Л.М.Симонян, В.Е.Пигуль

РАСЧЕТ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПО РАЗЛИЧНЫМ ТЕОРИЯМ ПРОЧНОСТИ

В общих случаях напряженного состояния возникает необходимость использовать ту или иную теорию прочности, цель которой заключается в определении эквивалентного напряжения или, так называемого эквивалента рассматриваемого напряженного состояния. Эквивалентное (приведенное) напряжение представляет собой главное напряжение элемента, находящегося в условиях одноосного растяжения и его влияние на прочность материала должно быть равноценно рассматриваемому сложному напряженному состоянию.

В аналитическое выражение используемых теорий прочности наряду с тензорами напряжений, характеризующими напряженное состояние, должны входить тензорные величины, характеризующие прочностные свойства материала, особенности его технических свойств, различие пределов прочности при растяжении, сжатии и сдвиге. Первая попытка связать характер деформационного состояния в опасной точке с механическими свойствами материала привела к созданию теории наибольших линейных деформации.

Расчетная формула по этой теории имеет вид

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma], \qquad (I)$$

где σ_1, σ_2, σ_3 - главные напряжения,
μ - коэффициент Пуассона.

Предположение о том, что появление текучести материала является следствием влияния наибольшего касательного напряжения, привело к созданию теории наибольших касательных напряжений. Согласно этой теории пластическое состояние возникает при условии, когда максимальное касательное напряжение достигает постоянной величины

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = const. \qquad (2)$$

Рассматривая разрушение материала путем скольжения, Кулон заметил, что в области сжатия сопротивление скольжению осуществляется как сцеплением частиц тела между собой, так и силой трения. Максимальное касательное напряжение по Кулону, обеспечивающее начало скольжения

$$\tau_{max} = \tau_o - f\sigma , \qquad (3)$$

где f - коэффициент трения;
σ - нормальное напряжение на площади скольжения;
τ_o - напряжение сцепления.

Для материалов, по равному сопротивляющихся растяжению и сжатию, максимальное касательное напряжение τ_{max} является линейной функцией среднего нормального напряжения в плоскости расположения, т.е.

$$\tau_{max} = \sigma_1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_c}\sigma_3 \leq [\sigma]_p , \qquad (4)$$

где σ_p - предел прочности при растяжении;
σ_c - предел прочности при сжатии;
$[\sigma]_p$ - допускаемое напряжение при растяжении.

Стремление учесть одновременно влияние напряженного и деформированного состояния материала на его пластичность и прочность привело исследователей к разработке энергетических теорий.

По теории постоянной упругой энергии формоизменения (теория Губера-Мизеса-Генки) пластическое состояние или разрушение наступает тогда, когда удельная энергия формоизменений достигнет некоторого предельного значения.

Работа упругих сил формоизменения, отнесенная к единице объема тела, равна полупроизведению девиаторов напряжений и деформаций

$$A = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \sigma_{11}-\sigma_H & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22}-\sigma_H & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33}-\sigma_H \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}-\varepsilon_H & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}-\varepsilon_H & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}-\varepsilon_H \end{Bmatrix} , \qquad (5)$$

где как у симметричных тензоров

$$\tau_{21}=\tau_{12}\,;\ \tau_{32}=\tau_{23}\,;\ \tau_{31}=\tau_{13}\,;\ \varepsilon_{21}=\varepsilon_{12}\,,\ \varepsilon_{32}=\varepsilon_{23}\,,\ \varepsilon_{31}=\varepsilon_{13}\,.$$

$$\sigma_n=\frac{1}{3}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right),\ \varepsilon_n=\frac{1}{3}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}\right)$$

и соответственно

$$\tau_{12}=2\,\varepsilon_{12}G\,,$$

где G - модуль сдвига.

Уравнение (5) можно записать в виде:

$$A=\frac{1}{4(1+\mu)}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6\left(\tau_{12}^2+\tau_{23}^2+\tau_{13}^2\right)}\times \tag{5}$$
$$\times\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2+(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})^2+(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11})^2+6\left(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{23}^2+\varepsilon_{31}^2\right)}$$

В настоящее время принято выражать работу A через полупроизведение обобщенного напряжения на обобщенную деформацию

$$A=\frac{1}{2}\,\sigma_i\cdot\varepsilon_i\,;$$

$$\sigma_i=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6\left(\tau_{12}^2+\tau_{23}^2+\tau_{31}^2\right)}= \tag{6}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}\,\tau_n$$

$$\varepsilon_i=\frac{\sqrt{2}}{2(1+\mu)}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2+(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})^2+(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11})^2+6\left(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{23}^2+\varepsilon_{31}^2\right)}= \tag{7}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2(1+\mu)}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}=\frac{3}{2\sqrt{2}(1+\mu)}\,\gamma_n$$

τ_n - октаэдрическое касательное напряжение;

γ_n - угол сдвига на октаэдрических плоскостях.

