БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Филиал Белорусского национального технического университета,
г. Солигорск
Кафедра «Технологии и оборудование разработки месторождений полезных ископаемых»

СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой
__________Я.Л. Городецкий
«___» _________________

СОГЛАСОВАНО
Директор филиала БНТУ,
г. Солигорск
__________С.Н. Речиц
«___» _________________

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

# «ИНЖЕНЕРНАЯ И ГОРНАЯ ГРАФИКА»

для специальностей 1-51 02 01 «Разработка месторождений полезных ископаемых (по направлениям)», 7-07-0724-01 «Разработка месторождений полезных ископаемых»

Составитель:
А.И. Николайчик, к.т.н., доцент кафедры «Технологии и оборудование разработки месторождений полезных ископаемых» филиала БНТУ, г. Солигорск.

Рассмотрено и утверждено
на заседании Совета филиала БНТУ, г. Солигорск «___» _________________, протокол № ___

г. Минск, 2024 г.

# СОДЕРЖАНИЕ

# ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Электронный учебно-методический комплекс (далее – ЭУМК) по учебной дисциплине «Инженерная и горная графика» разработан для специальностей 1-51 02 01 «Разработка месторождений полезных ископаемых (по направлениям)», 7-07-0724-01 «Разработка месторождений полезных ископаемых».

Целью изучения дисциплины является развитие пространственного представления и воображения, конструктивно-геометрического, абстрактного и логического мышления, способностей к анализу и синтезу пространственных форм и отношений на основе графических моделей пространства, практически реализуемых в виде чертежей конкретных пространственных объектов и зависимостей, знание общих методов построения и чтения чертежей; решение большого числа разнообразных инженерно-геометрических задач, возникающих в процессе проектирования, конструирования, изготовления и эксплуатации различных строительных объектов – зданий и сооружений, строительных и инженерных конструкций, знание стандартов ЕСКД и СПДС.

Основными задачами изучения дисциплины «Инженерная и горная графика» являются:

– владение методами построения изображений, получаемых по методу параллельного, прямоугольного и центрального проецирования;

– умение использовать условные и упрощенные графические изображения при выполнении технических чертежей, и в том числе строительных;

– приобретение навыков чтения технических, и в том числе строительных чертежей;

– развитие пространственного и логического мышления и умение разрабатывать и использовать соответствующие алгоритмы для решения задач.

Дисциплина «Инженерная и горная графика» является фундаментальной дисциплиной в подготовке инженеров горных специальностей. Проектирование зданий и сооружений, рудников и шахт, изготовление изделий и конструкций, разработка и применение новых технологий в строительстве и в горном деле связаны с изображениями: чертежами, рисунками, эскизами. Прогресс горной отрасли, использование новейших технологий и материалов, увеличение объемов добычи полезных ископаемых, проектирование комплексов, расчетов машин, механизмов, их деталей и узлов, деталей машин, строительство рудников и шахт, требует новых подходов при разработке проектной документации и в первую очередь – рабочих чертежей и пространственных моделей.

Важнейшим вопросом в подготовке будущего специалиста является активизация самостоятельной работы студента. Кроме своей основной цели – усвоение учебной информации, самостоятельная работа должна способствовать развитию у студентов познавательных интересов, инициативы, творческих способностей и творческого мышления, самостоятельности в своих действиях, в том числе работы с нормативной литературой, умения рационально использовать учебное время.

Самостоятельная работа включает: систематическую проработку и закрепление нового материала, излагаемого преподавателем на лекциях и практических занятиях; изучение нормативно-технической документации стандартов ЕСКД, СПДС, СТБ, СНБ, Еврокодов; выполнение индивидуальных домашних расчетно-графических работ (РГР); подготовку к текущим контрольным работам, экзамену и к зачету; участие в смотрах-конкурсах на лучшую графическую работу; участие в студенческих научно-технических конференциях.

Дисциплина «Инженерная и горная графика» обеспечивает обучающихся знаниями в области графических дисциплин, на базе которых он сможет успешно изучать сопротивление материалов, теоретическую механику, детали машин, проектирование рудников и шахт, строительные конструкции и другие конструкторско-технологические и специальные дисциплины, а также овладевать новыми знаниями в области компьютерной графики, геометрического моделирования и др.

В результате изучения учебной дисциплины «Инженерная и горная графика» обучающийся должен:

**знать:**

– способы образования чертежей по методу проецирования;

– топографические поверхности местности с плоскостями и поверхностями горных выработок;

– линейную перспективу;

– геометрическое формообразование машиностроительных деталей;

– методы проецирования в заданных системах плоскостей проекций точки, прямой, плоскости и поверхности;

– признаки параллельности и перпендикулярности прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей;

– поверхности и способы их задания на чертеже, развертки поверхностей;

– основные принципы построения пересечения геометрических фигур;

– способы преобразования чертежа;

– способы решения на чертежах основных метрических и позиционных задач;

– алгоритмы построения границ земляных работ в проекциях с числовыми отметками;

– правила оформления чертежей (стандарты) и основные условности, и упрощения, используемые на чертежах машиностроительного и строительного профиля;

– основные виды изображений – виды, разрезы и сечения;

– методы построения эскизов, чертежей стандартных деталей, разъемных и неразъемных соединений деталей и сборочных единиц;

– правила выполнения и оформления чертежей (планов, разрезов, выносных элементов, чертежей строительных конструкций и изделий, специальных чертежей инженерных коммуникаций);

**уметь:**

– строить проекционные изображения пространственных геометрических форм на плоскости, топографические поверхности и перспективу;

– выполнять и читать горные, строительные и машиностроительные чертежи;

– выполнять чертежи средствами компьютерной графики;

– выполнять на чертеже основные изображения геометрических фигур;

– решать позиционные, метрические и комплексные задачи;

– выполнять построения на однокартинных чертежах;

– пользоваться государственными стандартами и справочниками;

– применять условные графические изображения и обозначения на горных чертежах;

**владеть:**

– методами построения проекционных изображений пространственных геометрических форм на плоскости;

– навыками прочтения горных и строительных чертежей;

– знаниями государственных стандартов по оформлению горных, строительных и машиностроительных чертежей;

– методами представления деталей, планов, разрезов и фасадов зданий;

– навыками чтения строительных чертежей;

– правилами оформления строительной документации.

**Особенности структурирования и подачи учебного материала**

ЭУМК включает учебные, научные и методические материалы по учебной дисциплине «Инженерная и горная графика». Состоит из четырех разделов: теоретического, практического, контроля знаний, вспомогательного.

Теоретический раздел ЭУМК содержит материалы для теоретического изучения дисциплины в объеме, установленном учебными планами и учебными программами для специальностей 1-51 02 01 «Разработка месторождений полезных ископаемых (по направлениям)», 7-07-0724-01 «Разработка месторождений полезных ископаемых».

В практическом разделе ЭУМК приведены методические указания для студентов по выполнению расчетно-графической работы, а также расчетно-графические индивидуальные задания.

Раздел контроля знаний включает вопросы для подготовки к сдаче зачета и экзамена.

Во вспомогательный раздел входит перечень литературных источников.

Предложенные материалы являются теоретической основой для изучения учебной дисциплины «Инженерная и горная графика».

**Рекомендации по организации работы с ЭУМК**

Электронный документ открывается в среде Windows на IBM PC – совместимом персональном компьютере стандартной конфигурации.

# I ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

## «Начертательная геометрия»

## Тема 1 Введение в начертательную геометрию

### 1.1 Общие правила оформления чертежей. Обзор стандартов

Как вам уже известно, при выполнении и оформлении чертежей руководствуются едиными правилами, обязательными для всех предприятий, организаций, учебных заведений. Поэтому чертежи изделий нельзя по-разному читать или выполнять. Чертежи должны понимать все специалисты, которые участвуют в изготовлении и ремонте изделий. Правила выполнения и оформления чертежей объединены в единую систему конструкторской документации (ЕСКД).

ЕСКД – комплекс стандартов, устанавливающих взаимосвязанные нормы и правила по разработке, оформлению и обращению конструкторской документации, разрабатываемой и применяемой на всех стадиях жизненного цикла изделия (при проектировании, изготовлении, эксплуатации, ремонте и др).

Основное назначение стандартов ЕСКД состоит в установлении единых оптимальных правил выполнения, оформления и обращения конструкторской документации, которые обеспечивают:

1) применение современных методов и средств при проектировании изделий;

2) возможность взаимообмена конструкторской документацией без ее переоформления;

3) оптимальную комплектность конструкторской документации;

4) механизацию и автоматизацию обработки конструкторских документов и содержащейся в них информации;

5) высокое качество изделий;

6) наличие в конструкторской документации требований, обеспечивающих безопасность использования изделий для жизни и здоровья потребителей, окружающей среды, а также предотвращение причинения вреда имуществу;

7) возможность расширения унификации и стандартизации при проектировании изделий;

8) возможность проведения сертификации изделий;

9) сокращение сроков и снижение трудоемкости подготовки производства;

10) правильную эксплуатацию изделий;

11) оперативную подготовку документации для быстрой переналадки действующего производства;

12) упрощение форм конструкторских документов и графических

изображений;

13) возможность создания единой информационной базы автоматизированных систем (САПР, АСУП и др.);

14) гармонизацию с соответствующими международными стандартами.

Для выполнения чертежей необходимы:

а) бумага чертежная (ватман, миллиметровка);

б) набор чертежных инструментов (циркуль, измеритель, линейка, угольник, транспортир и т. п.);

в) карандаши.

Карандаши подразделяются на твердые, средней твердости и мягкие. Твердые карандаши маркируются буквой Т или Н, мягкие – М или В, средней твердости – ТМ или НВ. Степень мягкости или твердости карандаша определяется цифрой, стоящей перед буквой. На разных стадиях выполнения чертежа применяют карандаши различной твердости.

Каждому стандарту присваивается свой номер и год регистрации (например, ГОСТ 2.109-73 ЕСКД. Основные требования к чертежам).

Познакомимся с основными стандартами ЕСКД, устанавливающими правила оформления чертежей.

## 1.2 ГОСТ 2.301-68 «Форматы» листов чертежей

Для удобства хранения чертежей их выполняют на листах бумаги определенного размера, называемого форматом. Формат листа определяется размерами его сторон.

Стандартом ГОСТ 2.301-68 ЕСКД. Форматы установлен ряд основных и дополнительных форматов (рисунок 1.1).

