

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КАЧЕНИЯ И ЗОНЫ КОНТАКТА АВТОШИНЫ С ОСНОВАНИЕМ

<sup>1</sup>Можаровский В. В., <sup>1</sup>Кузьменков Д. С., <sup>2</sup>Василевич Ю. В.

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель

<sup>2</sup>Белорусский национальный технический университет, Минск

**Введение** Для описания и анализа контактных процессов, происходящих при качении автомобильных колес по основанию и механизма изнашивания автошин колес, были рассмотрены задачи о математическом моделировании процесса качения двух ортотропных (из композитов) цилиндров с параллельными осями, прижатых друг к другу с силой  $P$ , и их реализация в виде компьютерных программ. Решение данной проблемы позволяет оценить влияния механических и упругих свойств армированной шины колеса, которая, безусловно, имеет такое же характерное поведение присущее, как и волокнистому композиту. На базе представленных в монографии [1] теоретических положений, кратко изложена программная реализация. В связи с построением решения данной задачи возникает и другая проблема расчета напряженно-деформированного состояния армированной шины и определения дискретных зон контакта в системе взаимодействия «шина-основание». Здесь необходимо разрабатывать теоретико-экспериментальную методику на базе широко известного метода конечных элементов (МКЭ) и проведения опытов на основе современных технических достижений сканирования зон контакта шины и основания (например, фотопринт) или сбор сигналов от пьезодатчиков давления и обработка их на компьютере (рисунок 2).

**Краткое описание процесса качения.** Следует отметить, что исследование явления качения цилиндрических тел из композитных материалов при контактом взаимодействии тел возможно при использовании эмпирических экспериментальных методов, но нежелательно, из-за обширности и дороговизны работ, требуемых для охвата множества разнообразных комбинаций структур материалов, заполнителей, способов плетения волокна, последовательности укладки слоев, типов конструкций. В связи с этим создана программа, реализующая нахождение касательных усилий в области контакта, а также определение зон скольжения и сцепления, направления скольжения. Данную задачу решаем, как задачу математического программирования, используя вариационный подход, который был применен Калкером [2] для задачи качения однородных изотропных цилиндров. Приняв, что выполняется закон сухого трения Кулона, определим тангенциальные усилия (касательные напряжения) в зоне скольжения:

$$\tau(x) = fp(x) \operatorname{sign} S(x)$$

в зоне сцепления

$$|\tau(x)| \leq fp(x),$$

где  $p(x)$ ,  $\tau(x)$  – нормальные и тангенциальные силы (касательные напряжения);

$f = \text{const}$  – коэффициент трения;

$S(x)$  – скорость проскальзывания.

Задача определения касательных напряжений в области контакта сводится к минимизации функционала [1, 2] при ограничениях,

$$J = \int_{\Omega_a} [fp(x)|S(x)| - \tau(x)S(x)] dx,$$

где  $\Omega_a$  – зона контакта.

Обоснование существования этого функционала для изотропных тел приведено в работе [2], а аналитические решения в [1]. Для решения данной задачи необходимо установить связь между величиной проскальзывания и усилиями в зоне контакта. Рассматривая стационарный случай, когда усилия не зависят от времени, получаем:

$$S(x) = vV + V \frac{du}{dx}.$$

Здесь  $V_1, V_2$  – составляющие скоростей, определяемые кинематикой контактирующих цилиндров как абсолютно жестких;  $V = -\frac{V_1 + V_2}{2}$  – скорость качения;

$v = \frac{V_1 - V_2}{V}$  – скольжение;  $u = u_2 - u_1$  – касательные перемещения для цилиндров (отмеченных соответственно индексами 1 и 2). Связь между тангенциальными усилиями и перемещениями в зоне контакта определяется упругими свойствами и конструктивными особенностями рассматриваемых цилиндров, подставим ее в операторном виде:

$$u = L(p) + N(\tau),$$

где  $L(\cdot), N(\cdot)$  – линейные интегральные операторы.

