

## УСКОРЕНИЕ ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ РАСЧЕТОВ В МЕХАНИКЕ С ПОМОЩЬЮ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ГРАФИЧЕСКОМ ПРОЦЕССОРЕ

<sup>1</sup>Щербаков С. С., <sup>2</sup>Полещук М. М.

<sup>1</sup>Национальная академия наук Беларуси, Минск

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет, Минск

Рассматривается реализация непрямого метода граничных элементов с использованием трех нелинейных функций формы для вычисления распределения потенциала внутри замкнутого контура при действии потенциала, распределенного на поверхности. Ускорение соответствующих вычислений было реализовано на графическом акселераторе с помощью технологии NVidia CUDA. Получены зависимости ускорения распараллеленных расчетов в зависимости от количества граничных элементов и расчетных узлов.

Представлено сравнение применения колокационного и Галеркинских подходов, а также анализ результатов распараллеливания данных алгоритмов.

Показано значительное до 52 раз ускорение расчета распределения потенциала при сохранении его точности. Достигнуто ускорение до 22 раз при расчете матрицы взаимовлияний граничных элементов.

**Введение.** Метод граничных элементов (МГЭ) успешно применяется при моделировании различных задач из областей гидро- и электродинамики, а также механики деформируемого твердого тела. В отличие от методов конечных разностей и конечных элементов МГЭ позволяет дискретизировать вместо всей расчетной области только ее поверхность. Разнообразие таких задач приводит к необходимости появления различных модификаций МГЭ. Наиболее частой модификацией является изменение функций формы [1,2]. Однако помимо классического колокационного также применяется менее распространенный подход на основе метода Галеркина или интегрального метода [3]. Далее будет рассмотрено применение данного метода модификации МГЭ с использованием трех нелинейных функций формы при моделировании распределения потенциала в замкнутой двумерной области, а затем рассмотрим распараллеливание расчетов, основанное на применении технологии CUDA [4].

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу, представленную в статье [1; 5; 6], в которой требуется найти распределение потенциала в замкнутой прямоугольной области  $A = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 5, -8 \leq y \leq 0\}$  (рисунок 1), на одной из сторон которой  $-b \leq x \leq b, y = 0, b = 2,5$  задано граничное условие

$$p^*(x) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}. \quad (1)$$

Для применения МГЭ граница исследуемой области была разбита на  $N$  граничных элементов (ГЭ), полудлина которых равна  $h$ , таким образом, что все граничные элементы должны оставаться прямыми отрезками. Центры ГЭ расположены в точках  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ . Следует отметить, что источниками влияния являются не граничные элементы, а узлы элементов  $\mathbf{x}_i - \mathbf{h}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i + \mathbf{h}$ , где  $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$ .

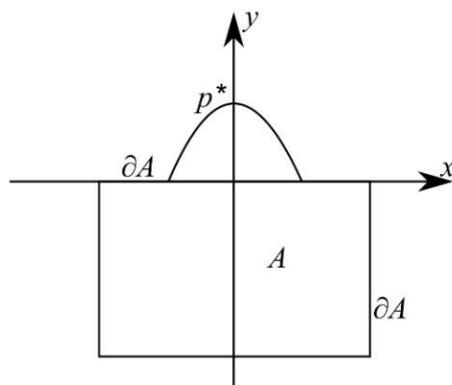


Рис. 1. Схема задачи и граничное условие

При расчетах использовались три функции формы  $f_i^I(\mathbf{x})$ ,  $f_i^{II}(\mathbf{x})$ ,  $f_i^{III}(\mathbf{x})$ , которые распределялись на граничных элементах как показано на рисунке 2.

