

$$\theta(x, t) = 400 \left(2 \sin \frac{\pi x}{b} + \sin \frac{2\pi x}{b} \right) t l^{-0,25 t}.$$

Учитывая формулу (11), решение $T(x, y, t)$ задачи (1)–(4) представится так:

$$T(x, y, t) = - \frac{1600 a^2 \pi}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \left(\sin \frac{\pi x}{b} \left(\frac{t l^{-0,25 t}}{(-0,25 + r_{1n}^2)} - \frac{t l^{-0,25 t}}{(-0,25 + r_{1n}^2)^2} + \frac{l^{-r_{1n}^2 t}}{(-0,25 + r_{1n}^2)^2} \right) + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{b} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{t l^{-0,25 t}}{-(-0,25 + r_{2n}^2)} - \frac{t l^{-0,25 t}}{(-0,25 + r_{2n}^2)^2} + \frac{l^{-r_{2n}^2 t}}{(-0,25 + r_{2n}^2)^2} \right) \right).$$

Это аналитическое решение можно рассматривать в качестве эталонного при построении приближенных методов вычисления интегралов в формулах (7)–(11), (15)–(18).

ЛИТЕРАТУРА

1. Технология, оборудование, организация и экономика машиностроительного производства // Экспресс-информация. – 1985. – Сер. 2. – Вып. 3. 2. Технология, оборудование, организация и экономика машиностроительного производства // Экспресс-информация. – 1985. – Сер. 2. – Вып. 9. 3. Б о р о в с к и й Г.В. Режущий инструмент из сверхтвердых материалов. – М.: НИИмаш, 1984. – 57 с. 4. Т и м ч у к А.Г. Исследование особенностей процесса точения закаленных сталей инструментами из синтетических поликристаллических СТМ: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Киев, 1980. – 22 с. 5. Р е з н и к о в А.Н. Теплофизика резания. – М.: Машиностроение, 1969. – 288 с. 6. О с т а ф ь е в В.А. Расчет динамической прочности режущего инструмента. – М.: Машиностроение, 1979. – 168 с. 7. О с т а ф ь е в В.А., Ч е р н я в с к а я А.А. Расчет нестационарных температурных полей при обработке металлов резанием. – М.: ЦНИИЭстроймаш, 1970. – 138 с.

УДК 621.78.536.212

В.И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, Н.Л. МАНДЕЛЬ,
П.В. СЕВАСТЬЯНОВ, Л.Г. ДЫМОВА, Э.А. ГУРВИЧ,
И.А. ТРУСОВА, И.М. РУБИНШТЕЙН

АНАЛИЗ СРАВНИТЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ НАГРЕВА

Наиболее распространенными численными методами решения задач нестационарной теплопроводности являются различные варианты метода конечных разностей.

В расчетной практике, как правило, используются неявные разностные схемы, обладающие свойством абсолютной устойчивости при любом шаге дискретизации по времени. Чаще всего применяют симметричную схему Кранка—Никольсона [1] или одну из схем повышенной точности, обеспечивающих высокую точность расчета при не слишком малых шагах по времени и координатам. Для осциллирующих тепловых режимов более подходящими считаются чисто неявные схемы из-за их монотонности [2]. Анализ свойств большого числа неявных схем дан в работе [3].

В последнее время возрождается интерес к явным разностным схемам. В ряде работ [4, 5] на конкретных примерах показаны их преимущества по сравнению с неявными схемами, которые проявляются в основном при расчете быстропротекающих процессов.

В статье Н.И. Никитенко [6] предложена явная схема, обладающая свойством абсолютной аппроксимации и позволяющая существенно расширить границы устойчивости по сравнению с обычными явными схемами, что делает возможным использовать в ней шаги по времени такие же, как в неявных схемах.

В настоящее время, по всей видимости, не представляется возможным выработать единый подход для выбора так называемого наилучшего варианта разностной схемы. В первую очередь это сложно сделать при исследовании нелинейных процессов теплообмена, к которым относятся и задачи нагрева и термообработки стальных слитков и заготовок.

Между тем вопрос о выборе наиболее рационального варианта разностной схемы для расчета процессов печного нагрева материалов до сих пор не решен, несмотря на его актуальность в связи с широким применением вычислительной техники для оптимизации и управления процессами в металлургической теплотехнике.

Работа посвящена сравнительному анализу эффективности наиболее часто применяемых разностных схем на примере расчета процесса нагрева в проходной печи плоских стальных заготовок.

