УДК 539.3

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С ВЫСОКОКОНТРАСТНЫМИ МЕХАНИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОДНОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Ботогова М. Г., Ле Н. Д., Михасев Г. И.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Образованные из слоистых тонкостенных оболочко-подобных элементов конструкции сочетают в себе легкость с высокой прочностью, что объясняет широкое применение их в судостроении, авиа- и ракетостроении, машиностроении, в промышленном строительстве и других областях [1]. Использование новых полимерных материалов, таких как магнитореологические эластомеры (МРЭ) и электрореологические композиты (ЭРК) с управляемыми упругими и вязко-пластичными свойствами дало мощный толчок для активизации исследований и разработок по их применению в задачах демпфирования различных тонкостенных конструкций, в том числе объектов военного назначения [2–7]. Возникла необходимость создания таких конструкционных тонкостенных элементов, которые могут адаптироваться к нагрузке в зависимости от ее вида и интенсивности. Идея создания подобных адаптивных слоистых конструкций заключается в том, что действие диссипативного элемента, каковым может быть вязкоупругий слой, существенно усилится, если его параметры будут меняться под действием сигнала магнитного или электрического полей [6; 7]. Ранее проведенные экспериментальные исследования показали, что почти все магнитоуправляемые (МУ) материалы и, в частности, МРЭ и ЭРК проявляют сильную нелинейность своих реофизических свойств как функций индукции магнитного поля [1; 2; 5], а их применение в качестве наполнителей в слоистых оболочках позволяет осуществлять мягкое гашение бегущих вибраций [8], а также управлять жесткостными характеристиками конструкции посредством изменения магнитного поля и увеличивать более чем на 50 % их несущую способность [9; 10].

Целью данной работы является сделать сравнительный анализ модели Григолюка-Куликова и модели типа Тимошенко-Рейсснера, позволяющих заменить многослойную пластину эвивалентной однослойной пластиной на примере свободных низкочастотных колебаний сэндвич-пластины, содержащей МРЭ. Актуальность данной работы обусловлена тем, что модель Григолюка-Куликова, в отличие от второй модели, может быть использована для любого варианта граничных условий на кромках панели.

Модели эквивалентных однослойных пластин. Здесь мы рассмотрим две модели: модель Григолюка-Куликова (далее модель I) слоистых трансверсально изотропных пластин, основанная на принятии обобщенных кинематических гипотез Тимошенко для тангенциальных перемещений и учитывающая поперечные сдвиги в слоях [12]; модель типа Тимошенко-Рейсснера (далее модель II), предложенная Товстиком [11] для оболочек с произвольным распределением упругих свойств по толщине оболочки.

Модель 1. В соответствии с данной моделью [12] двухслойная пластина заменяется эквивалентной однослойной пластиной с приведенными характеристиками, которые вводятся следующим образом:

$$E = \frac{1-\nu^2}{h}\left(\sum_{k=1}^{2}\frac{E_k\,h_k}{1-\nu^2}\right), \quad \nu = \sum_{k=1}^{2}\frac{E_k\,h_k\nu_k}{1-\nu_k^2}\left(\sum_{k=1}^{2}\frac{E_k\,h_k}{1-\nu_k^2}\right)^{-1}. \qquad (1)$$

По формулам (1) определяются приведенный модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Также введем в рассмотрение приведенные цилиндрическую жесткость D, жесткость каждого слоя γ_k и параметры сдвига β и θ:

$$D=\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\eta_3,\quad \gamma_k=\frac{1-\nu^2}{Eh}\frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2},\quad \beta=\frac{12\left(1-\nu^2\right)q_{44}}{Eh\eta_1},\qquad \theta=1-\frac{\eta_2^2}{\eta_1\eta_3},\tag{2}$$

