Зазор между слитком и изложницей в различные моменты времени определялся как сумма термических расширений – сжатий внутренней поверхности изложницы и корки слитка.

После стрипперования и выбивки слитка из изложницы задача его последующего нагрева также описывается исходным уравнением (1). Условие на границе слиток – среда при конвективно-радиационном теплообмене имеет вид

$$-\lambda_1(T)\frac{\partial T_1(x,\tau)}{\partial x}=\alpha_{\text{к}}^{\text{печ}}(T_{\text{печ}}-T_1)+\sigma_{\text{пр}}^{\text{печ}}(T_{\text{печ}}^4-T_1^4), \tag{7}$$

где $T_{\text{печ}}$ – температура печи; $\alpha_{\text{к}}^{\text{печ}}$ – коэффициент теплообмена конвекцией; $\sigma_{\text{пр}}^{\text{печ}}$ – приведенный коэффициент теплообмена излучением в печи.

Начальное распределение температур в момент посада слитка в колодец соответствует конечному в момент его выбивки из изложницы.

В качестве математического аппарата при решении системы уравнений (1)...(5) использовали метод конечных разностей по неявной схеме Кранка–Никольсона. Решение полученных линейных алгебраических уравнений осуществляли методом прогонки.

В соответствии с разработанным алгоритмом выполнен расчет затвердевания и нагрева слитка при следующих исходных данных: $R = 0{,}35$ м; толщина изложницы – 0,16 м; сталь 20, $T_{\text{лик}} = 1512$ °С; $T_{\text{сол}} = 1487$ °С; $r = 290 \times 10^3$ Дж/кг. В данном расчете принималось, что в момент стрипперования слиток полностью затвердевший.

На рис. 1 приведена блок-схема расчета процесса затвердевания, охлаждения и нагрева слитка.

Расчет осуществлялся на ЭЦВМ СМ-1600.

ЛИТЕРАТУРА

1. Раддл Р.У. Затвердевание отливок. – М.: Машгиз, 1960. – 391 с. 2. Самойлович Ю.А. Формирование слитка. – М.: Металлургия, 1977. – 159 с. 3. Шмрга Л. Затвердевание и кристаллизация стальных слитков. – М.: Металлургия, 1985. – 248 с. 4. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Наука, 1975. – 227 с. 5. Гольдфарб Э.М. Теплотехника металлургических процессов. – М.: Металлургия, 1967. – 220 с. 6. Есьман Р.И., Жмакин Н.П., Шуб Л.И. Расчеты процессов литья. – Минск: Выш. шк., 1977. – 261 с. 7. Маковский В.А. Эмпирические формулы для выражения температурной зависимости теплофизических свойств стали // Сталь. – 1972. – № 1. – С. 87–89.

УДК 536.02:621.24:669.046

В.И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, канд. техн. наук,
В.А. ГУГЛЯ, Т.Ю. ГУГЛЯ, Н.Л. МАНДЕЛЬ (БПИ)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУР, НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРЕВЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СЛИТКОВ И ЗАГОТОВОК

Вопросы математического моделирования тепловых процессов в массивных цилиндрических слитках и заготовках, предназначенных для горячего деформирования на прошивном или прокатном станах, освещены во многих литературных источниках [1–4].

Так, в монографии [1] моделирование температурного поля одного цилиндра рассматривается без учета влияния на процесс теплообмена близлежащих цилиндров. Такое допущение возможно в тех случаях, когда цилиндрические слитки и заготовки обладают значительно меньшим поперечным размером D по отношению к длине l, а также при больших значениях отношения межосевого расстояния близлежащих цилиндров к диаметру D (например, $S/D \geqslant 4$).

Так как на практике данное отношение $S/D \geqslant 4$ обычно не выполнимо, то расположение коротких цилиндров в печи оказывает некоторое влияние на распределение граничного теплового потока, что отражено в [2–4].

Совершенствование технологии тепловой обработки массивных цилиндрических изделий при их несимметричном нагреве остается весьма актуальной проблемой. Первоочередной задачей является изучение тепловых процессов, несоблюдение которых приводит к смещению теплового центра после прошивки цилиндрического слитка, разнотолщинности труб, осей, а иногда – к их трещинообразованию.

