*УДК 539.3*

# ИЗГИБ КРУГОВОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

**Салицкий В. С.**

*Белорусский государственный университет транспорта*

Рассмотрен изгиб круговой симметричной по толщине пятислойной пластины под действием равномерно распределенной нагрузки. Принимается, что для тонких несущих слоев выполняются кинематические гипотезы Кирхгофа. Сравнительно толстый заполнитель деформируется в соответствии с гипотезой Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Уравнения равновесия получены с помощью вариационного метода Лагранжа. Учтена работа тангенциальных напряжений в заполнителе. Получено аналитическое решение краевой задачи и проведена его численная апробация.

**Введение**. В последнее время значительно возрос спрос на использование слоистых тонкостенных элементов конструкций в авиа-, ракето-, машиностроении и строительстве. Это обуславливает необходимость разработки математических моделей и методов их расчета на различные виды и типы нагрузок.

Методы расчета и постановки краевых задач для расчета слоистых элементов конструкций приведены в монографиях [1–4]. В статьях [5–7] рассмотрены задачи динамики слоистых оболочек. В работах [8–11] содержатся результаты исследования колебаний неоднородных балок и круговых трехслойных пластин. Публикации [12; 13] посвящены деформированию трехслойных круговых пластин со сжимаемым заполнителем, или связанных с упругим основанием Пастернака [14; 15]. Неосесимметричное растяжение-сжатие трехслойных пластин рассмотрено в [16; 17]. Изгиб трехслойных пластин и стержней в тепловом потоках исследован в статьях [18; 19]. Постановка краевой задачи о динамическом деформировании пятислойной круговой пластины приведена в [20]. Уравнения равновесия круговой пятислойной пластины в усилиях получены в [21]. Здесь рассмотрен изгиб защемленной по контуру упругой симметричной по толщине круговой пятислойной пластины с жесткими заполнителями.

**1. Постановка и решение задачи.**

Рассматривается симметричная по толщине пятислойная круговая пластина (рисунок 1). Постановка задачи и ее решение проведены в цилиндрической системе координат, которая связана со срединной плоскостью центрального несущего слоя. В тонких внутреннем и внешних несущих слоях (1, 2, 4) справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности слоев. В жестких несжимаемых по толщине заполнителях (3, 5), воспринимающих нагрузку в тангенциальном направлении, нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины и поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$.

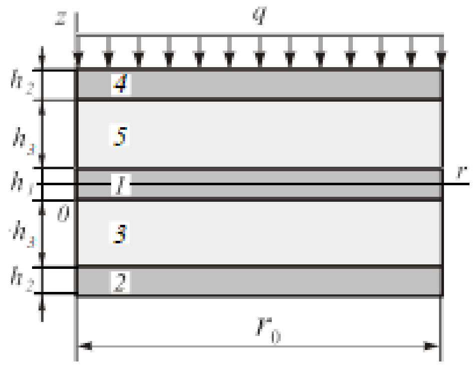


Рис. 1. Расчетная схема

На внешний слой пластины действует осесимметричная равномерно распределенная поперечная нагрузка $q$. На контуре пластины ($r = r_0$) предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi(r_0) = 0$). Через $w(r)$ обозначен прогиб пластины, $h_k$ – толщина $k$-го слоя. Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и выражаются через две искомые функции: $w(r)$ – прогиб пластины и $\psi(r)$ – относительный сдвиг в заполнителях. В результате

– в несущих слоях 1, 2, 4

$$u_r^{(4)} = -zw,_r + h_3\psi, \quad 0,5h_1 + h_3 \le z \le 0,5h_1 + h_3 + h_2,$$
$$u_r^{(1)} = -zw,_r\,, \quad -0,5h_1 \le z \le 0,5h_1,$$
$$u_r^{(2)} = -zw,_r - h_3\psi, \quad -0,5h_1 - h_3 - h_2 \le z \le -0,5h_1 - h_3,$$