где

$$q_{44}=\frac{\left[\sum_{k=1}^{2}\left(\lambda_k-\frac{\lambda_{k0}^2}{kk}\right)\right]^2}{\sum_{k=1}^{2}\left(\lambda_k-\frac{\lambda_{k0}^2}{kk}\right)G_k^{-1}}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}}G_k\,,$$

$$\lambda_k=\int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}f_0^2(z)\mathrm{d}z,\quad \lambda_{kn}=\int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}f_k(z)f_n(z)\mathrm{d}z\quad (n=0,k),\tag{3}$$

$$\eta_1=\sum_{k=1}^{2}\frac{\pi_{1k}\gamma_k}{\xi_k}-3c_{12}^2,\qquad \eta_2=\sum_{k=1}^{2}\frac{\pi_{2k}\gamma_k}{\xi_k}-3c_{12}c_{13},$$

$$\eta_3=4\sum_{k=1}^{2}(\xi_k^2+3\zeta_{k-1}\zeta_k)\gamma_k-3c_{13}^2,\qquad h\xi_k=h_k,\qquad h\zeta_n=\delta_n\ (n=0,k),$$

$$c_{12}=\sum_{k=1}^{N}\xi_k^{-1}\pi_{3k}\gamma_k,\ c_{13}=\sum_{k=1}^{N}(\zeta_{k-1}+\zeta_k)\,\gamma_k,$$

$$\pi_{1k}=\frac{12}{h^3}\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}g^2(z)\mathrm{d}z,\quad \pi_{2k}=\frac{12}{h^3}\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}z\,g(z)\mathrm{d}z,\quad \pi_{3k}=\frac{2}{h^2}\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}g(z)\mathrm{d}z\,.$$

Здесь $G=q_{44}/h$ приведенный модуль сдвига [12], $f_n\left(z\right)$ – непрерывные на каждом слое функции, определяемые следующим образом:

$$f_0(z)=\frac{1}{h^2}(z-\delta_0)(\delta_N-z)\quad \text{если}\quad z\in[\delta_0,\ \delta_N],$$
$$f_k(z)=\frac{1}{h_k^2}(z-\delta_{k-1})(\delta_k-z)\quad \text{если}\quad z\in[\delta_{k-1},\ \delta_k],\tag{4}$$
$$f_k\left(z\right)=0\quad \text{если}\quad z\notin[\delta_{k-1},\ \delta_k].$$

Пусть w – нормальный прогиб оболочки (в направлении оси **Oz**), F – функция напряжений Эйри, $\rho_0=\sum_{k=1}^{2}\rho_k\xi_k$ – приведенная плотность всего пакета сэндвича, t – время. Будем далее исследовать колебания пластины средней длины. Тогда уравнения движения двуслойной пластины в принятых обозначениях принимают вид (5) для модели Григолюка [14]:

$$D\left(1-\frac{\theta h^2}{\beta}\,\Delta\right)\Delta^2\chi+\ \rho_0 h\,\frac{\partial^2 w}{\partial\, t^2}=q_n(\alpha_1,\alpha_2,t),\tag{5}$$

где Δ – оператор Лапласа, w – прогиб пластины, χ – функция сдвига, q_n (α_1, α_2, t) – нормальная нагрузка, t – время.

Модель 2. Рассмотрим теперь модель типа Тимошенка-Рейснера (дале модель II), предложенную Товстиком [11] для оболочек с произвольным распределением упругих свойств по толщине оболочки.

В данной модели приведенные параметры «эквивалентной» однослойной оболочки определяются следующим образом:

$$K_0 = \int_0^h E(z)\mathrm{d}z, \quad D = \int_0^h E_*(z)(z-a)^2\,\mathrm{d}z, \quad K = \int_0^h E_*(z)\mathrm{d}z,$$

$$E_*(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)}, \quad g = \frac{1}{R^2 D}\int_0^h \frac{\Theta^2(z)}{G(z)}\mathrm{d}z, \quad \Theta(z) = \int_0^z E_*(\varsigma)(\varsigma - a)\mathrm{d}\varsigma, \tag{6}$$

$$a = \frac{1}{K}\int_0^h E_*(z) z\mathrm{d}z, \quad \rho_0 = \frac{1}{h}\int_0^h \rho(z)\mathrm{d}z\ .$$

Здесь $E(z), G(z), \nu(z), \rho_0(z)$ – заданные кусочно-непрерывные функции, определяемые на каждом слое своим значением. Например,

$$E(z) = \begin{cases} E_1,\ 0 \le z \le h_1, \\ E_2,\ h_1 < z < h. \end{cases}$$

