

## Начальная задача Брату: нановолоконные технологии

*Кот В. А., канд. техн. наук*

*Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси*

*220072, Беларусь, г. Минск, ул. П. Бровки, 15*

*E-mail: valery.kot@hmti.ac.by*

**Аннотация.** Обсуждается математическое моделирование процесса электроспиннинга при производстве нановолокон на основе приближенного решения начальной задачи Брату. С целью получения высокоточных аппроксимаций предложен новый гибридный метод, который сочетает разложение решения в степенной ряд Тейлора с включением двух дополнительных соотношений, записанных относительно двух неизвестных граничных условий. Этот метод позволил получить высокоточные полиномиальные решения задачи Брату, и по точности аппроксимации превзойти известные приближенные численно-аналитические методы на один-два порядка.

**Ключевые слова:** задача Брату, численное моделирование, электроспиннинг, гибридный аналитический метод.

## Initial Bratu problem: nanofiber tecknologies

*Kot V. A.*

*A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus*

**Annotation.** Mathematical simulation of the electrospinning, used in the production of nanofibers, on the basis of the approximate solution of the initial Bratu problem is considered. With the aim to obtain high-accuracy approximations, a new hybrid method, combining the representation of a solution as a Taylor power series with the introduction of two additional relations written in terms of two unknown boundary conditions, is proposed. This method made it possible to obtain the highly exact polynomial solutions of the Bratu problem, and it surpasses the known approximate numerical-analytical methods by one to two orders of magnitude in accuracy.

**Keywords:** Bratu problem, numerical simulation, electrospinning, hybrid analytical method.

**Введение.** В последние годы исследование начальных задач в обыкновенных дифференциальных уравнениях второго порядка привлекло многих исследователей. К одному из такого типа уравнений относится уравнение Брату [1], сформулированное как

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda e^v = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\lambda = \text{const}). \quad (1)$$

Уравнение Брату – это нелинейное дифференциальное уравнение, имеющее множество приложений в математике, физике, технике и в других областях [2; 3], при этом оно формулируется в виде нелинейной задачи с начальными или граничными условиями. Стандартная задача Брату использовалась для моделирования задачи горения в плоской плите [4]. Задача Брату [5–9] также используется в самых разных приложениях, таких как модель воспламенения топлива в теории термического горения, модель процесса тепловой реакции, модель Чандрасекара расширения Вселенной [10], некоторые вопросы в области геометрии и теории относительности, касающиеся модели Чандрасекара, теория химических реакций, радиационный теплоперенос и нанотехнологии [11–16]. В настоящей работе рассмотрена одномерная задача типа Брату с начальными условиями

$$v(0) = v'(0) = 0. \quad (2)$$

Поскольку начальные задачи типа Брату имеют достаточно большую важность в вопросах моделирования различных реальных явлений, они получили должное внимание у многих численных аналитиков. Поэтому разработка высокоточных численно-аналитических и тем более аналитических подходов к аппроксимации решений уравнений типа Брату представляется важной и актуальной задачей. В последние годы в литературе можно найти множество аналитических и численных методов приближенного решения задачи Брату [4; 17–20]. В частности, Дж. Бойд

[17; 18] предложил разложения по полиномам Чебышева и Гегенбауэра, выступающих в качестве базовых функций, для одновременной аппроксимации задачи Брату в двумерной постановке. В работе [21] авторы представили метод разложения Адомиана-Лапласа, а в [22] авторы обсудили новые итерационные решения методом возмущений. Кроме того, для решения задачи Брату (1), (2) были представлены метод разложения Адомиана [23] и метод групповой стрельбы Ли [24]. В работе [25] для решения задачи Брату предложен и развит вейвлет-метод Лежандра.

Метод возмущений применительно к решению начальной задачи типа Брату достаточно подробно рассмотрен в работе [26]. Широко распространенный гомотопический метод возмущений для решения рассматриваемой задачи достаточно успешно применен в работе [27]. В особую группу выделим вариационно-итерационный метод, на основе которого решена данная задача [28–30]. В виде незначительных «усовершенствований» этого метода выступают, в частности, работы [31–33]. Дальнейшее развитие вариационно-итерационный метод нашел в работе [34], в которой был применен предложенный в [35] подход, позволивший преобразовать исходное дифференциальное уравнение (1) в новое уравнение, лишенное экспоненты. При этом был введен в рассмотрение новый дополнительный параметр, позволивший проводить минимизацию модуля невязки самого дифференциального уравнения.

**Электроспиннинг и его математическая формулировка: начальная задача Брату.** Электроспиннинг (Electrospinning process – ESP) признан одним из наиболее удобных и экономичных методов изготовления полимерных нановолокон [36]. Это метод производства сверхтонких волокон диаметром от 10 мкм до 10 нм

путем пропускания расплавленного полимера или раствора полимера через фильеру под действием электрического поля. Под действием электростатического поля полусферическая поверхность раствора полимера на кончике капилляра удлиняется и принимает коническую форму, называемую конусом Тейлора [37]. Когда напряжение превышает пороговое значение, электростатические силы преодолевают поверхностное натяжение, и заряженная мелкая струя выбрасывается на кончике конуса Тейлора. Струя движется к опорной пластине, действующей как противоположный электрод, при этом растворитель испаряется. В конечном счете волокна достигают коллектора и укладываются на него. В дальнейшем полученный «продукт» подвергается термической обработке для создания графитовой структуры. Управляющими параметрами процесса являются гидростатическое давление в капилляре и внешнее электрическое поле. Элементы, необходимые для электропрядения, включают в себя источник полимера, источник высокого напряжения и коллектор (рис. 1) [38].

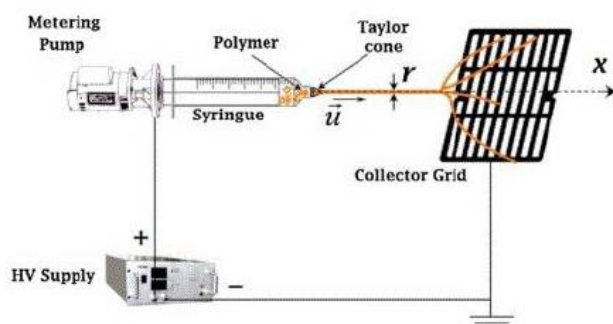


Рис. 1. Функциональная схема процесса электроспиннинга [38]  
 Fig. 1. Functional diagram of the electrospinning process [38]

Примеры успешного применения нановолокон, изготовленных методом электропрядения, и изделий на их основе широки и многообразны. Например, пористая нановолоконная мембрана, изготовленная ESP, применяется в качестве повязки на рану [36], которая может пропускать через себя жидкость из раны, предотвращая накопление под ней, а также высыхание раны. Такая нановолоконная мембрана обеспечивает контролируемое испарение жидкости, превосходную кислородопроницаемость и повышенную эффективность в дренаже жидкости, одновременно препятствуя вторжению экзогенных микроорганизмов вследствие ультратонкой пористой структуры. Другие примеры – это, в частности, различное фильтрационное применение [36; 39], инженерия костной ткани [40], доставка лекарств и носителей катализаторов [41], изготовление волокнистых матов для армирования композитов [41] и т. д.