– в заполнителях – 3, 5

$$u_r^{(5)} = -zw,_r + (z - 0,5h_1\psi), \quad 0,5h_1 \le z \le 0,5h_1 + h_3,$$

$$u_r^{(3)} = -zw,_r + (z + 0,5h_1\psi), \quad -0,5h_1 - h_3 \le z \le -0,5h_1\,. \tag{1}$$

где $z$ – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из перемещений (1) и соотношений Коши:

$$\varepsilon_r^{(4)} = -zw,_{rr} + h_3\psi,_r\,; \quad \varepsilon_\varphi^{(4)} = \frac{1}{r}(-zw,_r + h_3\psi); \quad \varepsilon_{rz}^{(4)} = 0;$$
$$\varepsilon_r^{(5)} = -zw,_{rr} + (z - 0,5h_1\psi,_r); \quad \varepsilon_\varphi^{(5)} = \frac{1}{r}(-zw,_r + (z - 0,5h_1\psi)); \; \varepsilon_{rz}^{(5)} = \frac{1}{2}\psi;$$
$$\varepsilon_r^{(1)} = -zw,_{rr}\,; \quad \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}(-zw,_r\,); \; \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0;$$
$$\varepsilon_r^{(3)} = -zw,_{rr} + (z + 0,5h_1\psi,_r); \quad \varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}(-zw,_r + (z + 0,5h_1\psi)); \; \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\psi\,,$$

$$\varepsilon_r^{(2)} = -zw,_{rr} - h_3\psi,_r\,; \quad \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(-zw,_r - h_3\psi), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0\,. \tag{2}$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k э_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3 э_{rz}^{(3)}, \tag{3}$$

где $s_\alpha^{(k)}, э_\alpha^{(k)}$ – девиаторы, $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $s_{rz}^{(3)}$, $э_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и деформация в заполнителе; $G_k$, $K_k$ – модули сдвига и объемной деформации материала $k$-го слоя, причем $G_1 = G_2$, $K_1 = K_2$.

С помощью компонентов тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$; $k = 1, 2, 3, 4, 5$), вводятся обобщенные внутренние усилия и моменты:

$$T_\alpha =, \ M_\alpha = \sum_{k=1}^{5} M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{5} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z\, \mathrm{d}z,$$

$$H_\alpha = (M_\alpha^{(3)} + M_\alpha^{(5)}) + h_3(T_\alpha^{(4)} - T_\alpha^{(2)}) + 0{,}5h_1(T_\alpha^{(3)} - T_\alpha^{(5)}), \tag{4}$$

$$Q = \int_{0,5h_1}^{0,5h_1+h_3} \sigma_{rz}^{(3)} \mathrm{d}z + \int_{-0,5h_1-h_3}^{-0,5h_1} \sigma_{rz}^{(5)}\, \mathrm{d}z.$$

Считается, что к контуру пластины приложены заданные силы и моменты $T_r^0, H_r^0, M_r^0, Q^0$. Вариация работы внешней поверхности нагрузки будет

$$\delta A_1 = \iint_S q\delta w r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi. \tag{5}$$

Виртуальная работа контурных усилий

$$\delta A_2 = \int^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta\psi + M_r^0 \delta w,_r + Q^0 \delta w)\, \mathrm{d}\varphi. \tag{6}$$

Вариация работы сил упругости

$$\delta W = \iint_S \left[ \sum_{k=1}^{5} \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta\varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta\varepsilon_\varphi^{(k)}\, \mathrm{d}z + \int_{0,5h_1}^{0,5h_1+h_3} \sigma_{rz}^{(3)} \delta\psi\, \mathrm{d}z + \int_{-0,5h_1-h_3}^{-0,5h_1} \sigma_{rz}^{(5)} \delta\psi\, \mathrm{d}z + \right] r\mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi. \tag{7}$$