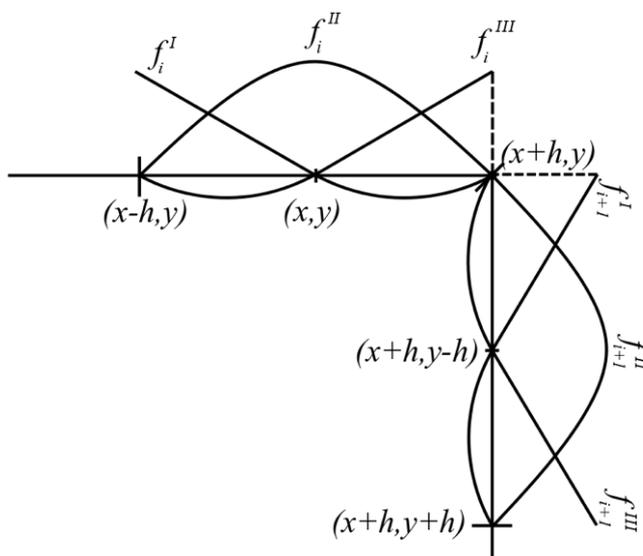


Рис. 2. Распределение нелинейных функций формы по ГЭ

**Сравнение результатов реализации методов колокационного и Галеркина.** Ввиду того, что задача не имеет аналитического решения внутри области, для анализа полученных результатов можно рассмотреть решение на границе, сравнив его с заданным граничным условием. На рисунке 3 представлены распределения потенциалов на верхней части границы, которые были получены, используя найденные фиктивные усилия, или же, коэффициенты функций формы.

Из рисунке 3 видно, что реализация метода Галеркина дает несколько более точное решение по сравнению с реализацией колокационного метода.

Рассмотрим сходимость вычислений и погрешность четырех вариантов реализации МГЭ с тремя функциями формы – негладкого и гладкого колокационного метода, а также негладкого и гладкого метода Галеркина. Относительная погрешность, рассчитывалась по следующей формуле:

$$e = \frac{IG(x_i) - p^*(x_i)}{p^*(x_i)}, \quad (2)$$

где  $x_i$  – точка границы с ненулевым граничным условием.

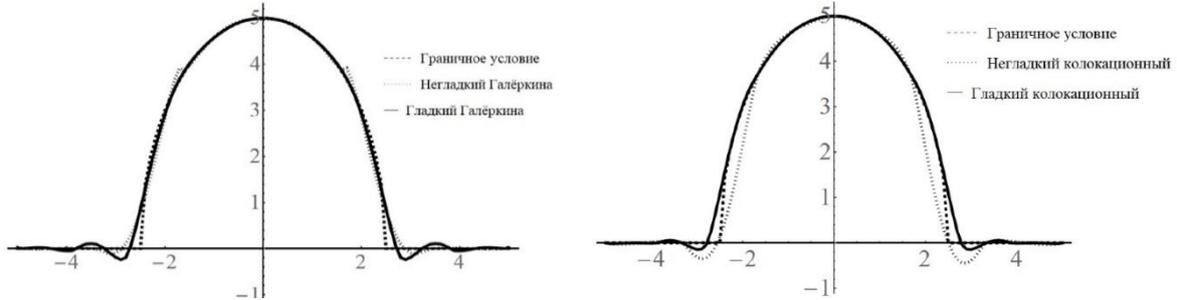


Рис. 3. Сравнение полученных и заданных граничных условий

Затем для каждой точки высчитывалась средняя погрешность реализации метода на поверхности.

На рисунке 4 приведены относительные погрешности данных методов, для разного количества граничных элементов. Данные зависимости можно использовать для оценки сходимости методов, так как по ним можно сделать оценку скорости приближения результатов расчетов к квазипостоянной относительной погрешности. Из рисунка 4 видна быстрая сходимость расчетов по негладкому методу Галеркина. Таким образом, даже для грубых дискретизаций можно достичь приемлемой точности решения.

