го пролета в зависимости от основных исходных данных воздушной линии электропередачи.

В том случае, когда опоры линии электропередачи устанавливаются непосредственно в грунт, выражение (7) упрощается:

$$l_б^3 + 0{,}5 l_б^2 - \frac{4\sigma}{\gamma}(h_г + a\lambda + (b-1)c) = 0. \qquad (8)$$

Уравнения (7), (8) позволяют определять конкретное численное значение базового пролета воздушных линий электропередачи в зависимости от напряжений линий, их конструкции, климатических условий района трассы и характера грунтов.

Таким образом, следует отметить, что предлагаемая методика определения базового значения искомого параметра позволяет оптимизировать конструктивные параметры новых воздушных линий электропередачи, для которых отсутствуют статистические данные и опыт эксплуатации, а также существенно упростить процесс оптимизации и определения искомого параметра компактных воздушных линий и сократить трудозатраты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов В.В. Критериальное уравнение оптимального пролета ЛЭП // Электричество. – 1967. – № 8. – С. 17–20. 2. Арсеньев Ю.Д. Теория подобия в инженерных экономических расчетах. – М.: Высш. шк., 1967. – 262 с.

УДК 62–50:62–83

В.И. ПАНАСЮК

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ЗАДАЧ С НЕМОНОТОННЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

Изучается задача оптимального управления, в которой в результате замены времени t на одну из фазовых переменных течение этого нового "времени" немонотонно. Для таких задач доказан основной результат принципа максимума Л.С. Понтрягина. Указан класс практических задач из области электропривода, где возникает такая ситуация.

Рассматривается устойчивый объект управления, динамика которого описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}, u, t); \quad \bar{x} \in R^n; \quad u \in U \subset R^r, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (1)$$

На решениях системы (1) необходимо доставить минимум интегралу

$$I = \int_{t_0}^{T} \bar{f}_0(\bar{x}, u, t)\, dt, \qquad (2)$$

удовлетворив при этом граничным условиям:

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_{\text{н}}\ ; \quad \bar{x}(T) = \bar{x}_{\text{к}}\ , \tag{3}$$

где $\bar{x}_{\text{н}}$, $\bar{x}_{\text{к}}$ – начальная и конечная точки траектории.

Полагаем, что функции $\bar{f}(\bar{x}, u, t)$ и $\bar{f}_0(\bar{x}, u, t)$ из выражений (1), (2) непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по $\bar{x}$, а в качестве допустимых управлений рассматриваются кусочно-непрерывные функции $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, и область U ограничена и замкнута.

Дополним фазовые координаты системы (1) переменными $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_{n+1} = t$, законы изменения которых подчинены уравнениям:

$$\frac{d\bar{x}_0}{d\bar{x}_{n+1}} = \bar{f}_0(\bar{x}, u, \bar{x}_{n+1})\ ; \qquad \frac{d\bar{x}_{n+1}}{d\bar{x}_{n+1}} = 1 \tag{4}$$

и граничным условиям:

$$\bar{x}_0(t_0) = 0; \quad \bar{x}_{n+1}(t_0) = 0; \quad \bar{x}_{n+1}(T) = T, \tag{5}$$

которые дополняют граничные условия (3).

Для упрощения решения задачи проведем в системе уравнений (1), (4) замену аргумента $\bar{x}_{n+1} = t$ новым аргументом, в качестве которого выберем одну из переменных задачи $\bar{x}_l$, $l \in [1, n]$. Получим

$$\frac{d\bar{x}_i}{d\bar{x}_l} = \bar{f}_i(\bar{x}, u, \bar{x}_{n+1}) / \bar{f}_l(\bar{x}, u, \bar{x}_{n+1})\ , \quad i = 0, 1, \ldots, l-1, l+1, \ldots, n+1. \tag{6}$$

Перенумеруем переменные от 0 до n, исключив $\bar{x}_l$ и обозначив $\tau = \bar{x}_l$, $\bar{x}_l(t_0) = \tau_{\text{н}}$, $\bar{x}_l(T) = \tau_{\text{к}}$ в уравнениях (1) и (6), получим

$$\frac{dx_i}{d\tau} = f_i(x, u, \tau),\ i = \overline{0, n}\ . \tag{7}$$

Новый "аргумент" τ может изменяться немонотонно.