Несмотря на существенную изученность ESP, его теоретическое моделирование остается весьма «узким местом», серьезно препятствующим дальнейшему повышению качества получаемых нановолокон и эффективности самого процесса. В работе [41] построена математическая модель, которая с некоторыми допущениями описывает физику ESP. При этом принимается допущение о существенном превалировании электрической силы над другими силами, что позволяет получить классическое уравнение Брату, объясняющее возможную в ESP нестабильность (бифуркацию).

В работе [37] математическая модель ESP связана с уравнением Брату, полученным из уравнений баланса термоэлектродинамики. Модель описывает скорость жидкости на внешнем крае шприца. Основными уравнениями процесса являются уравнения баланса массы, линейного импульса и электрического заряда соответственно [42–44]:

$$\nabla u = 0, \quad (3)$$

$$\rho(u\nabla)u = \nabla F_m + \nabla F_e, \quad (4)$$

$$\nabla j = 0, \quad (5)$$

где  $u$  – осевая скорость;  $j$  – плотность электрического тока;  $\rho$  – плотность материала;  $F_m$  и  $F_e$  – члены, обозначающие вязкие и электрические силы соответственно. В случае установившейся струи электрически генерируемая сила является доминирующей, поэтому одномерное уравнение количества движения принимает вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\sigma E}{\rho r}, \quad (6)$$

где  $r$  – радиус струи вдоль осевой координаты  $x$  (рис. 1);  $\sigma$  – плотность поверхностного заряда;  $E$  – напряженность электрического поля в осевом направлении. Запишем уравнение баланса заряда

$$2r\sigma E + r^2 k E = I, \quad (7)$$

где  $I$  – сила тока;  $k$  – константа, которая в случае несжимаемого полимера зависит только от температуры. Отсюда получаем

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{E(I - r^2 k E)}{\rho r^2}. \quad (8)$$

Далее, введя в рассмотрение новую переменную  $v = -6\ln(u)$ , получаем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{6E(I - r^2 k E)}{\rho r^2} e^{v/2}. \quad (9)$$

Дифференцируя уравнение (9), с учетом  $dr/dx \ll 1$  [43] имеем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{3E(I - r^2 k E)}{\rho r^2} e^{v/2} \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

Объединяя оба уравнения, в итоге приходим к одномерному уравнению Брату

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda e^v = 0, \\ \lambda = -\frac{18E^2(I - r^2kE)^2}{\rho^2 r^4}. \end{cases} \quad (11)$$

**Некоторые подходы в приближенном решении начальной задачи Брату.**  
*Метод разложения Адомиана (Adomian decomposition method – ADM)* Данный метод [45–47] определяет функцию  $v(x)$  бесконечным рядом

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x), \quad (12)$$

где компоненты  $v_n(x)$  определяются рекуррентно. Нелинейный оператор  $F(v)$  может быть разложен в виде бесконечного ряда полиномов, задаваемых формулой

$$F(v) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (13)$$

где  $A_n$  – так называемые полиномы Адомиана, включающие функции  $v_0, v_1, v_2, \dots$  :

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d}{d\lambda^n} \left[ F \left( \sum_{i=0}^n \lambda^i v_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

или эквивалентно

$$\begin{aligned} A_0 &= F(v_0), \\ A_1 &= v_1 F'(v_0), \\ A_2 &= v_2 F'(v_0) + \frac{1}{2} v_1^2 F''(v_0), \\ A_3 &= v_3 F'(v_0) + v_1 v_2 F''(v_0) + \frac{1}{3} v_1^3 F'''(v_0), \\ A_4 &= v_4 F'(v_0) + \left( v_1 v_3 + \frac{1}{2} v_2^2 \right) F''(v_0) + \frac{1}{2} v_1^2 v_2 F'''(v_0) + \frac{1}{24} v_1^4 F^{(IV)}(v_0), \dots \end{aligned} \quad (15)$$

В настоящее время эти полиномы могут быть сгенерированы для всех классов нелинейности согласно специальным алгоритмам. В частности, один из таких альтернативных алгоритмов построения полиномов Адомиана представлен в работе [47].

Далее кратко изложим получение на основе ADM [48] решения задачи при  $\lambda = -2$ . Начнем с того, что уравнение (1) можно записать в операторной форме

$$\begin{aligned} Lv &= 2e^v, \\ v(0) &= v'(0) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где дифференциальный оператор  $L$  определен как

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (17)$$

Обратный оператор  $L^{-1}$  представляется двукратным интегральным оператором

$$L^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx. \quad (18)$$

Применяя обратный оператор  $L^{-1}$  к обеим частям уравнения (16) и используя начальное условие (2), получаем

$$v(x) = 2L^{-1}(e^v). \quad (19)$$

Подстановка (12) и (13) в функциональное уравнение (19) дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) = 2L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right), \quad (20)$$

где  $A_n$  – так называемые полиномы Адомиана нелинейного члена  $e^v$  дифференциального уравнения (1), определенные в [48] в виде

$$\begin{aligned} A_0 &= e^{v_0}, \\ A_1 &= v_1 e^{v_0}, \\ A_2 &= \left(v_2 + \frac{1}{2}v_1^2\right) e^{v_0}, \\ A_3 &= \left(v_3 + v_1v_2 + \frac{1}{6}v_1^3\right) e^{v_0}, \\ A_4 &= \left(v_4 + v_1v_3 + \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{1}{2}v_1^2v_2 + \frac{1}{24}v_1^4\right) e^{v_0}, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Приняв для нулевой компоненты  $v_0(x) = 0$ , остальные компоненты  $v_n(x)$ , ( $n \geq 1$ ) могут быть получены рекуррентно с помощью соотношения

$$v_{k+1}(x) = 2L^{-1}(A_k), \quad k \geq 0. \quad (22)$$

В свою очередь это дает

$$\begin{aligned} v_0(x) = 0 &\rightarrow v_1(x) = x^2 \rightarrow v_2(x) = \frac{1}{6}x^4 \rightarrow v_3(x) = \frac{2}{45}x^6 \rightarrow \\ \rightarrow v_4(x) = \frac{17}{1260}x^8 &\rightarrow v_5(x) = \frac{62}{14175}x^{10} \rightarrow v_6(x) = \frac{691}{467775}x^{12} \dots \end{aligned} \quad (23)$$

С учетом (13) решение  $v(x)$  принимает вид

$$v(x) = x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \frac{17}{1260}x^8 + \frac{62}{14175}x^{10} + \frac{691}{467775}x^{12} + \dots \quad (24)$$

Решение (24) ограничено областью  $0 \leq x \leq 1$ . Точное решение задачи (1), (2) имеет вид [48]

$$v^*(x) = -2\ln[\cos(x)]. \quad (25)$$

Если разложим в ряд Тейлора точное решение (25), то придем к степенному ряду (24). Для приближенного решения, описываемого полиномом

$$v(x) \cong \sum_{n=0}^{m=3} v_n(x) = x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{45}x^6, \quad (26)$$

построен график (рис. 2, а). Абсолютное отклонение приближенного решения от точного (25), определяемого формулой  $E = |v(x) - v^*(x)|$ , достигает максимального значения  $\sim 0,020$  (рис. 2, б).

