

## УЧЕТ ВЛИЯНИЯ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ В КОНТАКТНОЙ ЗОНЕ БАЛОЧНЫХ ПЛИТ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ АНАЛИЗЕ НДС ПЛИТЫ

О. В. КОЗУНОВА<sup>1</sup>, А. Г. ПУСЕНКОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник ПКО, доцент кафедры «Архитектура и строительство» ПГС,

УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель.

Докторант БНТУ, доцент кафедры «Математические методы в строительстве» ФТК, Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

<sup>2</sup> магистр, аспирант кафедры «Архитектура и строительство» ПГС, УО «Белорусский государственный университет транспорта».

Главный инженер завода КПД ОАО «Гомельский ДСК», Гомель, Беларусь

**Аннотация.** В статье представлена система взаимодействия балочной плиты и упругого основания с учетом касательных напряжений в контактной зоне. Для решения рассматриваемой задачи авторами применяется вариационно-разностный метод (ВРМ), который реализуется в перемещениях через конечно-разностные соотношения теории упругости при использовании в решении функционала полной потенциальной энергии деформации системы, состоящей из плиты, упругого основания и зоны контактного взаимодействия.

Предлагаемая методика статического расчета позволяет определить внутренние усилия в балочной плите и осадки упругого основания под плитой с учетом касательных напряжений в контактной зоне, достаточно полно исследовать эту зону взаимодействия балочной плиты с упругим основанием, а также получить полную картину влияния касательных напряжений на напряженно-деформированное состояние упругого основания. Численная реализация ВРМ производится методом конечных разностей в вариационной постановке в программном пакете Mathematica.

**Ключевые слова:** балочная плита, упругое основание, силы сцепления.

## ACCOUNT FOR THE INFLUENCE OF COUPLING FORCES IN THE CONTACT ZONE OF BEAM PLATES ON AN ELASTIC FOUNDATION IN THE ANALYSIS OF THE STATUS OF A PLATE

O. V. KOZUNOVA<sup>1</sup>, A. G. PUSENKOV<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Leading Researcher of PKO, Associate Professor of the Department "Architecture and Construction" PGS, EE "Belarusian State University of Transport", Gomel.

Doctoral student of BNTU,

Associate Professor of the Department of Mathematical Methods in Construction, FTK, Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

<sup>2</sup> Magistr, postgraduate student of the department "Architecture and construction" PGS, Educational Establishment "Belarusian State University of Transport".

Chief Engineer of the KPD Plant of JSC "Gomel DSK", Gomel, Belarus

**Abstract.** The article presents a system of interaction between a beam plate and an elastic foundation, taking into account shear stresses in the contact zone. To solve the problem under consideration, the authors use the variational-difference method (VRM), which is implemented in displacements through the finite-difference relations of the theory of elasticity when using the total potential energy of deformation of the system, consisting of a plate, an elastic base and a zone of contact interaction, in solving the functional.

The proposed method of static calculation makes it possible to determine the internal forces in the beam slab and the settlements of the elastic foundation under the slab, taking into account the tangential stresses in the contact zone, to study this zone of interaction of the beam slab with the elastic foundation quite fully, and also to get a complete picture of the effect of tangential stresses on the stress-

strain state elastic base. The numerical implementation of the CRM is carried out by the finite difference method in the variational setting in the Mathematica software package.

**Keywords:** beam slab, elastic foundation, adhesion forces.

### Введение.

Из-за разнообразия конструктивных решений плит и грунтовых условий в настоящее время нет возможности дать строгое решение пространственной задачи. В связи с этим допускают использование приближенного решения, согласно которому влияние жесткости балочной плиты и реактивных касательных напряжений на расчетные величины плитного фундамента определяют строго в плоской постановке. Затем результаты такого расчета используют для приближительной оценки влияния указанных факторов на результаты расчетов по действительной пространственной схеме, выполненных по существующим методам без учета этих факторов [1].

Взаимодействие балочной плиты и упругого основания ленточного фундамента с учетом касательных напряжений в зоне контактного взаимодействия по сути является разновидностью контактных задач теории упругости [2], решение которой возможно в нелинейной постановке при работе упругих сред в зоне небольших упруго-пластических деформаций, т. е. с учетом физической нелинейности.