Основным преимуществом σ_i и ε_i является то, что для девиаторов напряжений и деформаций

$$|| = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_n & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \sigma_n & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33}-\sigma_n & \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1-\sigma_n & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2-\sigma_n & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3-\sigma_n \end{Bmatrix}$$

$$\phi = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}-\varepsilon_{n} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}-\varepsilon_{n} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}-\varepsilon_{n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{Bmatrix}$$

Тогда интенсивности σ_i и ε_i будут

$$\sigma_i = \sqrt{(\sigma_1-\sigma_n)^2+(\sigma_2-\sigma_n)^2+(\sigma_3-\sigma_n)^2}\,; \tag{8}$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}\,. \tag{9}$$

Если исключить третью составляющую каждого девиатора, то получим

$$\sigma_i = \sqrt{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_n)^2+(\sigma_2-\sigma_n)^2+(\sigma_1-\sigma_n)(\sigma_2-\sigma_n)}\,; \tag{10}$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_1\varepsilon_2}\,. \tag{11}$$

Результаты экспериментов показывают, что теория Губера-Мизеса-Генки удовлетворительно фиксирует начало пластических деформаций для многих металлов и сплавов.

Согласно теории Мора разрушение прочности материала происходит либо при достижении касательными напряжениями τ некоторой критической величины, зависящей от нормальных напряжений σ, которые действуют по тем же плоскостям скольжения, либо когда наибольшее растягивающее нормальное напряжение достигает предельного значения.

Условие прочности согласно этой теории (в предположении прямолинейности огибающей кругов Мора) можно выразить следующим образом:

$$\sigma_1-\sigma_3 = 2\tau_T-\lambda(\sigma_1+\sigma_3)\,, \tag{12}$$

где λ – коэффициент, свойственный данному материалу и характеризующий влияние нормальных напряжений на условие пластичности;

τ_T – предел текучести при сдвиге.

Эквивалентные напряжения по теории прочности Мора

$$\sigma_{экв} = \sigma_3 - \nu\sigma_1 \leq [\sigma]_p , \qquad (13)$$

где

$$\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$$

σ_p – предел прочности при растяжении;

σ_c – предел прочности при сжатии.

Однако теория прочности Мора обладает целым рядом недостатков, основными из которых являются:

а) влияние промежуточного главного напряжения σ_2 не учитывается, хотя прочность зависит от всех трех главных напряжений;

б) получение предельной огибающей для каждого материала весьма затруднительно и связано с постановкой весьма сложных опытов;

в) невозможно в ряде случаев выразить $\sigma_{экв}$ одной аналитической зависимостью для всех точек напряженного тела.

С целью устранения недостатков в теории прочности Мора, целым рядом авторов были предложены предельные условия более общего вида (Баландин П.П. [I] , Ягн Ю.И. [6]).

Сущность теории прочности П.П.Баландина [I] в том, что предельное значение удельной потенциальной энергии формоизменения является функцией шарового тензора, причем в первом приближении эта функция принята линейной.

Эквивалентное напряжение по этой теории прочности

$$\sigma_{экв} = \frac{1-\nu}{2} V + \sqrt{\left(\frac{1-\nu}{2}\right)^2 V^2 + \frac{1}{2}\nu U} , \qquad (15)$$

где

$$U = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 ;$$

$$V = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z ;$$

$$\nu = \frac{\sigma_p}{\sigma_c} .$$

Предел прочности на сдвиг выражается через $\tau_в = \sqrt{\frac{\sigma_p \sigma_c}{3}}$.

При $\sigma_p = \sigma_c$ критерий П.П.Баландина также сводится к критерию удельной энергии формоизменения, согласно которой эквивалентные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{экв.} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}. \qquad (15)$$

Ю.И.Ягн [6] исходя из геометрического представления условий прочности в пространстве напряжений, предлагает один из самых общих видов поверхностей прочности, определяемых в виде полинома второй степени

$$U + AV^2 + BV = C,$$

$$A = \frac{6\tau_в^2 - 2\sigma_p\sigma_c}{\sigma_p\sigma_c}; \quad B = \frac{6\tau_в^2(\sigma_c-\sigma_p)}{\sigma_p\sigma_c}; \quad C = 6\tau_в^2 .$$

$$\sigma_{экв} = -\frac{\sigma_c-\sigma_p}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_c-\sigma_p}{2}\right)^2 + \frac{\sigma_c\sigma_p}{6\tau_в^2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}$$

$$\overline{\left(1-\frac{\sigma_c\sigma_p}{3\tau_в^2}\right)(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2+(\sigma_c-\sigma_p)(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)} \leq \sigma_p \qquad (16)$$