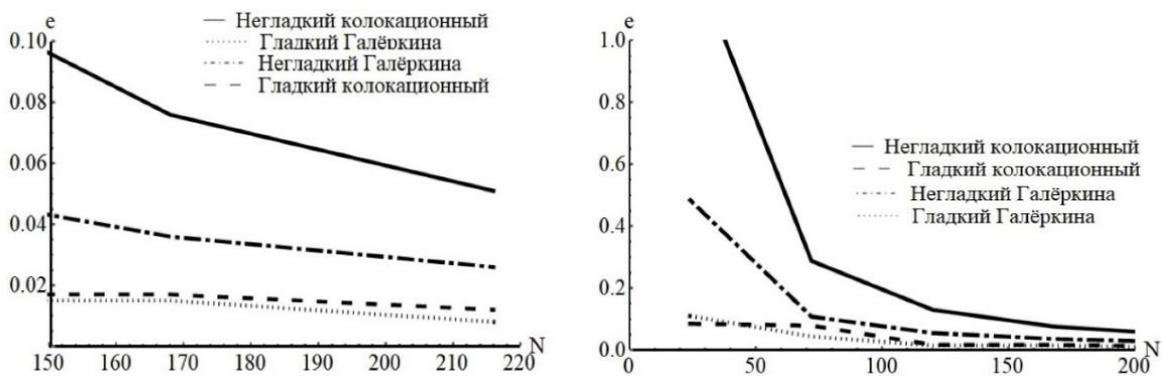


Рис. 4. Относительные погрешности методов

Также отметим, что гладкий колокационный и гладкий метод Галеркина даже при грубой гранично-элементной дискретизации поверхности имеют небольшую погрешность, но все же гладкий метод Галеркина оказывается немного точнее. Из этого делаем вывод, что условие гладкости (неразрывности) позволяет повысить точность вычислений. В связи с тем, что гладкий колокационный метод и гладкий метод Галеркина обладают наибольшей точностью среди всех представленных методов, в дальнейшем будем сравнивать только эти два метода.

**Распараллеливание расчета матрицы взаимовлияний.** Распараллеливание ко-локационного метода с помощью технологии NVidia CUDA было описано в работе [1; 6]. Основным этапом распараллеливания представленного метода является ускорение расчета матрицы взаимовлияния. Формирование данной системы – трудоемкий процесс, т. к. создается матрица, которая имеет размерность  $N \times N$ , где  $N$  – количество узлов на граничных элементах и  $N = 2K + 1$ , где  $K$  – количество граничных элементов. Распараллеливание данного процесса выполняется путем создания  $N \times N$  потоков, каждый из которых вычисляет конкретный элемент матрицы, что заметно ускоряет формирование матрицы взаимовлияния.

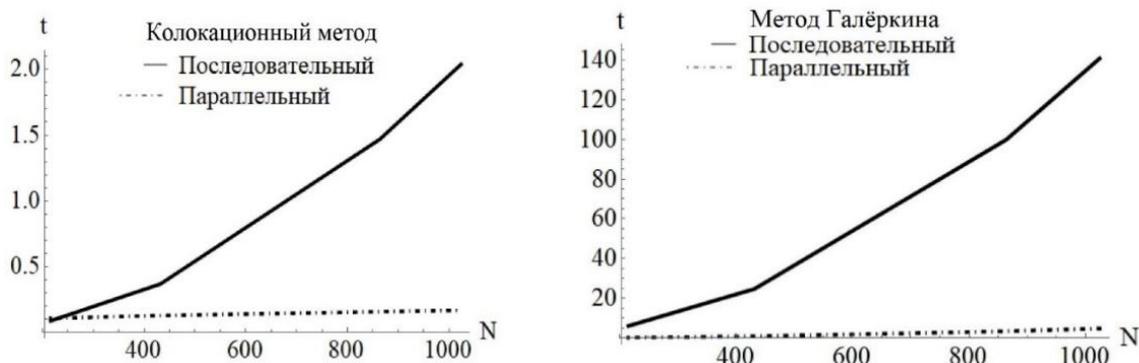


Рис. 5. Зависимости времени распараллеленных расчетов от количества коэффициентов для гладких Галеркина и колокационного методов

На рисунке 5 представлено по два графика зависимости времени расчета от количества коэффициентов для гладких колокационного метода и метода Галеркина. Можно заметить, что последовательная реализация алгоритма Галеркина значительно медленнее чем колокационного.

Поэтому сравнение распараллеленной реализации данных методов представляет особый интерес, что и представлено на рисунке 6. Отметим, что ускорение вычислений может быть значительно увеличено при распараллеливании на большем числе ядер графического акселератора. Из рисунка 6 видно, что скорость колокационного метода значительно выше. Однако стоит заметить, что гладкий метод Галеркина несколько точнее. На рисунке 7 представлены коэффициенты эффективного ускорения, описанных выше, алгоритмов, используя технологию NVidia CUDA. Как видно из рисунка 7, максимальный коэффициент ускорения практически одинаков.

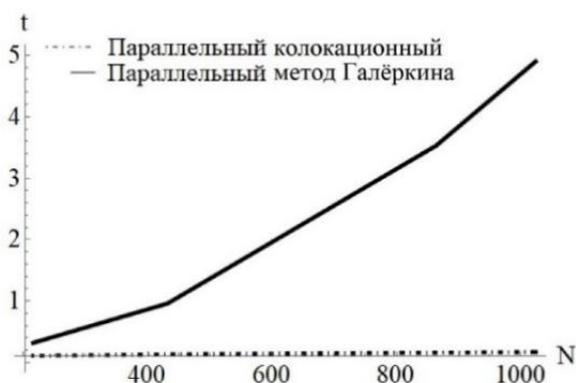


Рис. 6. Сравнение скорости вычислений распараллеленных гладкого метода Галеркина и колокационного метода

Ускорение при низкой дискретизации граничной области в разы выше для метода Галеркина. Поэтому учитывая, что при низкой дискретизации метод Галеркина точнее колокационного, можно сделать вывод, что распараллеливание более эффективно при реализации метода Галеркина.