Учет нелинейности деформирования балочной плиты позволяет увеличить, как правило, допустимую нагрузку на плиту за счет перераспределения и уменьшения максимальных значений усилий, но при этом обнаруживается резкое возрастание

неравномерности осадок. Данные нелинейного расчета позволяют выполнить достоверную оценку работы конструкции по предельным состояниям эксплуатационной пригодности.

Постановка задачи. Балочная плита ленточных фундамента неглубокого заложения находится на упругом однородном слое глубиной (толщиной)  $H$  с приложенной внешней нагрузкой  $q(x)$ . Параметры плиты следующие: высота плиты  $h$ , ширина плиты  $2l$ , изгибная жесткость  $EJ$ .

Вводим *гипотезы (предположения) и допущения* для расчета балочных плит на упругом основании:

1. Допущения и гипотезы теории упругости справедливы для рассчитываемой области упругого основания.
2. Допущения и гипотезы плоского изгиба балки (плиты) справедливы для плиты.
3. При моделировании контактной зоны между балочной плитой и основанием могут возникать и растягивающие, и сжимающие напряжения, силы трения при моделировании учитываются, также учитываются касательные напряжения в зоне контактного взаимодействия.

Алгоритм решения задачи. Для решения рассматриваемой задачи авторами применяется вариационно-разностный метод (ВРМ) [3], который реализуется в перемещениях через конечно-разностные соотношения теории упругости (случай плоской деформации) при использовании в решении функционала полной потенциальной энергии деформации системы, состоящей из плиты, упругого основания и зоны контактного взаимодействия.

Основание при расчете заменяется прямоугольной расчетной областью, на границах которой перемещения равны нулю; в контактной зоне справедливо равенство осадок основания прогибам плиты.

Основание аппроксимируется разбивочной сеткой конечных размеров с постоянным шагом по осям (рис. 1).

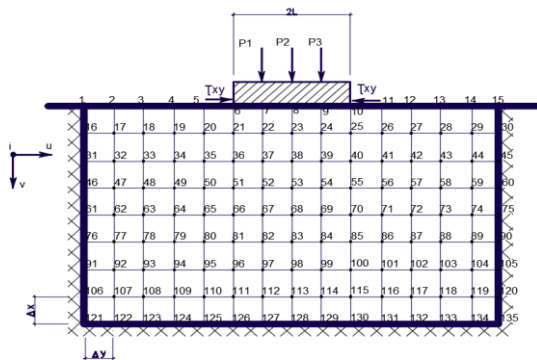


Рисунок 1 – Разбивочная сетка расчетной области

За неизвестные принимаем:  $u_i(x,y)$ ,  $v_i(x,y)$  – компоненты вектора перемещения  $i$ -той узловой точки основания, направленные вдоль осей  $X$  и  $Y$  соответственно;  $p_y^{(i)}(x,y)$  – реактивные давления в зоне контакта балочной плиты с основанием.

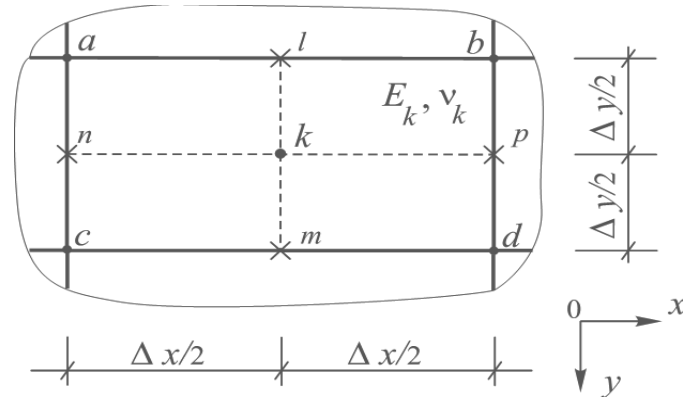


Рисунок 2 – Прямоугольная ячейка метода конечных разностей

Соотношение Коши в выражениях деформаций в точке  $k$

$$\varepsilon_x^{(k)} = \frac{\partial u_k}{\partial x} = \left( \frac{u_b + u_d}{2} - \frac{u_a + u_c}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{u_b + u_d - u_a - u_c}{2 \Delta x}; \quad (1)$$

