Ю.А. Малевич, А.Ф. Шило

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРЫ ТЕПЛОНОСИТЕЛЕЙ ПРИ ПЕРЕКРЕСТНОМ ТОКЕ

Изменение температуры теплоносителей при перекрестном токе в рекуперативных теплообмениках представляет собой задачу в двух измерениях. Аналитическое общее решение этой задачи получено в виде сложных зависимостей [1,2]. При условии строго взаимно перпендикулярного перекрестного тока теплоносителей без перемешивания через разделительную стенку в теплообменнике можно определить температуры на выходе более кратким путем.

На рис. 1 представлена схема теплоотдающей поверхности теплообменника с линейными размерами X, Y. Предположим, что горячий теплоноситель имеет температуру t, скорость w_1, теплоемкость C_{p1} и направление движения вдоль оси y. Холодный теплоноситель движется в направлении x с температурой θ, скоростью w_2 и теплоемкостью C_{p2}. В общем виде

$$t = f_1(x,y), \qquad \theta = f_2(x,y).$$

В условиях стационарного режима при известном коэффициенте теплопередачи k для элементарного участка поверхности dxdy можно записать уравнение теплового баланса

$$dQ = k\,(t - \theta)\,dxdy, \tag{1}$$

$$dQ = -\,w_1 C_{p1}\,\rho_1 \frac{\partial t}{\partial y}\,dxdy, \tag{2}$$

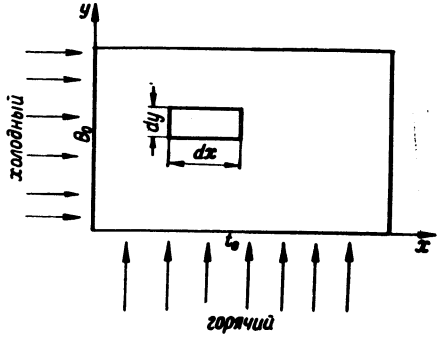

Рис. 1. Схема рекуперативного теплообменника.

$$dQ = w_2 C_{p2} \rho_2 \frac{\partial \theta}{\partial x} dxdy. \qquad (3)$$

Эти зависимости можно объединить в виде уравнений

$$\frac{k}{\rho_1 w_1 C_{p1}} (t - \theta) = - \frac{\partial t}{\partial y}, \quad \frac{k}{\rho_2 w_2 C_{p2}} (t - \theta) = \frac{\partial \theta}{\partial x}. \qquad (4)$$

Введем обозначения

$$\frac{k}{\rho_1 \; w_1 C_{p1}} = a, \qquad \frac{k}{\rho_2 \; w_2 \; C_{p2}} = b.$$

Тогда (4) примет вид

$$\frac{\partial t}{\partial y} = a(\theta - t), \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = b(t - \theta). \qquad (5)$$

Из системы (5) исключим температуру холодного теплоносителя. θ. Для этого продифференцируем первое уравнение (5) по переменной x :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = a \frac{\partial \theta}{\partial x} - a \frac{\partial t}{\partial x}.$$

Из самой системы (5) следует, что

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = - \frac{b}{a} \frac{\partial t}{\partial y}.$$

Подставляя найденное значение $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ в предыдущее равенство, получим уравнение температуры горячего теплоносителя:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial t}{\partial x} + b \frac{\partial t}{\partial y} = 0. \qquad (6)$$

Поставим граничные условия для уравнения (6). При $y=0$

$$t = t_o = \text{const}. \qquad (7)$$

Распределение температуры горячего теплоносителя при $x=0$ найдем из первого уравнения системы (5). Так как при $x=0$ $\theta = \theta_o$, а температура горячего теплоносителя t описывается уравнением

$$\frac{dt}{dy} = a(\theta_0 - t),$$

то после интегрирования получим

$$t = \theta_0 + ce^{-ay}.$$

Постоянную интегрирования с определим из условия (7). В результате получим распределение температуры горячего теплоносителя при x=0:

$$t = \theta_0 + (t_0 - \theta_0)\, e^{-ay}. \qquad (8)$$

Уравнение (6) с граничными условиями (7) и (8) будем решать операционным методом. Преобразование Лапласа для уравнения (6) по переменной y с учетом граничного условия (7) приводит к уравнению в изображениях

$$\frac{d\bar{t}}{dx}(p+a) + bp\bar{t} = bt_0 ,$$

где

$$t(x, y) \longrightarrow \bar{t}\,(x, p).$$

Решение последнего уравнения примет вид

$$\bar{t}(x, p) = \frac{t_0}{p} + c\,\exp\left(-\frac{bpx}{p+a}\right). \qquad (9)$$

Представим постоянную интегрирования с как функцию комплексного переменного p в виде ряда

$$c(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(p+a)^{n+1}},$$

где A_n = const.

