

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Дудяк А. И., Дикан Ж. Г., Гончарова Е. А., Костюк И. Г.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Типичным примером стержней из композиционных материалов /1/ являются стержни из биметаллических пар, составленных из материала с разными значениями модулей Юнга, и работающих на изгиб как консольные или двух опорные балки /2–3/. В качестве примера можно представить железобетонные балки, широко используемые в строительстве различных сооружений.

Рассмотрим случай чистого изгиба балки прямоугольного поперечного сечения, составленной из двух неоднородных материалов, обладающих различными модулями продольной упругости, т. е. $E_1 > E_2$, при равных площадях сечений $A_1 = A_2$ (рисунок 1).

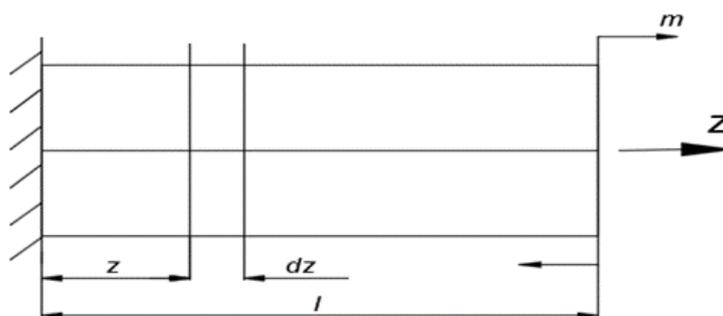


Рис. 1. Схема нагружения балки

В результате деформации верхние слои участка будут растянуты, а нижние сжаты (рисунок 2).

Рассмотрим случай чистого изгиба консольной балки, показанной схематически на рисунке 1.

Для исследования распределения нормальных напряжений возьмем стержень прямоугольного поперечного сечения у которого высоты отдельных частей сечения из неоднородных материалов будут равны. Можно утверждать, что нейтральная ось сместится в сторону материала с большим значением модуля продольной упругости E_1 (рисунок 2, а).

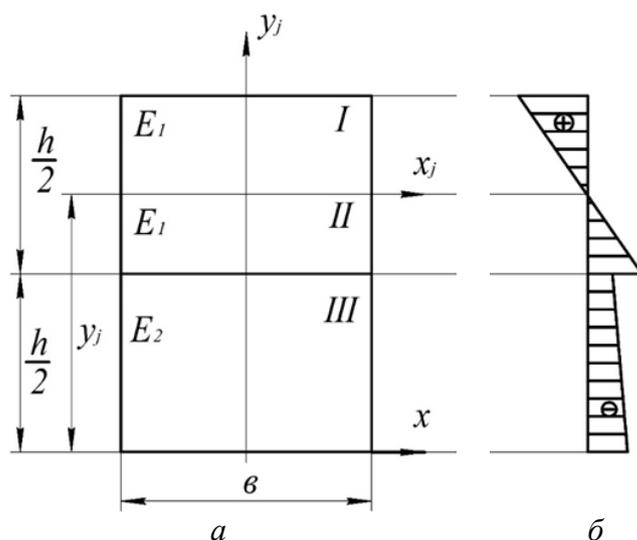


Рис. 2. Поперечное сечение балки (а), эпюра нормальных напряжений (б)

Ось y_j является осью симметрии для обеих частей сечения и, поэтому, она является главной осью центральной жесткости сечения [4]. Для получения деформации плоского изгиба необходимо, чтобы через ось y_j проходила силовая плоскость.

Нейтральная ось будет совпадать с осью x_j , проходящей через центр жесткости сечения [4] и она будет также главной осью центральной жесткости сечения. Определим координату этой оси относительно оси x :

$$y_j = \frac{(E \cdot S_x)_{\text{пр}}}{\sum_{i=1}^n E_i A_i} = \frac{E_1 \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{3}{4} h + E_2 \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4}}{E_1 \cdot b \cdot \frac{h}{2} + E_2 \cdot b \cdot \frac{h}{2}} = \frac{3E_1 + E_2}{4(E_1 + E_2)} h. \quad (1)$$

Главная ось центральной жесткости x_j делит сечение на три части.

