

## ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПЕРЕДАТОЧНОМ ЧИСЛЕ РЕДУКТОРА ЭЛЕКТРОПРИВОДА ПОСТОЯННОГО ТОКА, РАБОТАЮЩЕГО В ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ

Задача выбора оптимального передаточного числа редуктора (ПЧР) для электроприводов постоянного тока, работающих в режимах пуска и торможения, неоднократно рассматривалась в технической литературе [1, 3].

В настоящей статье рассматривается задача определения оптимального ПЧР при отсутствии технологических ограничений скорости. Этот случай имеет большое практическое значение для многих механизмов, допускающих движение с различными скоростями. Для выбора оптимального ПЧР при предварительно выбранном электродвигателе максимальной скорости двигателя  $\Omega$  соответствует скорость механизма

$$x_{2m} = \Omega_M = \Omega / r, \quad (1)$$

где  $r$  — ПЧР.

Если  $\Omega_M \leq \Omega_D$ , где  $\Omega_D$  — максимальная скорость механизма, допустимая по технологическим соображениям, то можно считать, что технологические ограничения скорости отсутствуют, и установившаяся скорость механизма зависит от ПЧР.

Для определения оптимального ПЧР при предварительно выбранном двигателе с ограниченной скоростью  $\Omega$  применим принцип максимума с параметрами [4], приняв за эквивалентное управление момент двигателя  $M = U$ . Все величины, характеризующие движение объекта, приведем к выходному валу редуктора. Тогда исходные уравнения системы будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x, u, r); \\ \dot{x}_2 &= \frac{Mr - M_M}{Jr^2 + J_M} = f_2(x, u, r), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $M_M$ ,  $J_M$  — момент и момент инерции механизма, приведенные к выходному валу редуктора;  $M$ ,  $J$  — момент и момент инерции двигателя;  $x_1$ ,  $x_2$  — угол поворота и скорость выходного вала редуктора.

Оптимальное ПЧР будем искать при оптимальном по быстродействию управлении, при котором критерий оптимальности

$$I = \int_0^{t_{\text{п}}} f_0(x, u, r) dt = t_{\text{п}} \quad (3)$$

имеет минимальное значение.

Здесь  $t_{\text{п}}$  — полное время движения и  $f_0(x, u, r) = 1$ .

Задача состоит в том, чтобы при переводе системы, описываемой уравнениями (2), из начального положения  $X_{\text{нач}}$  ( $X_{1\text{нач}}, 0$ ) в конечное положение  $X_{\text{кон}}$  ( $X_{1\text{кон}}, 0$ ) при оптимальном по быстродействию управлении и ограничении (1) найти оптимальное ПЧР  $v$ , доставляющее минимум функционалу (3).

Функция Гамильтона в рассматриваемом случае имеет вид

$$H = \Psi_1 f_1 + \Psi_2 f_2. \quad (4)$$

Сопряженные функции при скорости, меньшей допустимой, определяются равенствами

$$\dot{\Psi}_1 = - \frac{\partial H}{\partial X_1} = 0; \quad \dot{\Psi}_2 = - \frac{\partial H}{\partial X_2} = - \Psi_1. \quad (5)$$

На участке движения с максимально допустимой скоростью  $X_2 = X_{2\text{m}} = \frac{\Omega}{r}$  сопряженные функции должны удовлетворять условию (5) и условиям принципа максимума при ограниченных фазовых координатах. На этом участке

$$\dot{\Psi}_1 = - \frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \quad \dot{\Psi}_2 = - \frac{\partial H}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial P}{\partial x_2}, \quad (6)$$

где

$$p(x, u) = \frac{\partial g}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} f_2. \quad (7)$$

Функция  $g$ , ограничивающая поверхность допустимых значений фазовых координат, имеет вид

$$g = X_{2m} - x_2 = 0. \quad (8)$$

Ее частные производные выражаются равенствами

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = -1. \quad (9)$$

Подставив эти значения в (7), получим

$$p(x, u) = -f_2 = -\frac{Mr - M_M}{Jr^2 + J_M}.$$

Таким образом, для рассматриваемой задачи  $\partial p / \partial x_2 = 0$  и, следовательно, для всех участков движения справедливы уравнения (5).

