УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

к.т.н. Хвисевич В. М., к.ф.-м.н. Веремейчик А. И., Мазырка М. В.

Брестский государственный технический университет, Брест

Введение. Развитие современной техники предъявляет повышенные требования к прочностным характеристикам конструктивных элементов механизмов, машин и сооружений, их материалоемкости и геометрическим параметрам, что требует создания новых методов расчета, наиболее полно и адекватно учитывающих свойства реальных материалов. Современные конструкционные материалы применяются в широком диапазоне механических и температурных воздействий. Для описания поведения деформируемых твердых тел при указанных воздействиях во многих случаях необходимо построение сложных моделей задач механики деформируемого твердого тела. Решение термоупругих задач для сред с усложненными свойствами является одним из наиболее актуальных направлений современной механики. Поведение некоторых материалов, обладающих анизотропией свойств, существенно зависит от действующих на них нагрузок, поэтому необходимо построение на основе общих соотношений термомеханических моделей данных материалов. В настоящее время наметился существенный разрыв между количеством общих подходов к решению такого рода задач и доведением их до конкретных моделей и расчетов.

Хотя число работ, в которых рассматривается решение некоторых осесимметричных задач для тел вращения, обладающих цилиндрической анизотропией, велико, например, [1–9]. недостаточно внимания уделяется решению термоупругих задач для анизотропных сред методом граничных интегральных уравнений. Целью работы является разработка методики решения краевой задачи термоупругости цилиндрически анизотропной среды, используя теорию потенциала.

1. Постановка задачи. Математическая модель задачи в перемещениях. Для цилиндрически анизотропной среды справедливы следующие группы разрешающих уравнений:

– геометрические соотношения Коши:

$$\varepsilon_{\rho\rho}=\frac{\partial u}{\partial\rho},\ \ \varepsilon_{\vartheta\vartheta}=\frac{u}{\rho},\ \ \varepsilon_{zz}=\frac{\partial z}{\partial z},\ \ \varepsilon_{\rho z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial\rho}\right); \tag{1}$$

– физические уравнения:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{\rho\rho}=\frac{\sigma_{\rho\rho}}{\varepsilon_{\rho}}-\frac{\nu_{\vartheta\rho}}{E_{\vartheta}}\sigma_{\vartheta\vartheta}-\frac{\nu_{z\rho}}{E_z}\sigma_{zz}+\alpha_{\rho}T,\qquad \varepsilon_{\vartheta\vartheta}=-\frac{\nu_{\rho\vartheta}}{E_{\rho}}\sigma_{\rho\rho}+\frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\varepsilon_{\vartheta}}-\frac{\nu_{z\vartheta}}{E_z}\sigma_{zz}+\alpha_{\vartheta}T,\\ \varepsilon_{zz}=-\frac{\nu_{\rho z}}{E_{\rho}}\sigma_{\rho\rho}-\frac{\nu_{\vartheta z}}{E_{\vartheta}}\sigma_{\vartheta\vartheta}+\frac{\sigma_{zz}}{\varepsilon_z}+\alpha_z T,\qquad \varepsilon_{\rho z}=\frac{\sigma_{\rho z}}{2G_{\rho z}};\end{gathered} \tag{2}$$

где ν_{ij}, E_i – упругие постоянные, α_i – температурные коэффициенты линейного расширения цилиндрически анизотропной термоупругой среды.

Из (2) получим:

$$\begin{aligned}&\sigma_{\rho\rho}=C_{11}\varepsilon_{\rho\rho}+C_{12}\varepsilon_{\vartheta\vartheta}+C_{13}\varepsilon_{zz}-c_{\rho}T,\quad \sigma_{\vartheta\vartheta}=C_{12}\varepsilon_{\rho\rho}+C_{22}\varepsilon_{\vartheta\vartheta}+C_{23}\varepsilon_{zz}-c_{\vartheta}T,\\&\sigma_{zz}=C_{13}\varepsilon_{\rho\rho}+C_{23}\varepsilon_{\vartheta\vartheta}+C_{33}\varepsilon_{zz}-c_{z}T,\quad \sigma_{\rho z}=2C_{44}\varepsilon_{\rho z},\end{aligned}\tag{3}$$

где коэффициенты C_i определяются по формулам:

$$c_{\rho}=C_{11}\alpha_{\rho}+C_{12}\alpha_{\vartheta}+C_{13}\alpha_{z},\quad c_{\vartheta}=C_{12}\alpha_{\rho}+C_{22}\alpha_{\vartheta}+C_{23}\alpha_{z},\quad c_{z}=C_{13}\alpha_{\rho}+C_{23}\alpha_{\vartheta}+C_{33}\alpha_{z}.\tag{4}$$