Выделим из балки после ее деформации двумя сечениями перпендикулярными к оси балки элемент, длина которого до деформации была равной dz (рисунок 1). В результате деформации этого участка под действием изгибающего момента M нейтральный слой mn образует часть дуги окружности (рисунок 3). Верхние волокна такого элемента относительно нейтрального слоя удлинятся, а нижние – укоротятся.

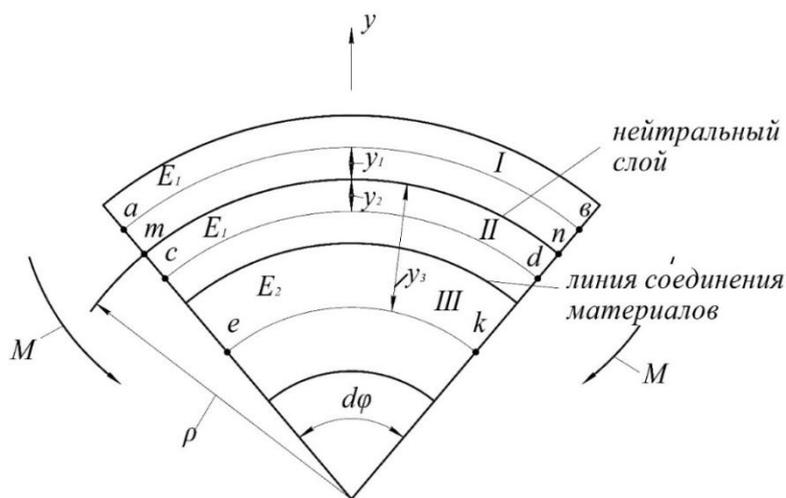


Рис. 3. Деформированное состояние участка балки длиной dz

Относительное удлинение волокна av будет равно:

$$\varepsilon_1 = \frac{av - mn}{mn} = \frac{(\rho + y_1)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y_1}{\rho}. \quad (2)$$

Относительное укорочение волокон cd и ek будут соответственно равны:

$$\varepsilon_2 = \frac{cd - mn}{mn} = \frac{(\rho - y_2)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = -\frac{y_2}{\rho}. \quad (3)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{ek - mn}{mn} = \frac{(\rho - y_3)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = -\frac{y_3}{\rho}. \quad (4)$$

В соответствии с законом Гука нормальные напряжения в отдельных частях поперечного сечения будут равны:

$$\sigma_1 = E_1 \frac{y_1}{\rho}; \quad \sigma_2 = -E_1 \frac{y_2}{\rho}; \quad \sigma_3 = -E_2 \frac{y_3}{\rho}. \quad (5)$$

В соответствии с формулами (5) закон изменения нормальных напряжений по высоте данного сечения приведен на рисунке 2, б. Нормальные напряжения изменяются по линейному закону и достигают максимальных значений в наиболее удаленных зонах от нейтральной линии. В зоне соединения двух неоднородных материалов эпюра напряжений терпит разрыв.

Из условий статического равновесия можно представить следующее равенство:

$$\frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y_1^2 dA_1 + \frac{E_1}{\rho} \int_{A_2} y_2^2 dA_2 + \frac{E_2}{\rho} \int_{A_3} y_3^2 dA_3 = M. \quad (6)$$

Интегралы, входящие в уравнения (6) представляют собой осевые моменты инерции частей сечения относительно нейтральной оси x_j , а поэтому:

$$\frac{1}{\rho} (E_1 J_{x_1} + E_1 J_{x_2} + E_2 J_{x_3}) = \frac{(EJ_x)_{\text{пр}}}{\rho} = M. \quad (7)$$

Из уравнения (7) следует:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{(EJ_x)_{\text{пр}}}. \quad (8)$$

Подставив выражение (8) в уравнения (5) получим:

$$\sigma_1 = \frac{M \cdot E_1}{(EJ_x)_{\text{пр}}} \cdot y_1; \quad \sigma_2 = -\frac{M \cdot E_1}{(EJ_x)_{\text{пр}}} \cdot y_2; \quad \sigma_3 = -\frac{M \cdot E_2}{(EJ_x)_{\text{пр}}} \cdot y_3. \quad (9)$$

Когда стержень состоит из n стержней прочно соединенных между собой, которые отличаются модулями продольной упругости, формулу для определения нормальных напряжений в любой точке поперечного сечения можно представить в следующем виде:

$$\sigma_i = \frac{E_i \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} \cdot y_i \quad (10)$$

где E_i – модуль продольной упругости части сечения, в которой определяют величину нормального напряжения; y_i – координата точки, в которой определяют напряжение, и она должна находиться в той части сечения, которой соответствует E_i .