**Алгоритм решения задачи качения и основные результаты.** Для решения поставленной задачи был запрограммирован алгоритм решения задачи о качении цилиндров. Сначала производится ввод исходных данных, позволяющее задать управляющий параметр  $\psi = T/fP$  [1], нормальные и касательные усилия  $T$  и  $P$ , коэффициент трения  $f, E_j, j = 1, 2, G_{12}, \nu$  – технические постоянные материала. Далее программа производит необходимые вычисления и открывает окно вывода результатов, в котором приведены все необходимые выходные данные. Найденные касательные усилия в области контакта, а также зоны скольжения и сцепления, направление скольжения изображены на рисунке 1. Согласно теоретическим и экспериментальным исследованиям зона сцепления примыкает к переднему краю площадки контакта.

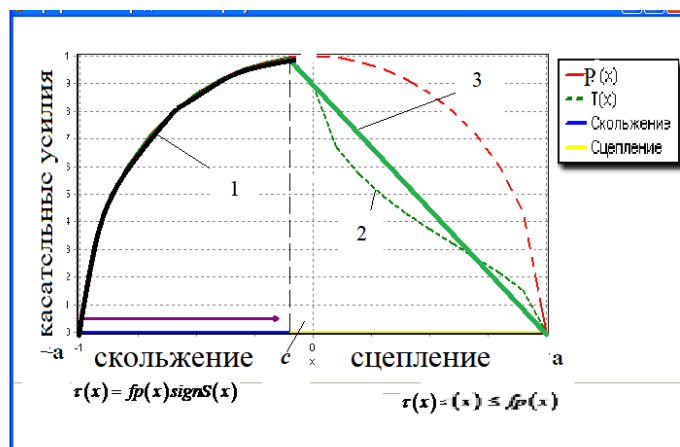


Рис. 1. Окно графического представления результатов скольжения и сцепления в контакте качения (1 – скольжение, 2 – сцепление, 3 – линейная аппроксимация)

В инженерных расчетах для цилиндрического индентора при качении в области скольжения касательные усилия можно определять по закону

$$\tau(x) = \frac{2P}{a^2\pi} f \sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a \leq x \leq c,$$

считая, что выполняется контакт по теории Герца. Изменения касательных усилий в области сцепления можно упростить, заменяя кривую 2 на ее аппроксимацию – прямую 1 (например, рисунок 1). Линейная аппроксимация упрощает описания изменения касательного усилия в зоне сцепления:

$$\tau(x) = \frac{2P}{a^2\pi} f \sqrt{\frac{a-c}{a+c}} \cdot (a-x), \quad c \leq x \leq a.$$

Следуя исследованиям Л. А. Галина [3], запишем выражения для тангенциальных усилий для качения цилиндра с изотропного материала с упругим основанием:

$$\tau(x) = \frac{2Pf}{a^2\pi} [\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{(a-x)(x-c)}], \quad c \leq x \leq a,$$

$$c = a \left[ 1 - 2\sqrt{1 - \frac{k}{f}} \right],$$

где  $k$  – коэффициент сцепления, равный отношению касательного усилия к нормальному.

Координату точки разделения зон сцепления и скольжения можно определять, например, по формуле, представленной в работе [4], или по теории Л. А. Галина [3].

Если материал контактирующих цилиндров разный или ортотропный, то возникает дополнительное проскальзывание и нужно использовать методику расчета параметров исходя из работ [1–3].

Программа, реализующая определение зоны контакта напряжений и перемещений построена на основе МКЭ в которой используются экспериментальные исследования, например, применяя фотопринт (см., например, [5]). Для решения поставленной задачи был использован и успешно запрограммирован метод конечных элементов. Разработан алгоритм и создана программа, реализующая определение напряжений и перемещений

в контактирующих телах. Программа позволяет изменять размеры параллелепипеда, в котором находится исследуемое тело. Форму верхней границы тела, на которую действует давление, можно задавать при помощи «мыши» (прямоугольниками). Построена схема расчета параметров контакта рисунок 2



Рис. 2. Схема расчета параметров контакта

Результаты экспериментального исследования о взаимодействии шины колеса с основанием, а также определения размеров зоны контакта и деформативности шины, получены вследствие опытов в ИММС НАН РБ [6]. При сканировании зона контакта является дискретной и различная в цветовом диапазоне, так как давление в зоне контакта распределено неравномерно.