Решение этих уравнений дает

$$\Psi_1 = c_1 = \text{const}; \quad (10)$$

$$\Psi_2 = c_2 - c_1 t. \quad (11)$$

В точках стыка участков фазовой траектории, лежащих в области  $x_2 < x_{2m}$  с участком, на котором  $x_2 = x_{2m} = \text{const}$ , должно соблюдаться одно из следующих условий скачка [4]:

$$\Psi^+(\tau) = \Psi^-(\tau) + \mu \text{grad } g(x(\tau)); \quad (12)$$

$$\Psi^-(\tau) + \mu \text{grad } g(x(\tau)) = 0, \quad (13)$$

где  $\mu$  — действительное число;  $\tau$  — момент времени, соответствующий стыку участков фазовых траекторий.

Сопряженные функции  $\Psi_1, \Psi_2$  определяются с точностью до постоянного множителя. Поэтому можно принять  $c_1 = 1$ . При  $0 \leq t \leq \tau_1$  происходит разгон привода, при  $\tau_1 \leq t \leq \tau_n$  — движение с постоянной скоростью  $x_2 = X_{2m}$  и при  $\tau_2 \leq t \leq t_n$  торможение привода.

Управление на участке разгона и торможения определяется условием максимума функций  $H$

$$u = M \text{sign } \Psi_2, \quad (14)$$

где  $M$  — максимальное значение момента двигателя.

На участке движения с постоянной скоростью, справедливо равенство

$$\dot{x}_2 = f_2 = 0 \quad \text{и} \quad u = \frac{M}{r} . \quad (15)$$

В момент окончания разгона  $t = \tau_1$  имеет место скачок функции  $\psi_2$ . При этом

$$\psi_2^-(\tau_1) = 0 . \quad (16)$$

Подставляя это значение в (11), получим

$$c_2 = c_1 \tau_1 = \tau_1 \quad (17)$$

и уравнение сопряженной функции для участка разгона принимает вид

$$\psi_{2p} = \tau_1 - t . \quad (18)$$

Для рассматриваемой задачи

$$\text{grad } g(x(\tau)) = - \left[ \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2} \right] = - [0, -1] . \quad (19)$$

Поэтому скачок функции  $\psi_1$  равен нулю, а для функции  $\psi_2$  согласно (12) имеем

$$\psi_2^+(\tau_1) = \mu . \quad (20)$$

В момент  $\tau_2$  окончания движения с максимальной скоростью и начала торможения  $\psi_2^+(\tau_2) = 0$  и на основании (13)

$$\psi_2^-(\tau_2) = -\mu . \quad (21)$$

Применив уравнение (11) для  $t = \tau_1$  и  $t = \tau_2$ , найдем

$$\mu = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} ; \quad c_2 = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} ; \quad (22)$$

$$\psi_{2 \text{ уст}} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} - t .$$

Для участка торможения из условия  $\psi_2^+(\tau_2) = 0$  находим

$$c_2 = \tau_2 \text{ и}$$

$$\psi_{2T} = \tau_2 - t . \quad (23)$$

Графики изменения управления  $u$  и скорости  $x_2$  и сопряженной функции  $\Psi_2$  за время движения показаны на рис. 1. При этом функция  $H$  имеет значение

$$H = X_{2m} = \text{const},$$

что удовлетворяет требованию принципа максимума, которое состоит в том, что максимальное значение  $H$  должно быть  $\geq 0$ .

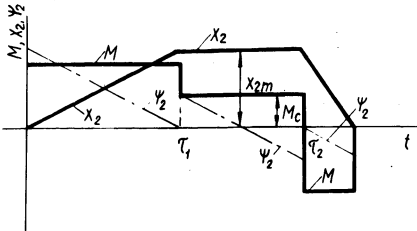


Рис. 1. Графики  $M, x_2$  и  $\Psi_2$  в функции времени.

