УДК 656.01

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ КУЛАЧКОВОГО МЕХАНИЗМА

Исаченко Евгений Васильевич*, студент 2-го курса*
кафедры «Автомобили»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Лебедева Г.И., конд. техн. наук., доцент)

Кулачковый механизм состоит из кулачка (или эксцентрика), шатуна и рычага. Кулачок имеет форму выступающего элемента, который вращается вокруг оси. Шатун соединён с кулачком и может двигаться вверх-вниз или вперёд-назад под воздействием вращения кулачка. Рычаг соединён с шатуном и используется для передачи движения.

Принцип работы кулачкового механизма заключается в том, что при вращении кулачка шатун двигается вверх-вниз или вперёд-назад, передавая движение рычагу. Это позволяет преобразовывать вращательное движения кулачка в линейное или обратное.

Кулачковые механизмы широко применяются в различных устройствах, таких как двигатели внутреннего сгорания, насосы приводы машин и. т. д. Они обеспечивают эффективную передачу движения и позволяют реализовать различные функции в механизмах.

Обнаружено, что толкатель кулачкового механизма совершает криволинейные перемещения. Для более удобного и точного расчёта автор предпринял попытку упростить процесс путём построения математических моделей, воспользовавшись корреляционно-регрессионным анализом. Этот метод широко используется для изучения различных зависимостей между статистическими рядами. В отличие от функциональной зависимости, корреляционная зависимость не является строго определённой, так как на функцию влияют и другие факторы. Тем не менее, общая закономерность изменения функции прослеживается чётко, хотя и не строго. Парные зависимости могут быть как линейными, так и нелинейными.

Нелинейные зависимости лучше описывать параболами различного порядка.

$y = b_0 + b_1 x_i - b_2 x_i^2 - \cdots - b_p x^p$, где P - порядок параболы.

Неизвестные параметры рассчитываются по методу наименьших квадратов, сущность которого состоит в том, что сумма квадратов отклонений расчётных значений от фактических есть величина минимальная.

$$S = \sum_{i=1}^{n} l_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2 - \cdots - b_p x_i^p)^2 \to min$$

Имеем функцию нескольких переменных.

Порядок параболы p устанавливается путём последовательного рассмотрения парабол, начиная со второго порядка. Процесс увеличения порядка параболы идёт до тех пор, пока остаточная сумма квадратов не станет меньше 1 или среднеквадратическое отклонение $S_{y.x}$ не станет наименьшим:

$$S_{y.x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 x_i - b_i x_i^2 - \cdots - b_p x_i^p)}{\sqrt{n-p-1}}.$$

После определения коэффициентов b_iпроверяется теснота криволинейной связи между y и x. Теснота криволинейной связи определяется по корреляционному отношению

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{S_{y.x}^2}{S_x^2}},$$

где

$$S_y^2 = \frac{1}{n-p-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i - \cdots - b_p x_i^p)^2.$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2.$$

Чем ближе η к единице, тем более теснее криволинейная связь существует между исследуемыми случайными величинами. Если $\eta = 0$, то корреляционная связь между y и x отсутствует.

Для проверки согласованности полученных зависимостей с данными эксперимента используется статистика Стьюдента t. Для этого производится расчёт значения t: $t = \frac{\eta\sqrt{n-2}}{1-\eta^2}$

и проводится сравнение с табличным значением $t_{a,n-p-1,}$.

Если вычисленное значение:$t < t_{a,n-p-1}$,

Где $t_{a,n-p-1,}$ – табличное значение статистики Стьюдента, то корреляционная связь между рассматриваемыми y и x отсутствует. Полученная модель согласуется с данными эксперимента, что делает её рекомендуемой для практического использования.

Если построенное уравнение хорошо согласуется с данными эксперимента, переходим к следующему этапу - проверке значимости коэффициентов b_i .Значимость коэффициентов b_i проверяется с помощью статистики t':

$$t' = \frac{|b_i|}{S_{b_i}},$$

где S_{b_i} – среднеквадратическое отклонение для коэффициентаb_i ;

$$S_{b_i} = S_{y.x}\sqrt{c_{ii}^{-1}},$$

где S_{b_i} - элементы матрицы c^{-1}, стоящие на пересечении i-й строки и i-го столбца (диагональные элементы матрицыC^{-1}). Если вычисленное значение $t \geq t_{a,n-p-1}$, взятого по таблице, то коэффициент b_i –значимый.