Математическая формулировка задачи может быть представлена в виде:

$$\rho(T) C(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right); \quad (1)$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sigma_0(T) (T_{\text{гс}_0}^4(\tau) - T^4) + \alpha_0 (T_{\text{гс}_0}(\tau) - T);$$

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = \sigma_1(T) (T_{\text{гс}_1}^4(\tau) - T^4) + \alpha_1 (T_{\text{гс}_1}(\tau) - T);$$

$$T \Big|_{\tau=0} = T_0,$$

где ρ , C , λ — плотность, удельные теплоемкость и теплопроводность стали; σ_0 , α_0 , σ_1 , α_1 — коэффициенты излучения и конвективного теплообмена на нижней и верхней гранях слитка; $T_{\text{гс}_0}(\tau)$, $T_{\text{гс}_1}(\tau)$ — температуры греющей среды со стороны нижней и верхней граней, которые принимались зависящими

от времени в соответствии с реальными режимами нагрева слитков; L — толщина слитка.

Исходные данные для расчета приняты следующие: марка стали 45, $T_0^M = (20 + 273)$ К.

Для сравнительного анализа были выбраны явная, чисто неявная схемы, схема Кранка–Никольсона и явная схема Никитенко. Первые три схемы получили из конечно-разностной аппроксимации уравнения (1)

$$\begin{aligned} \rho_i C_i (T_i^{n+1} - T_i^n) = & \frac{2\sigma\Delta\tau}{h_{i+1} + h_i} (\lambda_{i+1/2} \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}}{h_{i+1}} - \\ & - \lambda_{i-1/2} \frac{T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{h_i}) + \frac{2(1-\sigma)\Delta\tau}{h_{i+1} + h_i} (\lambda_{i+1/2} \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{h_{i+1}} - \\ & - \lambda_{i-1/2} \frac{T_i^n - T_{i+1}^n}{h_i}). \end{aligned} \quad (2)$$

Полагая в (2) параметр $\sigma = 0; 1$ и $1/2$, получим явную, неявную и схему Кранка–Никольсона соответственно.

Схема Никитенко [6] в нашем случае принимает вид

$$\begin{aligned} (1 - \beta) \rho_i C_i (T_i^{n+1} - T_i^n) - \beta \rho_i C_i (T_i^n - T_i^{n-1}) = \\ = \frac{2\Delta\tau}{h_{i+1} + h_i} (\lambda_{i+1/2} \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{h_{i+1}} - \lambda_{i-1/2} \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{h_i}), \end{aligned} \quad (3)$$

где β — параметр схемы, определяющий ее устойчивость.

Устойчивость схемы (3) в линейном варианте определяется условием

$$\Delta\tau = \frac{1 + 2\beta}{2a} h^2,$$

где a — температуропроводность материала; h — шаг дискретизации пространственной сетки. Очевидно, меняя параметр β , можно варьировать допустимый временной шаг $\Delta\tau$ в весьма широких пределах.

В схемах (2) и (3) теплофизические коэффициенты ρ , C , λ рассчитывались при вычисленном на n -м временном слое поле температур.

Как показали результаты вычислений, последнее обстоятельство не приводит к заметным погрешностям и значительно сокращает затраты машинного времени, поскольку позволяет при решении задачи не прибегать к итерационным процедурам при уточнении теплофизических параметров.

Для повышения точности расчетов использовалась квазиравномерная пространственная сетка, сгущающаяся в направлении к нагреваемым поверхностям по экспоненциальному закону.

Результаты расчетов процесса нагрева слитка в проходной печи в течение 6 ч по исследуемым схемам показывают, что наименьшей эффективностью обладает чисто явная схема из-за весьма малых допустимых по условиям устойчивости временных шагов.

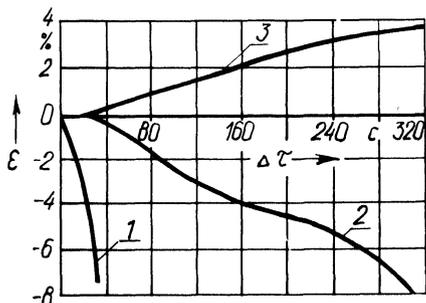


Рис. 1. Относительные погрешности различных схем:

1 – схема Никитенко; 2 – Кранка–Никольсона; 3 – чисто явная схема

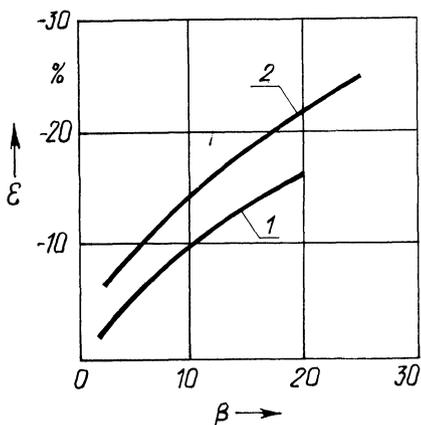


Рис. 2. Погрешность схемы Никитенко [6] с увеличением β :

1 – $\Delta\tau = 12,8$ с; 2 – $\Delta\tau = 25,8$ с

Явная схема была использована для получения "условно точного" решения при очень мелкой пространственно-временной сетке. В дальнейшем это решение служило базой сравнения при оценке точности других схем.

