

## ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ

Лачугина Е. А.

*Белорусский государственный университет транспорта*

**Введение.** За последние годы слоистые элементы конструкций получили широкое применение в народном хозяйстве, включая строительство и машиностроение. Это обуславливает требование по созданию расчетных механико-математических моделей, учитывающих как квазистатический, так и динамический характер нагрузок. В связи с этим исследование собственных частот колебаний круговой пятислойной пластины является актуальным.

В монографии [1] описываются подходы к построению математических моделей статического и динамического деформирования многослойных элементов конструкций в различных физико-механических полях. В ней также изложены методы решения соответствующих краевых и начально-краевых задач. В работах [2–5] рассмотрены результаты исследования динамики слоистых оболочек. В источниках [6–10] содержатся исследования колебаний неоднородных балок и трехслойных упругих и вязкоупругих пластин. Публикации [11; 12] посвящены деформированию трехслойных круговых пластин со сжимаемым наполнителем. В статьях [13–16] исследовано деформирование трехслойных пластин, связанных с упругим грунтовым основанием. Неосесимметричное деформирование трехслойных пластин в своей плоскости рассмотрено в публикациях [17; 18]. Изгиб трехслойных пластин в тепловом потоке исследован в статье [19].

В работе [20] содержится вывод уравнений движения круговой пятислойной симметричной по толщине пластины. Здесь рассмотрены собственные колебания подобной пластины, получены формулы для вычисления частот собственных колебаний и проведен их численный анализ в зависимости от толщины внутреннего несущего слоя.

**1. Постановка начально-краевой задачи.** Рассматривается симметричная по толщине пятислойная круговая пластина. Постановка краевой задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , которая связана со срединной плоскостью центрального несущего слоя (1). В тонких внешних (2, 4) и внутреннем (1) несущих слоях (рисунок 1) справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности слоев. В относительно толстых легких заполнителях (3, 5) принимается гипотеза Тимошенко о несжимаемости и прямолинейности нормали, которая поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi(r, t)$  – относительный сдвиг в наполнителе.

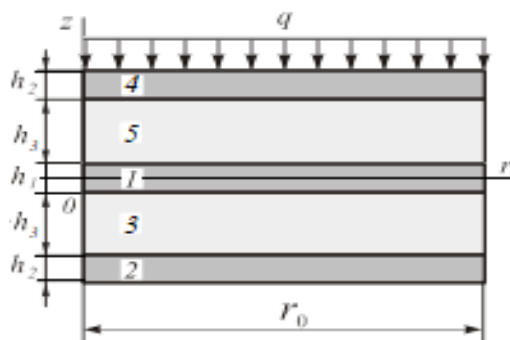


Рис. 1. Расчетная схема пятислойной пластины

Внешняя вертикальная распределенная нагрузка осесимметрична и не зависит от координаты  $\varphi$ :  $q = q(r, t)$ . На контуре пластины ( $r = r_0$ ) предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ( $\psi(r_0, t) = 0$ ). Через  $w(r, t)$  обозначен прогиб пластины,  $h_1, h_2$  – толщина *внутреннего и внешних несущих слоев*,  $h_3$  – толщина заполнителей. Продольные и поперечные перемещения в слоях  $u^{(k)}(r, z)$  и выражаются через две искомые функции:  $w(r, t), \psi(r, t)$ :

– в несущих слоях  $k = 1, 2, 4$

$$\begin{aligned} u_r^{(4)} &= -zw_{,r} + h_3\psi, & (0,5h_1 + h_3 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3 + h_2), \\ u_r^{(1)} &= -zw_{,r}, & (-0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1), \\ u_r^{(2)} &= -zw_{,r} - h_3\psi, & (-0,5h_1 - h_3 \leq z \leq -0,5h_1 - h_3), \end{aligned}$$