Уравнения равновесия для бесконечно малого объема сплошной среды для осесимметричных задач представим в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\rho}+\dfrac{\partial\sigma_{\rho z}}{\partial z}+\dfrac{\sigma_{\rho\rho}-\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\rho}+q_{\rho}=0,\\[2mm]\dfrac{\partial\sigma_{\rho z}}{\partial\rho}+\dfrac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\dfrac{\sigma_{\rho z}}{\rho}+q_{z}=0.\end{cases}\tag{5}$$

Система уравнений (1, 3, 5) содержит десять неизвестных искомых функций.

Сформулируем граничные условия для стационарной термоупругой задачи с краевыми условиями силового типа. Температура T в приведенной системе дифференциальных уравнений рассматривается как известная функция, определенная по результатам решения краевой задачи теплопроводности. Поэтому под T в уравнениях (3) можно понимать для задачи Дирихле потенциал двойного слоя $T(x)=\oint\limits_S\chi(y)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\dfrac{1}{r}\mathrm{d}S_y$ и для задачи Неймана потенциал простого слоя $T(x)=\oint\limits_S\chi(y)\dfrac{1}{r}\mathrm{d}S_y$, где плотность потенциала определяется по результатам решения соответствующих интегральных уравнений теплопроводности [10, 11].

Граничные условия представим в виде:

$$\begin{cases}\sigma_{\rho\rho}n_{\rho}+\sigma_{\rho z}n_{z}=f_{\rho},\\\sigma_{\rho z}n_{\rho}+\sigma_{zz}n_{z}=f_{z}.\end{cases}\tag{6}$$

Уравнения (1, 3, 5) и граничные условия (6) дают формулировку задачи термоупругости. Редуцируем систему уравнений (1, 3, 5) к системе 2-х уравнений относительно неизвестных перемещений u, w:

$$\begin{cases}C_{11}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\rho}+\dfrac{u}{\rho}\right)+C_{44}\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}+\left(C_{13}+C_{44}\right)\dfrac{\partial^2w}{\partial\rho\,\partial z}+\dfrac{C_{13}-C_{23}}{\rho}\dfrac{\partial w}{\partial\rho}+\left(C_{11}-C_{22}\right)\dfrac{u}{\rho^2}+q_{\rho}=\\[2mm]=c_{\rho}\dfrac{\partial T}{\partial\rho}+\dfrac{c_{\rho}-c_{\vartheta}}{\rho}T,\\[2mm]C_{33}\dfrac{\partial^2w}{\partial z^2}+C_{44}\left(\dfrac{\partial}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho}\right)\dfrac{\partial w}{\partial\rho}+\left(C_{13}+C_{44}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho}\right)\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{C_{13}-C_{23}}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial z}+q_{z}=c_{z}\dfrac{\partial T}{\partial z}.\end{cases}\tag{7}$$

Выразим граничные условия через перемещения:

$$\begin{cases} \left(C_{11}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + C_{12}\dfrac{u}{\rho} + C_{13}\dfrac{\partial w}{\partial z} - c_\rho T \right) n_\rho + C_{44}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial \rho} \right) n_z = f_\rho, \\ C_{44}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial \rho} \right) n_\rho + \left(C_{13}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + C_{23}\dfrac{u}{\rho} + C_{33}\dfrac{\partial w}{\partial z} - c_z T \right) n_z = f_z. \end{cases} \tag{8}$$

Краевая задача термоупругости (7), (8) может быть приведена к краевой задаче теории упругости, для чего достаточно ввести фиктивные, зависящие от температуры T объемные нагрузки, распределенные на граничной поверхности, которые представим в виде:

$$\begin{aligned} q_\rho^{\Phi} &= -c_\rho \frac{\partial T}{\partial \rho} - \frac{c_\rho}{\rho} T + \frac{c_\vartheta}{\rho} T + q_\rho, \\ q_z^{\Phi} &= -c_z \frac{\partial T}{\partial z} + q_z, \end{aligned} \tag{9}$$

а формулы для фиктивных нагрузок на поверхности:

$$f_\rho^{\Phi} = c_\rho T n_\rho + f_\rho, \quad f_z^{\Phi} = c_z T n_z + f_z. \tag{10}$$