В работе Н.Ю.Тайца [5] отмечено, что правильное прогнозирование распределения температурных полей в цилиндре перед его прошивкой приобретает особо важное значение при освоении специальных сталей и сплавов. В связи с этим, по мнению автора, первостепенным становится выбор метода решения уравнения теплопроводности при корректном описании условий теплообмена на поверхности цилиндра.

На первом этапе решения рассматриваемого уравнения разрабатывается общий математический подход к моделированию полей температур, напряжений и деформаций при несимметричном нагреве цилиндрических слитков и заготовок. При этом возможен ряд допущений:

1) материал заготовок (слитков) однородный, изотропный;

2) температурное поле слитка не зависит от его напряженно-деформированного состояния и может быть получено путем решения задачи теплопроводности;

3) общий тензор деформаций определяется как суперпозиция упругого, вязкого и пластического тензоров деформаций;

4) влияние термического сопротивления окалины на процесс внутреннего теплопоглощения не учитывается.

Исходя из этого, представим решение квазистатической задачи термопрочности при несимметричном радиационно-конвективном нагреве цилиндрических слитков и заготовок в виде решения двух несвязанных задач:

определение полей температур при решении задачи нестационарной теплопроводности с учетом теплофизических нелинейностей;

определение по известному полю температур термовязко-пластического напряженно-деформированного состояния массивного слитка.

В тепловых расчетах, конечной целью которых является детальный анализ процессов внутреннего теплопоглощения с последующими расчетами температурных напряжений и деформаций, приемлем подход, изложенный в [3, 4], т. е. поверхностный тепловой поток моделируется тригонометрическим полиномом вида

$$q(\varphi;\ S/D) = q_{\max} \sum_{i=0}^{6} a_i \cos i\varphi\,. \tag{1}$$

Наличие осевой симметрии цилиндрических слитков, а также характер теплообмена, согласно (1), позволяют использовать для математического описания температурных полей плоскую постановку задачи теплопроводности в цилиндрических координатах для системы дифференциальных уравнений:

$$C(T, L)\,\rho\,(T, L)\,\frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda(T, L)\,\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right); \tag{2}$$

$$\lambda(T, L)\,\frac{\partial T}{\partial r} = \sigma_{\text{прив}}\,(\varphi, S/D)\,\left[\left(\frac{T_{\text{с}}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{\text{м}}}{100}\right)^4\right] + \alpha(\varphi, S/D)(T_{\text{с}} - T_{\text{м}}); \tag{3}$$

$$T_0 = T(r, \varphi, 0); \tag{4}$$

$$T = T(r, \varphi; \tau);\quad 0 < r < R;\quad 0 < \varphi < \pi;\quad \tau > 0, \tag{5}$$

где $C(T, L)$; $\rho(T, L)$; $\lambda(T, L)$ – соответственно теплоемкость, плотность, коэффициент теплопроводности материала цилиндра: $\sigma_{\text{прив}}(\varphi, S/D)$; $\alpha(\varphi, S/D)$ – коэффициенты внешнего теплообмена; L – параметр химического состава заданной марки стали.

Зависимости теплофизических свойств стального цилиндра в соответствии с рекомендациями Г.Велка [6] представлены полиномом

$$\Omega(T, L) = \sum_{i=0}^{m}\ \sum_{k=0}^{n} b_{ik} T^i L^k\,. \tag{6}$$

Следует заметить, что коэффициенты b_{ik} выбираются с таким условием, чтобы отклонения между всеми результатами измерений и соответствующими расчетными значениями найденных параметров не превышали бы установленного предела. Использование полинома (6) позволяет создать компактную нормативную базу для вычисления теплофизических свойств углеродистых сталей, варьируя их химический состав.

Выражения (2)...(5) образуют замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений теплопроводности, решение которой может быть осуществлено конечно-разностными методами [3, 4].

В проведенной нами работе был предпринят более рациональный подход к решению так называемых несвязных задач теплопроводности и термопрочности. Он основывался на использовании в качестве математического аппарата метода конечных элементов (МКЭ) [7], который по сравнению с другими численными методами обладает рядом существенных преимуществ, особенно при решении пространственных задач теории термоупругости и термопластичности.

