

В.Н. БОБРОВ, В.А. ПУМПУР,  
П.В. СЕВАСТЬЯНОВ, канд. техн. наук  
(Могилевское отделение ФТИ АН БССР)

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕСИММЕТРИЧНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ ВАЛКОВ-КРИСТАЛЛИЗАТОРОВ

Несимметричные тепловые условия в валках-кристаллизаторах могут реализоваться при использовании пары валков с различными скоростями вращения, различными условиями их охлаждения. Наиболее сложный случай теплообмена реализуется при бесслитковой прокатке биметаллических лент (рис.1). Осевая несимметричность затвердевания металла в зоне А и охлаждения его в зоне деформации Б обуславливается наличием подложки 2 и неодинаковых условий охлаждения валков 3 и 4 с внутренней поверхности. Невозможность во многих случаях прямого измерения таких важных в технологическом отношении параметров, как форма лунки жидкого металла, протяженность зон намораживания, пластической деформации и ряда других, делают особенно актуальными вопросы математического моделирования этого процесса.

Для построения такой модели предположим, что теплообмен между расгущей коркой 1 с подложкой 2 и валком 4 осуществляется в соответствии с граничными условиями третьего рода, которые определяются коэффициентами контактного теплообмена. Граничные условия третьего рода принимаем на поверхности контакта подложки 2 и валка 3, а также на внутренних поверхностях валков. Учитывая незначительность толщины намержшей корки, примем в ней линейное распределение температур [1]. Процессы бесслитковой прокатки обычно протекают с достаточно высокими скоростями, обеспечивающими числа  $Re > 10$ , что позволяет при построении модели пренебречь теплопроводностью вдоль направления прокатки [2].

Задача решалась как квазистационарная в неподвижной системе координат.

Решение задачи намораживания в зоне А проводилось с введением эффективной теплоты кристаллизации  $L_3 = L + c(T_z - T_k)$  [1], где  $L$  — истинная скрытая теплота плавления;  $c$  — удельная теплоемкость;  $T_z$  и  $T_k$  — температура заливаемого металла и его кристаллизации.

С учетом принятых допущений процесс затвердевания описывается уравнениями:

$$\lambda_1 \frac{T_k - T_1}{\xi(\varphi)} = \alpha_{2,4} (T_1 - T_{2,4}); \quad (1)$$

$$\lambda_1 \frac{T_k - T_1}{\xi(\varphi)} = \rho \omega L_3 \frac{d\xi}{d\varphi}, \quad (2)$$

где  $\xi(\varphi)$  — толщина корки;  $\omega$  — угловая скорость валков;  $\rho$  — плотность;  $T_{2,4}$  — температура поверхностей подложки и валка;  $\lambda_1$  — удельная теплопроводность;  $\alpha_{2,4}$  — коэффициенты теплообмена изделия с подложкой и валком.

Система (1), (2) хорошо описывает энергетический баланс в случае непрерывного процесса бесслитковой прокатки, что обеспечивается введением  $L_3$ .

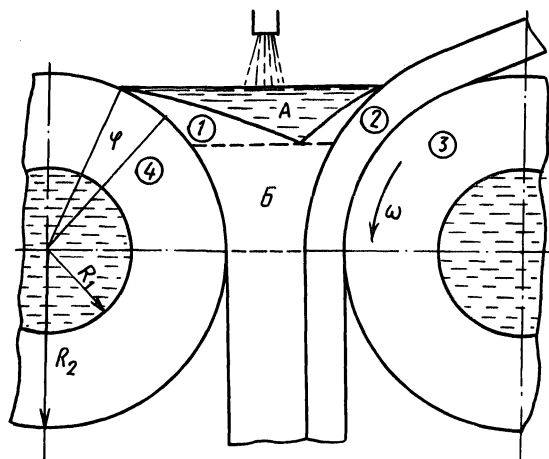


Рис. 1. Схема процесса беслитковой прокатки биметалла.