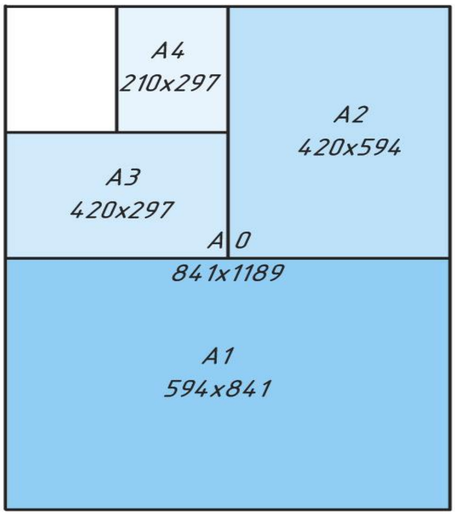



Рисунок 1.1 – Форматы листов чертежей

Форматы листов определяются размерами внешней рамки и обозначаются заглавной буквой А и цифрой. Часто используют формат А4, размеры сторон которого 210×297 мм или А3 с размерами 420×297 мм.

При выводе документа в электронной форме на бумажный носитель с размерами сторон листа, совпадающими с указанными в таблице 1.1, внешнюю рамку формата допускается не выполнять. Если размеры сторон листа, больше указанных в таблице 1.1, то внешняя рамка формата должна быть воспроизведена.

Таблица 1.1 – Обозначение и размеры форматов

| **Обозначение формата** | **Размеры сторон формата, мм** |
|---|---|
| А0 | 841×1189 |
| А1 | 594×841 |
| А2 | 420×594 |
| А3 | 297×420 |
| А4 | 210×297 |

Формат с размерами сторон 1189×841 мм, площадь которого равна 1 м, и другие форматы, полученные путем последовательного деления его на две равные части параллельно меньшей стороне соответствующего формата, принимаются за основные.

Обозначения и размеры сторон основных форматов должны соответствовать указанным в таблице 1.

Допускается применение дополнительных форматов, образованных увеличением коротких сторон основных форматов на величину, кратную их размерам (2, 3 ... 9), например дополнительный формат А3×4 имеет размеры (420×1189). Все форматы за исключением А4 могут располагаться как вертикально, так и горизонтально. Формат А4 располагается только вертикально.

### 1.3 Основная надпись чертежа (штамп)

Каждый чертеж оформляется рамкой и основной надписью. Рамка ограничивает поле чертежа. Ее проводят сплошной толстой линией на расстоянии 20 мм от левой границы формата и на расстоянии 5 мм от верхней, нижней и правой границ (рисунок 1.2).

Согласно стандарту ГОСТ 2.301-68 формат А4 чаще всего располагают вертикально. Листы других форматов могут располагаться как вертикально, так и горизонтально. Однако в учебных целях располагают формат А4 как вертикально, так и горизонтально.

В правом нижнем углу формата над рамкой размещают основную надпись. Форму, размеры и содержание основной надписи устанавливает стандарт ГОСТ 2.104-68 ЕСКД. Основные надписи. Для производственных чертежей основная надпись выглядит следующим образом (рисунок 1.3).

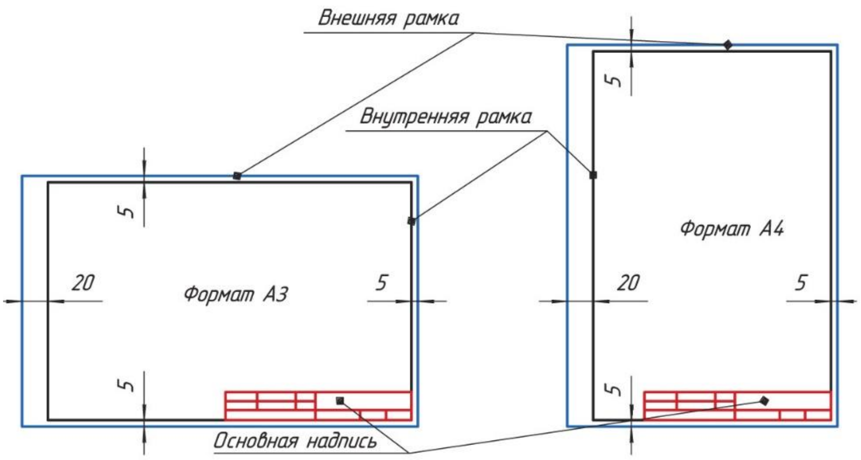



Рисунок 1.2 – Оформление рамки чертежа

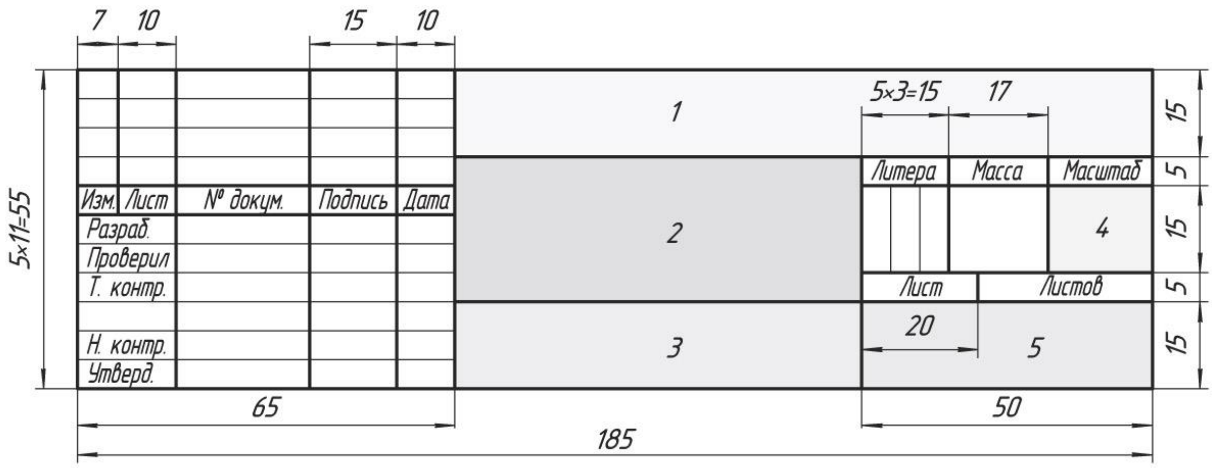



Рисунок 1.3 – Основная надпись производственного чертежа (штамп)

Для учебных чертежей размеры основной надписи стандартами не регламентируются. Основная надпись учебного чертежа, которую выполняют занятиях, имеет размеры, указанные на рисунке 1.4. Рамка основной надписи также выполняется сплошной толстой линией.

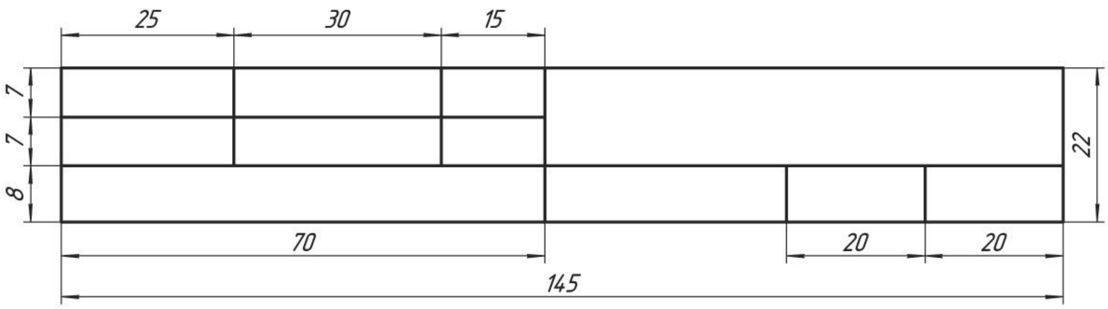
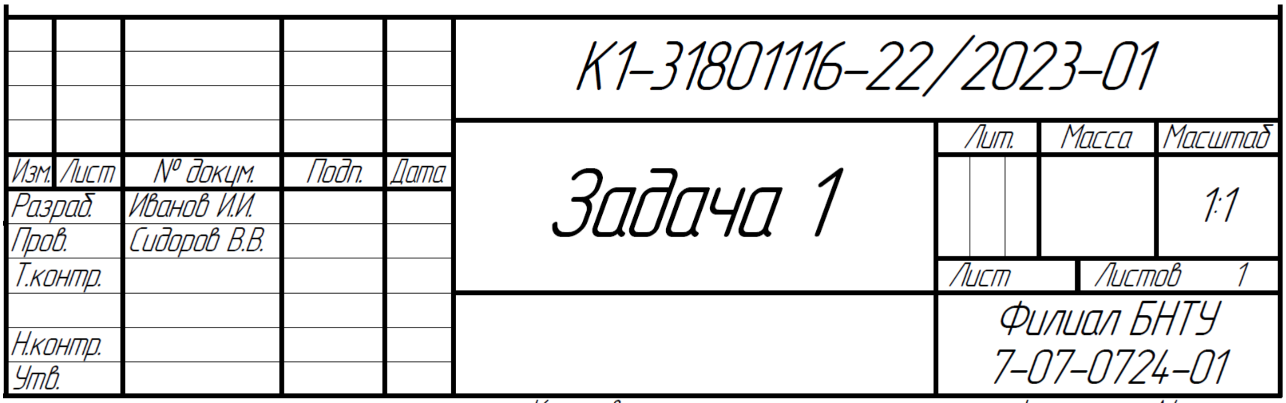



Рисунок 1.4 – Размеры основной надписи учебного чертежа

В основной надписи чертежным шрифтом (его мы рассмотрим позже) указывается: наименование изделия, фамилия студента и преподавателя, дата приемки чертежа, масштаб изображения, обозначение материала детали, учебное заведение, номер группы, студенческого билета, номер задания.

Буквы и цифры в основной надписи, как и на всем чертеже, выполняют чертежным шрифтом.

Содержание, расположение и размеры граф основной надписи для учебных чертежей представлены на рисунке 1.5.




К – контрольная работа; 1 – контрольная работа №1; 31801116 – шифр группы;
22 – № варианта; 2023 – год выполнения работы; 01 – № листа;
7-07-0724-01 – шифр специальности

Рисунок 1.5 – Образец заполнения рамки

Запись ведется в именительном падеже единственного числа. Если название состоит из двух слов и более, то первое слово должно быть именем существительным, например «Разрез простой»; обозначение; масштаб; порядковый номер листа (графу не заполняют на документах, выполненных на одном листе); общее количество листов документа (графу заполняют на первом листе); литера документа; фамилии; подписи; дата подписи документа; наименование, индекс предприятия; обозначение материала (заполняется на чертежах деталей).

Все графы, кроме подписей и дат, заполняются карандашом, стандартным шрифтом. Необходимо обратить внимание на то, что на изображении основной надписи присутствуют основные и тонкие линии.

### 1.4 Масштабы (ГОСТ 2.302-68)

Масштаб – это отношение размеров изображенного на чертеже предмета к его действительным размерам.