В соответствии с МКЭ решение краевой задачи теории теплопроводности (2) в совокупности с условиями (3)...(5) тождественно нахождению минимума некоторого функционала:

$$I_1 = \int_S \left\{\frac{1}{2}\lambda(TL)\,\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right] + C(T, L)\,\rho\,(TL)\,\frac{\partial T}{\partial \tau}\,T\right\} dS + $$

$$+ \int_{\Gamma} \left\{h\,(\varphi, S/D)\,\left[\frac{1}{2}\,T - T_{\text{м}}\right] T\right\} d\Gamma\,, \tag{7}$$

где $h = \alpha(\varphi, S/D) + \sigma_{прив}(\varphi, S/D) \left[\left(\frac{T_с}{100}\right) + \left(\frac{T_м}{100}\right) \right] \left[\left(\frac{T_с}{100}\right)^2 + \left(\frac{T_м}{100}\right)^2 \right].$

Для удобства реализации МКЭ функционал (7) представлен в декартовой системе координат.

Минимизировав функционал (7) и применив для дискретизации его в области кругового сечения цилиндра МКЭ, а во времени – неявную конечно-разностную схему Кранка–Никольсона, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно поля температур:

$$\left[\frac{1}{2}[A_1]_{\tau+\Delta\tau} + \frac{1}{\Delta\tau}[A_2]_{\tau+\Delta\tau} \right] \left\{T\right\}_{\tau+\Delta\tau} + \left[\frac{1}{2}[A_1]_\tau - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Delta\tau}[A_2]_\tau \right] \left\{T\right\}_\tau + \frac{1}{2}[A_3]_\tau + \frac{1}{2}[A_3]_{\tau+\Delta\tau} = 0, \qquad (8)$$

где

$$[A_1] = \Sigma[a_1]^b; \quad [A_2] = \Sigma[a_2]^b; \quad [A_3] = \Sigma[a_3]^l;$$

$$[a_1]^l = \int_{S^l} [N]^{l^T} [\lambda]^l [B]^l dS + \int_{\Gamma^l} [N]^{l^T} [h]^l [N]^l d\Gamma;$$

$$[a_2]^l = \int_{S^l} [N]^{l^T} [C\rho]^l [N]^l dS; \quad [a_3]^l = -\int_{\Gamma^l} hT_м [N]^{l^T} d\Gamma;$$

$$[B]^l = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} N_j^l\right], \; i = 1,2;$$

$$\left\{T^l\right\} = [N]^l \left\{T\right\}.$$

В данных выражениях $[N]^l$ – функции формы конечного элемента; $\{T\}$ – глобальный вектор узловых температур.

Итерационный процесс решения системы уравнений (8) осуществляется следующим образом. На каждом поточно-временно́м шаге сначала составляются выражения, обозначенные индексом τ. При этом используются значения C, ρ, λ, α, $\sigma_{прив}$, $T_м$, соответствующие температурному полю $\{T\}$ и времени τ. Эти выражения остаются неизменными на протяжении всего расчетно-временно́го интервала. В дальнейшем выполняются следующие математические процедуры.

1. На первом итерационном шаге в выражения, обозначенные $\tau + \Delta\tau$, подставляются соответствующие характеристики при τ и $\tau + \Delta\tau$. Система уравнений (8) решается относительно температурного вектора $\{T\}_{\tau+\Delta\tau}$.

2. На втором шаге в выражения, обозначенные $\tau + \Delta\tau$, подставляются значения C, ρ, λ, α, $\sigma_{прив}$, $T_м$ при температуре, полученной на первом шаге, т. е. $\{T\}_{\tau+\Delta\tau}$, и времени $\tau + \Delta\tau$. В результате решения уравнения (8) получаем новый вектор $\{T\}^2_{\tau+\Delta\tau}$. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута соответствующая сходимость результатов вычислений. При разра-

ботке математический модели нагрева металла весьма важен учет термических напряжений, вызываемых действием температурного поля. Это объясняется прежде всего тем, что при создании скоростных режимов нагрева, а также возникновении значительных градиентов температур в нагреваемых стальных изделиях возникают растягивающие напряжения, которые могут превышать пределы текучести и прочности для данного материала. Таким образом, в этом случае может нарушаться условие прочности:

$$\sigma_p \leqslant [\sigma] , \tag{9}$$

где σ_p – растягивающие температурные напряжения; $[\sigma]$ – значение допустимого предела температурных напряжений.

Вопросам математического моделирования и расчета температурных напряжений и деформаций металлургических слитков и заготовок круговой цилиндрической формы при их нагреве уделено значительное внимание [8, 9].