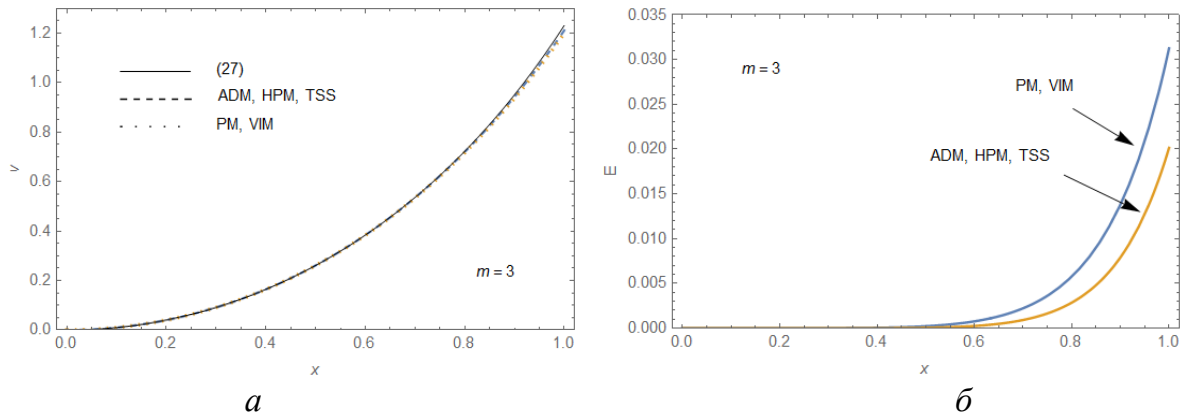


Рис. 2. Графики приближенных (ADM, HPM, TSS, PM, VIM) и точного (27) (сплошная линия) решений (а) и графики абсолютных отклонений (б)

Fig. 2. Graphs of the approximate solutions (ADM, HPM, TSS, PM, VIM) and the exact solution (27) (full line) (а) and of the absolute deviations of the approximate solutions from the exact one (б)

*Метод возмущений (Perturbation method – PM).* Этот метод хорошо известен [49] и одним из первых стал применяться при решении многих типов нелинейных задач прежде всего в таких областях как классическая механика, механика жидкости и газа, аэродинамика [50].

Следуя работе [51], будем предполагать, что нелинейный член в уравнении (1) представляет собой малое возмущение и что решение может быть выражено в виде степенного ряда по малому параметру:

$$v(x) = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \quad (27)$$

Подстановка (27) в (1) и приравнивание членов с равными степенями дает серию обыкновенных дифференциальных уравнений, которые можно рекурсивно проинтегрировать для определения функций  $v_0, v_1, v_2$  и т. д.

Обратившись к задаче Брату (1), (2), зададим  $\lambda = -2$ . Подстановка (27) в (1) дает

$$\begin{aligned} v'' - 2e^{\varepsilon u_0} &= 0, \\ v_0'' + \varepsilon v_1'' + \varepsilon^2 v_2'' - 2 \left( 1 + \varepsilon v_0 + \varepsilon^2 \frac{v_0''}{2} + \dots \right) &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Далее потребуем, чтобы члены одного порядка были равны друг другу:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: \quad v_0'' - 2 &= 0, & v_0(0) = v_0'(0) &= 0, \\ \varepsilon^1: \quad v_1'' - 2v_0 &= 0, & v_1(0) = v_1'(0) &= 0, \\ \varepsilon^2: \quad v_2'' - v_0^2 &= 0, & v_2(0) = v_2'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Решение системы уравнений (29) дает

$$v_0(x) = x^2, \quad v_1(x) = \frac{x^4}{6}, \quad v_2(x) = \frac{x^6}{30}, \quad \dots \quad (30)$$

Подставив (30) в (27), получим приближенное решение

$$v(x) \cong x^2 + \varepsilon \frac{x^4}{6} + \varepsilon^2 \frac{x^6}{30} + \dots \quad (31)$$

В работе [51] показано, что наиболее точная аппроксимация достигается при  $\varepsilon = 1$ . В частности, для  $m = 3$  имеем приближенное решение [51]

$$v(x) \cong x^2 + \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{30}. \quad (32)$$

Для полинома (32) построен график (рис. 2, а). По сравнению с решением на основе ADM здесь мы имеем гораздо худшую аппроксимацию (рис. 2, б).

*Гомотопический метод возмущений (Homotopy perturbation method – НРМ).* В 1998 г. Хе [52; 53] использовал основные идеи гомотопии в топологии, чтобы предложить общий аналитический метод – гомотопический метод возмущений (НРМ) для решения нелинейных задач. Этот метод успешно применялся в решении многих типов нелинейных задач (см., например, [54] и [55]). На практике НРМ представляет собой достаточно мощный и относительно простой в применении аналитический инструмент, которому не требуется наличие малых параметров в дифференциальных уравнениях. Для решения начальной задачи типа Брату (1), (2) в работе [56] применен метод с введением малого параметра и с разложением нелинейного члена уравнения в ряд Тейлора, основанный на методе НРМ [52].