При выполнении чертежа обязательно применение масштаба. ГОСТ 2.302-68 предусматривает следующие масштабы (таблица 1.2).

При проектировании генеральных планов крупных объектов допускается применять масштабы 1:2000; 1:5000; 1:10000; 1:20000; 1:25000; 1:50000. В необходимых случаях допускается применять масштабы увеличения (100п):1, где п – целое число.

Таблица 1.2 – Масштабы

| | |
|---|---|
| Масштабы уменьшения | 1:2, 1:2,5; 1:4, 1:5, 1:10, 1:15, 1:20, 1:25, 1:40, 1:50, 1:75, 1:100, 1:200, 1:400, 1:500, 1:800, 1:1000 |
| Натуральная величина | 1:1 |
| Масштабы увеличения | 2:1, 2,5:1, 4:1, 5:1, 10:1, 20:1, 40:1, 50:1, 100:1 |

Масштаб, указанный в предназначенной для этого графе основной надписи чертежа, должен обозначаться по типу 1:14 1:2; 2:1 и т.д. Если масштаб какого-либо изображения отличается от масштаба, указанного в основной надписи, то, согласно ГОСТ 2.316-68 «Правила нанесения на чертежах надписей, технических требований и таблиц», непосредственно после надписи, относящейся к изображению, например: А-А (2:1); Б (1:5), А (1:1).

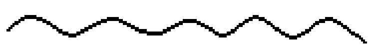
Предпочтительным является масштаб 1:1.

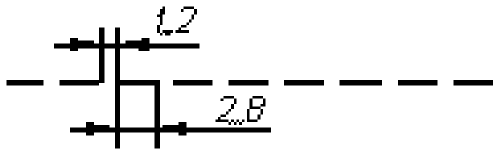
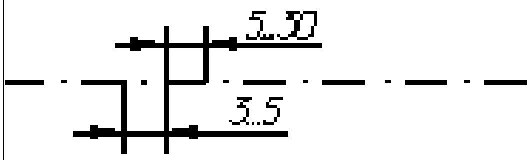
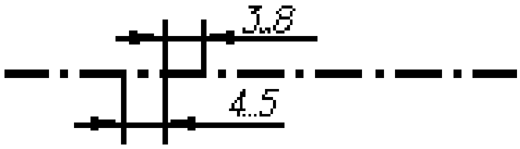
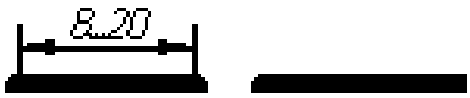
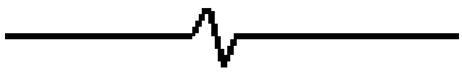
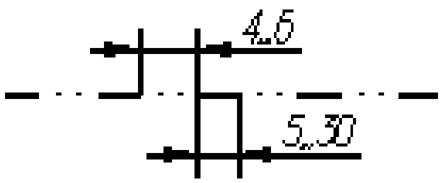
### 1.5 ГОСТ 2.303-68 «Линии»

Линия является основным элементом чертежа. Различаются линии между собой по типу и по толщине (таблица 1.3).

Толщина сплошной основной линии *S* должна быть в пределах от 0,5 до 1,4 мм в зависимости от величины и сложности изображения, а также от формата чертежа.

Таблица 1.3 – Типы и толщины линий

| **Описание** | **Изображение** |
|---|---|
| **1** | **2** |
| Сплошная толстая линия применяется для изображения видимого контура предмета, контура вынесенного сечения и входящего в состав разреза. |  |
| Сплошная тонкая линия применяется для изображения размерных и выносных линий, штриховки сечений, линии контура наложенного сечения, линии-выноски. |  |
| Сплошная волнистая линия применяется для изображения линий обрыва, линии разграничения вида и разреза. |  |

| 1 | 2 |
|---|---|
| Штриховая линия применяется для изображения невидимого контура. Длина штрихов должна быть одинаковая.<br>Длину следует выбирать в зависимости от величины изображения, примерно от 2 до 8 мм, расстояние между штрихами 1...2 мм. |  |
| Штрихпунктирная тонкая линия применяется для изображения осевых и центровых линий, линий сечения, являющихся осями симметрии для наложенных или вынесенных сечений. Длина штрихов должна быть одинаковая. Расстояние между штрихами рекомендуется брать 2...3 мм. |  |
| Штрихпунктирная утолщенная линия применяется для изображения элементов, расположенных перед секущей плоскостью («наложенная проекция»), линий, обозначающих поверхности, подлежащие термообработке или покрытию. |  |
| Разомкнутая линия применяется для обозначения линии сечения. Длина штрихов берется 8...20 мм в зависимости от величины изображения. |  |
| Сплошная тонкая линия с изломами применяется при длинных линиях обрыва. |  |
| Штрихпунктирная линия с двумя точками применяется для изображения деталей в крайних или промежуточных положениях; линии сгиба на развертках. |  |

**1.6 ГОСТ 2.304-81 «Шрифты чертежные»**

Надписи на чертежах и других конструкторских документах, выполненных от руки, должны соответствовать ГОСТ 2.304-81.

Размер шрифта $h$ – величина, определенная высотой прописных букв в миллиметрах.

Высота прописных букв $h$ измеряется перпендикулярно к основанию строки.

Устанавливаются следующие размеры шрифта:1,8; 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14; 20; 28; 40.

ГОСТ 2.304-81 устанавливает четыре типа шрифта:

– тип А без наклона ($d = h/14$) (рисунок 1.9, рисунок 1.13, рисунок 1.17);

– тип А с наклоном около 75° ($d = h/14$) (рисунок 1.8, рисунок 1.12, рисунок 1.16);

– тип Б без наклона ($d = h/10$) (рисунок 1.11, рисунок 1.15, рисунок 1.19);

– тип Б с наклоном около 75° ($d = h/10$) (рисунок 1.10, рисунок 1.14, рисунок 1.18).

Тип определяется параметрами шрифта: расстояниями между буквами, минимальный шаг строк, минимальное расстояние между словами и толщина линий шрифта.

Параметры в зависимости от размера шрифта приведены в таблице 1.4.

Таблица 1.4 – Параметры шрифта

| Параметры шрифта | | Обозначение | Размеры в мм | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Размер шрифта | | $h$ | 1,8 | 2,5 | 3,5 | 5 | 7 | 10 | 14 | 20 | 28 | 40 |
| Высота прописных букв и цифр | | $h$ | 1,8 | 2,5 | 3,5 | 5 | 7 | 10 | 14 | 20 | 28 | 40 |
| Высота строчных букв | | $c$ | 1,3 | 1,8 | 2,5 | 3,5 | 5 | 7 | 10 | 14 | 20 | 28 |
| Толщина линий шрифта | А | $d$ | – | 0,18 | 0,25 | 0,35 | 0,5 | 0,7 | 1,0 | 1,4 | 2,0 | 2,8 |
| | Б | | 0,18 | 0,25 | 0,35 | 0,5 | 0,7 | 1,0 | 1,4 | 2,0 | 2,8 | 4,0 |
| Ширина буквы | А | $g$ | – | 1,1 | 1,5 | 2,1 | 3 | 4,2 | 6 | 8,4 | 12 | 16,8 |
| | Б | | 1,1 | 1,5 | 2,1 | 3 | 4,2 | 6 | 8,4 | 12 | 16,8 | 24 |
| Расстояние между буквами | А | $a$ | – | 0,35 | 0,5 | 0,7 | 1,0 | 1,4 | 2,0 | 2,8 | 4,0 | 5,7 |
| | Б | | 0,35 | 0,5 | 0,7 | 1,0 | 1,4 | 2,0 | 2,8 | 4,0 | 5,7 | 8 |
| Минимальный шаг строк | А | $b$ | – | 4,0 | 5,5 | 8,0 | 11,0 | 16,0 | 22,0 | 31,0 | 44 | 61,6 |
| | Б | | 3,1 | 4,3 | 6,0 | 8,5 | 12,0 | 17,0 | 24,0 | 34,0 | 47,6 | 68 |
| Минимальное расстояние между словами | А | $e$ | – | 1,1 | 1,5 | 2,1 | 3 | 4,2 | 6 | 8,4 | 12 | 16,8 |
| | Б | | 1,1 | 1,5 | 2,1 | 3 | 4,2 | 6 | 8,4 | 12 | 16,8 | 24 |

На учебных чертежах рекомендуется использовать шрифт типа Б с наклоном (для размерных чисел и всех надписей).

Шрифты выполняются с использованием вспомогательной сетки (рисунок 1.6). Сетку строят тонкими, едва заметными линиями остро заточенным карандашом марки Т. Это позволяет выдерживать конструкцию букв и цифр.

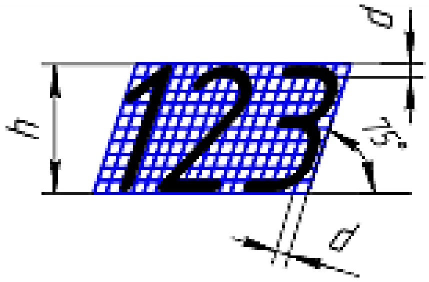



Рисунок 1.6 – Образец шрифта

Начертание букв по сетке делают карандашом марки ТМ или М тонкими линиями от руки на глаз. Проверив правильность начертания букв, обводят их карандашом, стараясь выдержать толщину обводки. Обводить буквы нужно так, чтобы линии обводки не выходили за габаритные размеры букв. Рука при обводке должна идти слева направо и сверху вниз (рисунок 1.7).

