УДК 621.43

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

METHODS FOR DETERMINING THE NATURAL FREQUENCIES OF TORSIONAL VIBRATIONS

Никишев А. А., нач. бюро, **Петрученко А. Н.**, ст. науч. сотр.,
Предко А. В., ст. науч. сотр.,
ОАО «Управляющая компания холдинга «Минский моторный завод» г. Минск, Республика Беларусь
A. Nikishev, Head Office, A. Petruchenko, Senior Researcher,
A. Predko, Senior Researcher,
OJSC «Minsk Motor Plant» Holding Mangement Company,
Minsk, Belarus

В работе рассмотрены основные методы определения частот собственных крутильных колебаний многомассовых систем – метод Толле (метод остатка), метод Терских (метод цепных дробей) и метод Хольцера. Выполнена их сравнительная оценка и даны рекомендации по применению для различных вариантов крутильных систем.

The paper considers the main methods for determining the frequencies of natural torsional vibrations of multi-mass systems - the Tolle method (remainder method), the Tersky method (continued fractions method) and the Holzer method. Their comparative evaluation is carried out and recommendations for their adoption for various variants of torsional systems are given.

Ключевые слова: *крутильные колебания, собственная частота, момент упругости, жесткость.*

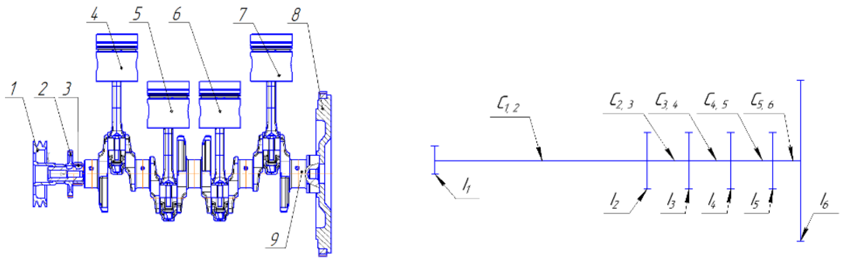
Keywords: *torsional vibrations, natural frequency, elastic moment, stiffness.*

ВВЕДЕНИЕ

Крутильные колебания в некоторой степени присущи всем механизмам, содержащим в своей конструкции валы, на которые воздействуют переменные периодические нагрузки. Одной из основных характеристик колебательного процесса является его частота, определяющая количество полных колебаний системы в единицу времени.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ РАСЧЕТА СОБСТВЕНЫХ ЧАСТОТ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В общей практике расчета двигателя на крутильные колебания принято реальную колеблющуюся систему коленчатого вала (рис. 1, *а*) заменять упрощенной эквивалентной системой, состоящей из цилиндрического упругого вала, не обладающего массой, с размещен ными на нем дисками (сосредоточенными массами) (рис. 1, *б*).



а) б)

Рисунок 1 – Представление крутильной системы:
а – реальной; *б* – эквивалентной;
1 – шкив коленчатого вала, *2* – шестерня привода масляного насоса, *3* – шестерня привода ГРМ, *4–7* – поршни с шатунами соответственно цилиндров 1–4, *8* – маховик, *9* – коленчатый вал; I_1–I_6 – моменты инерции масс, эквивалентные моментам инерции движущихся деталей, приведенных к оси коленчатого вала; $C_{1,2}$–$C_{5,6}$ – жесткости участков эквивалентного вала

Система дифференциальных уравнений, описывающая движение масс эквивалентной системы имеет вид [1], приведенный ниже.

Определение собственных частот крутильных колебаний ω_c для многомассовых систем в общем случае приводит к сложным и громоздким вычислениям. На практике прибегают к применению способов, позволяющих определить частоту ω_c без составления уравнения частот путем последовательных пробных подстановок в эти уравнения произвольных значений ω_c.

$$
\begin{cases}
I_1 \dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2} - C_{1,2}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0; \\
I_2 \dfrac{d^2\varphi_2}{dt^2} + C_{1,2}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - C_{2,3}\left(\varphi_2 - \varphi_3\right) = 0; \\
\ldots \\
I_{n-1} \dfrac{d^2\varphi_{n-1}}{dt^2} + C_{n-2,n-2}\left(\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}\right) - C_{n-1,n}\left(\varphi_{n-1} - \varphi_n\right) = 0; \\
I_n \dfrac{d^2\varphi_n}{dt^2} + C_{n-1,n}\left(\varphi_{n-1} - \varphi_n\right) = 0.
\end{cases} \tag{1}
$$

где n – количество сосредоточенных масс эквивалентной системы;
$\varphi_1 \ldots \varphi_n$ – углы поворота сосредоточенных масс;
$I_1 \ldots I_n$ – моменты инерции сосредоточенных масс;
$C_{1,2} \ldots C_{n-1,n}$ – жесткости участков эквивалентного вала.
Общее решение системы уравнений (1) имеет вид:

$$
\varphi_i = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \cdot \sin\left(\omega_{ci} \cdot t + \varepsilon_i\right), \tag{2}
$$

где A_i – амплитуда колебаний i-й массы;
ε_i – фазовый угол;
$\omega_{c;i}$ – частота собственных колебаний системы.