Составим функцию Понтрягина для решения задачи [1] :

$$H = (f(x, u, \tau),\ \psi(\tau))\ , \tag{8}$$

где $(\cdot\ ,\ \cdot)$ – скалярное произведение.

Имеют место также соотношения [1] :

$$\frac{d\psi}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x}\ ; \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \psi}\ . \tag{9}$$

Обозначим $\{\tau_{\text{н}}, \tau_{\text{к}}\}$ – совокупность всех неустановившихся значений τ в оптимальном процессе; $\{\tau_{\text{н}}, \tau_{\text{к}}\}_+$ – совокупность значений τ в оптимальном процессе на участках возрастания τ ; $\{\tau_{\text{н}}, \tau_{\text{к}}\}_-$ – совокупность значений τ в оптимальном процессе на участках уменьшения τ ; **H** – гамильтониан, т. е. значения функции Понтрягина (8) в оптимальном процессе.

Для формального сведения неавтономной по τ задачи к автономной дополним фазовые переменные системы (7) переменной $x_{n+1} = \tau$, а систему (7) – уравнением

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_{n+1}} = 1.$$

Тогда выражения (8) и (9) дополнятся следующими соотношениями:

$$\widetilde{H} = H + \psi_{n+1} \, ; \quad \frac{d\psi_{n+1}}{dx_{n+1}} = - \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x_{n+1}} \, . \tag{10}$$

Обозначим гамильтониан функции Понтрягина $\breve{H}$ через $\breve{\mathbf{H}}$. Полагаем, что оптимальный процесс в задаче существует, обозначим его через $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$.

Теорема. Для оптимальности $x(\tau)$, $u(\tau)$, $\tau \in \{\tau_н, \tau_к\}$ необходимо существование такой непрерывной ненулевой вектор-функции $\psi(\tau)$ из выражений (8), (9), (10), что:

а) для любого $\tau \in \{\tau_н, \tau_к\}_+$ $\widetilde{\mathbf{H}} = \max\limits_{u \in U} \widetilde{H}$ и для любого $\tau \in \{\tau_н, \tau_к\}_-$ $\widetilde{\mathbf{H}} = \min\limits_{u \in U} \widetilde{H}$;

б) для любого $\tau \in \{\tau_н, \tau_к\}$ гамильтониан **H** неавтономной системы непрерывен.

Эта теорема обосновывает основной результат принципа максимума для случая немонотонного изменения аргумента.

Приведенная модификация принципа максимума эффективна, например в задачах оптимального управления позиционным электроприводом [2–6], уравнения движения которого имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, \nu), \; x \in R^n, \; u \in U \subset R^r ;$$

$$\frac{d\nu}{dt} = \mu(x, u, \nu) - \mu_н ;$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \nu ,$$

а критерий оптимальности (энергопотери) можно записать в виде

$$Q = \int\limits_0^T f_0(x, u, \nu)\, dt \to \min ,$$

где x – электромагнитные переменные электропривода (ЭП); u – управления (напряжения, частоты и т. д.); ν , α – скорость вращения и угол поворота вала ЭП; μ , $\mu_н$ – электромагнитный и нагрузочный моменты.

В качестве нового "времени" выберем скорость ν , тогда имеем:

$$\frac{dx_0}{d\nu} = \frac{f_0(x, u, \nu)}{\mu(x, u, \nu) - \mu_н}; \quad \frac{dx}{d\nu} = \frac{f(x, u, \nu)}{\mu(x, u, \nu) - \mu_н};$$

$$\frac{d\alpha}{d\nu} = \frac{\nu}{\mu(x, u, \nu) - \mu_н}; \quad \frac{dt}{d\nu} = \frac{1}{\mu(x, u, \nu) - \mu_н};$$

$$H = \frac{f_0(x, u, \nu)\,\psi_0 + (f(x, u, \nu), \psi) + \nu\psi_{n+1} + \psi_{n+2}}{\mu(x, u, \nu) - \mu_н};$$

$$\frac{d\psi_i}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; \; i = \overline{0, n}; \quad \frac{d\psi_{n+1}}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha}; \frac{d\psi_{n+2}}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