Максимальные относительные погрешности решений по чисто неявной схеме, схемам Кранка–Никольсона и Никитенко наблюдались в первые 1000 с нагрева. В дальнейшем относительные погрешности снижались.

На рис. 1 показано изменение относительной погрешности схем с ростом временного шага. Наилучшим вариантом в нашем случае оказалась чисто явная схема, обладающая наиболее высокой точностью при больших временных шагах. Это находится в противоречии с теоретическими оценками схемы Кранка–Никольсона как наиболее точной [2], что подтверждает необходимость проверки эффективности схем в конкретных условиях.

Погрешность схемы Никитенко быстро растет с увеличением $\Delta\tau$. Минимум погрешности наблюдается при значениях параметра β , полученных для заданного $\Delta\tau$ непосредственно из условия устойчивости. С ростом β погрешность быстро увеличивается (рис. 2).

Сделанные выводы о низкой эффективности схемы Никитенко справедливы только в случае исследования технологии нагрева стали.

Таким образом, для решения нелинейных нестационарных задач теплопроводности при математическом моделировании нагрева стальных слитков в проходных печах целесообразно использовать чисто неявные схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of heatconduction type // Proc. Cambridge. Philos. Soc. – 1947. – V. 43. Pt. 1. – P. 50.
2. Калиткин Н.И. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
3. Рихтмайер Р.Д. Разностные методы решения краевых задач. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 263 с.
4. Бэк Л. Численная аппроксимация конвективного

граничного условия // Теплопередача. – 1961. – № 4. – С. 158–159. 5. Дю з и н б е р г Г.М. Замечания о невязном методе конечно-разностного расчета теплопроводности // Теплопередача. – 1962. – Т. 83. – Сер. С. № 1. – С. 121–122. 6. Н и к и т е н к о Н.И., Н и к и т е н к о Ю.Н. Исследование тепломассопереноса при кристаллизации сплавов с учетом двухфазной зоны // Промышленная теплотехника. – 1983. – Т. 5. – № 6. – С. 7–13.

УДК 621.746

Р.И. ЕСЬМАН, В.А. АНТОНОВ,
В.М. КАЙНОВ, Ю.П. ЯРМОЛЬЧИК,
А.Н. ИВАНИСОВ

РАСЧЕТ ДВУМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ОТЛИВКИ И ПРЕСС-ФОРМЫ НА ЭВМ

Температурное поле потока жидкого металла в процессе заполнения пресс-формы определяется гидродинамикой впрыска и прессования, а также условиями теплоотдачи на поверхности пресс-формы. Эксперименты показывают [1], что при заполнении пресс-формы расплав имеет неравномерную температуру по длине отливки, причем в сечении вблизи литника температура близка к температуре заливки $T_{зав}$, а в конечном сечении может приближаться к температуре кристаллизации $T_{кр}$.

При теоретическом изучении процесса задача сводится к решению уравнения теплопроводности в отливке и в форме с учетом фазовых превращений в расплаве при соответствующих граничных условиях. Рассмотрим режим охлаждения плоской отливки неограниченной длины прямоугольного поперечного сечения в пресс-форме с равномерной толщиной стенок (рис. 1). Поместим начало координат в начальном сечении, ось x направим по геометрической оси, а ось y поперек отливки. Тогда задача сводится к решению уравнений:

$$\begin{aligned} c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \right), \quad 0 \leq y \leq a_1; \\ c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \right), \quad a_1 \leq y \leq a_2 \end{aligned} \quad (1)$$

при условиях непосредственного контакта отливки и формы

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y}, \quad T_1 = T_2 \quad \text{при } y = a_1$$

и конвективного теплообмена на поверхности формы

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} = \alpha (T_2 - T_0) \quad \text{при } y = a_2.$$

На оси x имеем условие симметрии $\frac{\partial T_1}{\partial y} = 0$ при $y = 0$. Здесь индексы 1 и 2