УДК 624.21

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ.

***Шаховская Дарья Дмитриевна*, *Лобан Юлия Анатольевна*,**
студенты 1-го курса кафедры «Инженерная экономика»
Белорусский национальный технический университет, г. Минска
(Научный руководитель – Мороз О.А., канд. физ.-мат. наук, доцент)

При изучении темы «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» появляется такое понятие как логарифмическая производная, а именно,

$$(ln\, f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Логарифмическая производная используется в случаях, когда функция, которую нужно продифференцировать, состоит из произведения степенных функций или представляет собой степенно-показательную функцию. В таких ситуациях операция логарифмирования значительно упрощает вид функции, представляя логарифм ее в виде алгебраической суммы логарифмов и тогда каждое слагаемое достаточно просто дифференцируется.

Пример 1. Найти производную функции

$$y=\frac{\sqrt[5]{2x+1}\sqrt{1-3x}}{(4+x)^4}$$

Решение. Сначала прологарифмируем данную функцию, а затем возьмем производные от обеих частей равенства, предварительно упростив правую часть, используя известные свойств логарифма:

$$y=\frac{\sqrt[5]{2x+1}\sqrt{1-3x}}{(4+x)^4}$$

$$ln\, y = \frac{1}{5}\, ln(2x+1)\frac{1}{2}\, ln(1\text{-}3x) - 4ln(4+x)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{5} * \frac{1}{2x+1} * 2 * \frac{1}{2} * \frac{1}{1-3x} *(-3) - 4 * \frac{1}{4+x}$$

$$y' = \left(\frac{2}{5(2x+1)} - \frac{3}{2(1-3x)} - \frac{4}{4+x}\right) * \frac{\sqrt[5]{2x+1}\sqrt{1-3x}}{(4+x)^4}$$

Экономический смысл логарифмической производной, как отношение скорости изменения величины *y* к самой этой величине, означает темп изменения величины *y*.

Пример 2. Определите темп изменения величины y=$x^{\frac{1}{x}}$ в точке с абсциссой x=e^2.

Решение.

y=$x^{\frac{1}{x}}$

$ln\ y$=$ln\ x^{\frac{1}{x}}$

$ln\ y$=$\frac{1}{x}ln\ x$

$\frac{y'}{y}$= -$\frac{1}{x}$ $ln\ x$+$\frac{1}{x}$*$\frac{1}{x}$

$\frac{y'}{y}$=$\frac{1}{x^2}$(1- $ln\ x$)

$\frac{y'}{y}\Big|_{x=e^2}$=$\frac{1}{e^4}$(1- $ln\ e^2$)=$-\ \frac{1}{e^4} < 0$

Таким образом скорость изменения величины y=$x^{\frac{1}{x}}$ в точке x=e^2 падает.

Степенно-показательные функции вида y=$(f(x))^{g(x)}$ часто встречаются при исследовании различных геологических процессов:

Распределение размеров частиц в грунтах;

Для оценки пористости горных пород и определения возраста минералов;

Для описания распределения температуры в земной коре.

Логарифмическую производную используют и при решении некоторых экономических задач.

Если через S=S(t) обозначить величину вклада в момент времени t, то приращение вклада и процент по вкладу являются равными величинами. Поэтому

$$\Delta S = S * r * \Delta t,\text{ где}$$

R−номинальная ставка за год, Δt − доля года.

Из равенства следует, что

r=$\frac{\Delta S}{S*\Delta t}\ \xrightarrow[\lim\limits_{\Delta t\to 0}]{}$ r≈$\frac{S'}{S} = (ln\, S)\ '$

Из последнего соотношения можно сделать вывод о том, что ставка банковского процента r совпадает с логарифмической производной от величины вклада.

Пример 3. Определить изменение ставки банковского процента *r=r(t),* если величина вклада в момент времени *t* описывается функцией

$S(t)$=$S_0(1+t)^{1,3}$,

где S_0- вклад в начальный момент времени t=0.

Решение.

r= *(ln S(t))′*= *(ln* $S_0(1+t)^{1,3}$ *)′*= *(ln* $S_0 + 1{,}2\, ln(1+t)$*)′*= $\frac{1{,}3}{1+t}$**130%*

Вывод: через 2 года после открытия вклада ставка была

r$\approx$ $130\% * \frac{1}{3} \approx$

43% годовых, а через 4 года ставка уменьшилась и стала

r$130\% * \frac{1}{5}$ ≈26% годовых.

Логарифмическая производная также нужна для исследования доходности актива.

Пусть *P(t)*- стоимость актива в момент времени *t*, *r*- доходность от вложения денег в другие активы. Встает вопрос, когда выгодно покупать, а когда выгодно продавать активы? Для ответа на этот вопрос, нужно найти временной интервал, для которого выполняется неравенство

(ln P(t))′ $> r$.

Пример 4. Как выгодно поступить с активов *P*, если доходность от вложения денег *r*=10% годовых, и *P(t)*=5*e^{arctgt}

*ln P(t)= ln 5**e^{arctgt}

(ln P(t))′=(ln 5+ $arctgt$*)′*=$\frac{1}{1+t^2}$

Тогда $\frac{1}{1+t^2} > \frac{1}{10} => 1 + t^2 < 10 => t^2 => -3 < t < 3$.

Если положить, что текущий момент времени *t=0*, то актив выгодно купить в момент времени *t=-3* (т.е. три года назад), а продать через 3 года от текущего момента времени.