Следуя авторам работы [56], применим НРМ для решения задачи (1)–(2), введя непосредственно в уравнение Брату (1) параметр  $p \in [0, 1]$  в виде

$$-v'' = \lambda e^{pv}, \quad (33)$$

$$v(0) = v'(0) = 0. \quad (34)$$

При  $p = 1$  уравнение (33) становится исходным. Отметим, что ввиду того, что  $p \in [0, 1]$ , так называемый параметр вложения  $p$  можно рассматривать как «малый параметр». Применив технику метода возмущений [57], будем предполагать, что решение уравнений (33), (34) может быть выражено в виде степенного ряда по параметру  $p$ :

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + p^3 v_3 + \dots \quad (35)$$

Положив  $p = 1$ , получим

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad (36)$$

Чтобы получить приближенное решение уравнения (33) с начальными условиями (34), разложим экспоненту  $e^v$  в ряд Тейлора:

$$e^v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{n!} = 1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + \dots \quad (37)$$

Подставив (35)–(37) в (33) и (34) и приравняв коэффициенты с одинаковыми степенями для параметра  $p$ , получаем:

$$\begin{aligned} p^0: & \quad -v_0'' = \lambda, & v_0(0) = v_0'(0) = 0, \\ p^1: & \quad -v_1'' = \lambda v_0, & v_1(0) = v_1'(0) = 0, \\ p^2: & \quad -v_2'' = \lambda \left( v_1 + \frac{1}{2} v_0^2 \right) = 0, & v_2(0) = v_2'(0) = 0, \\ p^3: & \quad -v_3'' = \lambda \left( v_2 + v_0 v_1 + \frac{1}{6} v_0^3 \right) = 0, & v_3(0) = v_3'(0) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Из уравнений (38) последовательно находим

$$v_0 = -\frac{\lambda}{2} x^2, \quad v_1 = \frac{\lambda^2}{24} x^4, \quad v_2 = -\frac{\lambda^3}{180} x^6, \quad v_4 = \frac{17\lambda^4}{20160} x^8, \quad v_5 = -\frac{31\lambda^5}{226800} x^{10}, \quad \dots \quad (39)$$

При  $\lambda = -2$  из (38) и (39) получаем приближенное решение в виде степенного ряда

$$v(x) = x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \frac{17}{1260}x^8 + \frac{62}{14175}x^{10} + \dots \quad (40)$$

Как видим, в итоге мы нашли приближенное решение, которое идентично решению (24), полученному в [48] на основе метода разложения Адомиана (ADM).

*Метод вариационной итерации (Variational Iteration Method – VIM).* Для иллюстрации основных положений метода вариационной итерации [58–60] рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L(v) + N(v) = g(x), \quad (41)$$

где  $L$  – линейный оператор;  $N$  – нелинейный оператор;  $g(t)$  – неоднородный член. Тогда можем построить корректно выполняемый функционал следующим образом:

$$v_{n+1}(x) = v_n(x) + \int_0^1 \lambda [Lv_n(s) + N\bar{v}_n(s) - g(s)] ds, \quad (42)$$

где  $\lambda$  – множитель Лагранжа [58; 59], который можно оптимально определить на основе вариационной теории. Второе слагаемое справа – это поправка, причем  $\bar{u}_n$  рассматривается как ограниченная вариация, т. е.  $\delta\bar{v}_n = 0$ . В нелинейном дифференциальном уравнении (42) нелинейный член  $N(u)$  может быть представлен в виде ряда Тейлора

$$N(v) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k. \quad (43)$$

Множитель Лагранжа  $\lambda$  в функционале (42) определяется с учетом граничных условий (2). В результате получаем

$$v_{n+1}(x) = v_n(x) + \int_0^1 \lambda \left[ Lv_n(s) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k(s) - g(s) \right] ds. \quad (44)$$

Применительно к задаче (1), (2) при  $\lambda = -2$  из (44) имеем итерационную формулу [32]

$$v_{n+1}(x) = v_n(x) + \int_0^1 (s-x) \left\{ v''(s) - 2 \left[ 1 + v + \frac{v^2}{2} \right] \right\} ds. \quad (45)$$

Из (45) последовательно находим

$$\begin{aligned} v_1(x) &= x^2, \\ v_2(x) &= x^2 + \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{30}, \\ v_3(x) &= x^2 + \frac{x^4}{6} + \frac{2x^6}{45} + \frac{x^8}{140} + \frac{17x^{10}}{16200} + \frac{x^{12}}{11880} + \frac{x^{14}}{163800}, \dots \end{aligned} \quad (46)$$

График приближенного решения (46) для  $v_2(x)$  полностью совпадает с аналогичным графиком для решения на основе РМ в виде полинома (32) (рис. 2, а). Аналогичное совпадение имеет место для абсолютного отклонения (рис. 2, б).

*Метод контролируемой вариационной итерации (Controlled Variational Iteration Method – CVIM).* Предложен новый алгоритм вариационной итерации для решения задачи типа Брату (1), (2) на основе ESP с введением ненулевого вспомогательного параметра  $\chi$ , управляющего областью сходимости. Данный подход устраняет сложности, которые имеют место в стандартных вариационно-итерационных алгоритмах, проиллюстрированных в работах [29; 38], и здесь не требуется аппроксимация экспоненциального члена посредством его разложения в ряд Тейлора. Правильный выбор вспомогательного параметра  $\chi$  приводит к более точной аппроксимации по сравнению со стандартным VIM.

Стандартная вариационная итерационная формула (42), примененная авторами [30; 33] для решения уравнения Брату, имеет два основных недостатка. Первый недостаток связан с уравнением Брату, которое усложняет формулу итерации ввиду сложности интегрирования (после первой итерации) вследствие присутствия нелинейного члена  $e^v$ . Практически все авторы, использовавшие VIM для решения уравнения Брату, преодолевали эту проблему, аппроксимируя нелинейный член  $e^v$  с помощью ряда Тейлора (37). Второй недостаток связан именно с самой схемой VIM, которая не предусматривает возможности повышения и контроля точности решения. Авторы работы [34] воспользовались примененным в [61] преобразованием дифференциального уравнения (1) посредством его умножения на  $v'(x)$  и интегрирования по области  $x \in [0,1]$ . Ими было получено уравнение

$$\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \lambda = 0. \quad (47)$$

Используя алгоритм (42), с учетом (47) и параметра  $\chi$  имеем [34]

$$v_{n+1}(x) = v_n(x) + \chi \int_0^1 (s-x) \left\{ \frac{d^2v_n(s)}{ds^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{dv_n(s)}{ds} \right)^2 + \lambda \right\} ds. \quad (48)$$

Из (48) для второй и третьей итераций получаем решения в виде [34]

$$v_2(x, \chi) = (2\chi - \chi^2)x^2 + \frac{1}{6}\chi^3x^4, \quad (49)$$

$$v_3(x, \chi) = (3\chi - 3\chi^2 + \chi^3)x^2 + \frac{1}{6}(5\chi^3 - 5\chi^4 + \chi^5)x^4 + \frac{1}{45}(4\chi^5 - 2\chi^6)x^6 + \frac{1}{252}\chi^7x^8. \quad (50)$$

Для решения (49), отвечающего второй итерации, был найден параметр  $\chi = 1,17$ , при котором абсолютная невязка уравнения (47) минимальная. Для третьей итерации (50) проведенные расчеты дают значение  $\chi = 1,163$  с окончательным решением

$$v(x) \cong 1.00433x^2 + 0.140936x^4 + 0.0791483x^6 + 0.0114198x^8. \quad (51)$$

График для абсолютного отклонения  $E(x)$  решения (52) представлен на рис. 3.