Движение пластины описывается уравнениями [11]:

$$D\Delta^2\chi + \rho_0 h\,(1 - g\,R^2\,\Delta)\frac{\partial^2\chi}{\partial\,t^2} = q_n(\alpha_1, \alpha_2, t). \tag{7}$$

Будем рассматривать только один вариант граничных условий. Пусть все края шарнирно оперты и снабжены диафрагмой, препятствующей поперечные сдвиги. Тогда

$$\chi = \frac{\partial^2\chi}{\partial\alpha_k^2} = 0 \quad \text{при} \ \ \alpha_k = 0, L_k; \quad k = 1{,}2. \tag{8}$$

Собственные колебания. Сначала проанализируем свободные колебания ($q_n = 0$). Решение краевой задачи (5) – (8) имеет вид

$$\chi = \chi_0 \sin\frac{\pi n \alpha_1}{L_1}\sin\frac{\pi m \alpha_2}{L_2}\,\mathrm{e}^{i\Omega t}, \tag{9}$$

где n, m – количество полуволн в направлениях α_1 и α_2 соответственно, Ω – комплексная собственная частота.

Подстановка равенства (9) в уравнения (5) дает простую формулу для искомого комплексного собственного значения

$$\Omega = \Omega_{nm} = \sqrt{\frac{\pi^4 E h^3 \eta_3}{12(1-\nu^2)\rho_0 h L_1^4}}\,\Lambda^{1/2}, \tag{10}$$

где

$$\Lambda = \Lambda_{nm} = \frac{\delta_{nm}^2(1+\theta K\delta_{nm})}{1+K\delta_{nm}}, \ K = \frac{\pi^2 h^2}{\beta L_2^2}, \ \delta_{nm} = n^2 + e^2 m^2, \ e = \frac{L_1}{L_2}. \tag{11}$$

Формула (10) дает два комплексных собственных значения. Нам нужно выбрать только одно значение с положительной мнимой частью, так как второе значение не удовлетворяет условию диссипации энергии.

Для модели 2 получим следующую формулу для комплексной частоты

$$\Omega = \Omega_{nm} = \sqrt{\frac{\pi^4 D}{\rho_0 h L_1^4}}\Lambda^{1/2}, \tag{12}$$

где

$$\Lambda = \Lambda_{nm} = \frac{\delta_{nm}^2}{1+\frac{\pi^2 g}{L_1^2}\delta_{nm}}, \quad \delta_{nm} = n^2 + e^2 m^2, \; e = \frac{L_1}{L_2}. \tag{13}$$

В качестве примера рассмотрим квадратную двухслойную пластину со сторонами $L_1 = L_2 = 1$ м. Первый слой выполнен из ABS-пластика SD-0170 с параметрами $E_1 = 1{,}5 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_1 = 0{,}4$, $\rho_1 = 1{,}4 \cdot 10^3$ кг / м^3. Толщина первого слоя 0,5 мм. Второй слой толщиной $h_2 = 10$ мм изготовлен из MRE1 со свойствами, указанными в [4]. Число волн в направлении α_1 $n=10$. Число волн m в другом направлении изменяется. Результаты вычислений представлены в таблицах 1 и 2. На рисунках 2 и 3 показано влияние индукции магнитного поля на собственные частоты $\omega = \Re\Omega$ и декременты $\alpha = \Im\Omega$ Видно, что чем больше волновые числа m и/или n, тем сильнее влияние магнитного поля на характеристики собственных мод сэндвич-пластины. Частоты и декременты для одинаковых m, построенные по разным моделям, практически совпадают.

