К РАСЧЕТУ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Б.З.Поляков, А.Я.Кулик, Б.В.Бабушкин

При расчете остаточных и действующих при статическом и циклическом нагружениях напряжений в композитных материалах необходимо в ряде случаев учитывать различие в модулях упругости составляющих. Например, борированный стальной плоский образец состоит из стальной сердцевины площадью F_c и модулем упругости E_c, равным $2 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$, и поверхностного слоя боридов площадью F_δ с модулем упругости E_δ (обозначим E_c/E_δ через n).

Рассчитаем модуль упругости борированного образца.

I. Растяжение (рис. I, в).

Нагрузка распределяется между слоем боридов P_δ и сердцевиной P_c.

$$P = P_\delta + P_c \text{ , отсюда } P = \varepsilon(E_\delta F_\delta + E_c F_c)$$

или $\dfrac{P}{\varepsilon F} = E_\delta \dfrac{F_\delta}{F} + E_0 \dfrac{F_c}{F}$.

Обозначим $\frac{F_c}{F} = 1 - \frac{2h_c}{h}$ через a_p, тогда $\frac{F_\delta}{F} = 1 - a_p$ и модуль упругости образца

$$E_{np} = \frac{P}{\varepsilon F} = E_c a_p + E_\delta (1 - a_p). \qquad (I)$$

2. Консольный изгиб (рис. I,б).

Изгибающий момент распределяется между слоем боридов M_δ и сердцевиной M_c : $M = M_\delta + M_c$.

Учитывая, что

$$M_\delta = \int_{F_\delta} \sigma_\delta z\, dF_\delta; \quad M_c = \int_{F_c} \sigma_c z\, dF_c; \quad \sigma_\delta = \frac{z}{\rho} E_\delta; \quad \sigma_c = \frac{z}{\rho} E_c,$$

получим:

$$E_{np} J = M\rho = E_\delta J_\delta + E_c J_c, \qquad (2)$$

где ρ – радиус кривизны;

$J, J_б, J_c$ – осевые моменты инерции образца, слоя боридов и сердцевины соответственно.

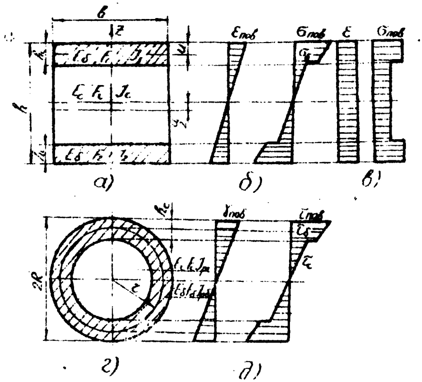

Рис. I.

Поперечное сечение плоского образца (а), относительная деформация и напряжения при изгибе (б) и растяжении (в).
Поперечное сечение круглого образца (г), относительный сдвиг и напряжения (д) при кручении.

Поскольку $J = \frac{bh^3}{12}$; $J_c = \frac{b(h-2h_c)^3}{12}$; $J_б = \frac{bh^3}{12} - \frac{b(h-2h_c)^3}{12}$

и обозначив $(1 - 2h_c/h)^3$ через a_u, и учитывая, что $\rho = \frac{h}{2\varepsilon_{пов}}$, получим

$$E_{пр} = \frac{Mh}{2J\varepsilon_{пов}} = \sigma_{пр}\frac{1}{\varepsilon_{пов}} = E_c a_u + E_б(1-a_u) \qquad (3)$$

3. Кручение (рис. I,г,д).

Крутящий момент распределяется между слоем боридов и сердцевиной

$$M = M_б + M_c .$$

Учитывая, что

$$M_б = \int_{F_б} \tau_б r\,dF_б; \quad M_c = \int_{F_c} \tau_c \cdot r\,dF_c; \quad \tau_б = \frac{\varphi r}{l} G_б; \quad \tau_c = \frac{\varphi r}{l} G_c ,$$

получим

$$G_{пр} J_p = \frac{Ml}{\varphi} = G_c J_{p_c} + G_б J_{p_б} ,$$

где φ – угол закручивания образцов на участке длиной l ; $J_p, J_{p_c}, J_{p_б}$ – полярные моменты образца, сердцевины и слоя соответственно.

Поскольку
$$J_p = \frac{\pi R^4}{2}; \quad J_{p_c} = \frac{\pi (R-h_c)^4}{2}; \quad J_{p_б} = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi (R-h_c)^4}{2}$$
и обозначив $\left(1-\frac{h_c}{R}\right)^4$ через $a_к$, и учитывая, что $\tau_{пр} = \frac{M_r}{J_p}$ получим:
$$G_{пр} = \frac{Mr}{J_p \gamma_{пов}} = G_c a_к + G_б (1-a_к). \qquad (4)$$

Действующие напряжения на поверхности образца при растяжении рассчитываются из условия $\varepsilon_{пов} = \frac{\sigma_{пов}}{E_б} = \frac{\sigma_{пр}}{E_{пр}}$.