– в заполнителях  $k = 3, 5$

$$\begin{aligned} u_r^{(5)} &= -zw_{,r} + (z - 0,5h_1\psi), & (0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3), \\ u_r^{(3)} &= -zw_{,r} + (z + 0,5h_1\psi), & (-0,5h_1 - h_3 \leq z \leq -0,5h_1), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $z$  – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Уравнения движения рассматриваемой пластины получены в [20] при помощи вариационного принципа Лагранжа и принципа Даламбера:

$$\begin{aligned} L_2(a_4\psi - a_5w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) - M_0\ddot{w} &= -q, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $M_0\ddot{w}$  – поперечные инерционные силы;  $M_0 = (\rho_1h_1 + \rho_2h_2 + \rho_3h_3 + \rho_4h_4 + \rho_5h_5)r_0^2$ ;  $a_i$  – коэффициенты;

$$\begin{aligned} a_4 &= \left[ 2K_2^+h_2h_3^2 + 2K_3^+\frac{h_3^3}{3} \right], \quad a_5 = \left[ K_2^+h_2h_3(h_1 + 2h_3 + h_2) + 2K_3^+h_3\left(\frac{h_1h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3}\right) \right], \\ a_6 &= \left[ 2K_2^+h_2\left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1h_2}{2} + h_1h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2h_3 + h_3^2\right) + K_1^+\frac{h_1^3}{12} + 2K_3^+h_3\left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3}\right) \right], \\ K_k^+ &= K_k + \frac{4}{3}G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k; \end{aligned}$$

$G_k, K_k$  – модули сдвига и объемного деформирования;  $L_2, L_3$  – операторы;

$$\begin{aligned} L_2(g) &\equiv \left( \frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

Начальные условия движения принимаются однородными. В качестве граничных принимаются кинематические условия заделки контура пластины:

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0, \text{ при } r = r_0. \quad (3)$$

**2. Собственные колебания.** Соответствующая система дифференциальных уравнений следует из (2) при  $q = 0$ :

$$\begin{aligned} L_2(a_4\psi - a_5w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) - M_0\ddot{w} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

После некоторых элементарных преобразований система приводится к виду

$$\begin{aligned} \psi &= b_1w_{,r} + C_1r + C_2/r, \\ L_3(w_{,r}) + M^4\ddot{w} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$b_1 = \frac{a_5}{a_4}, \quad M^4 = M_0D, \quad D = \frac{a_4}{a_4a_6 - a_5^2}.$$

В связи с ограниченностью искомого решения в начале координат для сплошных пластин необходимо положить  $C_2 = 0$ .

Искомый прогиб принимается в виде

$$w(r, t) = v(r)(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)), \quad (6)$$

где  $v(r)$  – искомая координатная функция;

$\omega$  – частота собственных колебаний пластины;

$A$  и  $B$  – константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

После подстановки выражения (6) в последнее уравнение системы (5) получим бибесселево уравнение для определения координатной функции  $v(r)$ :

$$L_3(v_{,r}) - \beta^4v = 0. \quad (7)$$

В развернутом виде

$$v_{,rrrr} + \frac{2}{r}v_{,rrr} - \frac{1}{r^2}v_{,rr} + \frac{1}{r^3}v_{,r} - \beta^4v = 0,$$

где

$$\beta^4 = M^4\omega^2.$$

Решение уравнения (7) можно представить в виде

$$v(\beta r) = C_3J_0(\beta r) + C_4I_0(\beta r) + C_5Y_0(\beta r) + C_6K_0(\beta r), \quad (8)$$

где  $J_0, Y_0$  – функции Бесселя нулевого порядка (нижний индекс) первого и второго рода (функция Неймана), соответственно;  $I_0, K_0$  – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевых порядков;  $C_3, \dots, C_6$  – константы интегрирования.

Не останавливаясь на описании указанных функций, отметим, что  $Y_0(\beta r)$  и  $K_0(\beta r)$  имеют особенность типа логарифма в начале координат, то есть в центре пластины. Поэтому необходимо положить  $C_5 = C_6 = 0$ .

В результате, решение системы (5) принимает вид

$$\begin{aligned} \psi(r, t) &= b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r, \\ w(r, t) &= v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $A, B$  – константы интегрирования, следующие из начальных условий движения;  $v(r)$  – координатная функция

$$v(r) = C_3 J_0(\beta r) + C_4 I_0(\beta r).$$

Если контур пластины зашпелен, то на нем должны выполняться условия (3). Подставив в два последних из них решение (9), получим однородную систему алгебраических уравнений для определения констант интегрирования  $C_3, C_4$ :

$$\begin{aligned} C_3 J_0(\beta r_0) + C_4 I_0(\beta r_0) &= 0, \\ -C_3 J_1(\beta r_0) + C_4 I_1(\beta r_0) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $J_1, I_1$  – функции Бесселя первого порядка.

