А.Ф. Шило, Ю.А. Малевич

ТЕПЛООБМЕН В МНОГОСЛОЙНОЙ СТЕНКЕ С ИСТОЧНИКАМИ

В практике тепловых расчетов встречаются задачи нестационарной теплопроводности, в которых происходит нагревание или охлаждение системы соприкасающихся тел. Тепловые расчеты для некоторых случаев задания граничных условий и системы двух, трех тел исследуются в работах [1—6]. Задачи такого рода решаются или операционным методом или методом интегральных преобразований.

Приведенные решения даже для системы двух тел (тем более для большого числа) сложны и их применение затруднено в практике. Нахождение корней трансцедентных уравнений, на которых базируются приведенные решения, является задачей не менее трудной, чем исходная. Кроме того, такой подход приводит к разным решениям задачи при изменении граничных условий и, следовательно, требует большого набора решений.

Новая методика применения операционного исчисления к решению краевых задач, рассмотренная в работах [7,8], дает возможность построить единое решение задачи для системы любого числа тел и при граничных условиях любого рода.

Для простоты изложения рассмотрим решение задачи для системы двух тел. Методика построения решения для системы большого числа аналогична.

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial T_i}{\partial \tau} = m_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + f_i(x, \tau), \tag{1}$$

где $x \in [x_{i-1}, x_i]$; $a = x_o < x_1 < x_2 = b$; $i=1,2$; $\tau > 0$.

Начальные условия

$$T_i(x, 0) = \varphi_i(x). \tag{2}$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1(a, \tau)}{\partial x} &= \alpha_1 T_1(a, \tau); \\ \frac{\partial T_2(b, \tau)}{\partial x} &= \alpha_2 T_2(b, \tau). \end{aligned} \tag{3}$$

Условия сопряжения

$$T_1(x_1, \tau) = T_2(x_1, \tau);$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(x_1,\tau)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(x_1,\tau)}{\partial x}. \qquad (4)$$

Применим к уравнению (1) с начальными условиями (2) преобразование Лапласа по переменной τ. Тогда уравнение (1) в изображениях при условии (2) примет вид

$$m_i \bar{T}_i''(x,p) - p\bar{T}_i(x,p) = -\bar{f}_i(x,p) - \varphi_i(x). \qquad (5)$$

Здесь и далее чертой обозначаются изображения по преобразованию Лапласа для данной функции, являющейся оригиналом.

Решение уравнения (5) можно записать так:

$$\bar{T}_i(x,p) = C_i \exp\left(\frac{x}{\sqrt{m_i}}\sqrt{p}\right) + D_i \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{m_i}}\sqrt{p}\right) + \bar{\gamma}_i(x,p), \qquad (6)$$

где $\bar{\gamma}_i(x, p)$ — частное решение неоднородного уравнения (5); C_i, D_i — произвольные постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий сопряжения. Определять их из условий (3) и (4) на данном этапе представляется нецелесообразным, ибо возникают практически непреодолимые трудности при переходе от полученного решения задачи в изображениях к оригиналам.

В связи с этим представим произвольные постоянные интегрирования C_i, D_i, являющиеся функциями комплексного переменного р, в виде ряда

$$C_i(p) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{in} \frac{\exp\left(-\frac{nx_i\sqrt{p}}{\sqrt{m_i}}\right)}{p};$$

$$D_i(p) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{in} \frac{\exp\left(-\frac{nx_i\sqrt{p}}{\sqrt{m_i}}\right)}{p}, \qquad (7)$$

где A_{in}, B_{in} – const.

Тогда решение (6) примет вид

$$\overline{T}_i(x,p)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{in}\frac{\exp\left(-\frac{nx_i-x}{\sqrt{m_i}}\sqrt{p}\right)}{p}+\right.$$

$$\left.+B_{in}\frac{\exp\left(-\frac{nx_i+x}{\sqrt{m_i}}\sqrt{p}\right)}{p}\right]+\overline{\gamma}_i(x,p). \tag{8}$$

Очевидно, что функция (8) как изображение удовлетворяет всем требованиям для существования оригинала.