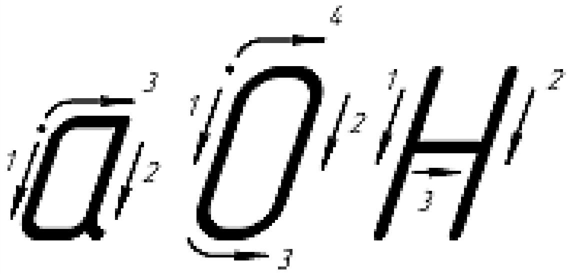



Рисунок 1.7 – Образец начертания букв

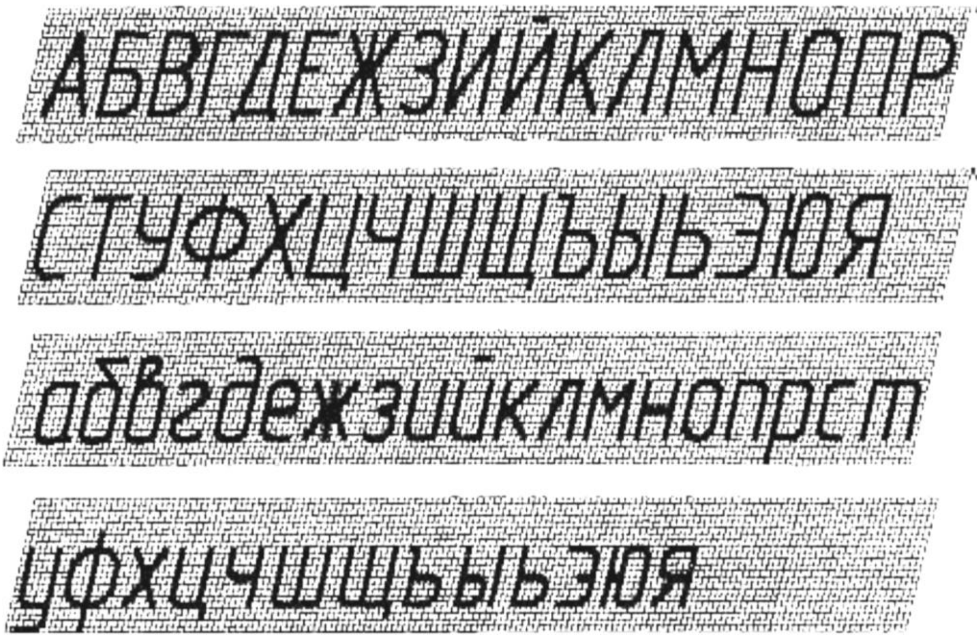



Рисунок 1.8 – Шрифт типа А с наклоном

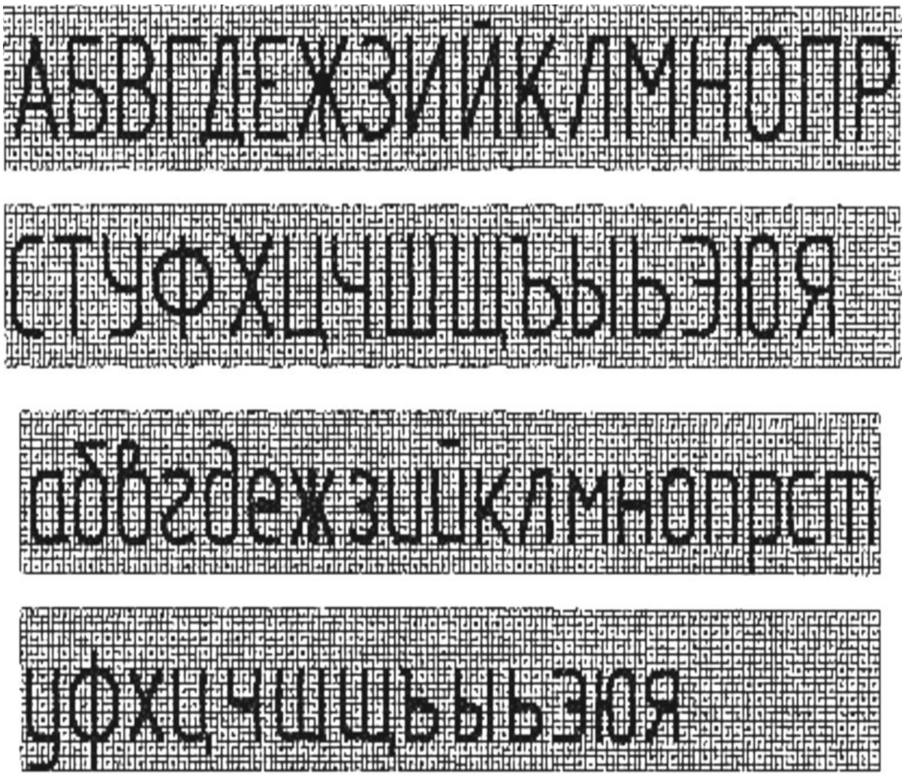


Рисунок 1.9 – Шрифт типа А без наклона

Рисунок 1.10 – Шрифт типа Б с наклоном


Рисунок 1.11 – Шрифт типа Б без наклона


Рисунок 1.12 – Шрифт типа А с наклоном

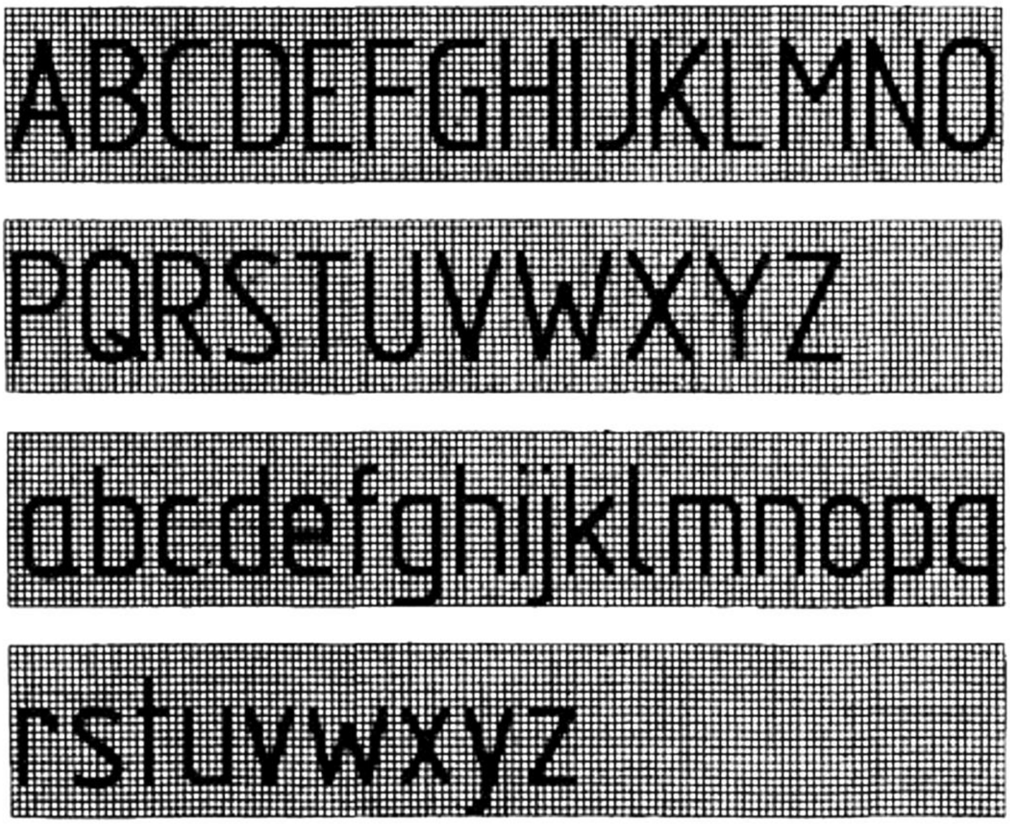



Рисунок 1.13 – Шрифт типа А без наклона

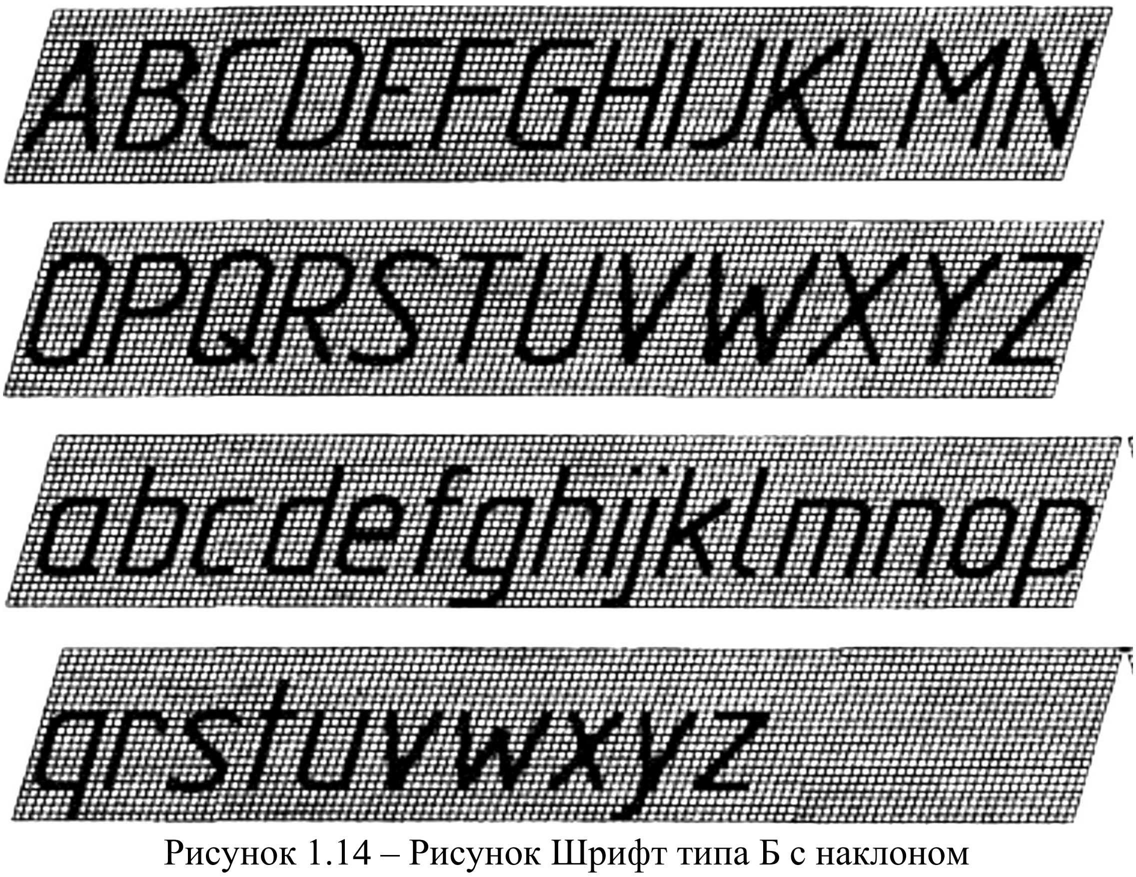



Рисунок 1.14 – Рисунок Шрифт типа Б с наклоном

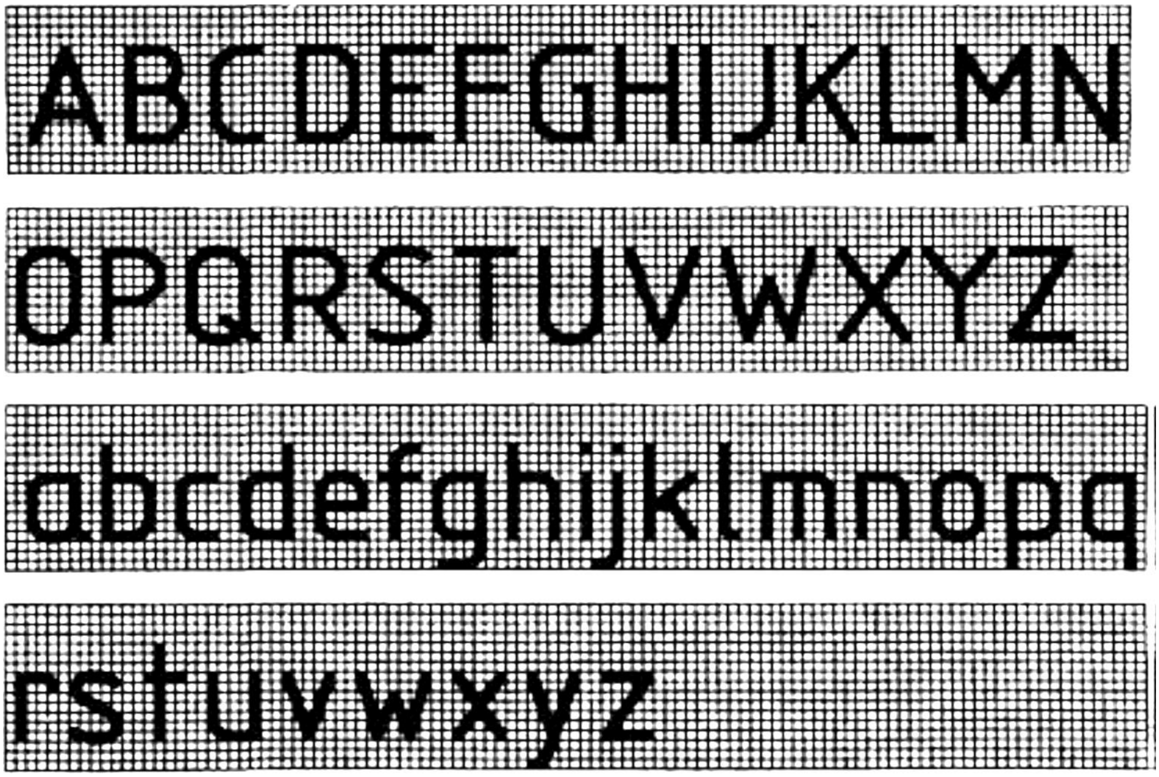



Рисунок 1.15 – Шрифт типа Б без наклона


Рисунок 1.16 – Шрифт типа А с наклоном


Рисунок 1.17 – Шрифт типа А без наклона

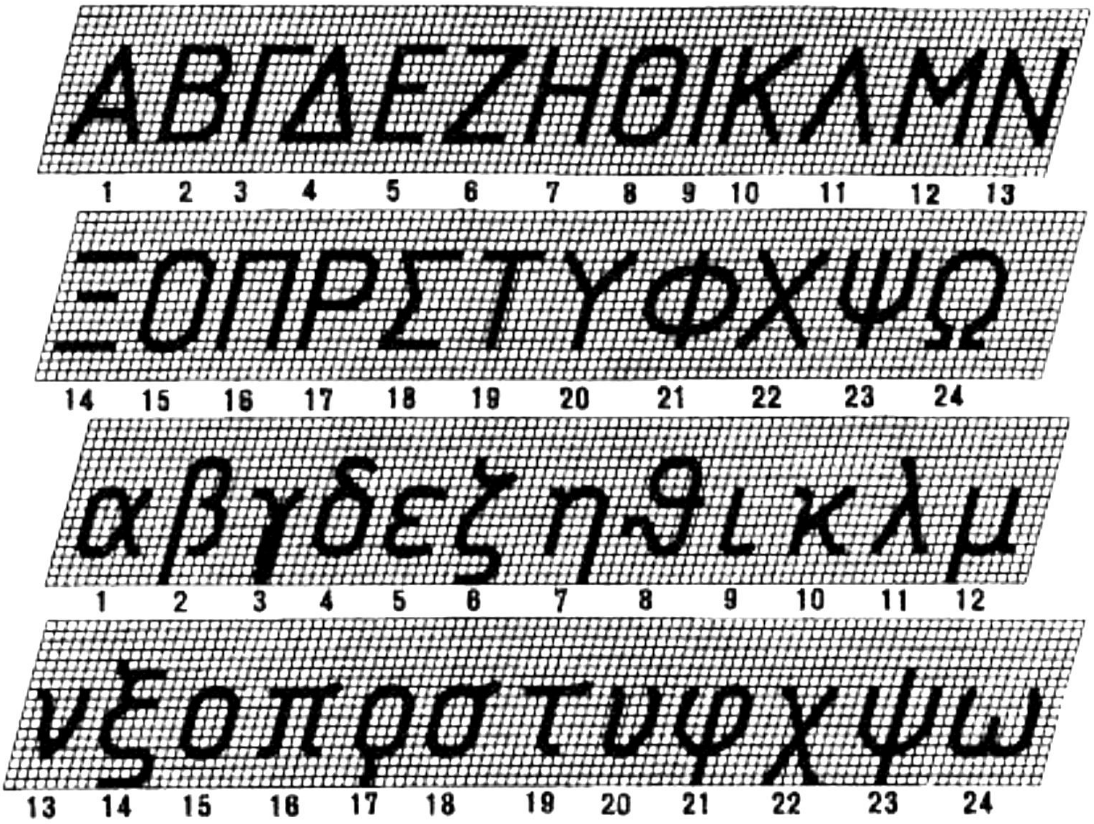