Тогда тогда дифференциальные уравнения (7) можно представить в виде уравнений теории упругости:

$$\begin{cases} C_{11}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{u}{\rho} \right) + C_{44}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(C_{13} + C_{44} \right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial \rho\, \partial z} + \dfrac{C_{13} - C_{23}}{\rho}\dfrac{\partial w}{\partial \rho} + \left(C_{11} - C_{22} \right)\dfrac{u}{\rho^2} + q_\rho^{\Phi} = 0, \\ C_{33}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + C_{44}\left(\dfrac{\partial}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho} \right)\dfrac{\partial w}{\partial \rho} + \left(C_{13} + C_{44} \right)\left(\dfrac{\partial}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho} \right)\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{C_{13} - C_{23}}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial z} + q_z^{\Phi} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} \left(C_{11}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + C_{12}\dfrac{u}{\rho} + C_{13}\dfrac{\partial w}{\partial z} \right) n_\rho + C_{44}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial \rho} \right) n_z = f_\rho^{\Phi}, \\ C_{44}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial \rho} \right) n_\rho + \left(C_{13}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + C_{23}\dfrac{u}{\rho} + C_{33}\dfrac{\partial w}{\partial z} \right) n_z = f_z^{\Phi}. \end{cases} \tag{12}$$

Напряжения в краевой задаче (11, 12) определяются по формулам закона Гука:

$$\begin{aligned} &\sigma_{\rho\rho}^{\Phi} = C_{11}\varepsilon_{\rho\rho} + C_{12}\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + C_{13}\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta}^{\Phi} = C_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + C_{22}\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + C_{23}\varepsilon_{zz}, \\ &\sigma_{zz}^{\Phi} = C_{13}\varepsilon_{\rho\rho} + C_{23}\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + C_{33}\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{\rho z} = 2C_{44}\varepsilon_{\rho z}. \end{aligned} \tag{13}$$

Очевидно. что напряжения (13) не будут равны напряжениям (3) термоупругой задачи, хотя перемещения u, w в обоих случаях будут одинаковыми, определяемыми из (7) при граничных условиях (8).

2. Решение задачи в напряжениях. Система уравнений (11) при обозначениях (13) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma^{\Phi}_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \dfrac{\partial \sigma^{\Phi}_{\rho z}}{\partial z} + \dfrac{\sigma^{\Phi}_{\rho\rho} - \sigma^{\Phi}_{\vartheta\vartheta}}{\rho} + q^{\Phi}_{\rho} = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma^{\Phi}_{\rho z}}{\partial \rho} + \dfrac{\partial \sigma^{\Phi}_{zz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma^{\Phi}_{\rho z}}{\rho} + q^{\Phi}_{z} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Граничные условия (12) примут вид:

$$\begin{cases} \sigma^{\Phi}_{\rho\rho} n_{\rho} + \sigma^{\Phi}_{\rho z} n_z = f^{\Phi}_{\rho}, \\ \sigma^{\Phi}_{\rho z} n_{\rho} + \sigma^{\Phi}_{zz} n_z = f^{\Phi}_{z}. \end{cases} \tag{15}$$

Уравнения (14) решаются совместно с (13) и (1) с учетом граничных условий (15).

Исключим температуру из дифференциальных уравнений (14) и граничных условий (15). Для этого рассмотрим частное решение σ^{T}_{ij}:

$$\sigma^{T}_{\rho\rho} = c_{\rho} T,\ \sigma^{T}_{\vartheta\theta} = c_{\vartheta} T,\ \sigma^{T}_{zz} = c_z T,\ \sigma^{T}_{\rho z} \equiv 0. \tag{16}$$

Частное решение удовлетворяет дифференциальным уравнениям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma^{T}_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \dfrac{\partial \sigma^{T}_{\rho z}}{\partial z} + \dfrac{\sigma^{T}_{\rho\rho} - \sigma^{T}_{\vartheta\vartheta}}{\rho} = c_{\rho} \dfrac{\partial T}{\partial \rho} + c_{\rho} \dfrac{T}{\rho} - c_{\vartheta} \dfrac{T}{\rho}, \\ \dfrac{\partial \sigma^{T}_{\rho z}}{\partial \rho} + \dfrac{\partial \sigma^{T}_{zz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma^{T}_{\rho z}}{\rho} = c_z \dfrac{\partial T}{\partial z}. \end{cases} \tag{17}$$