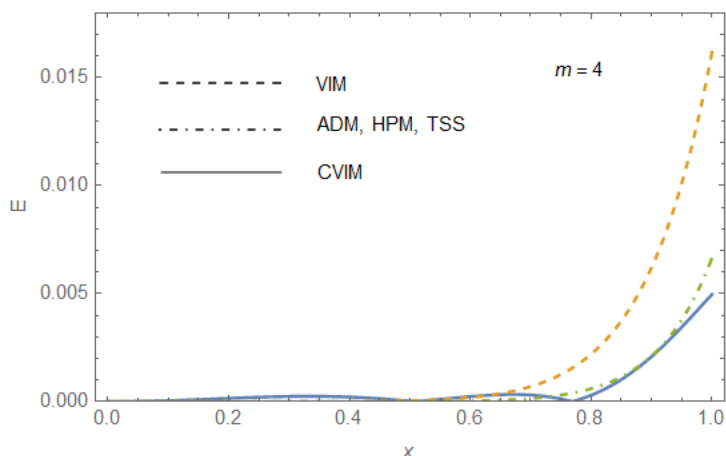


Рис. 3. Графики для абсолютных отклонений  
Fig. 3. Graphs of absolute deviations

Как видим, по сравнению со стандартным алгоритмом VIM здесь достигается достаточно существенное повышение аппроксимационной точности решения: максимальное отклонение уменьшается примерно в три раза. Однако если сравнить графики  $E(x)$  для VIM, ADM и HPM, то для всех данных решений получаются примерно одинаковые максимальные аппроксимационные ошибки.

**Новые приближенные решения начальной задачи типа Брату.** Ниже представлены некоторые новые варианты получения приближенных полиномиальных (Polynomial Solutions – PS) решений начально-краевой задачи Брату (1), (2).

*Применение разложения в ряд Тейлора (Taylor Series Solution – TSS).* В работе [62] краевая задача Брату решена методом разложения искомого решения в ряд Тейлора в точке  $x=0$  с граничными условиями  $v(0)=v(1)=0$ . Применим данный метод для решения начальной задачи Брату, т. е. с граничными условиями (2). Представим уравнение Брату в виде

$$v''(x) = \lambda e^v. \quad (52)$$

Далее продифференцируем многократно уравнение (52):

$$\begin{aligned} v^{(3)} &= \lambda e^v v', \\ v^{(4)} &= \lambda [(v')^2 + v''] e^v, \\ v^{(5)} &= \lambda [(v')^3 + 3v'v'' + v^{(3)}] e^v, \\ v^{(6)} &= \lambda [(v')^4 + 6(v')^2 v'' + 3(v'')^2 + 4v'v^{(3)} + v^{(4)}] e^v, \dots \end{aligned} \quad (53)$$

Для точки  $x=0$ , применив граничные условия (2), из (52) и (53) получаем

$$\begin{aligned} v''(0) = \lambda, \quad v^{(3)}(0) = 0, \quad v^{(4)}(0) = \lambda^2, \quad v^{(5)}(0) = 0, \quad v^{(6)}(0) = 4\lambda^3, \\ v^{(7)}(0) = 0, \quad v^{(8)}(0) = 34\lambda^4, \quad v^{(9)}(0) = 0, \quad v^{(10)}(0) = 496\lambda^5, \quad \dots \end{aligned} \quad (54)$$

Решение задачи в виде ряда Тейлора с учетом (54) запишем как

$$\begin{aligned} v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{(n)}(0)}{n!} x^n = v(0) + v'(0)x + \frac{1}{2!}v''(0)x^2 + \frac{1}{3!}v'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}v^{(4)}(0)x^4 + \dots = \\ = \frac{\lambda}{2!}x^2 + \frac{\lambda^2}{4!}x^4 + \frac{4\lambda^3}{6!}x^6 + \frac{34\lambda^4}{8!}x^8 + \frac{496\lambda^5}{10!}x^{10} + \dots \end{aligned} \quad (55)$$

В общем виде полученное решение (55) можно записать в виде

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(2k)!} \lambda^k x^{2k}. \quad (56)$$

Первые 10 значений коэффициента  $b_k$  в (56) приведены в следующей табл. 1.

Таблица 1. Коэффициенты полиномиального решения (34)

Table 1. Coefficients of the polynomial solution (34)

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$b_k$	1	1	4	34	496	11 056	349 504	14 873 104	819 786 496	56 814 228 736

При  $\lambda = 2$  из (56) с учетом данных табл. 1 получаем

$$v(x) = x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \frac{17}{1260}x^8 + \frac{62}{14175}x^{10} + \frac{691}{467775}x^{12} + \frac{21844}{42567525}x^{14} + \dots \quad (57)$$

Как видим, в итоге мы получили приближенное решение, идентичное решениям (24) и (40), полученным методами ADM и НРМ соответственно (рис. 2 и 3).

*Комбинированный метод.* В начальной задаче типа Брату (1), (2) отсутствие граничных условий для  $x=1$  приводит к существенному росту ошибки аппроксимации вблизи данной точки. Поэтому имеет смысл ввести в рассмотрение такие соотношения, которые каким-либо образом «задают» искомую функцию  $v(x)$ . и ее производную  $v'(x)$  в граничной точке  $x=1$ , т. е.

$$v(1) = a, \quad v'(1) = b. \quad (58)$$

Несмотря на то, что значения  $a$  и  $b$  в (58) не известны, мы можем тем не менее их «определить» посредством некоторых соотношений, о которых пойдет речь ниже.

Умножим уравнение (1) на  $v'(x)$  и проинтегрируем по области  $x \in [0, 1]$ :

$$\int_0^1 v''(x)v'(x) dx + \lambda \int_0^1 e^{v(x)} v(x) dx = 0. \quad (59)$$

В итоге получим

$$(e^{v(1)} - 1)\lambda + \frac{1}{2}v'(1)^2 = 0 \rightarrow (e^a - 1)\lambda + \frac{1}{2}b^2 = 0. \quad (60)$$

Отсюда находим

$$v'(1) = b = \sqrt{2\lambda(1 - A)} \quad (A = e^a). \quad (61)$$

Из соотношения  $A = e^a$  имеем для точки  $x = 1$

$$v(1) = a = \ln A. \quad (62)$$

Полученные соотношения (61) и (62) будем в дальнейшем использовать в виде дополнительных «граничных условий» для точки  $x = 1$  согласно (58).

