional Steel Research. – 2013. – Vol. 85. – P. 116–129.
15. Glassman, D. A compression model for ultimate postbuckling shear strength / Jonathan D. Glassman, Maria E. Moreyra Garlock // Thin-Walled Structures. – 2016. – Vol. 102. – P. 258-272. – ISSN 0263-8231, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.01.016>.
16. Riahi, F. Shear Buckling Analysis of Steel Flat and Corrugated Web I-girders / F. Riahi, A. Behravesh, M. Y. Fard, A. Armaghani // KSCE Journal of Civil Engineering. – 2018. – Vol. 22 (12). – P. 5058–5073.
17. Тур, В. В. Концепция проектирования строительных конструкций на основе численных моделей сопротивления / В. В. Тур, В. В. Надольский // Строительство и реконструкция. – 2022. – № 6 (104). – С. 78–90.
18. Надольский, В. В. Параметры численных моделей несущей способности для стальных элементов / В. В. Надольский // Строительство и реконструкция. – 2023. – № 1 (1). – С. 43–56.
19. Höglund, T. Simply supported long thin plate I-girders without web stiffeners, subjected to distributed transverse load. / T. Höglund // In Proc. Design of Plate and Box Girders for Ultimate Strength Colloquium, London. – 1971. – P. 85–97.
20. Надольский, В. В. Надежность стального элемента при потере местной устойчивости стенки / В. В. Надольский // Вестник МГСУ. – 2022. – Т. 17. – Вып. 5. – С. 569–579.
21. СН 2.01.01-2019. Основы проектирования строительных конструкций – Введ. 08.09.20. – Минск : Минстройархитектуры, 2020. – 83 с.

References:

1. Graciano, C. Steel plate girder webs under combined patch loading, bending and shear / C. Graciano, A. Ayestarán // Journal of Constructional Steel Research. – 2013. – Vol. 80. – P. 202–212.
2. Kövesdi, B. Interaction behaviour of steel I-girders Part I: Longitudinally unstiffened girders / B. Kövesdi, J. Alcaine, L. Dunai, B. Braun // Journal of Constructional Steel Research. – 2014. – Vol. 103. – P. 327–343.
3. Braun, B. Stability of steel plates under combined loading / B. Braun // Mitteilungen. Institut für Konstruktion und Entwurf der Universität Stuttgart, 2010. – 226 p.
4. Kövesdi, B. Interaction behaviour of steel I-girders; part II: Longitudinally stiffened girders / B. Kövesdi, J. Alcaine, L. Dunai, B. Braun // Journal of Constructional Steel Research. – 2014. – Vol. 103. – P. 344–353.
5. Seitz, M. Tragverhalten längsversteifter Blechträger unter quergerichteter Krafteinleitung (Longitudinally stiffened girder webs subjected to patch loading) / M. Seitz // Institute for Structural Design. Universität Stuttgart, 2005. – 186 p.
6. Kovacevic, S. Influence of patch load length on plate girders. Part II: Numerical research / S. Kovacevic, N. Markovic, D. Sumarac, R. Salatic // Journal of Constructional Steel Research. – 2019. – Vol. 158. – P. 213–229.
7. Rogač, M. Influence of patch load length on resistance of I-girders. Part-II: Numerical research / M. Rogač, S. Aleksić, D. Lučić // Journal of Constructional Steel Research. – 2021. – Vol. 176. – P. 106–138.
8. Estrada, E. General behaviour and effect of rigid and non-rigid end post in stainless steel plate girders loaded in shear. Part II: Extended numerical study and design proposal / Estrada, E. Real и E. Mirambell, // Journal of Constructional Steel Research. – 2007. – Vol. 63. –P. 985–996.
9. Pavlovčič, L. Shear resistance of longitudinally stiffened panels. Part 1: Tests and numerical analysis of imperfections / L. Pavlovčič, A. Detzel, U. Kuhlmann, D. Beg // Journal of Constructional Steel Research. – 2007. – Vol. 63 (3). – P. 337–350.

10. Kövesdi, B. Combined shear and patch loading of girders with corrugated webs. / B. Kövesdi, U. Kuhlmann, L. Dunai // *Periodica Polytechnica Civil Engineering*. – 2010. – Vol. 54(2). – P. 79–88..
11. Hansen, T. Theory of Plasticity for Steel Structures – Solutions for Fillet Welds, Plate Girders and Thin Plates / Thomas Hansen. Department of Civil Engineering, Technical University of Denmark, Report No. : R-146. – 2006. – 239 p.
12. Gozzi, J. Patch loading resistance of plated girders – ultimate and serviceability limit state : Doctoral Thesis. / Jonas Gozzi. Sweden, Luleå University of Technology, – 2007. ISSN 1402-1544, ISRN LTU-DT-07/30-SE.
13. COMBRI. Competitive Steel and Composite Bridges by Improved Steel Plated Structures. Final Report, RFCS research project RFS-CR-03018, 2007.
14. Sinur, F. Moment–shear interaction of stiffened plate girders – Tests and numerical model verification / Franc Sinur, Darko Beg // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2013. – Vol. 85. – P. 116–129.
15. Glassman, D. A compression model for ultimate postbuckling shear strength / Jonathan D. Glassman, Maria E. Moreyra Garlock // *Thin-Walled Structures*. – 2016. – Vol. 102. – P. 258–272. – ISSN 0263-8231, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.01.016>.
16. Riahi, F. Shear Buckling Analysis of Steel Flat and Corrugated Web I-girders / F. Riahi, A. Behravesh, M. Y. Fard, A. Armaghani // *KSCE Journal of Civil Engineering*. – 2018. – Vol. 22(12). – P. 5058-5073.
17. Tur, V. V. *Koncepciya proektirovaniya stroitel'nyh konstrukcij na osnove chislennyh modelej soprotivleniya* [The concept of designing building structures based on numerical models of resistance] / V. V. Tur, V. V. Nadolski // *Construction and reconstruction*. – 2022. – № 6 (104). – Pp. 78–90. (rus).
18. Nadolski, V. V. *Parametry chislennyh modelej nesushchej sposobnosti dlya stal'nyh elementov* [Parameters of numerical models of bearing capacity for steel elements] / V. V. Nadolski // *Construction and reconstruction*. – 2023. – № 1 (1). – Pp. 43–56. (rus).
19. Höglund, T. Simply supported long thin plate I-girders without web stiffeners, subjected to distributed transverse load. / T. Höglund // In Proc. Design of Plate and Box Girders for Ultimate Strength Colloquium, London. – 1971. – P. 85–97.
20. Nadolski, V. V. *Nadezhnost' stal'nogo elementa pri potere mestnoj ustojchivosti stenki* [Reliability of a steel element with loss of local wall stability] / V. V. Nadolski // *Bulletin of MGSU*. – 2022. – Vol. 17. – Issue 5. – pp. 569–579. (rus).
21. SN 2.01.01-2019. *Osnovy proektirovaniya stroitel'nyh konstrukcij* [Basis of structural design]. – Minsk : Ministry of Construction and Architecture, 2020. – 83 p. (rus).