Рисунок 1.18 – Шрифт типа Б с наклоном

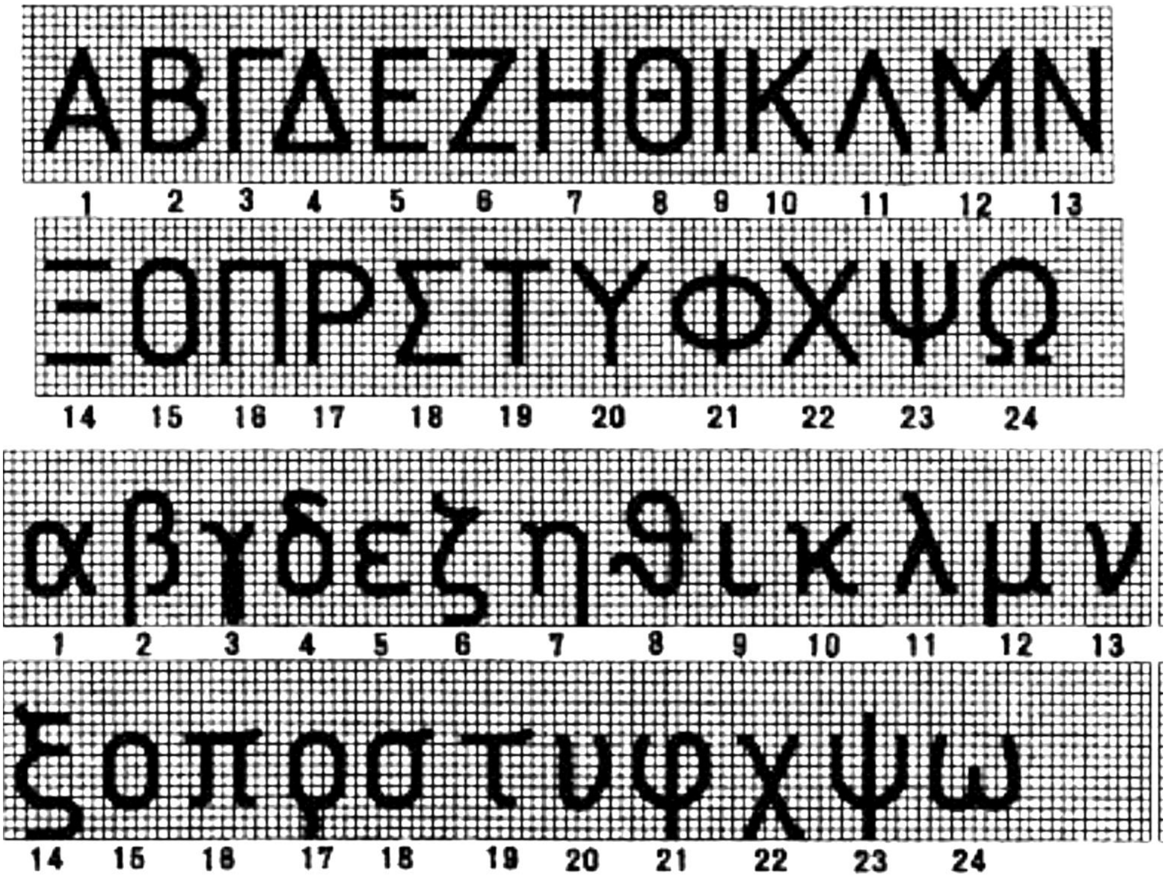



Рисунок 1.19 – Шрифт типа Б без наклона


Рисунок 1.20 – Шрифт типа А


Рисунок 1.21 – Шрифт типа Б

**1.7 ГОСТ 2.104-68 «Основные надписи»**

Основная надпись на всех конструкторских документах располагается в правом нижнем углу. На листе формата А4 основная надпись располагается вдоль короткой стороны листа. На форматах А0, А1, А2, А3 ее можно располагать вдоль любой стороны, отдавая преимущество горизонтальному расположению форматов.

Рекомендуется следующее заполнение граф основной надписи (рисунок 1.22).

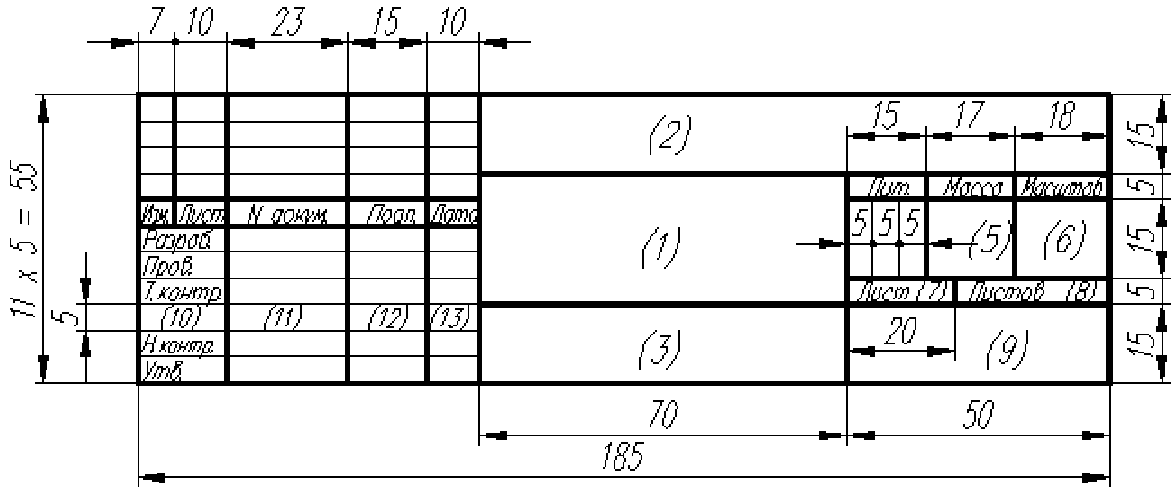



Рисунок 1.22 – Графы основной надписи

Графа 1 – наименование изделия в соответствии с требованиями ГОСТ 2.109-73.

