

### СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРИВОДА

В работе предлагается методика, в значительной мере облегчающая решение задачи синтеза оптимальной релейной системы стабилизации частоты вращения электропривода.

Пусть возмущенное движение системы с объектом  $n$ -го порядка, к которому приложено одно управление  $U^l$  и одно возмущение  $F(t)$ , в пространстве отклонений координат  $x_j$  описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + m^l U^l + l F; \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где  $a_{ij}$ ,  $m^l$ ,  $l$  — постоянные коэффициенты.

Выполним преобразование координат [1], тогда движение в фазовом пространстве нормальных переменных состояния [3] будет описываться системой дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_j = y_{j+1}; \quad \dot{y}_n = - \sum_{i=1}^n b_{ni} y_i + m U; \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где коэффициенты  $b_{ni}$ ,  $m$  и управление  $U$  выражаются через исходные коэффициенты объекта  $a_{ij}$ ;  $m^l$  и управление  $U^l$  — посредством уравнений связи [1].

Управление  $U$ , доставляющее минимум функционалу

$$I = \int_0^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} y_i^2 \right) dt, \quad (\lambda_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j), \quad (3)$$

при ограничениях [2]

$$|U| \leq U_m; \quad U_m \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n \gamma_{ni} |y_i| dt < \frac{1}{2} \sum_{j,p=1}^n \gamma_{jp} [y_j(0) y_p(0)]$$

имеет вид

$$U = - U_m \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n \gamma_{ni} y_i. \quad (4)$$

Используя результаты [1,2], можно доказать, что коэффициенты искомого уравнения (4) при заданных весовых множителях функционала (3) являются решением совокупности  $n$ -линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (b_{nk-i} \gamma_{nk+1} + b_{nk+i} \gamma_{nk-i}) = b_{nk} \gamma_{nk} - \frac{1}{2} \lambda_{kk}, \quad (5)$$

где  $\gamma_{nj} = 0$  при  $0 \geq j > n$ ;  $b_{nj} = 0$  при  $0 \geq j > n+1$ ;  $b_{nj} = 1$  при  $j = n+1$ .

Благодаря асимптотической устойчивости системы (2) изображающая точка в фазовом пространстве приближается к началу координат и при этом существует скользящий режим, если [2]

$$m \gamma_{nn} U_m \geq \left| \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ni} b_{ij} y_j \right|. \quad (6)$$

Для рассматриваемых систем стабилизации выбором  $m, U_m, \gamma_{ni}$  можно или вообще исключить или обеспечить пренебрежимо малое время движения по кускам фазовых траекторий с переключением на гиперплоскости

$$\sum_{i=1}^n \gamma_{ni} y_i \equiv 0 \quad (7)$$

до момента возникновения скользящего режима.

Следовательно, основное (или единственное) движение изображающей точки системы (2) будет происходить в гиперплоскости (7) и описываться уравнениями

$$\dot{y}_j = y_{j+1}; \quad \dot{y}_{n-1} = - \frac{1}{\gamma_{nn}} \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{ni} y_i. \quad (8)$$

Движение системы, определяемое уравнениями (8), не зависит от параметров объекта и возмущающего воздействия, т.е. система (1) с релейным управлением, аргументами которого является линейная комбинация обратных связей по переменным состояния, будет нечувствительной к параметрическим и внешним возмущениям.

Таким образом, характер скользящего движения в плоскости (7) будет определяться только значениями коэффициентов  $\gamma_{ni}$ . На этом основании укажем простой путь их нахождения, не затрагивая проблемы задания весовых множителей функционала (3).

Решая (8) относительно высшей производной, получим

$$\dot{y}^{(m)}(t) = - \frac{1}{\gamma_{nn}} \sum_{i=1}^m \gamma_{ni}^{(i-1)} y^{(i-1)}(t), \quad (m = n-1). \quad (9)$$

Зададимся регулируемой величиной объекта (8) в переходном процессе путем выбора требуемого линейного однородного дифференциального уравнения и найдем из него "желаемую" высшую производную [4]:

$$\dot{y}_ж^{(m)}(t) = - \sum_{i=1}^m a_{m+1-i} y^{(i-1)}(t). \quad (10)$$

Следуя [4], приравняем правые и левые части равенств (9) и (10), после чего получим выражения для нахождения коэффициентов  $\gamma_{ni}$  при свободно назначаемом  $\gamma_{nn}$ :

$$\gamma_{ni} = \gamma_{nn} \cdot a_{m+1-i}. \quad (11)$$

В этом случае (для проверки существования скользящего режима) более удобным оказывается следующее условие, полученное с учетом выражений (6), (7) и (11):

$$mU_m \geq \sum_{i=1}^m | [ a_{m+1-i} + a_{m-i} (b_{nn} - a_1) - b_{ni} ] y_i(0) |, \quad (12)$$

где  $y_i(0)$  — заданные начальные условия.