На участках разгона оптимальное управление определяется следующим образом:

$$u^0 = \operatorname*{Arg\,max}_{u \in U} H \qquad \text{при } \mu(x, u, \nu) - \mu_н > 0,$$

а на участках торможения

$$u^0 = \operatorname*{Arg\,min}_{u \in U} H \qquad \text{при } \mu(x, u, \nu) - \mu_н < 0,$$

что приводит к результатам, близким к полученным в работах [2–5] при $H = F^*$ и $\psi = \lambda$. Подход, изложенный в [2–5] , оказался эффективным при решении задач оптимального управления электроприводом. Он позволил найти аналитическое решение для задач указанного типа в тех случаях, когда другими процедурами оптимизации аналитическое решение не получалось [2–4] .

Таким образом, основной результат принципа максимума сформулирован для задач оптимального управления с немонотонным изменением аргумента, которые появляются при замене реального времени t на новое "время", в качестве которого может выступать одна из координат системы, имеющая в общем случае в оптимальном процессе немонотонное изменение. Эта замена эффективна, например, в задачах оптимального по энергопотерям позиционирования электроприводов. Она позволяет повысить информативность основной процедуры принципа максимума – экстремизации по управлению функции Понтрягина.

Доказательство теоремы. Не ограничивая общности, полагаем, что оптимальный процесс состоит из одного участка прямого течения "времени" τ (разгона) и следующего за ним участка обратного течения "времени" τ (торможения) . Считаем пока, что правый конец траектории $x_к$ свободен.

Проварьируем управление $u(\tau)$ игольчатой вариацией малой длительности ϵ и конечного изменения управления Δu с одной особенностью: действие вариации при прямом течении "времени" τ будет заканчиваться в момент $\bar{\tau}$, а появляться – в момент $\bar{\tau} - \epsilon$, $\epsilon = \delta$, $\delta > 0$; при обратном течении "времени" τ действие вариации будет заканчиваться также в момент $\bar{\tau}$, а появляться – в момент $\bar{\tau} - \epsilon$, $\epsilon = -\delta$, $\delta > 0$. Такая конструкция вариации необходима, чтобы результат действия вариации можно было рассматривать в момент $\bar{\tau}$ по истечении "времени" ϵ ее воздействия на систему, т. е.

$$\begin{aligned} &\epsilon = \delta && \text{при прямом течении "времени" } \tau, \\ &\epsilon = -\delta && \text{при обратном течении "времени" } \tau. \end{aligned} \qquad (11)$$

Далее, с учетом того что при торможении $d\tau$ отрицательно, доказательство ничем не отличается от приведенного, например, в учебном пособии [7] на стр. 96–99, за исключением конечных выражений на стр. 99, вместо которых имеем

$$\sum_{i=0}^{n+1} \psi_i(\bar{\tau})\,(f_i(x(\bar{\tau}), \tilde{u}(\bar{\tau}), \bar{\tau}) - f_i(x(\bar{\tau}), u(\bar{\tau}), \bar{\tau}))\,\epsilon \leqslant 0,$$

откуда окончательно получим с учетом условий (11) $\tilde{H}(\psi, x, \tilde{u}) \leqslant \tilde{H}(\psi, x, u)$ для прямого течения "времени" τ и $\tilde{H}(\psi, x, \tilde{u}) \geqslant \tilde{H}(\psi, x, u)$ для обратного течения "времени" τ.

Таким образом доказан п. а) утверждение теоремы. Доказательство утверждения п. б) теоремы для участка прямого течения "времени" τ не отличается, например, от приведенного в [8, с. 59], на участке обратного течения "времени" τ доказательство аналогично за исключением того, что знаки неравенства меняются на противоположные. В точке переключения с разгона на торможение $\tau = \tau_n$ (и возможно наоборот) доказательство непрерывности имеет особенности. Рассматривается зона процесса разгона от момента $\tau_n - \Delta\tau$ до τ_n ($\Delta\tau > 0$) и зона торможения от момента τ_n до $\tau_n - \Delta\tau$. Однако при торможении в этом интервале необходимо рассматривать попятное движение системы от момента $\tau_n - \Delta\tau$ до τ_n. В этом режиме уравнения движения запишутся

$$\frac{dx}{dx_{n+1}} = -f(x, u, \tau), \qquad \frac{d\psi}{dx_{n+1}} = \frac{\partial\tilde{H}}{\partial x},$$