Графа 2 – обозначение документа.

Графа 3 – обозначение материала детали (заполняется только на чертежах деталей).

Графа 4 – не заполняется.

Графа 5 – масса детали.

Графа 6 – масштаб чертежа.

Графа 7 – порядковый номер листа (на документах, состоящих из одного листа графа не заполняется).

Графа 8 – общее количество листов документа (заполняется только на первом листе).

Графа 9 – наименование учебного заведения и номер группы.

Графа 10 – характер работы, выполняемой лицом, подписывающим документ.

Графа 11 – четкое написание фамилий лиц, подписавших документ.

Графа 12 – подписи лиц, фамилии которых указаны в графе 11.

Графа 13 – дата подписания документа.

## Тема 2 Метод проекций

### 2.1 Образование проекционного комплексного чертежа

Комплексным чертежом называют изображения предмета на совмещенных плоскостях проекций. При этом горизонтальная проекция (вид сверху) располагается под фронтальной, а профильная (вид слева) – справа от фронтальной и на одном уровне с ней. Нарушать это правило расположения проекций нельзя.

Фронтальную проекцию называют видом спереди, или главным видом. Главный вид, получаемый на фронтальной плоскости проекций, является исходным, он должен давать наиболее полное представление о форме и размерах предмета. Остальные проекции располагаются в зависимости от главного вида. Такое расположение проекций называют проекционной связью.

Для того, чтобы получить обратимый чертеж (отображение) на некоторой плоскости $\Pi'$(рисунок 2.1) следует выбрать два направления проецирования $S_1$ и $S_2$. Точка $A$ будет иметь две проекции: $A'$ по направлению $S_1$ и $A''$ – по направлению $S_2$. Вторая точка $B$, расположенная на проецирующем луче $A - A'$, по направлению $S_1$, спроецируется точкой $B'$, совпадающей с точкой $A'$, но по направлению $S_2$ она спроецируется точкой $B''$, отличной от точки $A''$.

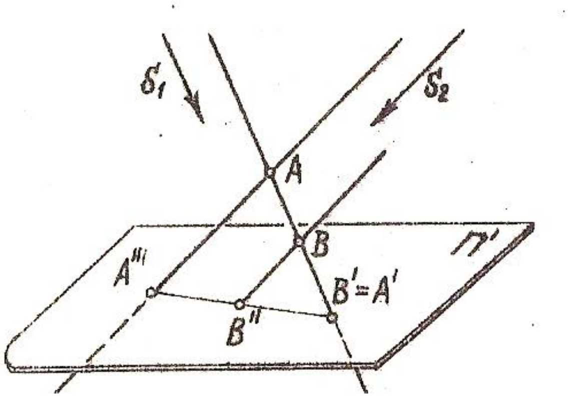



Рисунок 2.1 – Обратимый чертеж (отображение)

Теперь по чертежу мы имеем возможность сказать, что нем изображены две точки А и В; кроме того, наличие двух проекций каждой из них позволяет определить положение их относительно плоскостей проекций и относительно друг друга. В этом случае можно сказать, что чертеж является обратимым. При ортогональном проецировании получить два изображения на одной плоскости проекций нельзя, т.к. нельзя задать два отличных друг от друга направления проецирования. Поэтому проецирование производится не на одну, а на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций (рисунок 2.2).

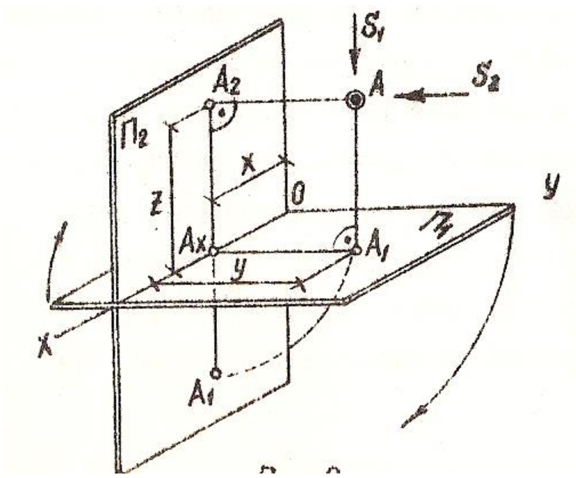



Рисунок 2.2 – Проецирование на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций

Одна из плоскостей располагается горизонтально, обозначается $\Pi_1$ и называется горизонтальной плоскостью проекций; другая $\Pi_2$ – вертикальной и называется фронтальной плоскостью проекций. Эти плоскости пересекаются по линии OX (иногда обозначают просто $X$ или $X_{12}$), которую называют осью проекций. Эти плоскости делят пространство на 4 четверти. Возьмем в пространстве точку $A$ и спроецируем ее на плоскость проекций $\Pi_2$ по направлению проецирования $S_2$ ($S_2 \perp \Pi_2$). Получим ее отображение $A \to A_2$ (проекцию) $A_2$, которая называется фронтальной проекцией точки $A$. Проекция точки $A$ на плоскость проекций $\Pi_1$ называется горизонтальной проекцией точки $A$. $S_1 \perp \Pi_1$; $A \to A_1$.

Положение точки в пространстве определяется тремя координатами $(X, Y, Z)$, показывающими величины расстояний, на которые точка удалена от плоскостей координат. В начертательной геометрии плоскости координат совпадают с плоскостями проекций. При решении задач пользоваться пространственным рисунком неудобно. Его следует преобразовать.

Преобразование пространственного рисунка осуществляется вращением одной из плоскостей проекций вокруг оси OX до совмещения обеих плоскостей в одну плоскость чертежа (рисунок 2.3).

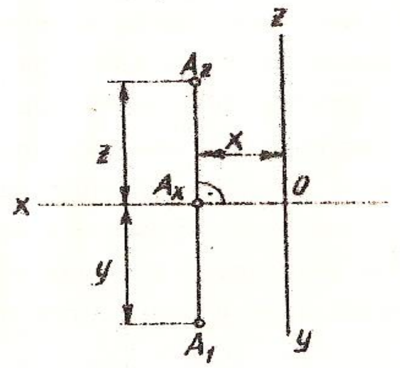



Рисунок 2.3 – Вращение одной из плоскостей проекций вокруг оси OX

Совмещенное изображение плоскостей проекций называется комплексным чертежом или эпюром. Так как плоскости не имеют границ, то на эпюре показаны только оси проекций. Впервые такое преобразование предложил Гаспар Монж, поэтому часто называют чертеж, выполненный при совмещенном положении плоскостей проекций, эпюром Монжа.

## 2.2 Центральные и параллельные проекции

Проецирование (лат. Projicio – бросаю вперёд) – процесс получения изображения предмета (пространственного объекта) на какой-либо поверхности с помощью световых или зрительных лучей (лучей, условно соединяющих глаз наблюдателя с какой-либо точкой пространственного объекта), которые называются проецирующими.

Известны два метода проецирования:

1) центральное;
2) параллельное.

**Центральное проецирование** заключается в проведении через каждую точку $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \ldots)$ изображаемого объекта и определённым образом выбранный центр проецирования $(S)$ прямой линии $(SA, SB, >\ldots$ – проецирующего луча).

где $S$ – центр проецирования (глаз наблюдателя);

$\pi_1$ – плоскость проекций;

$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ – объекты проецирования – точки;

$SA$, $SB$ – проецирующие прямые (проецирующие лучи).

Центральной проекцией точки называется точка пересечения проецирующей прямой, проходящей через центр проецирования и объект проецирования (точку), с плоскостью проекций (рисунок 2.4).

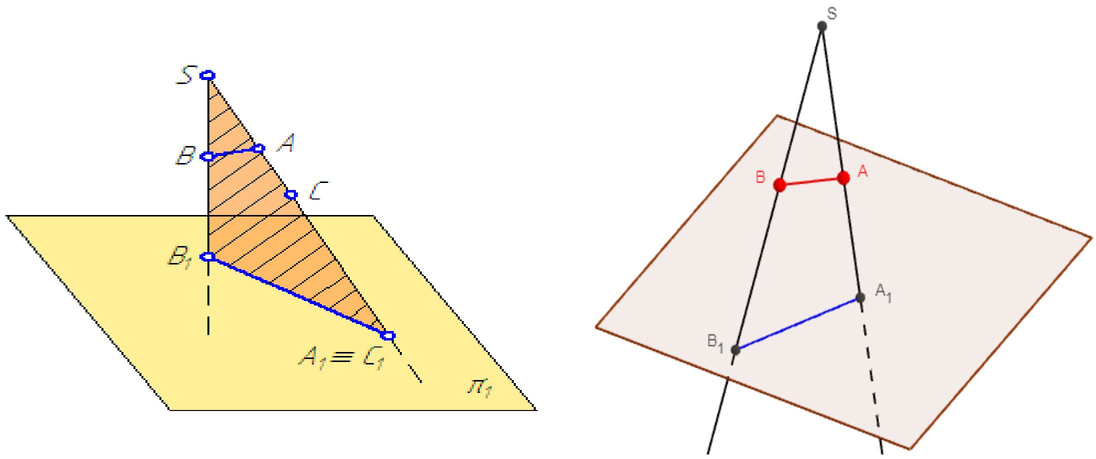



Рисунок 2.4 – Центральное проецирование

**Свойство 1.** Каждой точке пространства соответствует единственная проекция, но каждой точке плоскости проекций соответствует множество точек пространства, лежащих на проецирующей прямой.

Докажем это утверждение.

На рисунке 2.5: точка $A_1$ – центральная проекция точки $A$ на плоскости проекций $\pi_1$. Но эту же проекцию могут иметь все точки, лежащие на проецирующей прямой. Возьмём на проецирующей прямой $SA$ точку $C$. Центральная проекция точки $C(C_1)$ на плоскости проекций $\pi_1$ совпадает с проекцией точки $A(A_1)$:

$$C \epsilon SA;$$

$$SC \cap \pi_1 = C_1 \to C_1 \equiv A_1.$$

Следует вывод, что по проекции точки нельзя судить однозначно о её положении в пространстве.

Чтобы устранить эту неопределенность, т.е. сделать чертеж обратимым, введём еще одну плоскость проекций ($\pi_2$) и ещё один центр проецирования ($S_2$) (рисунок 2.5).