$$\varepsilon_y^{(k)} = \frac{\partial v_k}{\partial y} = \left( \frac{v_c + v_d}{2} - \frac{v_a + v_b}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta y} = \frac{v_c + v_d - v_a - v_b}{2 \Delta y};$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^{(k)} &= \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} = \left( \frac{u_c + u_d}{2} - \frac{u_a + u_b}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta y} + \left( \frac{v_b + v_d}{2} - \frac{v_a + v_c}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \\ &= \frac{u_c + u_d - u_a - u_b}{2 \Delta y} + \frac{v_b + v_d - v_a - v_c}{2 \Delta x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Энергия деформаций прямоугольной ячейки

$$U_{i,j}^{(k)} = \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)} \left[ \frac{\nu_k}{1 - 2\nu_k} (\varepsilon_x^{(k)} + \varepsilon_y^{(k)})^2 + (\varepsilon_x^{(k)})^2 + (\varepsilon_y^{(k)})^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^{(k)})^2 \right] \Delta x \Delta y. \quad (3)$$

Величина полной потенциальной энергии балочной плиты на упругом основании  $\mathcal{E}$  состоит из энергии деформации плиты  $U$ , энергии деформации упругого основания  $A$  и работы внешней нагрузки  $\Pi$ :

$$\mathcal{E} = U + A + \Pi. \quad (4)$$

Хотелось бы отметить, что при составлении соотношения полной энергии деформации упругого основания  $A$  в формуле (4) авторами был выполнен учет касательных напряжений в контактной зоне в дополнительном слагаемое: энергия сцепления в контактной зоне плиты с основанием, т. е.

$$A = U_f + U_t, \quad (5)$$

где  $U_f$  – энергия деформации упругого основания (плоская деформация) [3];  $U_t$  – энергия сцепления в контактной зоне плиты с основанием.

Энергия деформаций упругого основания

$$U_f = \sum_{j=1}^{MY-1} \left( \sum_{i=1}^{NX-1} U_{i,j}^{(k)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{MY-1} \left( \sum_{i=1}^{NX-1} \left( \frac{E_k}{1+v_k} \cdot \left[ \frac{v_k}{1-2v_k} \cdot \left( \frac{1}{2\Delta x} (u_b + u_d - u_a - u_c) + \frac{1}{2\Delta y} (v_c + v_d - v_a - v_b) \right)^2 + \left( \frac{1}{2\Delta x} (u_b + u_d - u_a - u_c) \right)^2 + \left( \frac{1}{2\Delta y} (v_c + v_d - v_a - v_b) \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\Delta y} (u_c + u_d - u_a - u_b) + \frac{1}{2\Delta x} (v_b + v_d - v_a - v_c) \right)^2 \right] \Delta x \Delta y \right) \right), \quad (6)$$

где  $NX$  – число узлов по оси  $X$ ; и  $MY$  – число узлов по оси  $Y$ .

Энергия сцепления в контактной зоне

$$U_t = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{K-1} EA_{i=11+1} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right)^2, \quad (7)$$

где  $EA$  – жесткость плиты при продольных деформациях.

Энергия деформации плиты при изгибе

$$U = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{K-1} EJ_{i=11+1} \cdot \left( \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta x^2} \right)^2. \quad (8)$$

Потенциал внешней нагрузки

$$\Pi = - \sum_{i=1}^{K-1} q_i(x) v_i \Delta x. \quad (9)$$

Вначале решается задача в линейной постановке. По вычисленным значениям перемещений  $i$ -той узловой точки  $u_i(x)$ ,  $v_i(y)$ , используя геометрические уравнения Коши и конечно-разностные соотношения (1, 2), определяется *интенсивность деформаций* и *интенсивность напряжений* в центрах ячеек (см. формулы теории упругости).

Имея значения напряжений и перемещений, полученных в результате решения задачи в первом приближении, определяется *касательный* или *секущий модули деформации* для каждой ячейки и задача решается во втором и последующих приближениях, с учетом изгибной жесткости балочной плиты.

Итерационный процесс заканчивается, как только разница между последующим и предыдущим приближением исследуемой функции будет соответствовать требуемой точности решения задачи.

Решение задачи. Для решения задачи составлена расчетная программа Mathematica 10.0 и проведена ее числовая апробация для однослойного основания (песок средней плотности) –  $\sigma_y = 0,2 \text{ МПа}$   $v = 0,3$ ;  $E = 20 \text{ МПа}$ ; железобетонная плита фундамента (бетон марки С20/25) –  $R = 90\,000 \text{ Н}$ ;  $l = 1,6 \text{ м}$ ,  $h = 0,2 \text{ м}$ ;  $E_\sigma = 2,35 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ . Определяем критерий сходимости 4 %.