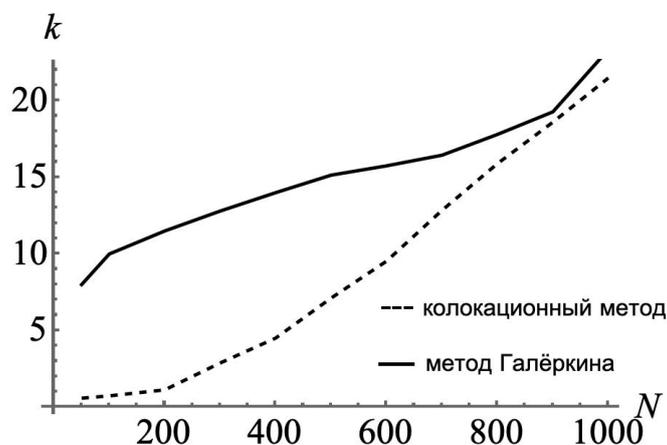


Рис. 7. Коэффициенты ускорения колокационного и Галеркина методов относительно их последовательных реализаций

**Распараллеливание расчета распределения потенциала в расчетной области.** Распределения полей потенциала были построены для разных дискретизаций расчетной области. Из рисунке 8 видно, что с увеличением количества расчетных узлов распределения потенциала становятся более гладкими, а при увеличении количества ГЭ это не так заметно. Однако, как уже было отмечено выше, при увеличении количества ГЭ повышается точность вычисления потенциала в точке.

Рассмотрим зависимости времени расчета потенциала при фиксированном количестве граничных элементов и расчетных узлов. Из анализа рисунков 9–11 можно сделать вывод, что время, требующееся для последовательного расчета, почти линейно зависит от дискретизации границы и расчетной области. При этом также растет, хотя и гораздо медленнее, время параллельных вычислений. Это связано с временными затратами на копирование расчетных данных из оперативной памяти в память графического процессора. В итоге ускорение вычислений достигает 52 раза (рисунок 11).

