Математические структуры и моделирование
2018. № 1(45). С. 30–36

УДК 510.2:101.1
DOI: 10.25513/2222-8772.2018.1.30-36

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ ПРАГМАТИЗМ ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Н.В. Михайлова
к.ф.н., доцент, e-mail: michailova_mshrc@mail.ru

Белорусский национальный технический университет,

Минск, Республика Беларусь

Аннотация. Статья посвящена проблемно-ориентированному обучению высшей математике на основе проблемного подхода к конкретным задачам и идее методологического прагматизма, которая выражается в критике идеи абсолютного обоснования математики и образовательной аргументации.

Ключевые слова: методологический прагматизм, проблемное обучение, философия математического образования.

Введение

Проблемно-ориентированное обучение математике является по сути философско-математической реакцией на длительный процесс дифференциации в обосновании математических теорий, и его можно определить, как выявление целостных свойств системы обоснования, единство уровней интеграции при дифференциации направлений обоснования математики и явном доминировании тенденций понимания системной целостности. Методологический прагматизм в обосновании современной математики проявляется не только в признании необходимости разработки новых концептуальных подходов к обоснованию, но и во «вторичной концептуализации» работающих направлений обоснования, например, выявлении сильных сторон направлений формализма и интуиционизма. Методологический прагматизм математики имеет специфическую природу, что приводит к философскому переосмыслению таких методологически важных в философии математики понятий, как «объективность», «истинность» и «рациональность», находя в них практически вполне допустимые в гносеологии компромиссные решения. Основная идея методологического прагматизма обоснования современной математики находит своё выражение в критике идеи абсолютного обоснования и прагматической аргументации, состоящей в том, что используемые направления обоснования считаются продуктивными, если они соответствуют эпистемологически оправданному и математически обоснованному критерию.

Методологический прагматизм математики задаёт в совокупности проблемное поле современных исследований по обоснованию математики, а поскольку проблема обоснования современной математики до сих пор не решена, то попытаемся сузить эту проблему, сосредоточившись на проблемно-ориентированном обучении. С точки зрения математического знания проблемно-ориентированное обучение математике включает в себя несколько аспектов: во-первых, доведение математических теорий до принятого современного уровня строгости; во-вторых, полноценная аргументация существования новых математических объектов; в-третьих, учёт саморазвития математических теорий при решении конкретных задач и избавление их от возможных противоречий. В контексте проблемно-ориентированного обучения заметим, что в истории становления математики надёжными представлялись математические теории, которые соответствовали различным уровням теоретической строгости, формирующимся под влиянием критической познавательной установки, направленной на практическое решение математических задач при системно-целостном анализе математических знаний.

Проблемно-ориентированное обучение математике

Интерес к проблеме взаимодействия философии, математики и образования особенно остро переживается тогда, когда возникают проблемные ситуации. Тогда обращение к философии становится важным как для анализа развития математического знания, так и для понимания связанных с этим проблем математического образования. В истории науки подвергались и продолжают подвергаться изменению ряд существенных сторон научного мышления, что должно найти также отражение и в философии математического образования. Философия современного математического образования — рефлексия над образованием, рассматривающая математическое образование с процессуальной и с содержательной стороны, способствующая развитию критического мышления как одного из проявлений рефлексии, поскольку в указанном контексте её можно рассматривать ещё и как реализацию проблемно-ориентированного обучения. Сущность проблемно-ориентированного обучения традиционно раскрывается переводом с греческого слова «проблема», что означает «задача, вопрос», — это «проблемная ситуация», образовательный эффект реализации которой не имеет однозначного решения.