В пространстве оригиналов получим

$$T_i(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{in}\operatorname{erfc}\frac{nx_i-x}{2\sqrt{m_i\tau}}+B_{in}\operatorname{erfc}\frac{nx_i+x}{2\sqrt{m_i\tau}}\right]+$$

$$+\gamma_i(x,\tau). \tag{9}$$

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\operatorname{erfc}nz \tag{10}$$

сходится при всех z, если коэффициенты ряда C_n удовлетворяют условию

$$\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\text{const}. \tag{11}$$

В самом деле, применяя признак Даламбера к ряду (10), получим

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}\operatorname{erfc}(n+1)z}{C_n\operatorname{erfc}nz}\right|=\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|\lim_{n\to\infty}\frac{1^{-(n+1)^2z^2}}{1^{-n^2z^2}}=0.$$

Далее покажем, что коэффициенты A_{in}, B_{in} удовлетворяют условию (11).

Следовательно, ряды, входящие в решение (9), сходятся. Далее, непосредственной подстановкой можно показать, что функция (9) удовлетворяет уравнению (1) и условию (2).

Остается в полученном решении (9) постоянные коэффициенты A_{in} и B_{in} выбирать так, чтобы удовлетворялись условия (3) и (4). Для граничного условия (3) при $x = a$ получим

$$\frac{\partial T_1(a,\tau)}{\partial x} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{1n} \frac{\exp\left(-\frac{(nx_1-x)^2}{4m_1\tau}\right)}{\sqrt{\pi m_1 \tau}} - B_{in} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{\exp\left(-\frac{(nx_1+x)^2}{4m_1\tau}\right)}{\sqrt{\pi m_1 \tau}}\right) + \gamma_1'(x,\tau)\right]_{x=a} = \alpha_1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \times\right.$$

$$\times \left(A_{in} \operatorname{erfc} \frac{nx_1 - x}{2\sqrt{m_1\tau}} + B_{1n} \operatorname{erfc} \frac{nx_1+x}{2\sqrt{m_1\tau}}\right) +$$

$$\left. + \gamma_1(x,\tau)\right]_{x=a}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{1n}\left(\frac{\exp\left(-\frac{(nx_1-a)^2}{4m_1\tau}\right)}{\sqrt{\pi m_1\tau}} - \alpha_1 \operatorname{erfc}\frac{nx_1-a}{2\sqrt{m_1\tau}}\right) - \right.$$

$$\left. - B_{1n}\left(\frac{\exp\left(-\frac{(nx_1+a)^2}{4m_1\tau}\right)}{\sqrt{\pi m_1\tau}} + \alpha_1 \operatorname{erfc}\frac{nx_1+a}{2\sqrt{m_1\tau}}\right)\right] = \tag{12}$$

$$= \alpha_1 \gamma_1(a,\tau) - \gamma_1'(a,\tau).$$

Аналогично, при $x = b$ получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{2n}\left(\frac{\exp\left(-\frac{(nx_2-b)^2}{4m_2\tau}\right)}{\sqrt{\pi m_2\tau}} - \alpha_2 \operatorname{erfc}\frac{nx_2-b}{2\sqrt{m_2\tau}}\right) - B_{2n} \times \right.$$

$$\left. \times\left(\frac{\exp\left(-\frac{(nx_2+b)^2}{4m_2\tau}\right)}{\sqrt{\pi m_2\tau}} + \alpha_2 \operatorname{erfc}\frac{nx_2+b}{2\sqrt{m_2\tau}}\right)\right] =$$

$$= \alpha_2 \gamma_2(b, \tau) - \gamma_2'(b, \tau). \qquad (13)$$

Из условий сопряжения имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_{1n} \operatorname{erfc} \frac{nx_1 - x_1}{2\sqrt{m_1\tau}} - A_{2n} \operatorname{erfc} \frac{nx_2 - x_1}{2\sqrt{m_2\tau}} +$$

$$+ B_{1n} \operatorname{erfc} \frac{nx_1 + x_1}{2\sqrt{m_1\tau}} - B_{2n} \operatorname{erfc} \frac{nx_2 + x_1}{2\sqrt{m_2\tau}} =$$

$$= \gamma_2(x_1, \tau) - \gamma_1(x_1, \tau); \qquad (14)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[A_{1n} \frac{\lambda_1 \exp\left(-\frac{(nx_1 - x_1)^2}{4m_1\tau}\right)}{\sqrt{\pi m_1 \tau}} - A_{2n} \times$$