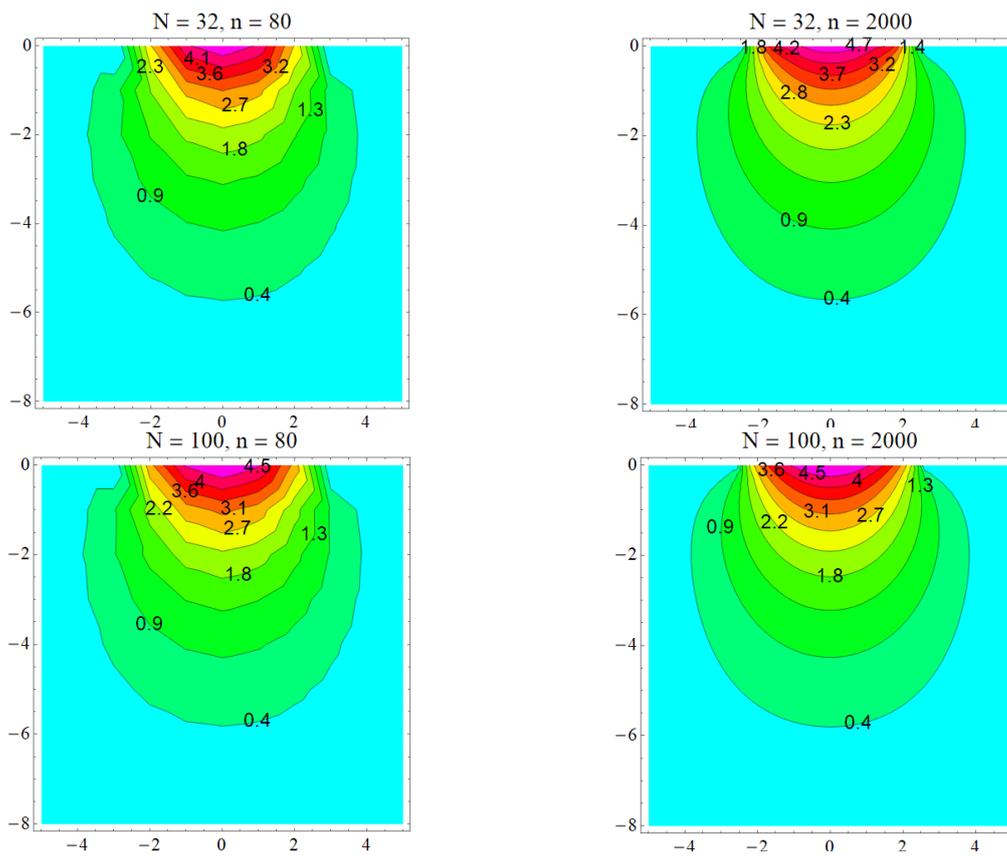


Рис. 8. Распределение потенциала для разного количества граничных элементов и расчетных узлов

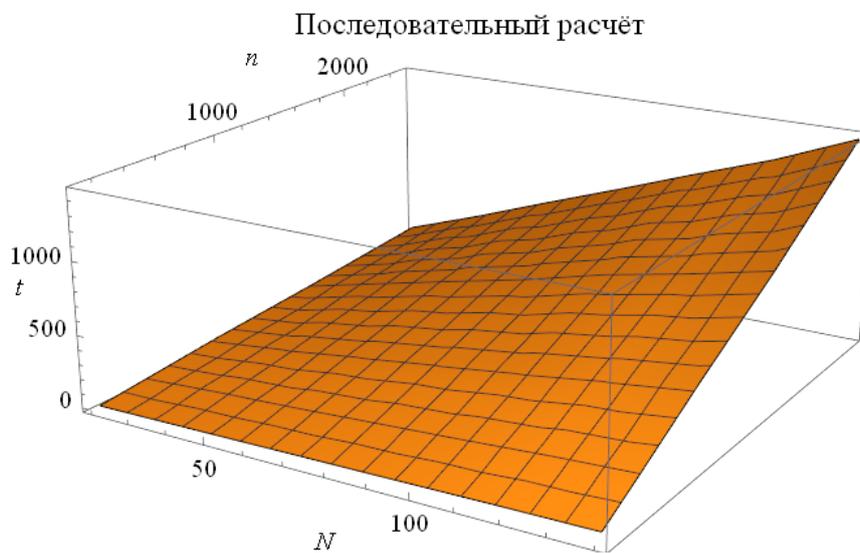


Рис. 9. Зависимость времени вычисления потенциала от количества граничных элементов и расчетных узлов для последовательного расчета

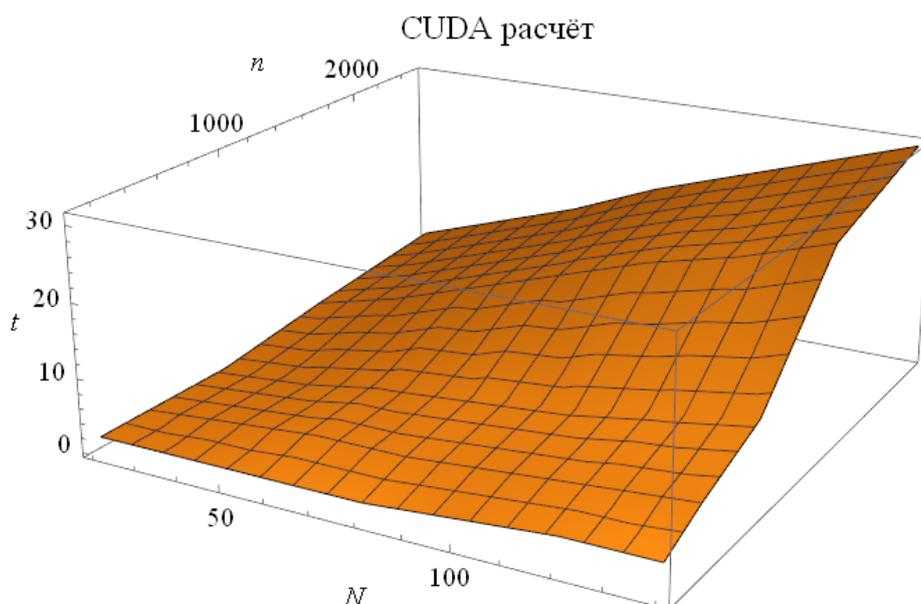


Рис. 10. Зависимость времени вычисления потенциала от количества граничных элементов и расчетных узлов для распараллеленного расчета