Проведя необходимые преобразования и приравнивая виртуальную работу внутренних усилий (7) к работе внешних и контурных нагрузок (5), (6) получим систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях [21]:

$$H_r,_r + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q = 0,$$

$$M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_r,_r - M_\varphi,_r) = -q. \tag{8}$$

На контуре пластины $r = r_0$ должны выполняться силовые граничные условия

$$H_r = H_r^0; M_r = M_r^0;\ M_r,_{rr} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0. \tag{9}$$

Используя закон Гука (3), деформации (2) и соотношения (4), получим выражение обобщенных усилий через две неизвестные функции: $w(r, t)$, $\psi(r, t)$. После подстановки полученных выражений в уравнения (8) имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия для определения перемещений $w(r)$ и $\psi(r)$:

$$\begin{aligned} &L_2(a_4\psi - a_5 w,_r) - 2h_3 G_3 \psi = 0, \\ &L_3(a_5\psi - a_6 w,_r) = -q, \end{aligned} \tag{10}$$

где, коэффициенты $a_i$ вычисляются через механические и геометрические характеристики слоев

$$a_4 = \left[2K_2^{+}\ h_2 h_3^{\ 2} + 2K_3^{+}\frac{h_3^3}{3}\right],\ a_5 = \left[K_2^{\ +}h_2 h_3(h_1 + 2h_3 + h_2) + 2K_3^{\ +}h_3\left(\frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3}\right)\right],$$

$$a_6 = \left[2K_2^{+}h_2\left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^{\ 2}}{3} + h_2 h_3 + h_3^{\ 2}\right) + K_1^{+}\frac{h_1^3}{12} + 2K_3^{+}h_3\left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3}\right)\right],$$

$$a_7 = \left[2K_2^{-}h_2\left(\frac{h_1^{\ 2}}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^{\ 2}}{3} + h_2 h_3 + h_3^{\ 2}\right) + K_1^{-}\frac{h_1^3}{12} + 2K_3^{-}h_3\left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3}\right)\right];$$

$L_2$, $L_3$ – дифференциальные операторы

$$\mathrm{L}_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2},$$

$$\mathrm{L}_3(g) \equiv \frac{1}{r}\big(r\,\mathrm{L}_2(g)\big),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

На контуре пластины должны выполняться силовые (9) или кинематические граничные условия. В дальнейшем принимаем, что контур пластины шарнирно оперт, т. е. при $r = r_0$ должны выполняться условия

$$\psi = 0,\ w = w,_r = 0. \tag{11}$$

Решение краевой задачи (10, 11) получено в виде

$$\psi = \frac{a_5 q}{4a_6 h_3 G_3}\left(\frac{I_1(\beta r)}{I_1(\beta r_0)}r_0 - r\right),$$

$$w = \frac{a_5^{\ 2}q}{4a_6^{\ 2}h_3 G_3}\left(r_0\frac{I_0(\beta r) - I_0(\beta r_0)}{\beta I_1(\beta r_0)} - \frac{r^2 - r_0^{\ 2}}{2}\right) + \frac{q}{64a_6}(r^2 - r_0^{\ 2})^2, \tag{12}$$

где $I_0$, $I_1$ – модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков.

**2 Численные результаты.** Численно исследован максимальный прогиб (12) в защемленной по контуру пятислойной пластине, несущие слои которой набраны из дюралюминия, заполнители – фторопласт-4. Упругие характеристики этих материалов приведены в [1]. Величина нагрузки – $q_0$ = 10 МПа, Геометрические параметры пластины и радиальная координата отнесены к ее радиусу $r_0$.