Известно, что при становлении математического знания стало явно проявляться внутреннее противоречие между его непостижимо эффективной способностью получать конкретные математические результаты и философско-методологическими трудностями их обоснования. Но при преподавании высшей математики в учебную литературу стал постепенно проникать своеобразный профессиональный «пафос обоснования», что по сути отвлекало от подлинного содержания ключевого предмета в общем математическом образовании, затемняя и приглушая свойственные анализу естественнонаучные и практические мотивировки. В таком контексте основная цель проблемного обучения математике состоит не только в пробуждении интереса студентов к занятиям математикой, но и в направлении их на самостоятельные поиски истины при решении проблемно-ориентированных задач, используя для этого собственные интеллектуальные и эмоциональные ресурсы. Как отмечает специалист в области проблемного обучения высшей математике О.В. Зимина: «В обучении, в отличие от производственной и исследовательской деятельности, проблемные ситуации приходится выявлять, т. е. делать явными и ощутимыми для учащихся, в том числе на уровне эмоций» [1, с. 67]. Дело в том, что излишнее акцентирование на абстрактно-логической форме изложения математического материала при обучении математике в техническом университете приводит к искажению когнитивных практик образования и к нарушению методологического баланса между рациональными и эмоциональными сферами проблемного обучения.

Проблемы обучения и понимания как аспекты познавательной деятельности анализировал Платон, рассматривая её в широком социально значимом контексте. Так, например, процесс познания Платоном рассматривается не как самостоятельная рациональная деятельность, а как часть системы восприятия и понимания, убеждения и обучения, поскольку, несмотря на его теорию анамнеза, для познания математических идей необходима подсказка. Подобная проблема Сократа о «знаниевом незнании» обсуждалась в философской литературе под названием «парадокс Менона» [2]. В знаменитом диалоге «Менон» Платон устами Сократа утверждает, что человек, никогда не учившийся математике, с помощью хорошо подобранных вопросов может сам открывать математические истины. По существу, проблемный подход к обучению математике берет своё начало со времён Сократа, но в современной педагогике практика проблемного обучения стала разрабатываться во второй половине XX столетия как активная «технология обучения». Педагогический метод Сократа по сути является способом выявления проблемной ситуации. В его основе лежит лекция-беседа, когда лектор предлагает слушателям как верные, так и неверные проблемные идеи, которые принимаются или опровергаются в ходе беседы. Математические результаты, следуя Сократу, с точки зрения проблемного обучения, следует излагать не так, как они появились и были придуманы, а так, чтобы при надлежащей подготовке их мог придумать обучаемый под руководством опытного учителя.

Но чтобы воспользоваться педагогическим методом Сократа, необходимо все же заново переосмыслить закономерности развития математического знания и его основные методологические проблемы. Современные теории математики и так реально очень сложны. В практическом смысле философию современного математического образования можно определить, как самостоятельную область философского знания, предметом которой являются закономерности функционирования и развития в аспектах образования. Нет абсолютного понятия математической строгости, так как это понятие существенно зависит от области математических исследований, например, в чистой или прикладной математике они различны, поскольку в прикладной математике рациональные рассуждения, в отличие от дедуктивных рассуждений чистой математики, имеют немалое значение, что должно учитываться при преподавании математики. С точки зрения проблемного обучения математике «стерильная» последовательность определений, аксиом и теорем может иногда отталкивать.

Проблемно-ориентированное обучение даже при решении стандартных задач содержит различные методологические этапы проблемного обучения, включая в качестве необходимой компоненты выявление смысла математических понятий. Например, комплексное число по существу имеет разные смыслы в представлениях: (a, b), где пара действительных чисел не содержит идеи мнимой единицы; $a + ib$, но в этой сумме с мнимой единицей не просматривается идея вращения; ae^{ib}, где уже есть идея вращения, хотя все перечисленные смыслы по-разному характеризуют одну и ту же математическую структуру, а именно, поле комплексных чисел.