Соотношения (61) и (62) содержат неизвестный параметр  $A$ . Для его определения применим интегральное соотношение, которое получим интегрированием уравнения (1), предварительно умноженного на  $(1 - x)$ . Применяв интегрирование по частям, приходим к определяющему интегральному соотношению

$$S(A) = \int_0^1 e^{v(x,A)}(1-x) dx \frac{\ln(A)}{\lambda} = 0. \quad (63)$$

Далее применим полученные соотношения (61)–(63) совместно с результатами решения задачи, например, на основе TSS. Искомое решение запишем в виде

$$v(x) \cong \sum_{n=1}^{m-2} a_n x^{2n} + C_1 x^{2(m-1)} + C_2 x^{2m} \quad (m = 3, 4, \dots). \quad (64)$$

Коэффициенты  $\{a_n\}_{n=1}^{m-2}$  соответствуют решениям, полученным одним из методов: ADM, НРМ, TSS. Тогда для входящих в (64) неизвестных коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  достаточно будет использовать «граничные условия» (61) и (62) с последующим применением интегрального соотношения (63). Получим приближенные решения при  $m = 3, 4, 5$  и  $6$ .

$N = 6$  ( $m = 3$ ). Запишем искомое приближенное решение задачи (1), (2) при  $\lambda = -2$  в виде полинома

$$v(x) \cong x^2 + C_1 x^4 + C_2 x^6. \quad (65)$$

Подстановка (65) в (61) и (62) дает систему линейных уравнений, из которой находим

$$C_1 = -2 - \sqrt{A-1} + 3\ln A, \quad C_2 = 1 + \sqrt{A-1} - 2\ln A. \quad (66)$$

Применив численное интегрирование (63) с учетом (65) и (66), получим зависимость  $S(A)$ . Для  $S(A)=0$  получаем  $A=3,42163$ . Отсюда, используя (66), находим коэффициенты

$$C_1 = 0,134193, \quad C_2 = 0,0959245. \quad (67)$$

В итоге, учитывая (65), приходим к приближенному решению в виде

$$v(x) \cong x^2 + 0,134193x^4 + 0,0959245x^6. \quad (68)$$

График решения (68) представлен на рис. 4, а. Отмечаем полное слияние графиков для приближенного и точного решений. График для абсолютного отклонения  $E(x)$  (по сравнению с другими решениями) представлен на рис. 4, б. Мы видим существенное снижение максимального абсолютного отклонения по сравнению с решениями на основе ADM, HPM, TSS.

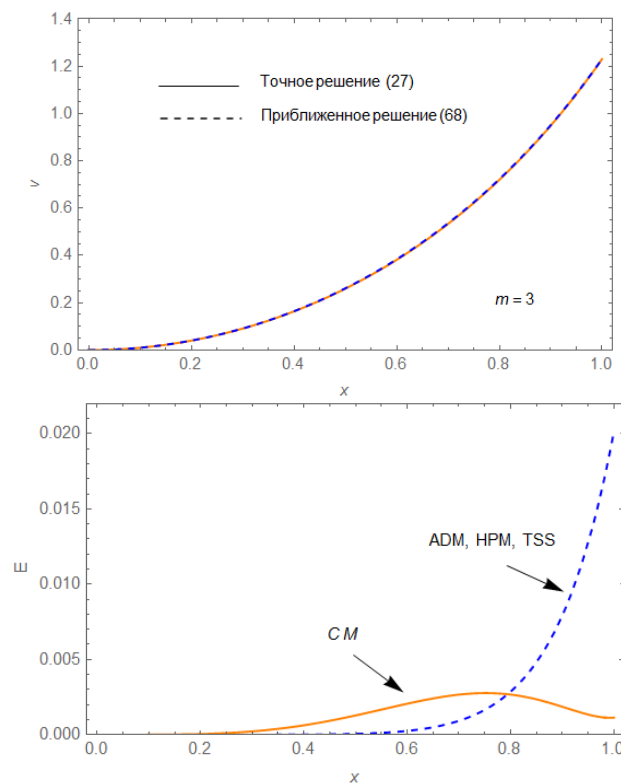


Рис. 4. Графики для точного (27) и приближенного (68) решений (а) и для абсолютных отклонений ADM, HPM, TSS и CM при  $m = 4$  (б)  
 Fig. 4. Graphs for the exact solution (27) and the approximate solution (68) (a) and for the absolute deviations of the ADM, HPM, TSS and CM solutions at  $m = 4$  from the exact one

$N = 8$  ( $m = 4$ ). Для решения в виде полинома степени  $N = 8$  из (64) имеем

$$v(x) \cong x^2 + \frac{x^4}{6} + C_1x^6 + C_2x^8. \quad (69)$$

Проведя аналогичные случаю  $m = 3$  вычисления, получаем

$$C_1 = -\frac{10}{3} - \sqrt{A-1} + 4 \ln A, \quad C_2 = \frac{13}{6} + \sqrt{A-1} - 3 \ln A. \quad (70)$$

Используя интегральное соотношение (63), находим  $A = 3,425$ , откуда из (7)

$$C_1 = 0,0338305, \quad C_2 = 0,030604. \quad (71)$$

Искомое решение из (69) получаем в виде следующего полинома:

$$v(x) = x^2 + \frac{x^4}{6} + 0,0338305x^6 + 0,030604x^8. \quad (72)$$

Аналогичным образом могут быть получены решения для более высокого порядка приближения. В частности, при  $N = 10$  и  $12$  соответственно находим

$$N = 10 \quad (m = 5): \quad A = 3,42543 \rightarrow \{C_1 = 0,0098682, \quad C_2 = 0,010248\}, \quad (73)$$

$$N = 12 \quad (m = 6): \quad A = 3,4255 \rightarrow \{C_1 = 0,00310123, \quad C_2 = 0,00354352\}. \quad (74)$$

Из (74) получаем следующие приближенные решения:

$$v(x) = x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + 0,0098682x^8 + 0,010248x^{10}, \quad (75)$$

$$v(x) = x^2 + \frac{x^4}{6} + \frac{2x^6}{45} + \frac{17x^8}{1260} + 0,00310123x^{10} + 0,00354352x^{12}. \quad (76)$$

Графики абсолютных отклонений полученных приближенных решений (68), (72), (75) и (76) представлены на рис. 5. Констатируем высокую сходимость данных приближенных решений, которые получены предложенным новым комбинированным методом.

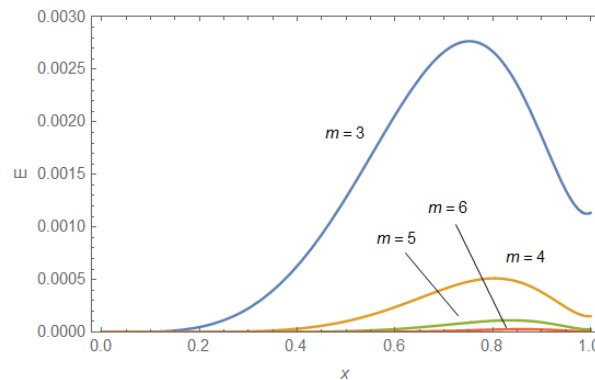


Рис. 5. Графики абсолютных отклонений  $E$  на основе комбинированного метода  
 Fig. 5. Graphs of the absolute deviations  $E$  of the approximate solutions, obtained by the combined method, from the exact one



### **Заключение.**

Для решения начальной задачи типа Брату, описывающей процесс электроспиннинга, проанализировано большинство основных приближенных аналитических и численно-аналитических методов, которые применялись многими исследователями. Показано, что среди данных методов следует особо выделить метод разложения Адомиана (ADM) и метод гомотопических возмущений (HPM). Данные приближенные методы дают достаточно точные аппроксимации начальной задачи типа Брату. В то же время метод возмущения (PM) и вариационно-итерационный метод (VIM) заметно уступают в точности методам ADM и HPM. Применение других «усовершенствований» рассмотренных методов, как правило, не дает каких-либо существенных преимуществ.