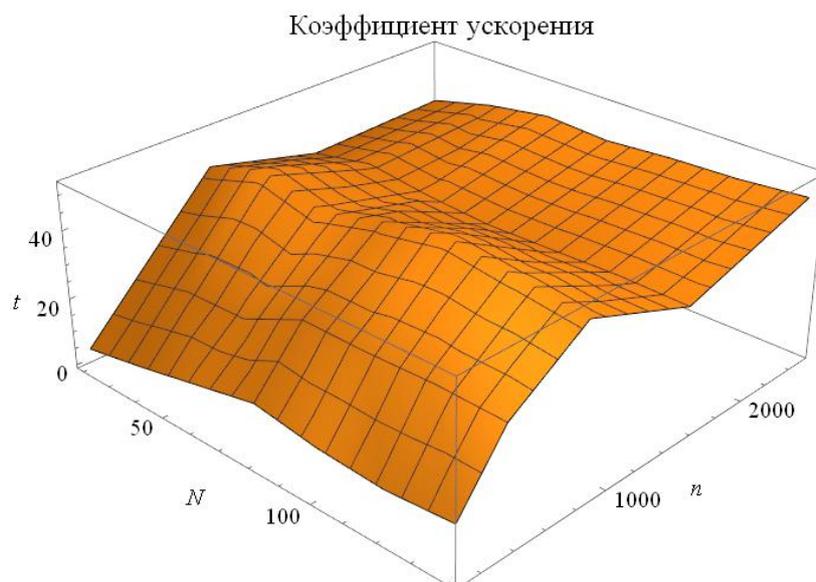


Рис. 11. Зависимость коэффициента ускорения вычисления потенциала от количества граничных элементов

**Заключение.** Для представленной модельной задачи о распределении потенциала в замкнутой области с граничным условием проведено исследование о преимуществах применения метода Галеркина при гранично-элементном моделировании. Была представлена как гладкая, так и негладкая реализации гранично-элементного расчета с использованием метода Галеркина. Проанализированы сходимости и точности решений, в результате чего показано, что гладкие методы колокационный и Галеркина обладают наименьшей погрешностью.

Представлено применение технологии CUDA для ускорения до 22 раз расчета матрицы взаимовлияния и до 52 раз ускорение расчета распределения потенциала внутри области.

Показаны особенности применения технологии распараллеливания как к гладкому методу Галеркина, так и гладкому колокационному методу. Эффективность приме-

нения технологии CUDA для гладкого колокационного метода выше, чем для гладкого метода Галеркина, однако подход Галеркина оказался точнее для данной задачи. В связи с тем, что конечный процесс расчета распределения потенциала для этих методов одинаков, при разовом расчете коэффициентов функции формы целесообразно использовать более точный метод.

*Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта № T23РНФ-125.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков С. С. Ускорение гранично-элементных расчетов с помощью графического акселератора для элементов с нелинейными функциями формы / С. С. Щербаков, М. М. Полещук // Механика машин, механизмов и материалов. – 2019. – № 4 (49). – С. 89–94.
2. Бенерджи, П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – Москва : Мир, 1984. – 494 с.
3. Sutrathar, A. Symmetric Galerkin Boundary Element Method // A. Sutrathar, G. H. Paulino, L. J. Gray. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2008. – P. 1–7.
4. Rauber, T. General Purpose GPU Programming / T. Rauber, G. Rünger // Rauber, T. Parallel Programming for Multicore and Cluster Systems / Rauber T., Rünger G. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2013. – P. 387–415.
5. Щербаков С. С. Ускорение гранично-элементных расчетов для замкнутой области с использованием нелинейных функций формы и технологии CUDA / С. С. Щербаков М. М. Полещук // Доклады БГУИР. – 2021. – Т. 19, № 3. – С. 14.
6. Распараллеливание гранично-элементных расчетов с использованием метода Галеркина и нелинейных функций формы / С. С. Щербаков [и др.] // Вестник гродненского государственного университета им. Я. Купалы. – 2021. – Т. 11, № 2. – С. 41.

Поступила: 05.03.2023