Полученное уравнение (10) позволяет определять нормальные напряжения для сложных сечений из неоднородных материалов.

Пример. Двухопорная железобетонная балка нагружена сосредоточенной силой $F = 70 \text{ кН}$. Исследовать распределение нормальных σ и касательных τ напряжений по высоте сечения балки в зоне приложения нагрузки F . Схема нагружения балки и эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q показаны на рисунке 4, а. Поперечное сечение приведено на рисунке 4, б. Принять модуль упругости бетона равным $E_1 = 0,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, модуль упругости стали $E_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

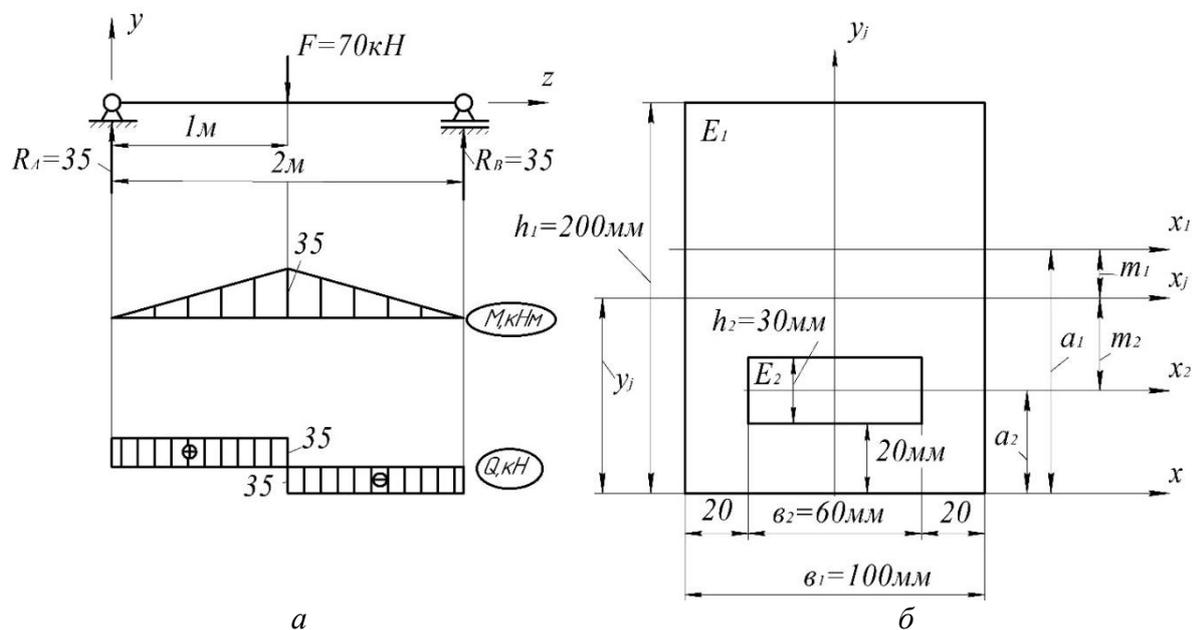


Рис. 4. Схема нагружения балки (а), поперечное сечение балки (б)

Ось y_j является осью симметрии и поэтому она является главной осью центральной жесткости сечения. Определим место положения второй главной оси центральной жесткости x_j приняв за ось отсчета ось x . Расстояние между осью x и центральными осями x_1 и x_2 будут равны: $a_1 = 100 \text{ мм}$; $a_2 = 35 \text{ мм}$.