Система (10) имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю ее детерминанта. Следовательно,

$$I_1(\beta r_0) J_0(\beta r_0) + I_0(\beta r_0) J_1(\beta r_0) = 0. \quad (11)$$

Трансцендентное уравнение (11) служит для вычисления собственных чисел  $\beta_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) уравнения (7).

После вычисления  $\beta_n$  частоты собственных колебаний следуют из уравнения (8):

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D},$$

где параметр  $M^4$  определяется формулой (6).

В таблице 1 приведены собственные числа  $\beta_n$  и собственные частоты  $\omega_n$  для пяти-слойной пластины единичного радиуса ( $r_0 = 1$ ), составленного из слоев Д16Т–фторопласт-4–Д16Т–фторопласт-4–Д16Т. Толщины несущих слоев и заполнителей, отнесенные к радиусу пластины, следующие:  $h_2 = h_4 = h_1 = 0,02, h_3 = h_5 = 0,2$ .

Таблица 1 – Собственные числа и собственные частоты пятислойной пластины

Номер $n$	$\beta_n/\omega_n$	Номер $n$	$\beta_n/\omega_n$
0	3,196 / $0,278 \cdot 10^5$	8	28,279 / $1704,949 \cdot 10^5$
1	6,306 / $4,216 \cdot 10^5$	9	31,378 / $2692,786 \cdot 10^5$
2	9,439 / $21,162 \cdot 10^5$	10	34,561 / $3803,649 \cdot 10^5$
3	12,577 / $66,706 \cdot 10^5$	11	37,702 / $5386,576 \cdot 10^5$
4	15,716 / $162,638 \cdot 10^5$	12	40,844 / $7419,392 \cdot 10^5$
5	18,857 / $337,090 \cdot 10^5$	13	43,985 / $9978,693 \cdot 10^5$
6	21,997 / $624,179 \cdot 10^5$	14	47,126 / $13149,149 \cdot 10^5$
7	25,138 / $1064,580 \cdot 10^5$		

**3. Численные результаты** получены для пятислойной пластины единичного радиуса, составленной из слоев Д16-Т-фторопласт-Д16-Т-фторопласт-Д16-Т. Толщины заполнителей приняты  $h_3 = h_5 = 0,2$  м.

На рисунок 2 приведены графики, иллюстрирующие зависимость собственной частоты  $\omega_0$  пластины от толщины внутреннего несущего слоя  $h_1$  при различной толщине внешних несущих слоев: 1 –  $h_2 = h_4 = 0,02$  м; 2 –  $h_2 = h_4 = 0,04$  м; 3 –  $h_2 = h_4 = 0,06$  м. С увеличением толщины несущих слоев частота основного тона  $\omega_0$  возрастает нелинейно.

Рисунок 3 содержит графики изменения частоты основного тона  $\omega_0$  от толщины слоя  $h_1$  при постоянной суммарной толщине несущих слоев: 1 –  $h_1 + h_2 + h_4 = 0,03$ ; 2 –  $h_1 + h_2 + h_4 = 0,06$ ; 3 –  $h_1 + h_2 + h_4 = 0,09$ .

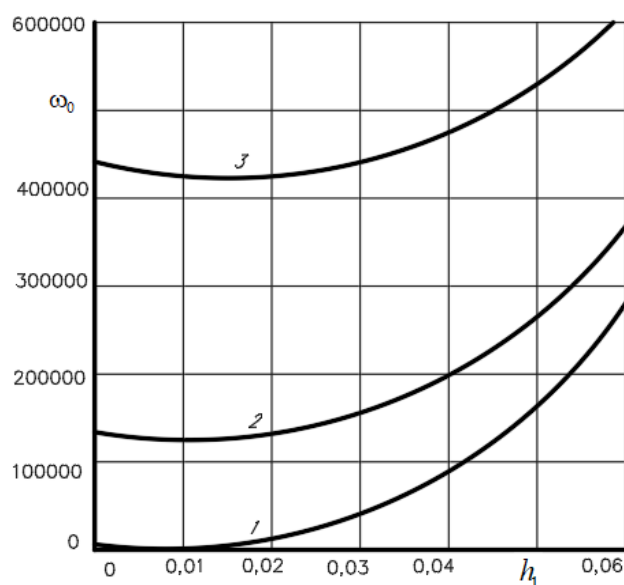


Рис. 2. Зависимость собственной частоты  $\omega_0$  от толщины внутреннего несущего слоя  $h_1$