а выражение п. а) теоремы для этого режима опять же будет иметь вид $\mathbf{H} = \max\limits_{u \in U} H$, вместо $\mathbf{H} = \min\limits_{u \in U} H$, как при обычном торможении. Теперь в этой составной зоне в окрестности τ_n обоснование непрерывности $\mathbf{H}$ не отличается от доказательства непрерывности для внутренней точки участка разгона, т.е. прямого течения "времени". По этой же схеме аналогично [1] доказывается теорема и при полностью или частично закрепленном $x_к$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1976. – 392 с. 2. Панасюк А.И., Панасюк В.И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. – Мн.: Наука и техника, 1986. – 296 с. 3. Панасюк В.И. Оптимальное управление электроприводом при одновременном воздействии на ток и поток двигателя // Электричество. – 1983. – № 9. – С. 35–38. 4. Панасюк В.И., Политыко Э.Д., Петренко Ю.Н. Оптимальное частотное управление асинхронным двигателем в позиционном процессе //

Изв. вузов. Электромеханика. – 1984. – № 10. – С. 96–100. 5. П а н а с ю к В.И. Снижение энергопотерь в регулируемых электроприводах // Изв. вузов. Энергетика. – 1986. – № 8. – С. 8–13. 6. П е т р о в Ю.П. Оптимальное управление электроприводом с учетом ограничений по нагреву. – Л.: Энергия, 1971. – 144 с. 7. И в а н о в В.А., Ф а л д и н Н.В. Теория оптимальных систем автоматического управления. – М.: Наука, 1981. – 336 с. 8. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. – Мн.: Наука и техника, 1974. – 272 с.

УДК 62–50

А.А. МОСКАЛЕНКО, В.И. ЛИТВИНЕЦ

МНОГОСВЯЗНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ С АНАЛИТИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИЕЙ

Большинство объектов автоматизации в теплоэнергетике характеризуются не только многопараметрической зависимостью "вход–выход", но и нестационарностью динамических свойств при изменении нагрузки в широких пределах. В таких условиях построение системы регулирования на принципах автономности контуров не отвечает требованиям оптимального ведения технологии процесса и оптимизация отдельных сепаратных контуров автоматической системы регулирования (АСР) не обеспечивает (в общем случае) оптимизации режима установки в целом [1].

Рассмотрим типовую для промышленных объектов задачу, в которой структура многосвязной системы управления задана соответственно технологическому алгоритму частично, известны ограничивающие факторы и исходные динамические характеристики объекта. Необходимо определить взаимосвязи контуров регулирования, диапазон изменения основных параметров настройки для обеспечения требуемых динамических свойств (точности и быстродействия) системы в переменных условиях. При этом предполагается изменение статических и динамических параметров объекта в процессе эксплуатации и в зависимости от уровня нагрузки, а также наличие переменного запаздывания.

Анализ поставленной задачи применительно к многомерным настационарным объектам с запаздыванием позволяет выделить группу способов достижения цели: обеспечение координированной работы взаимосвязанных контуров регулирования при выполнении программы управления; обеспечение автономности основных контуров при характерных возмущениях, что соответствует классическому методу расчета и оптимизации многосвязных систем регулирования, функционирование которых определяется показателями качества, одновременно зависящими от ряда управляемых величин; использование теории упреждения запаздывания и компенсации инерционности с применением векторной оптимизации; использование алгебраических модификаций рассогласования модели и объекта для адаптации системы в целом; комбинирование двух последних способов оптимизации АСР [2].

Проектирование сложных систем промышленных многомерных объектов производится, как правило, по результатам оценки динамического и статического факторов связности отдельных каналов регулирования, после чего рекомендуется [1, 3] исключить контуры, резко отличающиеся от заданных рабочих частот, и выделить добротные двух-трехсвязные подсистемы, комбини-