$$\times \frac{\lambda_2 \exp\left(-\frac{(nx_2 - x_1)^2}{4m_2\tau}\right)}{\sqrt{\pi m_2 \tau}} - B_{1n} \frac{\lambda_1 \exp\left(-\frac{(nx_1 + x_1)^2}{4m_1\tau}\right)}{\sqrt{\pi m_1 \tau}} +$$

$$+ B_{2n} \frac{\lambda_2 \exp\left(-\frac{(nx_2 + x_1)^2}{4m_2\tau}\right)}{\sqrt{\pi m_2 \tau}} \Bigg] = \lambda_2 \gamma_2'(x_1 \ \tau) - \lambda_1 \gamma_1'(x_1 \ \tau). \qquad (15)$$

Равенства (12)—(15) есть тождества относительно переменной τ. Следовательно, полагая в этих равенствах $\tau = \text{const}$, мы будем получать линейные уравнения относительно искомых коэффициентов A_{in} и B_{in}. Таким образом, если в решении (9) мы сохраняем n членов, то для нахождения коэффициентов A_{in} и B_{in} из равенств (12)—(15) мы составляем систему $4n$ линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. Если нас интересует зависимость $T_i(x, \tau)$ на отрезке $[0, \tau^*]$, то для получения указанной системы достаточно отрезок $[0, \tau^*]$ разделить на s частей (лучше равных) и положить в равенствах (12)—(15) $\tau = \frac{k\tau^*}{s}$ ($k = 1, 2, \dots, n$):

$$\sum_{n=1}^{s}\left[A_{1n}\left(\frac{\exp-\left(\frac{nx_1-a}{2\sqrt{m_1\tau_k}}\right)^2}{\sqrt{\pi m_1\tau_k}} - \alpha_1 \operatorname{erfc}\frac{nx_1-a}{2\sqrt{m_1\tau_k}}\right) - B_{1n} \times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\exp-\left(\frac{nx_1+a}{2\sqrt{m_1\tau_k}}\right)^2}{\sqrt{\pi m_1\tau_k}} + \alpha_1 \operatorname{erfc}\frac{nx_1+a}{2\sqrt{m_1\tau_k}}\right)\right] =$$

$$= \alpha_1\gamma_1(a, \tau_k) - \gamma_1'(a, \tau_k);$$

$$\sum_{n=1}^{s}\left[A_{2n}\left(\frac{\exp-\left(\frac{nx_2-b}{2\sqrt{m_2\tau_k}}\right)^2}{\sqrt{\pi m_2\tau_k}} - \alpha_2 \operatorname{erfc}\frac{nx_2-b}{2\sqrt{m_2\tau_k}}\right) -\right.$$

$$\left.- B_{2n}\left(\frac{\exp-\left(\frac{nx_2+b}{2\sqrt{m_2\tau_k}}\right)^2}{\sqrt{\pi m_2\tau_k}} + \alpha_2 \operatorname{erfc}\frac{nx_2+b}{2\sqrt{m_2\tau_k}}\right)\right] =$$

$$= \alpha_2\gamma_2(b, \tau_k) - \gamma_2'(b, \tau_k);$$

$$\sum_{n=1}^{s}\left(A_{1n}\operatorname{erfc}\frac{nx_1-x_1}{2\sqrt{m_1\tau_k}} - A_{2n}\operatorname{erfc}\frac{nx_2-x_1}{2\sqrt{m_2\tau_k}} +\right.$$

$$\left.+ B_{1n}\operatorname{erfc}\frac{nx_1+x_1}{2\sqrt{m_1\tau_k}} - B_{2n}\operatorname{erfc}\frac{nx_2+x_1}{2\sqrt{m_2\tau_k}}\right) =$$

$$= \gamma_2(x_1, \tau_k) - \gamma_1(x_1, \tau_k);$$

$$\sum_{n=1}^{s}\left[A_{1n}\lambda_1 \frac{\exp-\left(\frac{nx_1-x_1}{2\sqrt{m_1\tau_k}}\right)^2}{\sqrt{\pi m_1\tau_k}} - A_{2n}\lambda_2 \times \right.$$