Среди них достаточно интересным и более точным выглядит метод контролируемой вариационной итерации (CVIM). В работе показано, что применение последовательного дифференцирования уравнения Брату в точке  $x = 0$  с применением формулы Тейлора в виде разложения в степенной ряд (TSS) позволяет достаточно легко получать аппроксимационное решение начальной задачи типа Брату, которое полностью идентично решениям, отвечающим методу разложения Адомиана (ADM) и гомотопическому методу возмущения (HPM). Использование комбинации TSS (ADM, HPM) и полученных новых дополнительных «граничных условий» для  $x = 1$  с привлечением специального интегрального соотношения позволяет очень существенно улучшить точность приближенных решений по сравнению со всеми рассмотренными методами, включая ADM и HPM, причем точность аппроксимационного решения повышается на порядок и более.

### **Литература**

1. Bratu, G. Sur les equations integrales non lineaires / G. Bratu // Bull. Soc. Math. France. – 1914. – Vol. 42. – P. 113–142.
2. Aris, R. The mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalyst / R. Aris. – Oxford University Press, 1975.
3. Bebernes, J. Mathematical Problems from Combustion Theory/ J. Bebernes, D. Eberly. –Springer-Verlag, 1989.
4. Ascher, U. M. Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations / U. M. Ascher, R. Matheij, R. D. Russell. – SIAM, Philadelphia, 1995.
5. Chui, C. K. A Mathematical Tool for Signal Analysis. Wavelets / C. K. Chui. – SIAM, Philadelphia, 1997.
6. Davis, H. T. Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations / H. T. Davis. – Dover, New York, 1962.
7. Frank-Kamenetski, D. A. Diffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics / D. A. Frank-Kamenetski. – Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1955.
8. Hassan, I. H. A. H. Applying differential transformation method to the onedimensional planar Bratu problem / I. H. A. H. Hassan, V. S. Erturk // Int. J. Contemp. Math. Sci. – 2007. – Vol. 2. – P. 1493–1504.
9. Caglar, H. Dynamics of the solution of Bratu's equation / H. Caglar [and other] // Nonlin. Anal. Theory Methods Appl. – 2009. – Vol. 71. – P. 672–678.

10. Chandrasekhar, S. Introduction to the Study of Stellar Structure / S. Chandrasekhar. – Dover, New York, 1967.
11. Hsiao, C. H. Haar wavelet approach to linear stiff systems / C. H. Hsiao // *Math. Comput. Simul.* 2004. – Vol. 64. – P. 561–567.
12. Jacobson, J. The Liouville–Bratu–Gelfand problem for radial operators / J. Jacobson, K. Schmitt. // *J. Differ. Equations.* – 2002. – Vol. 184. – P. 283–298.
13. Lepik, U. Numerical solution of evolution equations by the Haar wavelet method / U. Lepik // *Appl. Math. Comput.* – 2007. – Vol. 185. – P. 695–704.
14. Lepik, U. Numerical solution of differential equations using Haar wavelets / U. Lepik // *Math. Comput. Simul.* – 2005. – Vol. 68. – P. 127–143.
15. Mounim, A. S. From the fitting techniques to accurate schemes for the Liouville-Bratu-Gelfand problem / S. A. Mounim // *Numer. Methods Partial Differ. Equations.* – 2006. – Vol. 22. – P. 761–775.
16. Wazwaz, A. M. A new method for solving singular initial value problems in the second order differential equations / A. M. Wazwaz // *Appl. Math. Comput.* – 2002. – Vol. 128. – P. 47–57.
17. Boyd, J. P. Chebyshev polynomial expansions for simultaneous approximation of two branches of a function with application to the one-dimensional Bratu equation / J. P. Boyd // *Appl. Math. Comput.* – 2003. – Vol. 142. – P. 189–200.
18. Boyd, J. P. An analytical and numerical study of the two-dimensional Bratu equation / J. P. Boyd // *J. Sci. Comput.* – 1986. – Vol. 1. – P. 183–206.
19. Buckmire, R. Investigations of nonstandard Mickens-type finite difference schemes for singular boundary value problems in cylindrical or spherical coordinates / R. Buckmire // *Numer. Methods Partial Differ. Equations.* – 2003. – Vol. 19. – P. 380–398.
20. Buckmire, R. Application of Mickens finite difference scheme to the cylindrical Bratu Gelfand problem / R. Buckmire // *Numer. Methods Partial Differ. Equations.* – 2004. – Vol. 20. – P. 327–337.
21. Syam, M. I. An efficient method for solving Bratu equations / M. I. Syam, A. Hamdan // *Appl. Math. Comput.* – 2006. – Vol. 176. – P. 704–713.
22. Aksoy, Y. New perturbation iteration solutions for Bratu type equations / Y. Aksoy, M. Pakdemirli // *Comput. Math. Appl.* – 2010. – Vol. 59. – P. 2802–2808.
23. Wazwaz, A. M. A domain decomposition method for a reliable treatment of the Bratu type equations / A. M. Wazwaz // *Appl. Math. Comput.* – 2005. – Vol. 166. – P. 652–663.
24. Abbasbandy, S. The Lie group shooting method for solving the Bratu equation / S. Abbasbandy, M. S. Hashemi, C. S. Liu // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* – 2011. – Vol. 16. – P. 4238–4249.
25. Venkatesh, S. G. The Legendre wavelet method for solving initial value problems of Bratu type / S. G. Venkatesh, S. K. Ayyaswamy, S. R. Balachandar // *Comput. Math. Appl.* – 2012. – Vol. 63. – P. 1287–1295.
26. Salem, S. A. On solving Bratu's type equation by perturbation method / S. A. Salem, T. Y. Thanoon // *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* – 2022. – Vol. 13. – No 1. – P. 2755–2763.
27. Feng, X. Application of homotopy perturbation method to the Bratu-type equation / X. Feng, Y. He, J. Meng // *Topological Methods in Nonlinear Analysis.* – 2008. – Vol. 31. – P. 243–252.