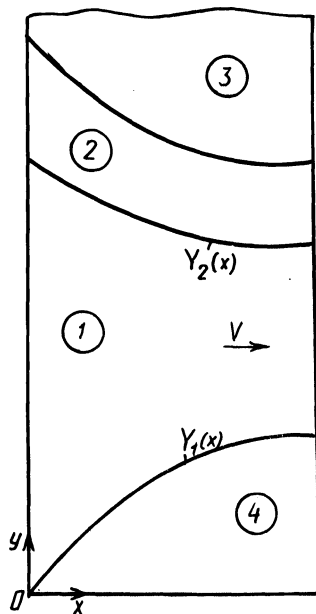


Рис. 2. Геометрия области пластической деформации:

$Y_1(x)$ ,  $Y_2(x)$  – уравнения поверхностей, ограничивающих область пластической деформации.

Уравнения в валках и подложке при рассмотрении теплообмена в зонах А и Б имеют общую форму:

$$\omega/a_i \frac{\partial T_i}{\partial \varphi_i} = 1/r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) \quad (i = 2, 3, 4), \quad (3)$$

где  $a_i$  – температуропроводность.

Система (1) ... (3) замыкается граничными условиями третьего рода на контактных и охлаждаемых поверхностях.

Решение задачи в зоне А осуществляется с помощью неявных разностных схем для уравнений (3) и схемы Эйлера для (2). Решение задачи в зоне А обеспечивает начальные условия для решения задачи в зоне Б.

Решение контактной задачи теплопроводности четырех тел в зоне Б осложняется геометрией очага деформации. Как правило, решение задач такого рода проводят с помощью методов конечных или граничных элементов, эффективность использования которых для уравнений параболического типа ниже, чем для методов конечных разностей [3]. Уравнение теплопроводности в декартовой системе координат для зоны Б (рис. 2) принимает вид

$$V/a_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + W, \quad (4)$$

где  $W$  – тепловыделение за счет пластической деформации в зоне Б.

Для устранения сложностей, связанных с геометрией зоны Б, вводились новые координаты:

$$\eta = \frac{Y - Y_1(x)}{Y_2(x) - Y_1(x)}, \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

Их введение позволило отобразить зону Б в область прямоугольной формы.

Уравнение (4) при этом принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{V}{a_1} \frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{1}{(Y_2 - Y_1)} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \eta^2} + \frac{V}{a_1 (Y_2 - Y_1)} \left( \frac{dY_1}{dx} (1 - \eta) + \right. \\ \left. + \frac{dY_2}{dx} \eta \right) \frac{\partial T_1}{\partial \eta} + W. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение сопряженной системы уравнений (3) и (5) с учетом граничных условий на контактных поверхностях проводилось с помощью неявных разностных схем.

Разработанная математическая модель реализована в виде набора прикладных программ для ЕС ЭВМ, обеспечивающих решение тепловых задач в валках, подложке, растущей корке, зоне деформации. Набор программ содержит также подпрограммы, обеспечивающие сопряжение решений типовых задач в контактирующих телах в соответствии с граничными условиями.

Математическая модель теплообмена в валках-кристаллизаторах обладает достаточной общностью и при незначительных модификациях может быть использована в исследовании процессов обычной симметричной и несимметричной прокатки, прокатки биметаллов и материалов с покрытиями.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вейник А.И. Теория затвердевания отливки. – М.: Машгиз, 1960. – 436 с.
2. Дилгенский Н.В. Асимптотические расчеты тепловых режимов технологических процессов механической обработки металлов и сварки: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – Киев, 1973. – 380 с.
3. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1981. – 216 с.

УДК 621.746.6

Э.Ф. БАРАНОВСКИЙ, канд. техн. наук,  
В.Н. БОБРОВ, В.А. ПУМПУР, П.В. СЕВАСТЬЯНОВ,  
канд. техн. наук (Могилевское отделение  
ФТИ АН БССР)

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ МЕТАЛЛА, АРМИРОВАННОГО ПРОВОЛОКОЙ

Одной из проблем при построении математической модели затвердевания металлов, армированных проволокой, является учет взаимодействия фронтов затвердевания, появление которых обусловлено намораживанием на состав-