Тогда решение в изображениях (9) записываем так:

$$\bar{t}(x,p) = \frac{t_0}{p} + e^{-bx} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\exp\left(\frac{abx}{p+a}\right)}{(p+a)^{n+1}}. \qquad (10)$$

Используя известные соотношения операционного исчисления [3], получим температурное поле горячего теплоносителя:

$$t(x,y) = t_0 + e^{-bx-ay} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{ay}{bx}\right)^{\frac{n}{2}} I_n(2\sqrt{abxy}), \qquad (11)$$

где I_n —модифицированная функция Бесселя n-го порядка первого ряда.

Функция (11) является решением уравнения (6). Решение (11) удовлетворяет условию (7). В самом деле, так как $I_n(0) = 0$ при $n \geq 1$, то

$$t(x,y) \Big/_{y=0} = t_0.$$

Остается в решении (11) подобрать постоянные коэффициенты A_n так, чтобы оно удовлетворяло граничному условию (8). При $x = 0$ функция (11) принимает следующее значение [4]:

$$t(0,y) = t_o + e^{-ay} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{(ay)^n}{n!}. \qquad (12)$$

Согласно граничному условию (8), получим

$$\theta_o + (t_o - \theta_o)e^{-ay} = t_o + e^{-ay} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{(ay)^n}{n!}.$$

Последнее выражение можно записать таким образом:

$$(t_o - \theta_o)(1 - e^{-ay}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{(ay)^n}{n!}.$$

Следовательно, коэффициенты A_n есть коэффициенты ряда Маклорена для функции $(t_o - \theta_o)(1 - e^{-ay})$. Отсюда $A_n = -(t_o - \theta_o)$.

Подставляя найденные значения коэффициентов A_n в (11), получим температурное поле горячего теплоносителя:

$$t(x,y) = t_o - (t_o - \theta_o)e^{-bx-ay} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{ay}{bx}\right)^{\frac{n}{2}} I_n(2\sqrt{abxy}) \qquad (13)$$

Распределение температур холодного теплоносителя получим из первого уравнения системы (5) и решения (13):

$$\theta = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial y} + t. \qquad (14)$$

Дифференцируем функцию (13) по у:

$$\frac{\partial t(xy)}{\partial y} = a(t_o - \theta_o)e^{-bx-ay}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{ay}{bx}\right)^{\frac{n}{2}} I_n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{ay}{bx}\right)^{\frac{n}{2}} I_n\right].$$

Подставляя значение $\frac{\partial t}{\partial y}$ из (13) в (14), получим температурное поле холодного теплоносителя

$$\Theta(x,y) = t_o - (t_o - \theta_o)e^{-bx-ay}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{ay}{bx}\right)^{\frac{n}{2}} I_n(2\sqrt{abxy}). \quad (15)$$

Следует отметить, что ряды, входящие в (13) и (15), сходятся быстро и так как для функций Бесселя составлены подобные таблицы, то практическое применение полученных решений не вызывает затруднений.

Легко найти разность температур горячего и холодного теплоносителя:

$$t(x,y) - \theta(x,y) = (t_o - \theta_o)e^{-ay-bx} I_o(2\sqrt{abxy}).$$

На практике полезно знать температуры теплоносителей на выходе из теплообменника. В зависимости от свойств теплоносителя среднюю температуру на выходе можно определить по расчетным зависимостям [5].

Литература

1. Рабинович Г.Д. Теория теплового расчета рекуперативных теплообменных аппаратов. Минск, 1963. 2. Mason I.L. Heat Transferin Crossflow. 1954. 3. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М., 1964. 4. Шило А.Ф., Степанчук В.Ф. Температурное поле прямоточного несимметричного регенеративного теплообменника.—"Весцi АН БССР, сер. физ.-энерг.", 1972, №3. 5. Михеев М.А. Основы теплопередачи. М., 1972.