Согласно [4] дополнительное условие для выбора оптимального ПЧР имеет вид

$$\int_0^{t_n} \Psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} dt + \int_0^{t_n} \Psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial r} dt = I_1 + I_2 = 0. \quad (24)$$

Интегралы, входящие в условие (24), могут быть вычислены по участкам. Так,

$$I_1 = \int_0^{t_n} \Psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} dt = \int_0^{\tau_1} \Psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} dt + \int_{\tau_2}^{t_n} \Psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} dt = \int_{11} + \int_{12} + \int_{13}; \quad (25)$$

$$I_2 = \int_0^{t_n} \Psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial r} dt = \int_0^{\tau_1} \Psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial r} dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial r} dt + \int_{\tau_2}^{t_n} \Psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial r} dt = \int_{21} + \int_{22} + \int_{23}. \quad (26)$$

В этих выражениях  $\int_{11} = \int_{33} = 0$ , так как на участках разгона

и торможения  $f_1 = x_2$  не зависит явно от ПЧР  $r$ . Кроме того,  $\int_{22} = 0$ , так как на участке установившегося движения  $f_2 \equiv 0$ .

Для вычисления  $\int_{12}$  следует положить  $f_1 = X_2 m = \Omega / r$ ;  $\frac{\partial f_1}{\partial r} = -\frac{\Omega}{r^2}$ ;  $\psi_1 = 1$ . Тогда

$$\int_{12} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( -\frac{\Omega}{r^2} \right) dt = -\frac{\Omega}{r^2} (\tau_2 - \tau_1). \quad (27)$$

Значения  $\partial f_2 / \partial r$  для участков разгона и торможения определяются равенствами

$$\left( \frac{\partial f_2}{\partial r} \right)_p = \frac{h(-r^2 + 2mr + j)}{(r^2 + j)^2}; \quad (28)$$

$$\left( \frac{\partial f_2}{\partial r} \right)_T = \frac{h(r^2 + 2mr - j)}{(r^2 + j)^2}, \quad (29)$$

где  $h = M/J$ ;  $m = M_m/M$ ;  $j = J_m/J$ .

Подставив значения  $\partial f_2 / \partial r$  в (26) и учитывая (18) -- (23), получим

$$\int_{21} = \frac{h(-r^2 + 2mr + j)}{(r^2 + j)^2} \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - t) dt = \quad (30)$$

$$= \frac{h(-r^2 + 2mr + j) \tau_1^2}{2(r^2 + j)^2};$$

$$\int_{23} = \frac{h(r^2 + 2mr - j)}{(r^2 + j)^2} \int_{\tau_2}^{t_{\Pi}} (\tau_2 - t) dt = \quad (31)$$

$$= -\frac{h(r^2 + 2mr - j)(t_{\Pi} - \tau_2)^2}{2(r^2 + j)^2}.$$

Длительности разгона и торможения согласно (2) могут быть представлены в форме

$$\tau_1 = \frac{\Omega(r^2 + j)}{hr(r-m)} ; \quad t_{\Pi} - \tau_2 = \frac{\Omega(r^2 + j)}{hr(r+m)}. \quad (32)$$

Используя выражения (30)–(32), получим

$$I_1 + I_2 = \frac{-\alpha h(r^2 - m^2)^2 + 2\Omega^2 r(m^2 + j)}{hr(r^2 - m^2)^2}, \quad (33)$$

где  $\alpha$  — заданное положение рабочего органа.

Приравнявая (33) нулю, получим уравнение, определяющее оптимальное ПЧР при отсутствии технологических ограничений скорости и ограниченной скорости двигателя

$$r_o^4 + A_2 r_o^2 + A_1 r_o + A_0 = 0, \quad (34)$$

где  $A_2 = -2m^2$ ;  $A_1 = -\frac{2\Omega^2(m^2 + j)}{\alpha h}$ ;  $A_0 = m^4$ .

Полученное по уравнению (34) решение должно проверяться по условию достижения приводом максимальной скорости

$$\alpha \geq \frac{\Omega^2(r^2 + j)}{hr(r^2 - m^2)}. \quad (35)$$

Если это условие не выполняется, то привод не достигает установленной скорости и интеграл  $I_1 \equiv 0$ . В таком случае оптимальное ПЧР должно выбираться из условия  $I_2 = 0$ , из которого легко получить

$$r_o = \sqrt{\frac{3m^2 + j}{2}} + \sqrt{\frac{(3m^2 + j)^2}{4} + m^2 j}. \quad (36)$$

В частном случае для приводов, в которых можно пренебречь статическим моментом ( $m = 0$ ), и если имеется участок с установившейся скоростью, то

$$r_o = \sqrt[3]{\frac{2\Omega^2 j}{\alpha h}}, \quad (37)$$

а при отсутствии участка установившейся скорости  $r_0 = \sqrt{j}$ .