$$\times \frac{\exp-\left(\frac{nx_2-x_1}{2\sqrt{m_2\tau_k}}\right)^2}{\sqrt{\pi m_2\tau_k}} - B_{1n}\lambda_1\frac{\exp-\left(\frac{nx_1+x_1}{2\sqrt{m_1\tau_k}}\right)^2}{\sqrt{\pi m_1\tau_k}} +$$

$$\left. +B_{2n}\lambda_2 \frac{\exp-\left(\frac{nx_2+x_1}{2\sqrt{m_2\tau_k}}\right)^2}{\sqrt{\pi m_2\tau_k}}\right] = \lambda_2\gamma_2'(x_1,\tau_k)-\lambda_1\gamma_1'(x,\tau_k),$$

где

$$\tau_k = \frac{k\tau^*}{s} \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

При $\tau \to \infty$ система для определения коэффициентов A_{in}, B_{in} составляется следующим образом. Из равенств (12)–(15) следует равенство их производных по τ. Следовательно, если в равенствах (12)–(15) и производных от них до $(n-1)$ порядка положить $\tau = \tau_0$ (например, $\tau = 1$), то придем к системе $4n$ уравнений, аналогичной (16).

Производные любого порядка от функций

$\tau^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{y}{\tau}\right)$ и $\operatorname{erfc}\sqrt{\frac{y}{\tau}}$ по τ легко определяются из формул

$$\frac{\partial^n\left(\tau^{-\frac{1}{2}} 1^{-\frac{y}{\tau}}\right)}{\partial\tau^n} = \frac{1^{-\frac{y}{\tau}}}{\tau^{n+\frac{1}{2}}}\left[\left(\frac{y}{\tau}\right)^n - \frac{2n(2n-1)}{4}\left(\frac{y}{\tau}\right)^{n-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{32}\left(\frac{y}{\tau}\right)^{n-2} - \ldots\right];$$

$$\frac{\partial^{n+1} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{y}{\tau}}}{\partial \tau^{n+1}} = \sqrt{\frac{y}{\pi}} \; \frac{l^{-\frac{y}{\tau}}}{\tau^{n+\frac{3}{2}}} \left[\left(\frac{y}{\tau}\right)^{n} - \frac{(2n+1)2n}{4} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{y}{\tau}\right)^{n-1} + \frac{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)}{32} \left(\frac{y}{\tau}\right)^{n-2} - \dots \right];$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Можно показать, используя неравенство Адамара и метод Гаусса [9] решения системы линейных уравнений, что последовательность коэффициентов A_{in}, B_{in} удовлетворяет условию (11).

Ряды, входящие в решение (9), сходятся быстро и, как показал анализ решения, уже первые два- три члена ряда дают хороший результат.

Если учесть, что решение системы линейных уравнений входит в математическое обеспечение ЭВМ, а для функций erfc составлены подробные таблицы, то практическое применение полученного решения не вызывает затруднений.

Для граничных условий других родов вид решения (9) остается прежним и лишь изменяются первые два равенства системы (16). С увеличением числа тел сопряжения к системе для определения коэффициентов ряда добавляются равенства, аналогичные двум последним равенствам системы (16).

Литература

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., 1967. 2. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. М., — Л., 1963. 3. Смирнов М.С. Температурное поле в трехслойной стенке при граничных условиях четвертого рода. — В кн.: Тепло- и массообмен в капиллярно-пористых телах. М.,—Л., 1957. 4. Цой Л.В. Теплообмен системы тел при нестационарном режиме. — ИФЖ, т. 4, 1961, № 1. 5. Чудновский А.Ф. Теплообмен в дисперсных средах. М., 1954. 6. Кулик Л.М., Шаповалов Г.Е. Неустановившаяся теплопередача через многослойную плоскую пластинку. — "Изв. АН СССР. Энергетика и автоматика", 1961, № 2. 7. Шило А.Ф. Температурное поле противоточного регенеративного теплообменника. — "Изв. вузов. Энергетика", 1972, № 10. 8. Шило А.Ф., Степанчук В.Ф. Краевая задача с граничными условиями типа сопряжения.- "Дифференциальные уравнения", 1975, № 2. 9. Мишин А.П., Проскуряков Н.В. Высшая алгебра. М., 1962.