На рис. 3 приведены результаты расчета осадок основания и плиты, с учетом касательных напряжений и без них в контактной зоне для первых двух итераций, а так же линейный расчет для сравнения. Сходимость составила 3,2 %.

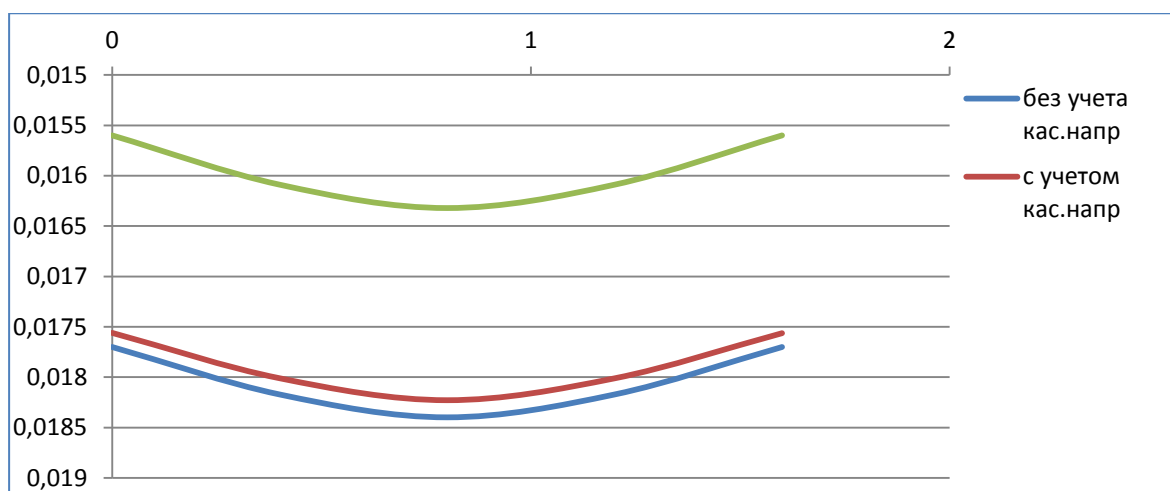


Рисунок 3 – График сравнения результатов осадок основания и плиты с учетом касательных напряжений и без них в контактной зоне для первых трех итераций, а так же линейного расчета

На рис. 4 представлена эпюра изгибающих моментов балочной плиты с учетом касательных напряжений и без них в контактной зоне для первых двух итераций. Эпюры реактивных давлений и поперечных сил почти полностью между собой совпадают.