Тензор термоупруговязких деформаций, предложенный в работе [8], дополним тензором пластических деформаций:

$$\epsilon = \epsilon_{ij}^E + \epsilon_{ij}^V + \delta_{ij}\epsilon^T + \epsilon_{ij}^P , \tag{10}$$

где ϵ_{ij}^E – тензор упругих деформаций; ϵ_{ij}^V – тензор вязких деформаций; $\delta_{ij}\epsilon^T$ – тензор температурных деформаций; ϵ_{ij} – тензор пластических деформаций.

В дальнейшем воспользуемся тензорной формой основных зависимостей теории упругости:

1) уравнения равновесия и граничные условия внешних и внутренних сил на границе Г:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0 \ (a); \\ P_{\Gamma i} &= \sigma_{ij} n_j \ (б), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где n_j – нормаль;

2) физические уравнения

$$\epsilon_{ij} = 1/E\,[(1+\nu)\sigma_{ij} - 3\nu\delta_{ij}\bar{\sigma}] + \delta_{ij}\epsilon^T , \tag{12}$$

где $\epsilon^T = \alpha\Delta T$ и $E, \nu \sim f(T)$; δ_{ij} – символ Кронекера;

3) уравнения деформаций

$$\epsilon_{ij} = 1/2\,(U_{i,j} + U_{j,i}); \tag{13}$$

4) кинематические граничные условия на части границы:

$$U_i = U_i^{\Gamma_0}. \tag{14}$$

Выражения (11)...(13) и граничные условия (11), (14) образуют полную систему дифференциальных уравнений термоупругости, не имеющей решения в замкнутой форме.

Для решения этой системы используем вариационную конечно-элементную формулировку энергетического функционала [10]:

$$I_2 = \int\limits_S \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dS - \int\limits_{S_p} P_i \delta U_i dS . \qquad (15)$$

При его минимизации получаем системы матричных линейных алгебраических уравнений относительно вектора смещений $\{U\}$:

$$[K]\{U\} = \{P\} . \qquad (16)$$

Здесь $[K]$ – глобальная матрица жесткости заготовки, определяемая выражением

$$[K] = \sum_{i=1}^{M} \int\limits_{S^l} [B]^{l^T} [D]^l [B] dS ,$$

а $\{P\}$ – вектор термического нагружения, равный:

$$\{P\} = \sum_{i=1}^{M} \int\limits_{S_p} [B]^{l^T} [D]^l \{\epsilon^T\}^l dS; \ \{\epsilon^T\} = \{\alpha T; \ \alpha T; \ 0\} .$$

В данных выражениях M – число конечных элементов, которые характеризуют геометрию расчетного сечения слитка; $[B]^{l^T}$ – матрица дифференцирования по функциям формы $[N]^l$ конечного элемента; $[D]^l$ – матрица упругих компонент конечного элемента; $\{\epsilon^T\}$ – вектор температурной деформации. Используя соотношение $\{U\}^l = [N]^l \{U\}$, связывающее вектор $\{U\}^l$ конечного элемента с вектором перемещений его узлов $\{U\}$, полученным из уравнения (16), приходим к матричным преобразованиям, характеризующим напряженно-деформированное состояние цилиндрических заготовок в упругой постановке:

$$\{\epsilon^E\}^l = [B]^l \{U\} ; \qquad (17)$$

$$\{\sigma^E\}^l = [D]^l (\{\epsilon^E\}^l - \{\epsilon^T\}^l). \qquad (18)$$

Когда действующие в слитке напряжения $\{\sigma\}^l$ превышают уровень, зависящий от абсолютной температуры, в заготовках начинают накапливаться деформации пластичности $\{\epsilon^P\}^l$, которые при определенных температурных режимах $\{T\}^l$ на временных интервалах $\Delta\tau$ дополняются вязкими деформациями $\{\epsilon^V\}^l$, т. е. деформациями ползучести. Разделение вязких деформаций на деформации пластичности и деформации ползучести весьма условно, однако, как показано в [11], их возникновение обусловлено различными физическими процессами.

Известно, что процесс нагрева цилиндрических слитков и заготовок перед последующей их обработкой давлением носит активный и однонаправленный характер. Это значит, что при постоянном росте температур по их сечению обеспечивается монотонный рост пластических деформаций в слитке или в его отдельных элементах сохраняется постоянный характер термического нагружения. Как показано в [12], в данном случае уместно использование деформационной теории пластичности, положения которой применим к конечно-элементной реализации метода переменных параметров упругости [13].