В соответствии с /4–5/ получим следующее выражение для определения координаты y_j , определяющей положение оси x_j .

$$y_j = \frac{E_1 \cdot A_1 \cdot a_1 - E_1 \cdot A_2 \cdot a_2 + E_2 \cdot A_2 \cdot a_2}{E_1 A_1 - E_1 A_2 + E_2 A_2} = \frac{E_1 \cdot b_1 \cdot h_1 \cdot a_1 + (E_2 - E_1) b_2 h_2 a_2}{E_1 b_1 h_1 + (E_2 - E_1) b_2 h_2}$$

Подставив все числовые величины в последнее выражение получим:

$$y_j = \frac{0,2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 200 \cdot 100 + (2 \cdot 10^5 - 0,2 \cdot 10^5) \cdot 60 \cdot 30 \cdot 35}{0,2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 200 + (2 \cdot 10^5 - 0,2 \cdot 10^5) \cdot 60 \cdot 30} = 70,91 \text{ мм}$$

По полученному значению y_j на рисунке 4, б представлено положение главной оси центральной жесткости x_j . При правильном определении места положения оси x_j статический момент жесткости сечения относительно этой оси будет равен нулю. Определим расстояние m_1 и m_2 между осью x_j и центральными осями x_1 и x_2 . $m_1 = 29,09$ мм; $m_2 = -35,91$ мм.

Определяем статический момент жесткости сечения:

$$(E s_{x_j})_{\text{пр}} = E_1 A_1 m_1 - E_1 A_1 m_2 + E_2 A_2 m_2 = E_1 v_1 h_1 m_1 + (E_2 - E_1) v_2 h_2 m_2$$

или:

$$(E s_{x_j})_{\text{пр}} = 0,2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 200 \cdot 29,09 + (2 \cdot 10^5 - 0,2 \cdot 10^5) \cdot 60 \cdot 30(-35,91) = \\ = 129,288 \cdot 10^5 - 129,277 \cdot 10^5 \approx 0$$

Проверкой установлено, что место положения главной оси центральной жесткости x_j определено правильно.

На основании // получим величину приведенной жесткости сечения $(E J_x)_{\text{пр}}$.

$$(E J_x)_{\text{пр}} = E_1 J_{x_1} + E_1 A_1 m_1^2 - E_1 J_{x_2} - E_1 A_2 m_2^2 + E_2 J_{x_2} + E_2 A_2 m_2^2.$$

В расширенном виде последнее выражение может быть представлено:

$$(E J_x)_{\text{пр}} = E_1 \left[\frac{v_1 h_1^3}{12} + v_1 h_1 m_1^2 - \frac{v_2 h_2^3}{12} - v_2 h_2 m_2^2 \right] + E_2 \left[\frac{v_2 h_2^3}{12} + v_2 h_2 m_2^2 \right] \\ (E J_x)_{\text{пр}} = 0,210^5 \left[\frac{100 \cdot 200^3}{12} + 100 \cdot 200 \cdot 29,09^2 - \frac{60 \cdot 30^3}{12} - 60 \cdot 30(-35,91)^2 \right] + \\ + 2 \cdot 10^5 \left[\frac{60 \cdot 30^3}{12} + 60 \cdot 30(-35,91)^2 \right] = 2113,942 \cdot 10^9 \text{ Н мм}^2.$$

На рисунке 5, а показано поперечное сечение балки и указана точками А, В, С и Д зоны в которых следует определить величины нормальных напряжений для построения эпюры распределения напряжений по высоте сечения.