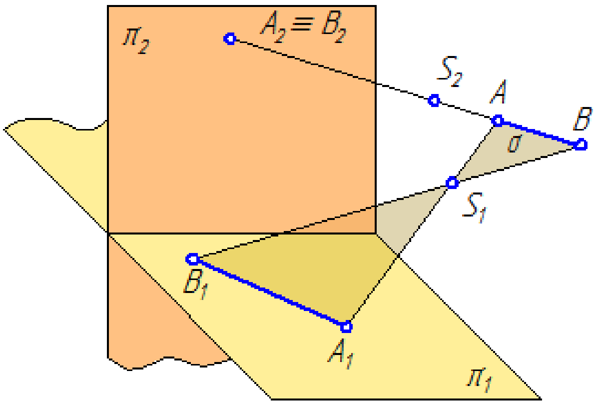



Рисунок 2.5 – Иллюстрация 1-го и 2-го свойств

Построим проекции точки $A$ на плоскости проекций $\pi_2$. Из всех точек пространства только точка $A$ имеет своими проекциями $A_1$ на плоскость $\pi_1$ и $A_2$ на $\pi_2$ одновременно. Все другие точки, лежащие на проецирующих лучах будут иметь хотя бы одну отличную проекцию от проекций точки $A$ (например, точка $B$).

**Свойство 2**. Проекция прямой есть прямая.

Докажем данное свойство.

Соединим точки $A$ и $B$ между собой (рисунок 2.5). Получим отрезок AB, задающий прямую. Треугольник $\Delta$SAB задает плоскость, обозначенную через σ. Известно, что две плоскости пересекаются по прямой: $\sigma \cap \pi_1 = A_1B_1$, где $A_1B_1$ – центральная проекция прямой, заданной отрезком AB.

Метод центрального проецирования – это модель восприятия изображения глазом, применяется главным образом при выполнении перспективных изображений строительных объектов, интерьеров, а также в кинотехнике и оптике. Метод центрального проецирования не решает основной задачи, стоящей перед инженером – точно отразить форму, размеры предмета, соотношение размеров различных элементов.

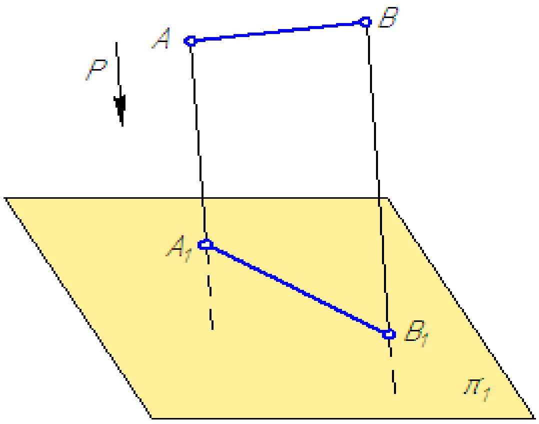
Рассмотрим метод параллельного проецирования. Наложим три ограничения, которые позволят нам, пусть и в ущерб наглядности изображения, получить чертеж более удобным для использования его на практике:

Удалим оба центра проекции в бесконечность. Таким образом, добьемся того, что проецирующие лучи из каждого центра станут параллельными, а, следовательно, соотношение истинной длины любого отрезка прямой и длины его проекции будут зависеть только от угла наклона этого отрезка к плоскостям проекций и не зависят от положения центра проекций;

Зафиксируем направление проецирования относительно плоскостей проекций;

Расположим плоскости проекций перпендикулярно друг другу, что позволит легко переходить от изображения на плоскостях проекций к реальному объекту в пространстве.

Таким образом, наложив эти ограничения на метод центрального проецирования, мы пришли к его частному случаю – методу параллельного проецирования (рисунок 2.6). Проецирование, при котором проецирующие лучи, проходящие через каждую точку объекта, параллельно выбранному направлению проецирования $P$, называется параллельным.




где $P$ – направление проецирования; $\pi_1$ – горизонтальная плоскость проекций; A, B – объекты проецирования – точки; $A_1$ и $B_1$– проекции точек $A$ и $B$ на плоскость проекций $\pi_1$

Рисунок 2.6 – Метод параллельного проецирования

**Параллельной проекцией точки** называется точка пересечения проецирующей прямой, параллельной заданному направлению проецирования $P$, с плоскостью проекций $\pi_1$.

Проведём через точки $A$ и $B$ проецирующие лучи, параллельные заданному направлению проецирования $P$. Проецирующий луч, проведённый через точку $A$, пересечёт плоскость проекций $\pi_1$ в точке $A_1$. Аналогично проецирующий луч, проведённый через точку $B$, пересечет плоскость проекций в точке $B_1$. Соединив точки $A_1$ и $B_1$, получим отрезок $A_1B_1$ – проекция отрезка АВ на плоскость $\pi_1$.

### 2.3 Свойства параллельных проекций

Геометрическая фигура в общем случае проецируется на плоскость проекций с искажением, но некоторые свойства оригинала сохраняются в проекциях при любом преобразовании и называются его инвариантами (остаются неизменными).

**Первое свойство.** Проекция точки на плоскость проекций есть точка.

Важно не само свойство, а следствие из него: каждой точке пространства соответствует одна и только одна точка на плоскости проекций. Доказательством может служить то, что через точку $A$ можно провести только одну прямую, параллельную заданному направлению проецирования, и эта прямая пересечется с плоскостью проекций только в одной точке.

$$l_A \supset A, l_A \parallel s, l_A \cap \Pi_1 = A_1.$$

**Второе свойство.** Проекция прямой линии в общем случае есть прямая.

Если прямая параллельна направлению проецирования, то она вырождается в точку.

$$l_C \supset C, l_C \parallel s, l_C \cap \Pi_1 = C_1, C_1 \text{– точка}$$

**Третье свойство** – принадлежности. Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции прямой,

$$K \in a, K_1 \in a_1.$$

Это свойство следует из определения проекции фигуры, как совокупности проекций всех ее точек (рисунок 2.7)

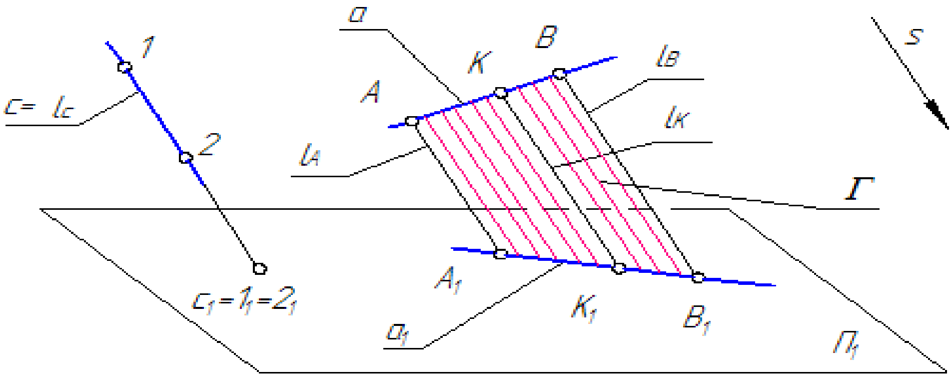



Рисунок 2.7 – Проекция фигуры

**Четвертое свойство** – свойство простого соотношения трех точек. Если точка делит отрезок в некотором отношении, то и проекция этой точки делит отрезок в том же отношении (рисунок 2.8).

$$|AK|:|KB| = |A_1K_1|:|K_1B_1|.$$

**Пятое свойство**. Если прямые в пространстве параллельны, то их проекции ∥ (рисунок 2.8).

$$m \parallel n,\ m_1 \parallel\ n_1, \text{т. к.} \, \Gamma \parallel S$$

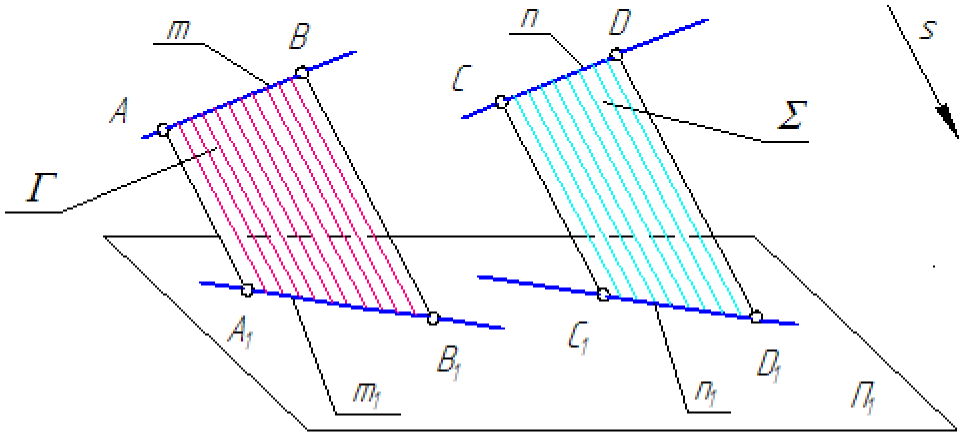



Рисунок 2.8 – Проекция фигуры

**Шестое свойство.** Отношение длин отрезков параллельных прямых равно отношению длин их проекций (рисунок 2.8):

$$AB \parallel\ CD, A_1B_1 \parallel C_1D_1.$$

**Седьмое свойство.** Проекция геометрической фигуры не изменяется при параллельном переносе плоскостей проекций (рисунок 2.9):

$$A_1B_1C_1 = A_1^1B_1^1C_1^1.$$

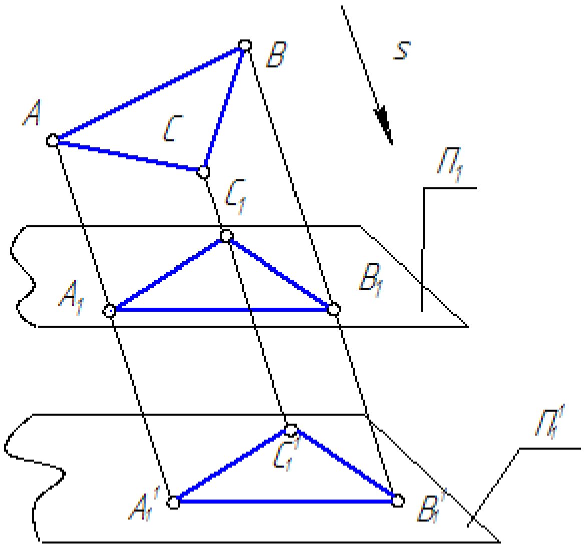



Рисунок 2.9 – Проекция геометрической фигуры

Если $\Pi_1 \parallel \Pi_1^1$, то $A_1A_1^1 = B_1B_1^1 = C_1C_1^1$ – как параллельные отрезки, заключенные между параллельными плоскостями, следовательно четырехугольники $A_1A_1^1B_1B_1^1$ и $B_1B_1^1C_1C_1^1$ и $C_1C_1^1A_1A_1^1$ являются параллелограммами, а у параллелограммов параллельные стороны равны. Поэтому $DA_1B_1C_1 = A_1^1B_1^1C_1^1$.

