УДК 517.518.45

ОПЕРАТОРНЫЙ СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА НЕЧЕТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ БОЛЬШИХ СТЕПЕНЕЙ

Шемис Екатерина Викторовна, Шемис Елизавета Викторовна,
студентки 2-го курса кафедры «Математические методы в строительстве»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Акимов В.А., канд. техн. наук, доцент)

В этой работе мы будем находить ряды Фурье для больших степеней так как в литературе [2, 3] рассматриваются только формулы нахождения для ряда Фурье для малых степеней, для которых придется брать интеграл 10 раз. Для этого используем операторский метод на основании метода операторов.

Как известно [2, 3] функцию f(x), периодичную с периодом T=2L и удовлетворяющую условиям Дирихле, можно разложить в ряд Фурье на отрезке [-L, L]:

$$f(x) = b_n \sin \delta_n x$$

где $\delta_n = \frac{\pi n}{l}$, $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin \delta_n x dx$ $n = 1,2 \dots$.

Если же f(x)- нечетная функция , то $a_n = 0, n = 0, 1, \dots,$

$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x) \sin \delta_n x dx$ $n = 1,2 \dots$.

Введем свойства отдельных операторов. На их основании выводим формулы, которыми будем пользоваться.

Рассмотрим оператор

$$T_1[f(x)] = \frac{f(x+l) - f(x-l)}{2}$$

Используя известные тригонометрические формулы, определяем:

$$T_l\left[\sin \delta_n x\right] = \frac{1}{2}\left[\sin \delta_n (x+l) - \sin \delta_n (x-l)\right] = \cos \delta_n x \sin \pi n = 0,$$

Аналогично

$$T_l\left[x \sin \delta_n x\right] = \frac{1}{2}\left[(x+l)\sin \delta_n x - (x-l)\sin \delta_n (x-l)\right] =$$

$$= x \sin \pi n \cos \delta_n x + l \cos \pi n \sin \delta_n x = (-1)^n l \sin \delta_n x$$

Кроме T_l введем оператор $V_n[f(x)] = \frac{f(x)}{1+{d_x}^2/{\delta_n}^2}$

На основе принципа суперпозиций устанавливаем свойства операторов $D_0 = \frac{T_l}{ld_x}$, $D_1 = T_l V_n$ и $D_2 = ld_x D_1$ в классе функций.

$$D_1 = \frac{sinh(ld_x)}{1+\frac{d_x^{\ 2}}{d_n^{\ 2}}}$$

$$D_1[\sin\delta_m x] = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1} l\delta_n}{2}\cos\delta_n x & \text{при } m \neq n \\ 0 & \text{при } m = n \end{cases}$$

Рассмотрим конкретные примеры нахождения коэффициентов рядов Фурье операторным методом.

1. Пусть $x^{2r+1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\delta_n x$, r=1, 2, 3 ... .

Произведем над обеими частями записанного ряда операцию D1. Непосредственно устанавливаем:

$$V_n[x^{2r+1}] = \left(1 - \frac{d_x^{\ 2}}{\delta_n^{\ 2}} + \frac{d_x^{\ 4}}{\delta_n^{\ 4}} - \frac{d_x^{\ 6}}{\delta_n^{\ 6}} + ..\right)[x^{2r+1}] =$$

$$x^{2r+1} - \frac{(2r+1)2rx^{2r-1}}{\delta_n^{\ 2}} + \frac{(2r+1)2r(2r-1)(2r-2)}{\delta_n^{\ 4}} x^{2r-3} + .. + (-1)^r \frac{(2r+1)!}{\delta_n^{\ 2r}} x$$

Кроме того, $sh(ld_x) = ld + \frac{l^3 d_x^3}{3!} + ... + \frac{l^{2r+1} d_x^{2r+1}}{5!} + ...$

В результате получим:

$$D_1\left[x^{2r+1}\right] = l^{2r+1} - \frac{(2r+1)2r}{\delta_n^2} l^{2r-1} + \frac{(2r+1)2r(2r-1)(2r-2)}{\delta_n^4} l^{2r-3} +$$

$$+ ... + (-1)^r \frac{(2r+1)!}{\delta_n^{2r}} l$$

Выражение в правой части, на основании (3.11) принимает вид:

$$D_1\left[\sum_{K=1}^{\infty} b_K \sin\delta_K x\right]\Bigg|_{x=0} = b_n \frac{(-1)^{n+1} l\delta_n}{2}$$

Приравнивая их между собой, окончательно находим:

$$x^{2r+1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{l^{2r}}{\delta_n} - \frac{(2r+1)2r}{\delta_n^{\ 3}} l^{2(r-1)} + .. + (-1)^r \frac{(2r+1)!}{\delta_n^{\ 2r+1}}\right] sin\,\delta_n x$$

$l = \pi \qquad \delta_n = \frac{\pi n}{l} = \frac{\pi n}{\pi} = n$

r=4 => x^9

$$x^9 = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{\pi^8}{n} - \frac{8*9*\pi^6}{n^3} + \frac{6*7*8*9*\pi^4}{n^5} - \frac{4*5*6*7*8*9*\pi^2}{n^7} + \frac{9!}{n^9}.\right]\sin nx$$

$r = 5 \quad => \quad x^{11}$

$$x^{11} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{\pi^{10}}{n} - \frac{10*11*\pi^8}{n^3} + \frac{8*9*10*11*\pi^6}{n^5} - \frac{6*7*8*9*10*11*\pi^4}{n^7} + \frac{4*5*6*7*8*9*10*11*\pi^2}{n^9} - \frac{11!}{n^{11}}\right]\sin nx$$

В результате получим формулы для вычисления ряда Фурье для больших степеней.

Литература:

1. Акимов В.А. А 39 Операторный метод решения задач теории упругости: Монография / В.А. Акимов. – Мн.: УП «Технопринт», 2003. – 101с.
2. Бари Н.К. Тригонометрические ряды //М.: Физматгиз. – 1961 – 936 с.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. // М.: Мир – 1965. Т. 1 – 615 с., Т. 2 – 537с.