Как уже отмечалось, результаты моделей, полученных с использованием корреляционно-регрессионного анализа, обладают наглядностью, простотой в применении, и достаточно точно соответствуют фактическим данным. Исходные данные для анализа были получены автором с использованием метода планов.

В процессе исследования были рассмотрены модели парабол различной степени сложности.

$S_В = 0.001\varphi^3 - 0{,}439\varphi^2 + 47{,}54\varphi, \eta = 0{,}975;$

$i31 = -3E - 06\varphi^3 - 0.009\varphi^2 + 3\varphi + 74{,}1, \eta = 0{,}9;$

$i'31 = 0.001\varphi^3 - 0.460\varphi^2 + 7.996, \eta = 0{,}985;$

$\Delta\omega 1 = 0.004\varphi^3 + 0.762\varphi^2 - 19.16, \eta = 0{,}96;$

$\varepsilon 1 = 2E - 05\varphi^3 + 0{,}006\varphi^2 - 0{,}175\varphi - 46.97, \eta = 0{,}953;$

$\Delta t = -0.004\varphi^2 - 0{,}750\varphi + 97{,}92, \eta = 0{,}93.$

Все модели демонстрируют высокое корреляционное отношение, что свидетельствует о тесной криволинейной связи.

Соответствие моделей экспериментальным данным было проверено с использованием t- критерия. Для всех моделей $t_{расч.} > t_{табл.}$, взятого при уровне значимости α=0,05. Таким образом, модели демонстрируют высокую степень соответствия с экспериментальными данными.

Коэффициенты полученных моделей, в основном, являются статистически значимыми. Установлено, что в модели для скорости $S'_В = i_{31}$ коэффициент b4 является не существенным ($t_{расч.} < t_{табл}$). Следовательно, этот коэффициент может быть исключён и модель станет параболой третьего порядка:

$S'_В = i_{31} = -3E - 0{,}5x^3 - 0{,}0091x^2 + 0{,}2657x + 72{,}781.$

Расчётные доверительные интервалы для коэффициентов полученных моделей представлены в таблице.

Таблица 1 – Доверительные интервалы для коэффициентов уравнения регрессии

Показатель	Коэффициенты уравнений				
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
$S_В$	41,44-42,44	(-0,76)-(-0,50)	(-0,0018)-(-0,0004)	0,000028-0,000032	0,00000006-0,0000005
$S'_В$	72,0-73,48	0,2627-0,2687	(-0,0099)-(-0,0083)	(-0,000035)-(-0,000025)	–
$S''_В$	5,0-5,22	(-0,7)-(-0,42)	(-0,0021)-(-0,0016)	(-0,000015)-(-0,000095)	0,000000035-0,000000045
Δw	(-18,09)-(-16,53)	1,13-1,17	0,0036-0,0040	(-0,00005)-(-0,00003)	(-0,000000014)-(-0,000000006)
ε	(-57)-(-54,96)	(-0,53)-(-0,49)	0,006-0,009	0,000005-0,000007	0,000000004-0,00000016
Δt	100,1-105,8	(-0,9)-(-0,8)	(-0,006)-(-0,004)	0,000006-0,000008	0,000000023-0,000000037

Предложенные модели применимы исключительно к кулачковым механизмам, поскольку для других механизмов требуются индивидуальные разработки. Использование этих моделей упростит сложные инженерные расчёты. Кроме того, путём задавания числового значение функции, возможно вычислить значение аргумента. Полученные модели также могут быть использованы для прогнозирования соответствующих показателей.

Литература:

1. Герасимович, А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Часть 1 / А.И. Герасимович, Я.И. Матвеева. - Мн.: БПИ, 1975. – 194 с.
2. Девойно, Г.Н. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин / Г.Н. Девойно. - Мн.: Высшая школа, 1986. – 200 с.
3. Лебедева, Г.И. Прикладная математика. Математическое моделирование в транспортных системах / Г.И. Лебедева, Н.А. Микулик. - Мн.: Асар, 2009. – 512 с.