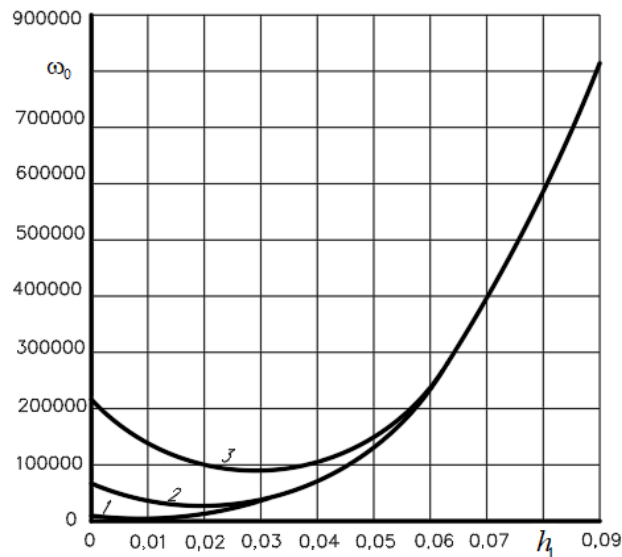


Рис. 3. Собственная частота  $\omega_0$  при постоянной суммарной толщине всех несущих слоев

**Выводы.** Предложенная механико-математическая модель позволяет исследовать собственные частоты колебаний пятислойной круговой пластины, симметричной по толщине.

*Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция».*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
2. Могилевич Л. И. Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым наполнителем / Л. И. Могилевич, В. С. Попов, Э. И. Старовойтов // Наука и техника транспорта. – 2006. – № 2. – С. 56–63.
3. Старовойтов Э. И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.
4. Tarlakovskii, D. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.
5. Старовойтов Э. И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.
6. Fedotenkov, G. V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2019. – Vol.40, № 4. – P. 439–447.
7. Vakhneev, S. Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol. 18, no. 4. – P. 699–704.

8. Pronina, P. F. Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects / P. F. Pronina, O. V. Tushavina, E. I. Starovoitov // *Periódico Tchê Química*. – 2020. – Vol. 17, no 35. – P. 753–764.
9. Леоненко Д. В. Собственные колебания трехслойного стержня на упругом основании / Д. В. Леоненко, Э. И. Старовойтов // *Прикладная механика*. – 2016. – Т. 52. – № 4. – С. 37–46.
10. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, А. В. Яровая // *Проблемы прочности*. – 2002. – Т. 34, № 5. – С. 70–79.
11. Захарчук Ю. В. Влияние сжимаемости заполнителя на перемещения в трехслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // *Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках*. – 2018. – № 2. – С. 14–27.
12. Захарчук, Ю. В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2017. – № 10 (8). – С. 55–66.
13. Козел А. Г. Влияние сдвиговой жесткости основания на напряженное состояние сэндвич пластины / А. Г. Козел // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–34.
14. Козел А. Г. Влияние сдвиговой жесткости основания на напряженное состояние сэндвич пластины / А. Г. Козел // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–34.
15. Трацевская Е. Ю. Закономерности развития суффозионно-просадочных явлений на территории Белоруссии / Е. Ю. Трацевская, А. Н. Галкин // *Инженерная геология массивов лессовых пород: труды международной научной конференции; под ред. В. Т. Трофимова, В. А. Королева*. – М., 2004. – С. 108–109.
16. Трацевская Е. Ю. Особенности освоения техногенных грунтов г. Гомеля в современных условиях / Е. Ю. Трацевская, А. Н. Галкин // *Многообразие грунтов: морфология, причины, следствия. Труды Международной научной конференции; под ред. В. Т. Трофимова и В. А. Королева*. – М., 2003. – С. 123.
17. Нестерович А. В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при несимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации*. – 2018. – № 11 (9). – С. 195–203.
18. Нестерович А. В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации*. – 2019. – № 12 (11). – С. 152–157.
19. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field / É. I. Starovoitov [et al.] // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2015. – Vol. 88, No. 4. – P. 1023–1029.
20. Лачугина Е. А. Задача о свободных колебаниях пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // *Проблемы безопасности на транспорте: матер. XII Междунар. научн.-практ. конф.: в 2 ч., Гомель, 24–25 ноябр. 2022 г. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп. ; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко*. – Гомель : БелГУТ, 2022. – Ч. 2. – С. 202–204.

*Поступила: 19.05.2023*