Тогда $\sigma_{пов} = \sigma_{пр} \frac{E_б}{E_{пр}}$ и с учетом ф-лы (1)
$$\sigma_{пов}' = \sigma_{пр} \frac{1}{1-a_p(1-n)} . \qquad (5)$$

Для консольного изгиба и кручения аналогичный расчет дает:
$$\sigma_{пов} = \sigma_{пр} \frac{1}{1-a_u(1-n)} ; \qquad (6)$$
$$\tau_{пов} = \tau_{пр} \frac{1}{1-a_к(1-n)} . \qquad (7)$$

Выражение (3) необходимо учитывать при расчете остаточных напряжений в борированных сталях. Для плоского образца из однородного материала при удалении поверхностного слоя расчет остаточных напряжений производится по формуле [I]:
$$\sigma = -\frac{1}{2} E(h-u) \frac{d\varepsilon}{du} + 2E\,\varepsilon_{(u)} - 3E(h-u) \int_0^u \frac{\varepsilon_{(u)}}{(h-u)^2}\, du , \qquad (8)$$
где u – толщина удаленного слоя.

Для борирования образца в (8) необходимо вместо E использовать $E_{пр}$ из (2). Однако $E_{пр}$ в процессе удаления слоя изменяется.

Смещение нейтральной оси в процессе удаления слоев вычисляется по уравнению [I]:
$$e = \frac{h}{2} - \frac{\int_F E z\, dF}{\int_F E\, dF} . \qquad (9)$$

Если для упрощения расчетов принять смещение нейтральной оси равным $\frac{u}{2}$ (вместо смещения нейтральной оси e по уравнению (9), то ошибка в определении $E_{пр}$ при $h_c \leq 0{,}2$ мм и $h \geq 1{,}5$ мм составит не более 5%.

Тогда выражение (2) принимает вид:

$$E_{пр}J = E_\delta J_1 + E_c J_c + E_\delta J_2,$$

$$E_{пр}\int_F z^2 dF = E_\delta \int_{F_1} z^2 dF_1 + E_c \int_{F_c} z^2 dF_c + E_\delta \int_{F_2} z^2 dF_2,$$

$$2E_{пр}\int_0^{\frac{h-u}{2}} z^2 b\,dz = E_\delta \int_{\frac{h-2h_c+u}{2}}^{\frac{h-u}{2}} z^2 b\,dz + E_c \int_{-\frac{h-2h_c-u}{2}}^{\frac{h-2h_c+u}{2}} z^2 b\,dz + E_\delta \int_{\frac{h-2h_c-u}{2}}^{\frac{h-u}{2}} z^2 b\,dz.$$

В результате интегрирования получаем:

$$2E_{пр} = E_\delta\left[1-\left(\frac{h-2h_c+u}{h-u}\right)^3\right] + E_c\left[\left(\frac{h-2h_c+u}{h-u}\right)^3+\left(\frac{h-2h_c-u}{h-u}\right)^3\right] + E_\delta\left[1-\left(\frac{h-2h_c-u}{h-u}\right)^3\right].$$

Обозначив $\left(\frac{h-2h_c-u}{h-u}\right)^3$ через α и $\left(\frac{h-2h_c+u}{h-u}\right)^3$ через β, получим

$$E_{пр} = E_c\frac{\alpha+\beta}{2} + E_\delta\left(1-\frac{\alpha+\beta}{2}\right). \qquad (10)$$

Следовательно, уравнения (5,6,7) дают возможность рассчитывать действующие напряжения при статическом и циклическом нагружениях растяжением, изгибом и кручением. В частном случае при изгибе консольнозащемленного образца, борированного на глубину $\frac{h_c}{h} = 0{,}1$, ошибка в определении действующих напряжений по формуле $\sigma_{пр} = \frac{6Pl}{bh^2}$ составит 17% от истинного значения (при $E_\delta = 3\cdot10^4\,\frac{кг}{мм^2}$); при растяжении – по формуле $\sigma_{пр} = \frac{P}{F}$ – 32%; при кручении – по формуле $\tau_{пр} = \frac{Mr}{J_p}$ при $\frac{h_c}{R} = 0{,}2$ – 10%.

Литература

1. И. А. Биргер. Остаточные напряжения. М., Машгиз, 1963.