Р.И.Есьман

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООТДАЧИ ПОВЕРХНОСТИ КОКИЛЯ В УСЛОВИЯХ НЕСТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА

Расчет процессов теплопереноса между отливкой и кокилем предполагает знание коэффициента теплоотдачи на внутренней и внешней поверхностях металлической формы в процессах ее нагрева и охлаждения. Для расчета предположим, что процесс распространения тепла в кокиле носит одномерный характер и описывается дифференциальным уравнением теплопроводности Фурье-Кирхгофа с граничными условиями первого рода.

Осуществим пересчет граничных условий. По известным из опыта граничным условиям первого рода определим граничные условия третьего рода. Для решения задачи воспользуемся функцией Грина [I]. Построение функции Грина проведем с помощью δ - функции Дирака. Исходное уравнение для функции Грина при граничных условиях запишется в следующем виде:

$$L = -\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\delta(x-x',\ t-t'), \qquad (1)$$

$$G\big|_{x=0} = 0 \ ; \qquad G\big|_{x=l} = 0 \qquad (2)$$

Умножая обе части уравнения (I) на обратный оператор L^{-1}, найдем, что функция Грина может быть связана с δ - функцией с помощью следующего символического равенства:

$$G(x, x', t, t') = -L^{-1}\delta(x-x',\ t-t'). \qquad (3)$$

Для вычисления обратного оператора воспользуемся представлением δ - функции через систему ортонормированных функций. В случае конечного промежутка изменения переменной имеем для δ - функции разложение по собственным функциям

$$\delta(x-x')=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\,\varphi_n^*(x'), \tag{4}$$

где $\varphi_n(x)$ – нормированная собственная функция на данном промежутке изменения переменной;

$\varphi_n^*(x')$ – сопряженная с φ_n функцией.

Определяем функцию $\varphi_n^*(x')$ из решения задачи Штурма-Лиувилля. После некоторых преобразований, используя теорему Коши, получим окончательное выражение для функции Грина в виде

$$G=\frac{2}{l}\sum_{\mu}\cos\mu x\,\cos\mu x'\,e^{-a\mu_n^2(t-t')}. \tag{5}$$

С помощью функции Грина решение дифференциального уравнения Фурье-Кирхгофа (I) можно представить следующим образом:

$$T(x,t)=\int_0^t\varphi(t')\left.\frac{\partial G}{\partial x'}\right|_{x'=l}dt'=$$
$$=\frac{2a}{l}\int_0^l\varphi(t')\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\mu_n\cos\mu_n x\,e^{-\mu_n^2 a(t-t')}dt'. \tag{6}$$

В соответствии с граничными условиями третьего рода из выражения (6) получим

$$q(x,t)=\frac{\pi^2\lambda}{2l}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^2\int_0^{F_o}\varphi(t')e^{-\frac{(2n-1)^2}{4}\pi^2(F_o-F_o')}dF_o'. \tag{7}$$

Разделив обе части уравнения (7) на разность температур ($T_П$ - $T_С$) поверхности кокиля и среды, определим коэффициент теплоотдачи α. Для вычисления тепловых потоков и коэффициентов теплоотдачи согласно формуле (7) была составлена программа для ЦВМ.

Литература

1. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.-Л., 1933.