Метод Толле (метод остатка) основан на том, что при собственных колебаниях многомассовой системы сумма моментов сил упругости отдельных участков вала и моментов сил инерции колеблющихся сосредоточенных масс системы равна нулю [2]:

$$
\sum M_{уп} + \sum M_{ин} = 0. \tag{3}
$$

Задавшись приближенно частотой ω_c, а также приняв относительную амплитуду первой массы $a_1 = 1$ можно определить значение суммы (3). При этом, если сумма (3) не равна нулю, а составляет какой-то положительный или отрицательный остаток, то необходимо задаться другим значением ω_c. Указанные действия продолжаются до момента, когда при выбранной частоте ω_c остаточный момент будет равен нулю с заданной точностью расчетов.

Метод Терских основан на решении частотных уравнений в виде цепной дроби методом пробных подстановок [1; 2]. С учетом того, что *n, n+1* – й участок вала за последней массой не скручивается, а также принимая относительную амплитуду первой массы a_1 = 1, подставляя выражения для относительных амплитуд в уравнения моментов, получается дробь вида:

$$I_n\omega_c^2 - \cfrac{1}{\cfrac{1}{C_{n-1,n}} - \cfrac{1}{I_{n-1}\omega_c^2 - \cfrac{1}{C_{n-2,n-1} - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{\cfrac{1}{C_{1,2}} - I_1\omega_c^2}}}}} = 0\,. \tag{4}$$

Решениями уравнения (4) и будут являться искомые собственные частоты колебаний крутильной системы ω_c, которые находятся методом пробных подстановок.

Метод Хольцера основан на равенстве кинетической энергии масс крутильной системы от момента инерции и потенциальной энергии на участках вала от момента упругости во время собственных колебаний [3].

Дифференцируя решения уравнений колебаний и подставляя их в сами уравнения, можно получить следующие выражения:

Последовательно выражая из каждого уравнения 5 значения относительных амплитуд (приняв $a_1=1$) и подставляя их в полученные выражения, определяются значения относительных амплитуд всех масс системы. При правильно подобранном значении ω_c будет выполняться условие $\sum_{1}^{n} I_i \cdot a_i = 0$. Таким образом определяются все $n+1$ собственных частот колебаний системы и соответствующие им формы колебаний.

$$
\begin{aligned}
&-I_1 \cdot a_1 \cdot \omega_c^2 + C_{1,2} \cdot \left(a_1 - a_2\right) = 0; \\
&-I_2 \cdot a_2 \cdot \omega_c^2 - C_{1,2} \cdot \left(a_1 - a_2\right) + C_{2,3} \cdot \left(a_2 - a_3\right) = 0; \\
&\ldots \\
&-I_{n-1} \cdot a_{n-1} \cdot \omega_c^2 - C_{n-2,n-1} \cdot \left(a_{n-2} - a_{n-1}\right) + C_{n-1,n} \cdot \left(a_{n-1} - a_n\right) = 0; \\
&-I_n \cdot a_n \cdot \omega_c^2 - C_{n-1,n} \cdot \left(a_{n-1} - a_n\right) = 0.
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод Толле нагляден в представлении процесса вычислений. При этом, рассчитываемые на каждом шаге относительные амплитуды масс системы позволяют построить формы колебаний. Также, данный метод удобен для реализации на ЭВМ [2; 5].

Преимуществом метода цепных дробей является возможность получения уравнений частот без решения дифференциальных уравнений. Однако данный метод не следует применять для сложных систем с большим количеством сосредоточенных масс, так как множество вложений в цепную дробь чрезмерно усложняет вычисления [4; 5].

Метод Хольцера в настоящее время применяется большинством зарубежных дизелестроительных фирм. Он удобен для реализации на ЭВМ и в случае относительно несложных неразветвленных систем не дает разрыва функции остатка, что гарантирует нахождение всех форм колебаний системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маслов, Г. С. Расчеты колебаний валов. Справочное пособие / Г. С. Маслов. – М. : Машиностроение. – 1968 – 272 с.

2. Попык, К. Г. Динамика автомобильных и тракторных двигателей: учеб. / К. Г. Попык. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 1970. – 328 с.

3. Ефремов, Л. В. Теория и практика исследований крутильных колебаний силовых установок с применением компьютерных технологий / Л. В. Ефремов. – СПб. : Наука, 2007. – 276 с.

4. Яковлев, П. В. Частотный анализ динамической системы автомобиля УРАЛ-63685 / П. В. Яковлев, Г. Д. Драгунов // Грузовик. – М.: Машиностроение., 2011, № 10. – 48 с.

5. Попович, В. С., Сравнение численных методов расчета частот свободных крутильных колебаний / В. С. Попович, А. Е. Зимин // Ползуновский вестник. Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова. – 2008, № 4. – 148 с.

Представлено 04.05.23