Хорошим примером синтеза математического знания и методологии является становление философии математического образования. В таком контексте заслуживает внимания проблемно-ориентированная позиция, рассматривающая предмет философии математического образования как синтез общефилософских и частных научных, прежде всего педагогических, подходов к изучению образования, базирующихся на новых методических подходах к изучению знания, точнее «знания о знании», то есть когнитивных наук, в комплексном построении образовательного процесса. Философская сущность проблемно-ориентированного обучения современной математике, предполагающего общее акцентированное внимание на проблемной задачной ситуации, отражает позицию работающих математиков и может быть методологически прояснена следующим образом: «Фактически приходится говорить о практических задачах и задачах теоретических, поставленных в рамках одной и той же системы. И одна и та же практическая задача заставляет нас строить разные формальные системы. И в одной из формальных реконструкций этой практической задачи можно доказать, что ответ нельзя получить, а в другой формальной реконструкции этой же практической задачи ответ можно получить» [3, с. 52]. Поэтому следует обратить особое внимание на взаимодействие когнитивных практик, для которых в системе математического образования ведущую обучающую роль играет целеполагающий выбор проблемно-ориентированных задач при достижении образовательной цели.

Проблемно-ориентированный подход, например, в обосновании математического анализа предполагает уход от жёсткой дихотомии «внутреннее — внешнее», так как современная математика обосновывается не сама по себе, а в рамках математических теорий. При «онтодидактическом» анализе математических доказательств формальная составляющая не должна превалировать и настаивать на окончательности формальных выводов, хотя математическое вычисление по сути неразрывно связано с конкретно выбранной формализацией математики. Так, например, в общем курсе математического анализа доказывается, что гармонический ряд формально расходится, поскольку его частичные суммы $S_n = 1{+}1/2{+}1/3{+}1/4{+}...{+}1/n$ неограниченно возрастают, так как сумма 2^k членов гармонического ряда больше чем $1 + k/2$. Но с содержательной точки зрения не обращают внимание на то, что этот ряд расходится очень и очень медленно, так как ещё Леонард Эйлер, изучавший свойства гармонического ряда, нашёл, что $S_{1000} \approx 7{,}84$, а $S_{1000000} \approx 14{,}39$. Даже с учётом компьютерных мощностей для того чтобы, например, частичная сумма гармонического ряда превысила 100, необходимо просуммировать около 10^{43} элементов ряда. Этот пример говорит о методологической роли проблемно-ориентированного обучения в реальной практике математических вычислений. Заметим также, что при использовании компьютера надо иметь в виду, что он не только может помочь выявить, но также и скрыть рассмотренный «вычислительный феномен» гармонического ряда. В частности, речь идет о том, что при компьютерном вычислении частичных сумм гармонического ряда получается не бесконечность, а все же некоторое число, которое, строго говоря, тем больше, чем меньше «машинный ноль».

А в чем собственно состоит проблемно-ориентированная задача в образовательном контексте? Её суть в том, что, если некоторые математические утверждения являются абсолютно очевидными для профессиональных математиков, то для студентов, изучающих курс высшей математики, они уже могут представлять серьёзные трудности, особенно для некоторых студентов с изначально слабой математической подготовкой. Следует также подчеркнуть специфику даже краткого курса высшей математики, состоящего не только из определений понятий и доказательств их свойств, но и заключающегося в понимании взаимосвязей между ними. В современном курсе высшей математики наряду с вопросами исследовательского плана могут быть поставлены проблемно-ориентированные задачи текущих исследований математиков, а также методологические задачи, направленные на выявление культурного потенциала математики [4]. Можно констатировать, что математические курсы вступили сейчас в пору своей методологической зрелости, поскольку стали уже не только предметом математических исследований и методологическим инструментарием многих применений и приложений, но и фундаментальной учебной дисциплиной, по сути указывающей на востребованность проблемно-ориентированного подхода к обучению высшей математике.