и граничным условиям:

$$\begin{cases} \sigma^{T}_{\rho\rho} n_{\rho} + \sigma^{T}_{\rho z} n_z = c_{\rho} T n_{\rho}, \\ \sigma^{T}_{\rho z} n_{\rho} + \sigma^{T}_{zz} n_z = c_z T n_z. \end{cases} \tag{18}$$

Представим решение σ^{y}_{ij} фиктивной упругой задачи (14), (15) в виде суммы частного решения σ^{T}_{ij} и решения σ^{0}_{ij} некоторой упругой задачи:

$$\sigma^{\Phi}_{\rho\rho} = \sigma^{0}_{\rho\rho} + \sigma^{T}_{\rho\rho},\ \ \sigma^{\Phi}_{\vartheta\vartheta} = \sigma^{0}_{\vartheta\vartheta} + \sigma^{T}_{\vartheta\vartheta},\ \ \sigma^{\Phi}_{zz} = \sigma^{0}_{zz} + \sigma^{T}_{zz},\ \ \sigma^{\Phi}_{\rho z} = \sigma^{0}_{\rho z} + \sigma^{T}_{\rho z}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (14), получим для σ^{0}_{ij} с учетом (17):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma^{0}_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \dfrac{\partial \sigma^{0}_{\rho z}}{\partial z} + \dfrac{\sigma^{\Phi}_{\rho\rho} - \sigma^{0}_{\vartheta\vartheta}}{\rho} + q_{\rho} = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma^{0}_{\rho z}}{\partial \rho} + \dfrac{\partial \sigma^{0}_{zz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma^{0}_{\rho z}}{\rho} + q^{0}_{z} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Поставив (19) в (15), получим:

$$\begin{cases} \sigma^0_{\rho\rho} n_\rho + \sigma^0_{\rho z} n_z = f_\rho \,, \\ \sigma^0_{\rho z} n_\rho + \sigma^0_{zz} n_z = f_z \,. \end{cases} \tag{21}$$

Уравнения (20) при условиях (21) представляют задачу теории упругости при задании механических нагрузок q_ρ, q_z, f_ρ, f_z. Представим решение σ^0_{ij} потенциалами:

$$\begin{aligned} \sigma^0_{\rho\rho}(x) &= \oint_L \left[t_\rho(y)\sigma^{\rho*}_{\rho\rho}(x,y) + t_z(y)\sigma^{z*}_{\rho\rho}(x,y) \right] \mathrm{d}l, \\ \sigma^0_{\vartheta\vartheta}(x) &= \oint_L \left[t_\rho(y)\sigma^{\rho*}_{\vartheta\vartheta}(x,y) + t_z(y)\sigma^{z*}_{\vartheta\vartheta}(x,y) \right] \mathrm{d}l, \\ \sigma^0_{zz}(x) &= \oint_L \left[t_\rho(y)\sigma^{\rho*}_{zz}(x,y) + t_z(y)\sigma^{z*}_{zz}(x,y) \right] \mathrm{d}l, \\ \sigma^0_{\rho z}(x) &= \oint_L \left[t_\rho(y)\sigma^{\rho*}_{\rho z}(x,y) + t_z(y)\sigma^{z*}_{\rho z}(x,y) \right] \mathrm{d}l. \end{aligned} \tag{22}$$

Плотности потенциалов $t_\rho(y)$ и $t_z(y)$ определяются из граничных условий, приводящихся к интегральным уравнениям.

3. Построение граничных интегральных уравнений. Рассмотрим прямую формулировку решения задачи термоупругости, основанную на использовании интегрального тождества типа Грина для представления общего решения задачи, вытекающего из теоремы Остроградского-Гаусса. Обозначим через P_i и q_i, $i = \rho, z$ поверхностные и объемные нагрузки первого (основного) напряженно-деформированного состояния. Эти нагрузки вызывают появление перемещений u_i, деформаций ε_{ij}, напряжений σ_{ij} в области *V*, занимаемой телом вращения. Наряду с основным, будем рассматривать вспомогательное напряженно-деформированное состояние той же области, но с другими причинами P_i^*, q_i^* и другими неизвестными u_i^*, деформаций ε^*_{ij}, напряжений σ^*_{ij}. Выразив работы через нагрузки и внутренние напряжения и деформации, перейдем к следующему тождеству Бетти:

$$\int_V \left(\sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij} - \sigma^*_{ij}\varepsilon_{ij} \right) \mathrm{d}V = \oint_L \left(P_i u_i^* - P_i^* u_i \right) \mathrm{d}l + \int_V \left(q_i u_i^* - q_i^* u_i \right) \mathrm{d}V \,. \tag{23}$$