Рассмотрим в качестве примера процедуру синтеза релейной системы оптимального управления электроприводом постоянного тока с неизменным потоком возбуждения двигателя и регулируемым источником в цепи якоря (рис. 1), для которой коэффициенты уравнения (1) имеют вид [1]

$$a_{12} = 1/\theta; \quad a_{21} = 1/T; \quad a_{33} = 1/T_p; \quad m' = \beta_p/T_p; \quad l = a_{12}.$$

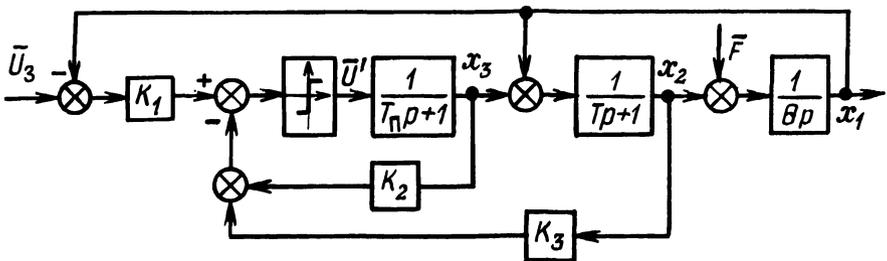


Рис. 1. Структурная схема оптимальной релейной системы.

Выполним преобразование координат, приняв, что возмущение  $F$  в виде ступенчатой функции прикладывается к объекту при  $t = 0^-$  [1]. При этом

$$y_1 = x_1 + \nu F; \quad y_2 = a_{12} (x_2 - F); \quad y_3 = a_{12} a_{21} (-x_1 - x_2 + x_3). \quad (13)$$

Коэффициенты уравнения (2) будут

$$b_{31} = a_{12} a_{21} a_{33}; \quad b_{32} = a_{21} (a_{12} + a_{33}); \quad b_{33} = a_{21} + a_{33}; \quad (14)$$

$$m = \beta_p b_{31}; \quad U = U' - (1 - \nu) F / \beta_p.$$

Искомый алгоритм оптимального управления  $U'$  с учетом выражений (4), (13), (14) будет иметь вид

$$U' = (1 - \nu) F / \beta_p - U_m \operatorname{sign} [ K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 + (K_{\nu F} - K) F ], \quad (15)$$

где

$$K_1 = \gamma_{31} - a_{12} a_{21} \gamma_{33}; \quad K_2 = a_{12} (\gamma_{32} - a_{21} \gamma_{33});$$

$$K_3 = a_{12} a_{21} \gamma_{33}; \quad K_{\nu F} = \nu \gamma_{31}; \quad K_F = a_{12} \gamma_{32},$$

что соответствует комбинированному регулированию. При регулировании по отклонению, пренебрегая первым слагаемым в выражении (15), получим

$$U' = - U_m \operatorname{sign} ( K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 ).$$

Т а б л и ц а 1. Коэффициенты уравнений для настройки регуляторов оптимальной релейной системы стабилизации частоты вращения электропривода