Согласно методу переменных параметров, представим уравнения термопластичности [13] как уравнения термоупругости (16)...(19), в которых параметры упругости зависят не только от температуры материала, но и от его напряженно-деформированного состояния в расчетном узле. При этом в постановке (11)...(14) изменению подлежат физические уравнения (12), которые приводятся к следующей форме:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E^*} \left[(1 + \nu^*) \sigma_{ij} - 3\nu^* \delta_{ij} \bar{\sigma} \right] + \delta_{ij} \epsilon^T. \qquad (19)$$

Здесь переменный модуль упругости E^* может быть получен при использовании экспериментальных кривых деформирования $\sigma_0 = f(\epsilon_0, T)$ [14] для постоянных температур путем определения некоторого секущего модуля $E^* = E^c$ и заменой коэффициента Пуассона ν на некоторый приведенный параметр:

$$\nu^* = \frac{1}{2} \left[1 - (1 - 2\nu) E_c / E \right]. \qquad (20)$$

В результате указанных преобразований получаем исходную конечноэлементную формулировку (16)...(18).

Так как матрица упругих констант конечного элемента $[D]^l$ определяется различными комбинациями коэффициентов E и ν, то с вводом переменных значений E^* и ν^* она преобразуется в некоторую матричную функцию кривой деформирования:

$$[D]^l = f(E^*, \nu^*). \qquad (21)$$

Тогда матрица жесткости слитка $[K]$ на каждом шаге кривой деформирования будет иметь вид

$$[K] = \sum_{i=1}^{M} \int_{S^l} [B]^{l^T} [D(E^*, \nu^*)]^l [B]^l dS, \qquad (22)$$

а вектор нагружения соответственно

$$\{P\} = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_p} [B]^{l^T} [D(E^*, \nu^*)]^l \{\epsilon^T{}_0\}^l dS. \qquad (23)$$

С учетом преобразований (22) и (23) система линейных алгебраических уравнений перейдет в систему нелинейных алгебраических уравнений относительно вектора $\{U\}$ для некоторого шага n:

$$[K(E^*, \nu^*)]^{n-1} \{U\}^n = \{P\}^{n-1}. \qquad (24)$$

Процесс решения (24) происходит следующим образом.

1. При $E^* = E$, $\nu^* = \nu$ и некотором T определяем вектор $\{U\}$. Затем строится вектор $\{U\}^{l(1)}$, из выражений (22), (23) определяются $\{\epsilon\}$ и $\{\sigma\}^{l(1)}$, т. е.

$$\{\epsilon\}^{l(1)} = [B]^l \{U\}^{l(1)}; \qquad (25)$$

$$\{\sigma\}^{l(1)} = [D(E, \nu)] (\{\epsilon\}^{l(1)} - \{\epsilon^T\}^{l(1)}). \qquad (26)$$

2. Вычисляем интенсивность напряжений по формуле

$$\sigma_i^{*(1)} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij}^{(1)} S_{ij}^{(1)}}\ , \tag{27}$$

где $S_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)} - \bar{\sigma}^{(1)} \delta_{ij}$ находится через компоненты вектора $\{\sigma\}^{l(1)}$.

3. По кривым деформирования при деформациях $\epsilon_0^{(1)} = \sigma_0^{*(1)}/E$ $(\sigma_0^{*(1)} = \sigma_i^{*(1)})$ и температуре T находим новое значение напряжения $\sigma_0^{(1)} = f(\epsilon_0^{(1)}, T)$ и новый модуль

$$E^* = E_c^{(1)} = \frac{\sigma_0^{(1)}}{\epsilon_0^{(1)}}\ , \tag{28}$$

а также значение ν^* по формуле (20).

4. Возвращаемся к упругому решению (24), но уже с новыми значениями $E^* = E^{*(1)}$ и $\nu^* = \nu^{*(1)}$ и вновь с той же последовательностью повторяем операции (25)...(28).

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока на всех расчетных точках разность между напряжениями $\sigma_i^{*(n)}$ и $\sigma_i^{(n)}$ не станет меньше заданного малого значения $\Delta\sigma_i$.