28. He, J. H. Variational iteration method : New development and applications / J. H. He, X. H. Wu // *Computers & Mathematics with Applications*. – 2007. – Vol. 54. – P. 881–894.
29. He, J. H. Variational iteration method for Bratu-like equation arising in electrospinning / J. H. He [and other] // *Carbohydrate Polymers*. – 2014. – Vol. 105. – P. 229–230.
30. Saravi, M. Solution of Bratu's equation by He's variational iteration method / M. Saravi, M. Hermann, D. Kaiser // *American J. Comput. Appl. Math.* – 2013. – Vol. 3. – P. 46–54.
31. Jin, L. Application of modified variational iteration method to the Bratu-type problems / L. Jin // *Int. J. Contemp. Math. Sciences*. – 2010. – Vol. 5. – No. 4. – P. 153–158.
32. Abolarin, O. E. New improved variational homotopy perturbation method for Bratu-type problems / O. E. Abolarin // *American Journal of Computational Mathematics*. – 2013. – Vol. 3. – P. 110–113.
33. Batiha, B. Numerical solution of Bratu-type equations by the variational iteration method / B. Batiha // *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. – 2010. – Vol. 39. – P. 23–29.
34. Mousa, M. M. Controlled variational iteration method for Bratu equation arising in electro-spun organic nanofibers elaboration / M. M. Mousa // *British Journal of Mathematics & Computer Science*. – 2015. – Vol. 5. – No. 4. – P. 515–524.
35. Turkyilmazoglu, M. An optimal variational iteration method / M. Turkyilmazoglu // *Applied Mathematics Letters*. – 2011. – Vol. 24. – P. 762–765.
36. Khil, M. S. Electrospun nanofibrous polyurethane membrane as wound dressing / M. S. Khil [and other] // *J. Biomedical Materials Research Part B: Applied Biomaterials*. – 2003. – Vol. 67B. – No. 2. – P. 675–679.
37. Taylor, G. Electrically driven jets / G. Taylor // *Proceedings of the Royal Society A*. – 1969. – Vol. 313.
38. Colantonia, A. Electro-spun organic nanofibers elaboration process investigations using comparative analytical solutions / A. Colantonia, K. Boubakerb // *Carbohydrate Polymers*. – 2014. – Vol. 101. – P. 307–312.
39. Jacobson, M. *The Nonwovens Industry meets the Filtration Business* / M. Jacobson. – Nonwovens Industry, 1991.
40. Li, W. J. Electrospun nanofibrous structure: a novel scaffold for tissue engineering / W. J. Li [and other] // *J. Biomed. Mater. Res.* – 2002. – Vol. 60. – P. 613–621.
41. Wan, Yu-Qin. Thermo-electro-hydrodynamic model for electrospinning process / Yu-Qin Wan, Q. Guo, N. Pan // *Int. J. Nonlinear Sci. and Num. Simulat.* – 2004. – Vol. 5. – No 1. – P. 5–8.
42. Spivak, A. F. Asymptotic decay of radius of a weakly conductive viscous jet in an external electric field / A. F. Spivak, Y. A. Dzenis // *Applied Physics Letters*. – 1998. – Vol. 73. – No. 21. – P. 3067–3069.
43. Spivak, A. F. A model of steady state jet in the electrospinning process / A. F. Spivak, Y. A. Dzenis, D. H. Reneker // *Mech. Research Communications*. – 2000. – Vol. 27. – No 1. – P. 37–42.
44. Jafar, H. Electro-spunorganic nanofibers elaboration process investigations using BPs operational matrices / H. Jafar, H. Tajadod // *Iranian J. of Mathematical Chemistry*. – 2016. – Vol. 7. – No.1.– P. 19– 27.

45. Adomian, G. Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method / G. Adomian. – Kluwer, Boston, 1994.
46. Adomian, G. A review of the decomposition method in applied mathematics / G. Adomian // *J. of Mathematical Analysis and Application*. – 1988. – Vol. 135. – P. 501–544.
47. Wazwaz, A. M. A new algorithm for calculating Adomian polynomials for non-linear operators / A. M. Wazwaz // *Applied Mathematics and Computation*. – 2000. – Vol. 111. – P. 53–69.
48. Wazwaz, A. M. Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations / A. M. Wazwaz // *Applied Mathematics and Computation*. – 2005. – Vol. 166. – P. 652–663.
49. Holmes, M. H. Introduction to Perturbation Methods. Springer-Verlag / M. H. Holmes. – New York, 1995.
50. Chow, T. L. Classical Mechanics / T. L. Chow. – John Wiley and Sons Inc., USA, 1995.
51. Salema, S. A. On solving Bratu's type equation by perturbation Method / S. A. Salema, T. Y. Thanoon // *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* – 2022. – Vol. 13. – No. 1. – P. 2755–2763.
52. He, J. H. Homotopy perturbation technique / J. H. He // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 1999. – Vol. 178. – P. 257–262.
53. He, J. H. Newton-like iteration method for solving algebraic equation / J. H. He // *Comm. Nonlinear Sci. Num. Simul.* – 1998. – Vol. 3. – P. 106–109.
54. Abd El-Latif, G. M. A homotopy and a perturbation technique for non-linear problems / G. M. Abd El-Latif // *Appl. Math. Comput.* – 2005. – Vol. 169. – P. 576–588.
55. Ghorri, Q. K. Application of homotopy perturbation method to squeezing flow of a Newtonian fluid / Q. K. Ghorri, M. Ahmed, A. M. Siddiqui // *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* – 2007. – Vol. 8. – P. 179–184.
56. Xinlong Feng, X. Application of homotopy perturbation method to the Bratu-type equations / X. Xinlong Feng, Y. He, J. Meng // *Topological Methods in Nonlinear Analysis*. – 2008. – Vol. 31. – P. 243–252.
57. Nayfeh, A. H. Perturbation Methods / A. H. Nayfeh. – Wiley, New York, 2000.
58. He, J. H. Homotopy Perturbation method for bifurcation of nonlinear problems / J. H. He // *Int. J. of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. – 2005. – Vol. 6. – No. 2. – P. 207–208.
59. He, J. H. Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations / J. H. He // *Int. J. of Modern Physics B*. – 2006. – Vol. 20. – No. 10. – P. 1141–1199.
60. He, J. H. Variational iteration method for delay differential equations / J. H. He // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 1997. – Vol. 2. – No. 4. – P. 235–236.
61. Hassan, H. N. Analytic approximate solution for the Bratu's problem by optimal homotopy analysis method / H. N. Hassan, M. S. Semary // *Communications in Numerical Analysis*. – 2013. – P. 1–14.
62. He, Chun-Hui. Taylor series solution for fractal Bratu-type equation arising in electrospinning process / Chun-Hui He, Y. Shen, F. Y. Ji, J. H. He // *Fractals*. – 2019. – Vol. 28. – No 1.