№№	m	$\sigma, \%$	$t_p, c$	$\nu \theta$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
1	2	4,0	9,75/a	0,353/a	5,656 a	2,83 a a <sub>1</sub>				
2	3	7,1	1,18/a	0,400 /a	10,90 a	5,00 a a <sub>1</sub>	2,50 a a <sub>2</sub>			
3	4	12,0	1,23/a	0,465/a	14,56 a	7,32 a a <sub>1</sub>	4,28 a a <sub>2</sub>	2,15 a a <sub>3</sub>		
4	5	9,5	1,26/a	0,523/a	20,09 a	10,03 a a <sub>1</sub>	6,20 a a <sub>2</sub>	3,83 a a <sub>3</sub>	1,91 a a <sub>4</sub>	
5	6	12,0	1,25/a	0,602/a	24,70 a	12,37 a a <sub>1</sub>	7,83 a a <sub>2</sub>	5,23 a a <sub>3</sub>	3,31 a a <sub>4</sub>	1,66 a a <sub>5</sub>
6	2	4,5	0,62/a	0,599/a	6,30 a	3,21 a a <sub>1</sub>				
7	3	3,3	0,72/a	0,311/a	9,63 a	17,90 a a <sub>1</sub>	4,22 a a <sub>2</sub>			
8	4	4,8	0,67/a	0,237/a	44,44 a	22,19 a a <sub>1</sub>	5,45 a a <sub>2</sub>	2,72 a a <sub>3</sub>		
9	5	4,0	0,87/a	0,368/a	15,89 a	14,74 a a <sub>1</sub>	6,65 a a <sub>2</sub>	5,19 a a <sub>3</sub>	2,08 a a <sub>4</sub>	
10	6	4,0	0,91/a	0,529/a	71,34 a	35,55 a a <sub>1</sub>	15,54 a a <sub>2</sub>	8,66 a a <sub>3</sub>	3,78 a a <sub>4</sub>	1,89 a a <sub>5</sub>

При этом будет иметь место относительное отклонение частоты вращения [1]

$$\nu = a_{12}\gamma_{32}/\gamma_{31} = a_{12}a_{m-1}/a_m.$$

Если заданы весовые коэффициенты функционала (3), то решив (5), найдем искомые коэффициенты:

$$\gamma_{31} = \lambda_{11}/2b_{31}; \gamma_{32} = (b_{33}^2 \lambda_{11} + b_{31}b_{33}\lambda_{22} + b_{31}^2 \lambda_{33})/A;$$

$$\gamma_{33} = (b_{33}\lambda_{11} + b_{31}\lambda_{22} + b_{31}b_{32}\lambda_{33})/A; A = 2b_{31}(b_{32}b_{33} - b_{31}).$$

Рассмотрим также случай, когда весовые множители функционала не заданы. Выберем в качестве "желаемого" уравнение второго порядка, характеристический полином которого соответствует фильтру Баттерворта. Рассчитанные коэффициенты уравнений более высокого порядка, а также соответствующие им значения перерегулирования  $\sigma$ , времени регулирования  $t_p$  и  $\nu$  приведены в табл. 1. Здесь  $a$  — коэффициент, учитывающий ограничение производной тока якоря [1]. Тогда, при произвольно выбранном  $\gamma_{33}$ , найдем

$$\gamma_{32} = a_1 \gamma_{33} = 5,656 a \gamma_{33}; \gamma_{31} = a_2 \gamma_{33} = 2,83 a a_1 \gamma_{33}.$$

После определения этих коэффициентов следует выполнить проверку условия (12), а затем найти коэффициенты  $K_1, K_2, K_3$ .

Пусть, например,  $a_{12} = 2,5$ ;  $a_{21} = 20$ ;  $a_{33} = 50$ ;  $a \leq 20 I_H/c$ ;  $\beta_n U_m = 200$  В;  $F = 20$  В. Примем  $\gamma_{33} = 0,001$ , тогда  $\gamma_{32} = 0,113$ ;  $\gamma_{31} = 6,402$ ;  $K_1 = 6,352$ ;  $K_2 = 0,232$ ;  $K_3 = 0,05$ ;  $\nu = 0,044$ ;  $\sigma = 4,0\%$ ;  $t_p = 0,0375$  с.

Убедимся в выполнении условия (12), которое с учетом максимальных значений  $y_{1m} = y_1(0) = \nu F$ ;  $y_{2m} = y_2(0) = -a_{12}F$  можно записать

$$\frac{\beta_n U_m}{F} = 10 > \frac{a_{12}}{b_{31}} \left| 2a_1 (b_{33} - a_1) - b_{31} \frac{a_1}{a_2} + a_2 - b_{31} \right| = 4,45.$$

Таким образом, движение происходит полностью в скользящем режиме, а его характер соответствует "техническому" оптимуму.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А н х и м ю к В.Л., С л у к а М.П. Аналитическое конструирование линейных регуляторов для систем стабилизации частоты вращения электропривода. — Научные и прикладные проблемы энергетики, 1981, вып. 8, с. 165—171.
2. К р а с о в с к и й А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. — М.: Наука, 1973. — 240 с.
3. К в а к е р н а к Х., С и в а н Р. Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977. — 650 с.
4. Б о й ч у к Л.М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. — М.: Энергия, 1971. — 112 с.