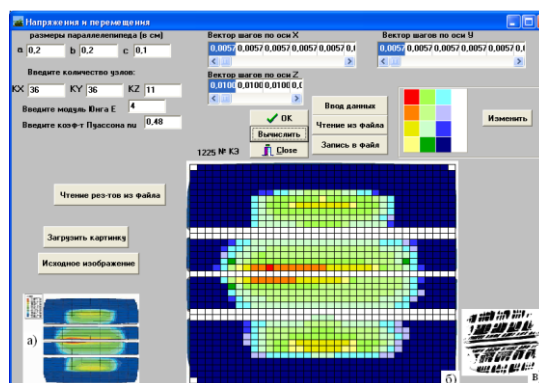


Рис. 3. Определение зоны контакта и действующего давления при взаимодействии шины колеса и основания [7]

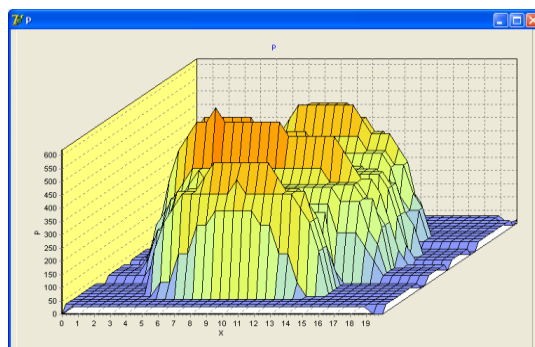


Рис. 4. Эпюра изменения давления при контакте шины колеса

Используя методику считывания цвета в зоне контакта (каждому давлению в точке соответствует свой цвет), и затем обрабатывая на компьютере по специальной программе получаем картину о напряженном состоянии в контакте и эпюру распределения давлений (см. рисунки 3, 4).

### **Заключение**

На основании методов математического программирования и численных расчетов по МКЭ напряженного состояния упругих волокнистых тел разработан алгоритм решения задачи качения цилиндров из композитов. Применяя, теоретические и экспериментальные исследования предложен расчет напряженно-деформированного состояния изотропного основания (покрытия) на примере контакта шины и дорожного покрытия. Разработан алгоритм решения исследуемых задач, создана программа, реализующая расчет напряженно-деформированного состояния шины при контакте с дорожным основанием (покрытием). Разработанные алгоритмы могут быть адаптированы для решения подобных задач контактного взаимодействия.

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Можаровский В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов. / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский – Мн. : Наука и техника, 1988. – 280 с.
2. Калкер И. Ж. О природе трения твердых тел / И. Ж. Калкер. – Мн. : Политехника, 1971. – С. 444–448.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М. : Наука, 1980. – 304 с.
4. Трение, изнашивание и смазка: Справочник. В 2-х кн. / под ред. Крагельского И. В. – Машиностроение – 1978. – 358 с.
5. Tire Contact Force Equations for Vision-Based Vehicle Weight Identification / Xuan Kong [et al.] // Appl. Sci. – 2022. – Vol. 12. – P. 4487–4494.
6. Анализ контактного взаимодействия автомобильной шины с колесным диском и дорожным покрытием / В. В. Можаровский [и др.] // Доклады Белорусского конгресса по механике: сборник научных трудов. – Минск, 2007 – С. 135–142.
7. Реализация алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния элементов машин и трибологических систем // В. В. Можаровский [и др.] // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика». – 2020. – Вып. 35. – С. 36–43.

*Поступила: 21.04.2023*