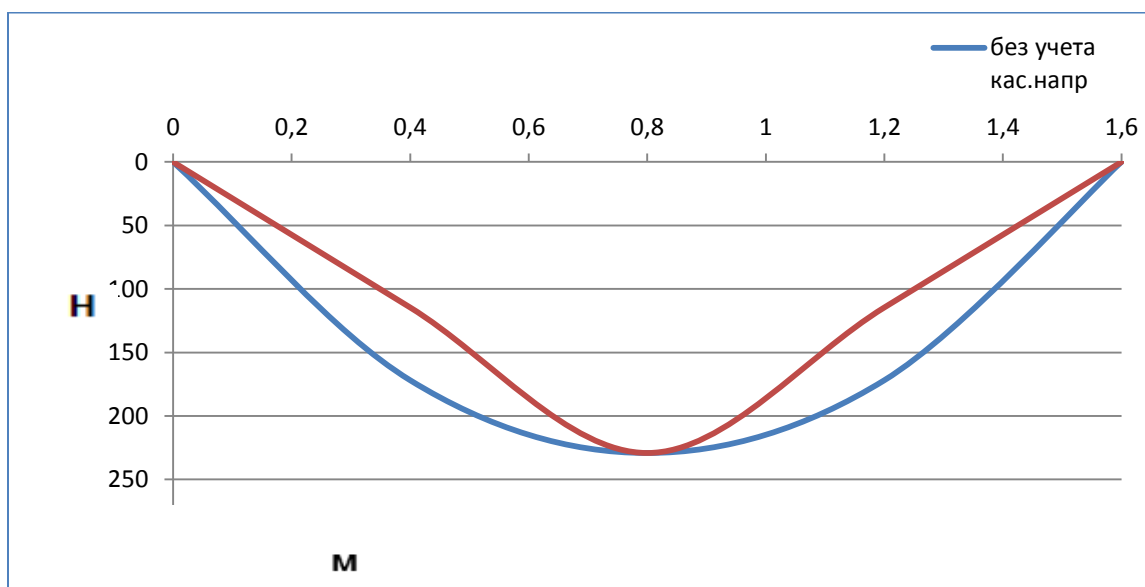


Рисунок 4 – Эпюра изгибающих моментов

#### Выводы.

Предложенная авторами методика расчета системы балочной плиты с однородным упругим основанием вариационно-разностным методом с использованием конечно-разностных уравнений полной потенциальной энергии, позволяет определить внутренние усилия в балочной плите и осадки упругого основания под плитой, более полно исследовать эту зону биконтактного взаимодействия с учетом касательных напряжений.

Полученные результаты уменьшения осадок (рис. 2) и изменения формы изогнутой оси эпюры изгибающих моментов (рис. 3) говорит о влиянии касательных напряжений, что так же подтверждается в работах Гудушаури И. И. [8].

#### Литература:

1. Руководство по проектированию плитных фундаментов каркасных зданий и сооружений башенного типа. Разработано к СНиП II-15-74. М.: Стройиздат., 1984. – 265 с.
2. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности: уч. для строит. спец. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2002. – 400 с.

3. Козунова, О. В. Особенности проектирования плитных фундаментов на многослойных основаниях со слабыми слоями грунтов / О. В. Козунова // Рекомендации по проектированию и устройству рациональных фундаментов на основаниях, сложенных озерно-ледниковыми и лесовидными грунтами : Р 5.01.056.09 : введ. 01.10.09. – Минск : Стройтехнорм, 2009. – Гл. 8. – С. 39–47.

4. Статический анализ системы «балочная плита – нелинейно-упругое неоднородное основание» вариационно-разностным методом: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук: специальность 05.23.17 Строительная механика / Козунова О. В.

5. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Ма-ликова, В. И. Соломин. – М.: Стройиздат, 1984. – 679 с.

6. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упру-гом основании / С. В. Босаков. – Минск: БНТУ, 2002. – 127 с.

7. Яголковский С. Н. Влияние учета сцепления упругого слоя с подстилающим основанием на результаты расчета балок // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1969. – № 4. – С. 3–5.

8. Гудушаури И. И. Расчет фундаментных полос на действие симметричных и обратносимметричных нагрузок с учетом касательных напряжений на поверхности контакта. «Известия АН СССР». – Механика и машиностроение, 1960. – № 6.

#### References:

1. Guidelines for the design of slab foundations for frame buildings and tower-type structures. Developed for SNiP II-15-74. М.: Stroyizdat., 1984. – 265 p.

2. Alexandrov, A. V. Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity: Uch. for building. specialist. universities / A. V. Aleksandrov, V. D. Potapov. – 2nd ed., Rev. – М.: Higher. school, 2002. – 400 p.

3. Kozunova, O. V. Features of designing slab foundations on multilayer foundations with weak soil layers / O. V. Kozunova // Recommendations for the design and installation of rational foundations on foundations composed of lacustrine-glacial and loess-like soils : R 5.01.056.09 : introduction. 01.10.09. – Minsk: Stroytekhnorm, 2009. – Ch. 8. – P. 39–47.

4. Static analysis of the system "beam slab – non-linear elastic inhomogeneous foundation" by the variational-difference method: thesis for the degree of candidate of technical sciences: specialty 05.23.17 Structural mechanics / Kozunova O. V.

5. Gorbunov-Posadov, M. I. Calculation of structures for elastic foundation / M. I. Gorbunov-Posadov, T. A. MaLikova, V. I. Solomin. – М.: Stroyizdat, 1984. – 679 p.

6. Bosakov, S. V. Static calculations of plates on elasticbasis / S. V. Bosakov. – Minsk: BNTU, 2002. – 127 p.

7. Yagolkovsky S. N. Influence of taking into account the adhesion of the elastic layer with the underlying base on the results of the calculation of beams.// Bases, foundations and soil mechanics. – 1969. – No. 4. – P. 3–5.

8. Gudushauri I. I. Calculation of foundation strips for the action of symmetrical and inversely symmetrical loads, taking into account shear stresses on the contact surface. "News of the Academy of Sciences of the USSR". – Mechanics and Engineering, 1960. – No. 6.