Применим (23) к рассматриваемой сплошной анизотропной термоупругой среде, учитывая осевую симметрию подинтегральных функций. Внесем под интегралы в левой части (23) вместо σ_{ij} и σ^*_{ij} напряжения через деформации (3). После сокращения подобных слагаемых получим:

$$\int_V \left(\sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij} - \sigma^*_{ij}\varepsilon_{ij} \right) \mathrm{d}V = \int_V \left(T^*\theta - \theta^* T \right) \mathrm{d}V \,, \tag{24}$$

где $\theta = C_\rho \varepsilon_{\rho\rho} + C_\vartheta \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + C_z \varepsilon_{zz}$, $\quad \theta^* = C_\rho \varepsilon^*_{\rho\rho} + C_\vartheta \varepsilon^*_{\vartheta\vartheta} + C_z \varepsilon^*_{zz}$.

Используя фундаментальные решения осесимметричной задачи теории упругости u_i^{k*} и σ^{k*}_{ij} в качестве элементов вспомогательного напряженно-деформированного состояния, можно на основе (23) получить интегральные представления $u_i, i = \rho, z$ задач стационарной термоупругости.

Внесем в (23, 24) вместо вспомогательных элементов фундаментальное решение, соответствующее единичной силе, направленной вдоль оси ρ, при этом учтем, что $T^* = 0$. Тогда при $q_\rho^* = \delta(y - x), u_\rho = u, u_z = w, u_\rho^{\rho*} = u^{\rho*}, u_z^{\rho*} = w^{\rho*}$:

$$u = \oint_L \left(P_\rho u^{\rho*} + P_z w^{\rho*} - P_\rho^{\rho*} u - P_z^{\rho*} w \right) \mathrm{d}l_y + \int_V T \theta_\rho^* \mathrm{d}V_y, \tag{25}$$

где

$$\begin{gathered} \theta_\rho^* = C_\rho \varepsilon_{\rho\rho}^{\rho*} + C_\vartheta \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^{\rho*} + C_z \varepsilon_{zz}^{\rho*}, \\ P_\rho^{\rho*}(x, y) = \sigma_{\rho\rho}^{\rho*} n_\rho(y) + \sigma_{\rho z}^{\rho*} n_z(y); \; P_z^{\rho*}(x, y) = \sigma_{\rho z}^{\rho*} n_\rho(y) + \sigma_{zz}^{\rho*} n_z(y); \end{gathered} \tag{26}$$

$$P_\rho = f_\rho = 0, \; P_z = f_z = 0. \tag{27}$$

В (27) нагрузки приняты равными нулю, чтобы получить решение краевой задачи при чисто температурном воздействии, т. е. при отсутствии механических нагрузок. В противном случае ядра (25) будут содержать также слагаемый потенциал простого слоя, ядра $u^{\rho*}$ и $w^{\rho*}$ которого неизвестны. Следовательно, (25) принимает вид:

$$u(x) = -\oint_L \left(P_\rho^{\rho*}(x, y) u(y) - P_z^{\rho*}(x, y) w(y) \right) \mathrm{d}l_y + \int_V T \theta_\rho^* \mathrm{d}V_y. \tag{28}$$

После подстановки второго фундаментального решения u^{z*}, w^{z*}, соответствующего силе, направленной по оси *z*, получим аналогичное представление перемещения w:

$$w(x) = \oint_L \left(P_\rho^{z*}(x, y) u(y) - P_z^{z*}(x, y) w(y) \right) \mathrm{d}l_y + \int_V T \theta_z^* \mathrm{d}V_y, \tag{29}$$

где:

$$\begin{gathered} P_\rho^{z*}(x, y) = \sigma_{\rho\rho}^{z*} n_\rho(y) + \sigma_{\rho z}^{z*} n_z(y); \quad P_z^{z*}(x, y) = \sigma_{\rho z}^{\rho*} n_\rho(y) + \sigma_{zz}^{z*} n_z(y), \\ \theta_z^* = C_\rho \varepsilon_{\rho\rho}^{z*} + C_\vartheta \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^{z*} + C_z \varepsilon_{zz}^{z*}. \end{gathered} \tag{30}$$

В (28, 29) неизвестны плотности потенциала двойного слоя $u(y), w(y)$ – перемещения в точках *y* границы *L*. Эти перемещения определяются из решения граничного интегрального уравнения.