Таблица 1 – Собственная частота $\omega = \Re\Omega$ (Гц) двухслойной пластины с МРЭ1ядром как функция индукции B (мТл) магнитного поля для мод с n = 10 и разным числом m

m / B	0	200	400	600	800
модель 1					
m=1	63,08	87,7	89,14	89,138	89,138
m=7	93,05	129,38	131,497	131,491	131,491
m=10	124,9	173,64	176,49	176,48	176,48
модель 2					
m=1	62,88	87,37	88,799	88,795	88,795
m=7	92,76	128,8	130,951	130,946	130,946
m=10	124,5	172,87	175,7	175,695	175,695

Таблица 2 – Декремент колебаний $\alpha = \Im\Omega$ двухслойной пластины с МРЭ1 ядром какфункция индукции B (мТл) магнитного поля для мод с n = 10 и разным числом m

m \ B	0	200	400	600	800
модель 1					
m=1	0	4,27	4,29	4,219	4,219
m=7	0	6,45	6,33	6,22	6,22
m=10	0	8,65	8,49	8,35	8,35
модель 2					
m=1	0	4,35	4,27	4,20	4,20
m=7	0	6,41	6,29	6,187	6,187
m=10	0	8,6	8,44	8,3	8,3

Заключение. В работе рассмотрены две модели слоистых пластин, учитывающих сдвиги: модель 1 Григолюка-Куликова [12], основанная на введении обобщенных кинематических гипотез Тимошенко, и модель 2 типа Тимошенко-Рейсснера [11]. На основе двух моделей, замещающих слоистую пластину «эквивалентной» однослойной трансверсально изотропной пластиной, исследованы свободные вязкоупругие колебания двухслойной пластины средней длины, один слой которой изготовлен из МРЭ. Показано, что индукция магнитного поля сильно влияет на вязкоупругие свойства пластины и, как следствие, на ее динамические характеристики.

Выполненный сравнительный анализ собственных частот и декрементов колебаний, найденных на основе двух моделей, позволяет сделать вывод о том, что модель 1 и модель 2 дают очень хорошее совпадение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Librescu L. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey / L. Librescu, T. Hause // Journal of Composite Structures. – 2000. – Vol. 48. – P. 1–17.
2. Li Y. A state-of-the-art review on magnetorheological elastomer devices / Y. Li [et al.] // Smart Materials and Structures. – 2014. – № 23(12). – P. 123001.
3. Shaw J. S. Design and control of adaptive vibration absorber for multimode strustyres / J. S. Shaw, C. A. Wang // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2019. – № 30(7). – P. 1043–1052.
4. Mikhasev G. I. Thin-Walled Laminated Structures: Buckling, Vibrations and Their Suppression / G. I. Mikhasev, H. Altenbach – Berlin : Springer, 2019. – 280 p.
5. On Damping Vibrations of Three Layered Beam Containing Magnetorheological / E. V Korobko [et al.] // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2012. – Vol. 23 (9). – P. 1019–1023.
6. Korobko E. Investigation of Elasticity of Magnetosensitive Adaptive Materials for Laminated Composite Structures / E. Korobko [et al.] // Mechanika. – 2014. – Vol. 20, № 5. – P. 466–470.

7. Farshad M. Magnetoactive elastomer composites / M. Farshad, A. Benine // Journal of Polymer Testing. – 2004. –Vol. 23. –P. 347–353.

8. Mikhasev G. Soft Suppression of Traveling Localized Vibrations in Medium-Length Thin Sandwich-Like Cylindrical Shells Containing Magnetorheological Layers via Nonstationary Magnetic Field / G. Mikhasev, I. Mlechka, H. Altenbach // Dynamical Systems: Theoretical and Experimental Analysis (ed.: J. Awrejcewicz), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer International Publishing Switzerland. – 2016. – Vol. 182. – P. 241–260.

9. Mikhasev G. I. On influence of boundary conditions and transverse shear on buckling of thin laminated cylindrical shells under external pressure / G. I. Mikhasev, Ih. R. Mlechka // Facta Univesitatis. Series : Mechanical Engineering. – 2014. – Vol. 12, No. 2. – P. 95–106.

10. Mikhasev, G. I. Effect of edge shears and diaphragms on buckling of thin laminated medium-length cylindrical shells with low effective shear modulus under external pressure / G. I. Mikhasev, M. G. Botogova // Acta Mechanica – 2017. – Vol. 228 (6). – P.2119–2140.

11. Mikhasev G. I. Localized Dynamics of Thin-Walled Shells / G. I. Mikhasev, P. E. Tovstik – Boc Raton: CRC Press, 2020. – 349 p.

12. Григолюк Э. И. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов – Москва : Машиностроение, 1988. – 288 с.

Поступила:24.05.2023