Теория прочности И.Н.Миролюбова [3] представляет собой квадратичную функцию среднего напряжения и записывается в виде полинома

$$\frac{(\sigma_p+\sigma_c)^2}{8\sigma_p\sigma_c}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2+6(\tau_{12}^2+\tau_{13}^2+\tau_{23}^2)\right] -$$
$$-\frac{(\sigma_c-\sigma_p)^2}{4\sigma_p\sigma_c}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2+(\sigma_c-\sigma_p)(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \sigma_p\sigma_c , \qquad (17)$$

В этом случае предел прочности на сдвиг

$$\tau_в = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\sigma_p\sigma_c}{\sigma_p+\sigma_c}} .$$

Формула эквивалентности, соответствующая данному критерию прочности

$$\sigma_{экв} = \frac{1-\nu}{2}V + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\frac{1}{2}U} \qquad (18)$$

При $\sigma_p = \sigma_c$ критерий И.Н.Миролюбова приводится к критерию удельной энергии формоизменения. Определенный интерес при расчетах на прочность представляет теория прочности Ф.А.Опейко [4], которая является дальнейшим развитием теории прочности Мора.

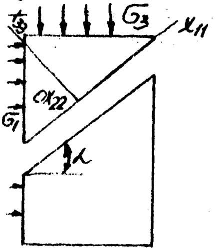

Рис.I.

Согласно этой теории условие достаточной прочности имеет вид:

$$\sigma_3 - \sigma_1 < 2\sqrt{1+f^2}(\tau+\tau_0) + f\left[(\sqrt{1+f^2}-f)\sigma_3 + (\sqrt{1+f^2}+f)\sigma_1\right] \quad (19)$$

$$\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1 > 0 ;$$

$$|\sigma_3 - \sigma_1| \le 2(\tau+\tau_0) \qquad |\sigma|_1 \le \sigma_2$$

$$\sigma_{33} \le 0 ; \quad \sigma_1 < 0 ,$$

где σ_1, σ_3 - фактические главные напряжения;

τ - допустимое тангенциальное напряжение;

τ_0 - допустимое тангенциальное напряжение сцепления;

f - коэффициент трения;

σ_{33} - нормальные к площадке разрушения напряжения.

В формулах Ф.А.Опейко

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+f^2}-f}{\sqrt{1+f^2}}(\sigma_3+\sigma_1) + \frac{f}{\sqrt{1+f}}\,\sigma_1 > 0 ,$$

$$\sigma_3 + \sigma_1 > \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}(\sigma_3-\sigma_1), \ \sigma_3 > 0; \ \sigma_3+\sigma_1 < \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}(\sigma_3-\sigma_1), \ \sigma_{33} \le 0.$$

На основании этой теории прочности предложена формула для определения эквивалентного напряжения

$$\sigma_{экв} = \frac{\sigma_3-\sigma_1}{\sqrt{1+K^2f^2}} - f\,\frac{(\sqrt{1+K^2f^2}-Kf)\sigma_3 + (\sqrt{1+K^2f^2}+Kf)\sigma_1}{\sqrt{1+K^2f}} \le 2([\tau]+[\tau_0]), \quad (20)$$

где $K = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_3-\sigma_1}+\left(\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_3-\sigma_1}\right)^2}}$ коэффициент, характеризующий соотношение главных напряжений и меняющийся в пределах от I до $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Анализ рассмотренных теорий прочности позволяет сделать вывод, что эквивалетное напряжение, определяемое по [4] полнее учитывает особенности механических характеристик материала при различных нагружениях.

Выполненные расчеты напряженного состояния по теории [4] и результаты проведенных экспериментальных исследований при контактных нагружениях хорошо согласуются.

Эквивалентные напряжения определяемые по [4] могут быть успешно использовано для оценки и расчетов контактной усталостной прочности зубчатых передач, подшипников качения и некоторых других деталей.

Литература

1. Баландин П.П. Вестник инженеров и техников, 1938, 3.

2. Гольденблат И.И., Карпов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М., Изд-во "Металлургия". 1968.

3. Миролюбов И.Н. Тр.Ленингр. технологического института, 1953, 25.

4. Одейко Ф.А. Теория прочности. Изд-во МВССи ПО БССР, Минск, 1961.

5. Филоненко-Бородич М.М. Механические теории прочности. Изд-во Московского университета, 1961.

6. Ягн Ю.И. Вестник инженеров и техников, 1931, 6.