Для составления граничных интегральных уравнений установим сначала предельные значения потенциалов двойного слоя при стремлении точки *x* к *y*, принадлежащей границе *L* области. Выражения потенциалов простого слоя:

$$
\begin{aligned}
W_\rho(x) &= \oint_L \left[P_z^{\rho*}(x,y)\,w(y) - P_\rho^{\rho*}(x,y)\,u(y) \right] \mathrm{d}l_y, \\
W_z(x) &= \oint_L \left[P_z^{z*}(x,y)\,w(y) - P_\rho^{z*}(x,y)\,u(y) \right] \mathrm{d}l_y.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Если внести в (31) выражения (26, 30), то оба потенциала можно представить в виде:

$$
W_k(x) = \oint_L \sigma_{ij}^{k*}(x,y)\,n_j(y)\,u_i(y)\,\mathrm{d}l_y. \tag{32}
$$

Предельное значение для компонентов суммы (32) определяем по формуле:

$$
W_k(x_0) = \lim_{x \to L} W_k(x) = n_j \sigma_{ij}(x_0), \quad k,i,j = \rho, z. \tag{33}
$$

где $\sigma_{ij}(x_0)$ – значения напряжений в точках, принадлежащих границе области.

Предельные значения (28, 29) дают систему двух граничных интегральных уравнений относительно плотностей u, w потенциалов:

$$
\begin{cases}
u(x_0) = W_\rho(x_0) + \int_V T\theta_\rho^*(x_0,y)\,\mathrm{d}V_y, \\
w(x_0) = W_z(x_0) + \int_V T\theta_z^*(x_0,y)\,\mathrm{d}V_y
\end{cases}
\tag{34}
$$

Решение системы (34) позволит определить перемещения $u(x)$ и $w(x)$.

Заключение. Рассмотрена постановка в перемещениях и напряжениях и особенности решения осессимметричной краевой задачи термоупругости с учетом анизотропии методом граничных интегральных уравнений. Использована прямая формулировка общего решения дифференциального уравнения в потенциалах. Получены интегральные уравнения термоупругости для цилиндрически анизотропной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванычев, Д. А. Решение задач термоупругости для анизотропных тел вращения / Д. А. Иванычев // Труды МАИ. – 2019. – № 106. – С. 1–19.
2. Грин, А. Е. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. Е. Грин, Дж. Адкинс. – М. : Мир, 1965. – 456 с.
3. Христич, Д. В. Термомеханические задачи нелинейного деформирования анизотропных цилиндрических тел: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.04 / Д. В. Христич / Тул. гос. ун-т. – Тула, 2006. – 20 с.
4. Finite element method for thermomechanical response of near-incompressible elastomers / D. W. Nicholson, B. Lin. // Acta Mech. – 1997. – № 124. – P. 181–198.
5. Stationary thermoelastic analysis of thick cross-ply laminated cylinders and cylindrical panels / K. P. Soldatos, J. Q. Ye // Acta mech. – 1995. – 110. – № 1–4. – P. 1–18.
6. Boundary Element and Sensitivity Analysis of Anisotropic Thermoelastic Metal and Alloy Discs with Holes / Mohamed Abdelsabour Fahmy, Mohammed Owaidh Alsulami // Materials (Basel). 2022 Feb 28 – 15(5): – P. 1828. doi: 10.3390/ma15051828.

7. W. T. Ang & X. Wang A numerical method based on boundary integral equations and radial basis functions for plane anisotropic thermoelastostatic equations with general variable coefficients Applied Mathematics and Mechanics. – Vol. 41 – P. 551–566 (2020). https://doi.org/10.1007/s10483–020–2592–8.

8. M. I. Azis and D. L. Clements, A boundary element method for anisotropic inhomogeneous elasticity // International Journal of Solids and Structures 38 (2001). – P. 5747–5764.

9. Боган, Ю. А. Задача Дирихле в двумерной стационарной анизотропной термоупругости / Ю. А. Боган // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 5(21) (2010), – P. 64–71.

10. Прусов, И. А. Некоторые задачи термоупругости / И. А. Прусов. – Минск : Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1972. – 198 с.

11. Формалев В. Ф. Теплопроводность анизотропных тел. Часть 1. Аналитические методы решения задач / В. Ф. Формалев. – М. : Изд-во: Физматлит, 2014. – 349 с.

12. Веремейчик, А. И. Интегральные уравнения нестационарных осесимметричных краевых задач теплопроводности при различных граничных условиях / А. И. Веремейчик, В. М. Хвисевич // Теоретическая и прикладная механика. – 2016. – Вып. 31. – С. 234–237.

Поступила:24.04.2023