Проблемное обучение, явно использующее проблемно-ориентированное обоснование современного математического анализа, показывает, что для того, чтобы образование было полноценным, оно не должно сводиться только к формальному изучению математического аппарата, например, когда сознательно не пытаются обойти порочный круг, вкрадывающийся в традиционный вывод первого замечательного предела; то есть если $x \to 0$, то отношение $\sin(x)/x$ стремится к 1, традиционное доказательство которого начинается с установления при $0 < |x| < \pi/2$ неравенства $\sin|x| < |x| < \mathrm{tg}|x|$. Стандартное обоснование этих исходных неравенств основывается на интерпретации величины $|x|/2$ как площади сектора единичного круга, опирающегося на дугу длины $|x|$. «Данное обоснование (проводимое в рамках начальной части курса математического анализа) содержит классическую ошибку «порочного круга» ("circulus vitiosus"), которую многие видят, но предпочитают не замечать» [5, с. 34]. Заметим, что, в математическом анализе, в отличие от геометрии, тригонометрические функции рассматриваются как функции числового аргумента, а именно, в виде радианной меры угла, поэтому в выражении $\sin(x)/x$ речь идёт о синусе числа x как синусе угла в x радиан, где радиан, по определению, как единица измерения — это центральный угол, высекающий дугу равную радиусу окружности. Проблема состоит в следующем: чтобы посчитать площадь кругового сектора, надо воспользоваться тем же самым предельным соотношением, которое доказывается, а это и есть «порочный круг».

Заключение

Можно ли говорить о возможности синтеза разных методик проблемного обучения и принятой традиционной дидактической системы математического образования? Можно и необходимо, если проблемно-ориентированная система обучения математике сочетается с организацией творческой деятельности на всех видах лекционных и практических занятий. Для этого необходима интеграция или синтез методологических, методических и дидактических принципов проблемного обучения математике. Философская рефлексия над идеями и методами проблемно-ориентированного обучения математике позволяет считать, что такой синтез возможен при выполнении ряда условий. Хотя цели математического образования в философском контексте «математической образованности» подвижны во времени, основной целью математического образования в контексте методологического прагматизма должно стать воспитание умения математически исследовать практические задачи. Проблемная ситуация в проблемно-ориентированном обучении создаётся путём формулирования теоретических утверждений в виде задач, для решения которых необходим методологический прагматизм.

При проблемно-ориентированном обучении необходимо учитывать также то, что «нетривиальное решение» можно найти, чаще всего, «проходом через ошибку», поскольку выполнить все ограничения при реализации концепции обоснования порою возможно, лишь выходя за их пределы, компенсировав этим сделанные ошибки. Вспоминая знаменитые доклады Анри Пуанкаре и Давида Гильберта на первом и втором Международных математических конгрессах, в математике XX века можно, следуя им, выделить следующие две основные линии: «линию Пуанкаре», связанную с развитием математики в естественнонаучной области, и «линию Гильберта», ориентированную на внутреннее развитие математики. Но генезис развития математики позволяет сейчас говорить ещё и о третьей линии, которую можно назвать «проблемно-ориентированной». Поэтому можно заключить, что методологический прагматизм проблемно-ориентированного обучения математике имеет специфическую природу, что приводит к философскому переосмыслению таких методологически важных в философии современной математики понятий, как «объективность», «истинность», «рациональность», находя в них практически вполне допустимые в гносеологии компромиссные решения.

Литература

1. Зимина О.В. Проблемное обучение высшей математике в технических вузах // Математика в высшем образовании. 2006. № 4. С. 55–78.

2. Михайлова Н.В. Методологический парадокс Сократа в философии математического образования // Педагогика. 2016. № 4. С. 12–18.
3. Проблемно-ориентированный подход к науке: философия математики как концептуальный прагматизм. Новосибирск : Наука, 2001. 154 с.
4. Михайлова Н.В. Культурный потенциал математики в контексте философии математического образования // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Философия. 2016. № 1. С. 55–58.
5. Шведенко С.В. Две заметки по математическому анализу // Математическое образование. 2011. № 3–4. С. 34–37.

METHODOLOGICAL PRAGMATISM OF THE PROBLEM-ORIENTED TRAINING IN MATHEMATICS

N.V. Michailova
Ph.D. in Philosophy, Assosiate Professor, e-mail: michailova_mshrc@mail.ru

Belarusian National Technical University,
Minsk, Republic of Belarus

Abstract. Article considers problem-oriented training in the higher mathematics, problematic approach to specific objectives and the idea of methodological pragmatism. The methodological pragmatism is expressed in criticism of the idea of absolute justification of mathematics and the educational argument.

Keywords: methodological pragmatism, problem training, philosophy of mathematical education.

Дата поступления в редакцию: 25.08.2017