Необходимо отметить, что для каждого материала существует область относительно высоких температур и умеренных напряжений, при которых пластическая деформация не проявляется. Однако данное явление не является ограничением для использования метода переменных параметров упругости. Если принять, что в процессе нагрева металла уровень напряжений в нем достаточно высок (что имеет место при действии пластических деформаций), то для моделирования вязких составляющих общего тензора деформаций достаточно эффективна установившаяся теория ползучести [13]. Сопоставление уравнений установившейся ползучести с уравнениями деформационной теории пластичности [12] показывает их большое сходство. Уравнения установившейся ползучести можно получить из уравнений пластичности, если в последних принять

$$\epsilon_{ij}^E + \delta_{ij}\epsilon^T \leqslant \epsilon_{ij}^P\ .$$

Используя экспериментально полученные зависимоси $\dot{\epsilon}_0^V = \varphi(\sigma_0, T)$ [15], по аналогии с задачей пластичности введем секущий модуль скорости ползучести:

$$E_c = \sigma_0/\epsilon_0^V = \sigma_0/(\varphi(\sigma_0, T));$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^V = 3/2\ (\sigma_{ij} - \bar{\sigma}\delta_{ij})E_c\ ,$$

т. е. в форме соотношений упругости для несжимаемого тела с переменным модулем. Дальнейшее решение задачи осуществляется описанным выше методом переменных параметров упругости.

Таким образом, в работе показан общий конечно-элементный подход к решению задачи термопрочности металлургических слитков и заготовок в условиях произвольного теплового нагружения. Для решения квазистатических задач теории пластичности и ползучести использован конечно-элементный аналог метода переменных параметров упругости [13]. Программная реализация разработанных математических моделей задач термопластичности осуществлена на алгоритмическом языке ФОРТРАН-4 для ЕС ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г р и г о р ь е в В.Н. Кольцевые печи для нагрева металла. – М.: Металлургия, 1958. – 292 с. 2. П е к а р с к и й М.Я., Т а й ц Н.Ю. Влияние расположения и кантования цилиндрических слитков в процессе нагрева на производительность печи // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1970. – № 8. – С. 143–148. 3. К л е й н е р М.К., У д о в и ч е н к о В.П. Применение численных методов к исследованию нагрева цилиндрических слитков в кольцевых печах // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1973. – № 1. – С. 173–178. 4. Т и м о ш п о л ь с к и й В.И., П а н к р а т о в Н.А. К расчету несимметричного нагрева массивных цилиндрических изделий // Теплофизические процессы в энергетических установках. Сб. научн. тр. ИТМО АН БССР. – Минск. – 1982. – С. 114–118. 5. Т а й ц Н.Ю. Нагрев металла в трубном производстве // Сталь. – 1966. – № 7. – С. 661–665. 6. В е л к Г. Формулы для расчета теплофизических свойств сталей//Черные металлы. – 1975. – № 5. – С. 48–51. 7. Ш а б р о в Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. – Л.: Машиностроение, 1983. – 212 с. 8. С а м о й л о в и ч Ю.А. Исследование тепловых и термомеханических явлений при затвердевании и нагреве стальных слитков. Дис. ... докт. техн. наук. – Свердловск, 1967. – С. 34. 9. П о с т о л ь н и к Ю.С. Вопросы нелинейной теории нагрева и охлаждения металла: Дис. ... докт. техн. наук. – Днепропетровск, 1981. – С. 48. 10. С т р е н г Г., Ф и к с Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с. 11. П о л у х и н П.И., Г о р е л и к С.С., В о р о н ц о в В.К. Физические основы пластической деформации. – М.: Металлургия, 1982. – 583 с. 12. К а ч а н о в Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Машиностроение, 1969. – 420 с. 13. Термопластичность деталей машин / Под ред. И.А.Биргера и Б.Ф.Шорра. – М.: Машиностроение, 1975. – 455 с. 14. Справочник по строительной механике корабля / Г.В. Бойцов, О.И. Палий, В.А. Постнов, В.С. Чувиковский. – В 3 т. – Т. 2. Пластины. Теория упругости, пластичности и ползучести. Численные методы. – Л.: Судостроение, 1982. – 464 с. 15. П о л у х и н П.И., Г у н Г.Я., Г а л к и н А.М. Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов. – М.: Металлургия, 1983. – 351 с.