На рисунке 2 показана зависимость максимального прогиба от толщины внутреннего несущего слоя при различных значениях суммарной толщины несущих слоев $H = h_1 + h_2 + h_4$: *1* $H$ = 0,03; *2* – $H$ = 0,06; *3* – $H$ = 0,09. толщина заполнителей постоянна $h_3 = h_4$ = 0,2. Увеличение толщины центрального несущего слоя за счет внешних слоев приводит сначала к некоторому росту прогиба, т. е. увеличению жесткости конструкции. Затем жесткость и, соответственно прогиб уменьшаются

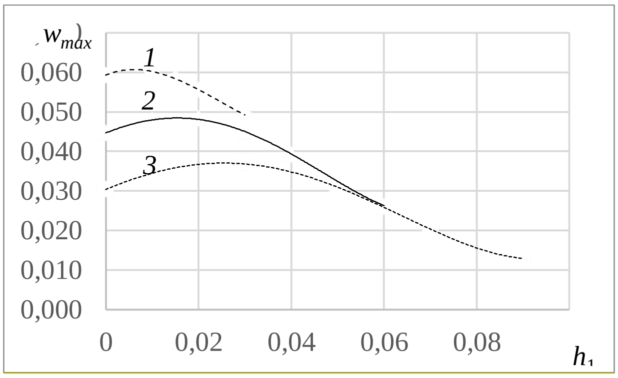


Рис. 2. Максимальный прогиб в центре пятислойной пластины

**Выводы**. Механико-математическая модель изгиба пятислойной упругой пластины и предложенное аналитическое решение краевой задачи позволяют исследовать ее перемещения не только при постоянной, но и при любой осесимметричной нагрузке.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
2. Aghalovyan L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan – Singapore–London : World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
3. Журавков, М. А. Математические модели механики твердого тела // М. А. Журавков Э. И. Старовойтов – Минск : БГУ, 2021 – 535 с.
4. Старовойтов Э. И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.
5. Pronina, P. F. Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects / P. F. Pronina, O. V. Tushavina, E. I. Starovoitov // Periódico Tchê Química. – 2020. – Vol. 17, No. 35. – P. 753–764.
6. Tarlakovskii D. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, No. 2. – P. 145–152.
7. Kuznetsova E. L. Methods of diagnostic of pipe mechanical damage using functional analysis, neural networks and method of finite elements / E. L. Kuznetsova, G. V. Fedotenkov, E. I. Starovoitov // INCAS Bulletin. – Volume 12, Special Issue. – 2020. – P. 79–90.

8. Fedotenkov G. V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2019. – Vol. 40 № 4. – P. 439–447.

9. Vakhneev, S. Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol. 18, No 4. – P. 699–704.

10. Starovoitov, É. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, No. 5. – P. 474–481.

11. Старовойтов Э. И. Термоупругие свободные колебания трехслойной круговой пластины / Э. И. Старовойтов М. А. Журавков А. В. Яровая // Теоретическая и прикладная механика. – Мн. : БНТУ. – 2022. – Вып. 36. – С. 15–20.

12. Захарчук, Ю. В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – № 10 (10). – С. 55–66.

13. Захарчук Ю. В. Влияние сжимаемости заполнителя на перемещения в трехслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2. – С. 14–27.

14. Козел А. Г. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – № 11 (11). – С. 127–133.

15. Козел А. Г. Влияние сдвиговой жесткости основания на напряженное состояние сэндвич пластины / А. Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018 – № 6 (332). – С. 25–34.

16. Нестерович А. В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – № 11 (11). – С. 195–203.

17. Нестерович А. В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – № 12 (12).– С. 152–157.

18. Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле / Э. И. Старовойтов [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 4. – С. 987–993.

19. Старовойтов, Э. И. Изгиб с растяжением трехслойного термоупругого стержня / Э. И. Старовойтов, А. В. Попченко, Д. В. Тарлаковский // Теоретическая и прикладная механика. – Мн. : БНТУ, 2013. – Вып. 28. – С. 23–26.

20. Лачугина Е. А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – № 15 (15). – С. 212–219.

21. Салицкий В. С. Уравнения равновесия круговой пятислойной пластины в усилиях / В. С. Салицкий // Мат. XXVII Междунар. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. – 2021. – Т. 1. – С. 199–201.

*Поступила:25.05.2023*