На рис. 2 показаны зависимости оптимального ПЧР от величины заданного перемещения в относительных единицах для электропривода с двигателем МП-41, 12 квт, 685 об/мин,  $j = 0,775 \text{ кгм}^2$ ,  $M = \lambda M_n = 370 \text{ нм}$ ;  $h = 477$ ;  $\Omega = 21,6$ , вычисленные для  $j = 10$ ;  $m = 0$  и  $m = 2$  по формуле (36) и уравнению (34).

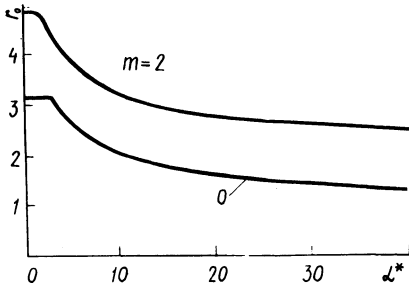


Рис. 2. Зависимость оптимального ПЧР от заданного перемещения:

$$\alpha^* = \alpha / \alpha_{\text{баз}} = \alpha / \Omega \theta_{\text{дв}}$$

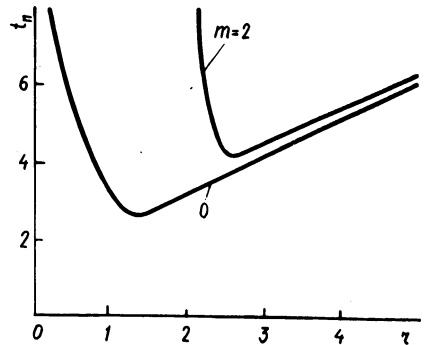


Рис. 3. Зависимость полного времени движения от ПЧР при  $j = 10$ ;  $h = 477$ ;  $\Omega = 21,6$ ,  $\alpha = 90,4$ .

Полное время движения  $t_{\text{п}}$  при оптимальном по быстродействию управлению может быть выражено формулой

$$t_{\text{п}} = \frac{\alpha r}{\Omega} + \frac{\Omega (r^2 + j)}{h(r^2 - m^2)} \quad (38)$$

На рис. 3 приведены кривые, показывающие влияние отклонения ПЧР от оптимального на длительность отработки перемещения  $\alpha = 40 \alpha^* = 90,4$  при максимальной скорости двигателя  $\Omega = 21,6$ ;  $j = 10$ ;  $h = 477$  при  $m = 0$  и  $m = 2$ . Из рис. 3 видно, что выбор ПЧР существенно влияет на производительность механизма.



## Л и т е р а т у р а

1. Гейлер Л.Б. Основы электропривода. Минск, 1972.
2. Чистов В.П., Бондаренко В.И., Святославский В.А. Оптимальное управление электрическим приводом. М., 1968.
3. Ильин О.П., Галкин А.Л. О выборе оптимального передаточного числа редуктора приводов позиционных механизмов. — "Электричество", 1973, № 4.
4. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961.

Л.С. Писарик

### ОПТИМИЗАЦИЯ ВНЕШНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ АВТОНОМНОГО ТЯГОВОГО ГЕНЕРАТОРА В СЛУЧАЕ ЕЕ ЛИНЕЙНОСТИ

Системы регулирования тяговых генераторов автономных транспортных установок стремятся выполнять таким образом, чтобы во всех режимах движения установки обеспечивалось постоянство мощности, потребляемой генератором от двигателя внутреннего сгорания (ДВС), величина которой задана положением управляющего органа. Выполнение этого условия обеспечивает работу ДВС с неизменной заданной угловой скоростью и подачей топлива.

Внешняя характеристика генератора  $U = f(I)$ , обуславливающая постоянство его первичной мощности  $P_{1T}$ , должна выражаться уравнением

$$U = \frac{P_{1T} \eta_g}{I}, \quad (1)$$

которое описывает кривую, близкую к гиперболе. Практическое получение идеальной внешней характеристики, имеющей форму кривой (1), требует усложнения системы регулирования генератора, поэтому в ряде случаев предпочитают иметь характеристику, которая отклоняется от идеальной, чтобы выиграть в простоте и надежности системы регулирования.

Один из вариантов системы регулирования тягового генератора, применяемый в электропередачах тепловозов и большегрузных автомобилей, реализует в случае постоянства угло-