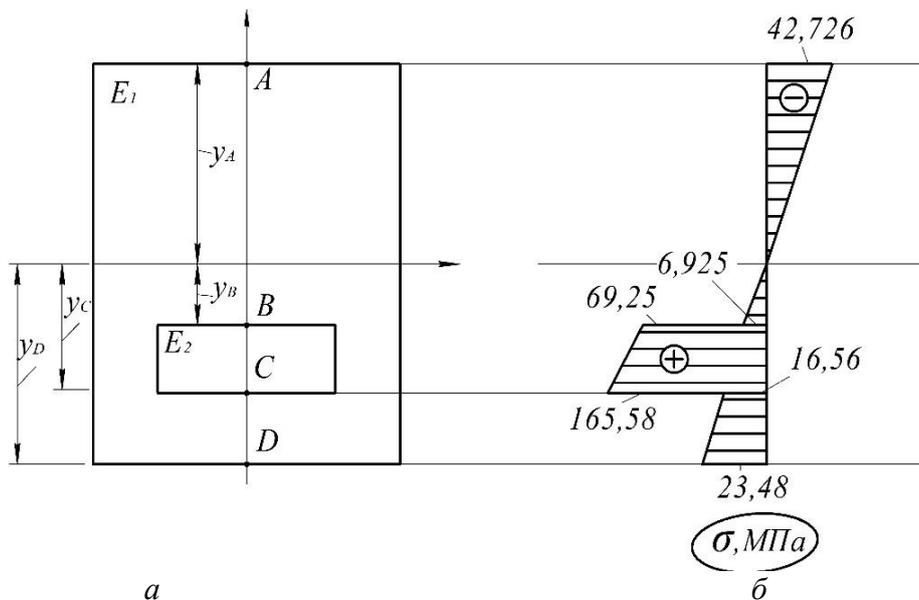


Рис. 5. Поперечное сечение балки (а), эпюра нормальных напряжений (б)

Координаты соответствующих точек относительно оси x_j будут равны: $y_A = 129,09$ мм; $y_B = 20,91$ мм; $y_C = 50,91$ мм; $y_D = 70,91$ мм.

Определяем величину нормального напряжения в точке A , используя формулу (10).

$$\sigma_A = -\frac{E_1 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_A = -\frac{0,2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942 \cdot 10^9} \cdot 129,09 = -42,726 \text{ МПа}$$

Определяем величину нормального напряжения в точке B в массе бетона.

$$\sigma_B = \frac{E_1 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_B = \frac{0,2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942 \cdot 10^9} \cdot 20,91 = 6,925 \text{ МПа}$$

Определяем величину нормального напряжения в точке B в массе стальной пластины.

$$\sigma_B = \frac{E_2 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_B = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942} \cdot 20,91 = 69,25 \text{ МПа}$$

Определяем величину нормального напряжения в точке C в массе стальной пластины.

$$\sigma_C = \frac{E_2 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_C = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942 \cdot 10^9} \cdot 50,91 = 165,58 \text{ МПа}$$

Определяем величину нормального напряжения в точке C в массе бетона.

$$\sigma_C = \frac{E_1 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_C = \frac{0,2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942 \cdot 10^9} \cdot 50,91 = 16,56 \text{ МПа}$$

Определяем величину нормального напряжения в точке Д.

$$\sigma_D = \frac{E_1 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_D = \frac{0,2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942 \cdot 10^9} \cdot 70,91 = 23,48 \text{ МПа}$$

По полученным результатам построена эпюра распределения нормальных напряжений по высоте сечения (рисунок 5, б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Методика расчета стержней из композиционных материалов / А. И. Дудяк [и др.] Перспективные направления развития технологии машиностроения и металлообработки. Технология – Оборудование – Инструмент – Качество: тезисы докладов 36-ой Международной научно-технической конференции в рамках международной специализированной выставки «Машиностроение / Металлообработка–2022»; редкол.: В. К. Шелег (отв. ред.) [и др.]. – Минск : Бизнесофсет, 2022. – С. 36–38.
2. Степин П. А. Сопротивление материалов. – М. : Высшая школа, 1987. – 303 с.
3. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов : учебник для вузов / М. Д. Подскребко. – Минск : Выш. шк., 2007. – 797 с.
4. Дудяк, А. И. Геометрические характеристики плоских сечений переменной жесткости: пособие для студентов специальностей 1–36 01 01 «Технология машиностроения», 1–36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства», 1–36 01 05 «Машины и технология обработки материалов давлением», 1–55 01 01 «Интеллектуальные приборы, машины и производства», 1–55 01 02 «Интегральные сенсорные системы», 1–55 01 03 «Компьютерная мехатроника» / А. И. Дудяк, Ж. Г. Дикан. – Минск : БНТУ, 2018. – 32 с.

Поступила: 18.04.2023