Рассмотренные свойства параллельного проецирования сохраняются при любом направлении проецирования.

## 2.4 Метод Г. Монжа. Проецирование точки на три взаимно-перпендикулярные плоскости проекций. Четверти и октанты пространства

Законы перехода от пространственного представления о предмете к его плоскому изображению – чертежу и от чертежа к натуральным формам предмета в пространстве составляют суть метода проекций. Чертежи, построенные с помощью этого метода, называют проекционными.

Метод проекций предполагает наличие плоскости, на которой строится изображение – плоскости проекций, геометрической фигуры, проецирующих лучей.

Построение проекционного изображения фигуры сводится к двум основным операциям – проецирования и сечения.

Операция проецирования состоит в замене оригинала геометрической фигуры совокупностью проецирующих прямых, проходящих через центр проекций $S$.

Операция сечения состоит в пересечении пучка проецирующих лучей плоскостью проекций, т.е. получению плоского сечения.

Проекции, полученные при помощи пучка проецирующих лучей, выходящих из одной точки – центра проекций, называются центральными или коническими. Изображения предметов, построенные в центральных проекциях, ближе всего к действительному зрительному восприятию, т.к. соответствуют физике человеческого зрения. Но на таких изображениях многие элементы предмета искажаются. Центральные проекции широко применяются в архитектуре, аэрофотогеодезии.

При удалении центра проецирования в бесконечность проецирующие лучи будут взаимно параллельны. Проекции, полученные при помощи параллельных проецирующих лучей, называются параллельными или цилиндрическими и являются частным видом центральных проекций.

Для того, чтобы получить изображение точки на плоскости необходимо через неё провести проецирующий луч и найти точку пересечения его с плоскостью проекций (рисунок 2.10). Это изображение называется проекцией точки.

$$A' = l \cap \Pi'.$$

В зависимости от угла между проецирующими лучами и плоскостью проекций параллельные проекции делятся на прямоугольные и косоугольные.

Если направление проецирующего луча изменить, то на той же плоскости $\Pi'$ можно построить множество проекций одной и той же точки.

Очевидно, для того чтобы одной точке пространства отвечало бы единственное изображение, надо задать определённое направление проецирующего луча.

Если направление проецирования перпендикулярно $\Pi'$ – прямоугольное, если не перпендикулярно – косоугольное.

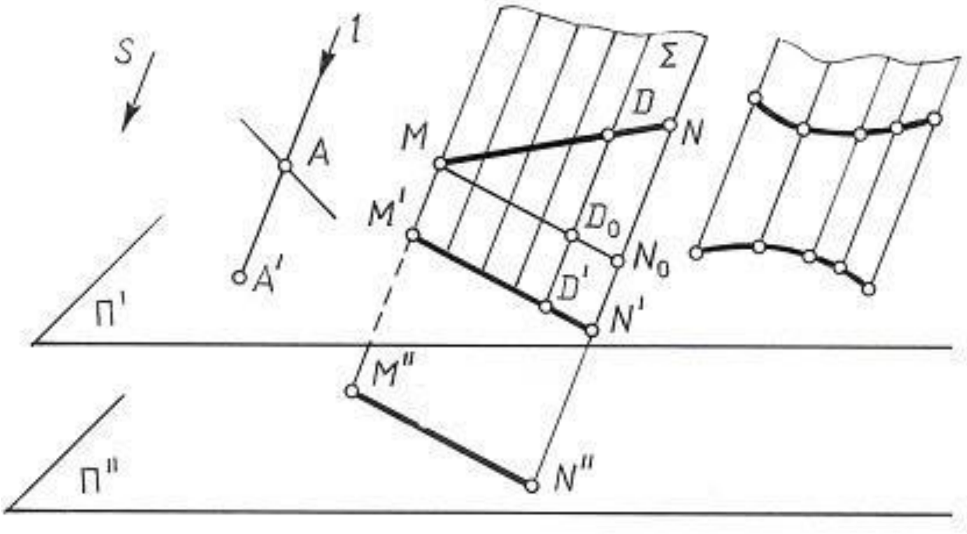



Рисунок 2.10 – Проекция точки

Параллельные проекции предмета вместе с осями прямоугольных координат, к которым отнесен предмет, называют аксонометрическими (или параллельной аксонометрией). Аксонометрические изображения являются достаточно наглядным изображением предмета, на них размеры предметов искажаются в меньшей степени, чем в центральных.

Параллельная прямоугольная проекция предмета на плоскость называется ортогональной проекцией, при этом направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций. Ортогональные проекции в свою очередь являются частным случаем параллельных проекций. Эти проекции являются основным методом построения изображений во всех отраслях техники благодаря простоте построений и измерений по ним.

В геодезии и топографии находят применение проекции с числовыми отметками, представляющие собой параллельные прямоугольные проекции на одну плоскость, при этом каждая проекция точки снабжается числом, характеризующим удаление точек изображаемого предмета от плоскости проекций.

Кроме указанных выше четырех видов проекционных изображений, получивших наибольшее распространение в большинстве отраслей техники, существуют специальные виды проекций, появление которых связано со специфическими требованиями, отсутствующими в рассмотренных типах проекций.

К их числу относятся стереографические (в картографии), векторные или федоровские (в горном деле и кристаллографии), а также применяемые в этих же областях циклографические проекции.

Для определения положения предмета в пространстве, т.е. получения обратимого чертежа, в разных видах проекций необходимы дополнительные условия, например, наличие еще одной или даже двух дополнительных проекций.

Чертеж, состоящий из нескольких связанных между собой проекций фигуры, называется комплексным чертежом. Если на чертеже присутствуют две проекции, чертеж называется двухкартинным, если одна – однокартинным.

Перспективные, аксонометрические проекции и проекции с числовыми отметками относятся к однокартинным чертежам и будут рассмотрены позже, ортогональные же проекции являются двухкартинными чертежами.

Рассмотрение методов проецирования начнем с ортогонального параллельного проецирования, являющегося основой построения современных технических изображений.

Для того, чтобы построить параллельную проекцию геометрической фигуры, необходимо через каждую её точку провести проецирующие лучи, параллельные заданному направлению и найти точки пересечения их с плоскостью проекций.

Отметим некоторые основные свойства параллельных проекций.

Проекция точки – точка.

Проекция прямой в общем случае является прямой. В частном случае, если направление прямой совпадает с направлением проецирования, проекция прямой – точка.

Множество проецирующих лучей, проходящих через точки прямой, будет представлять собой плоскость, которую называют проецирующей.

Пересечение проецирующей плоскости с плоскостью проекций и есть проекция прямой.

Совокупность проецирующих лучей может представлять собой и проецирующую поверхность – цилиндрическую или призматическую, если направление образующих поверхности совпадает с направлением проецирования.

Если точка принадлежит прямой, то и проекция ее принадлежит проекции этой прямой.

Отношение отрезков прямой равно отношению проекций этих отрезков. Свойство следует из подобия треугольников $MNN_0$ и $MDD_0$ (где $MN_0 \parallel M'N'$ ).

Проекции параллельных прямых параллельны, а длины их находятся в том же соотношении, как и длины самих отрезков (рисунок 2.11).

Поскольку проецирующие плоскости $\Sigma$ и $\Gamma$ параллельны, то и линии пересечения их плоскостью проекций – тоже параллельны, т.е. $a \parallel b \Rightarrow a' \parallel b'$. При параллельном перемещении плоскости проекций величина проекции прямой не меняется.

Любая фигура, расположенная в плоскости, параллельной плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в натуральную величину.

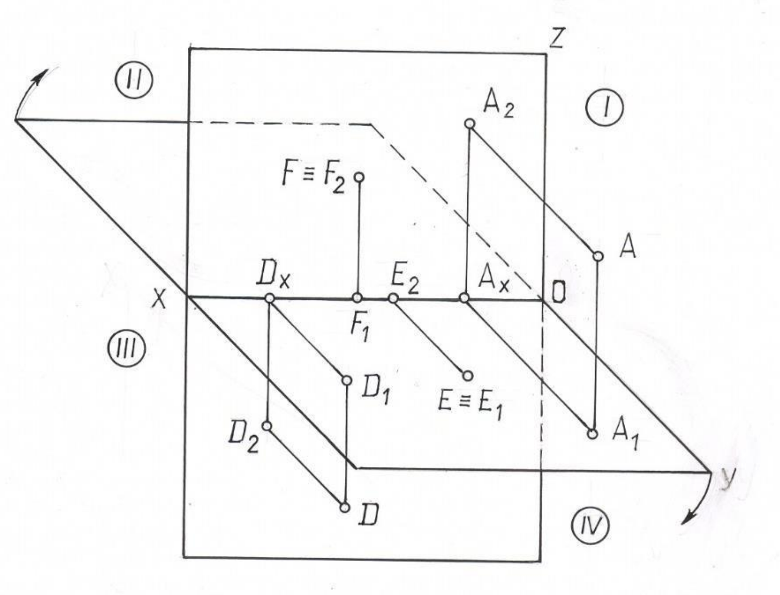



Рисунок 2.11 – Проекции параллельных прямых

Способ построения обратимого чертежа на основе ортогонального параллельного проецирования был предложен французским ученым Гаспаром Монжем.

Для построения проекций геометрической фигуры выбираются две взаимно перпендикулярные плоскости проекций, одна из которых вертикальна, вторая – горизонтальна.

Обозначение этих плоскостей проекций:

$\Pi_1$ – горизонтальная плоскость проекций;

$\Pi_2$ – фронтальная плоскость проекций.

Линия их пересечения ОХ называется осью координат (абсцисс).

Эти две плоскости делят все пространство на 4 части или четверти.

Направление проецирования при этом принимают перпендикулярным соответствующей плоскости проекций.

Спроецируем некоторую точку А на плоскости $\Pi_1$ и $\Pi_2$, получим проекции: $A_1$ – горизонтальную, $A_2$ – фронтальную.

Проецирующие прямые $AA_1$ и $AA_2$ будут определять проецирующую плоскость, перпендикулярную к $\Pi_1$ и $\Pi_2$, а следовательно и к ОХ, отсюда $A_1A_x \perp$ XO и $A_2A_x \perp$ XO.

Отрезок $A_1A_x = AA_2$ – показывает расстояние точки до плоскости $\Pi_2$, отрезок $A_2A_x = AA_1$ – до плоскости $\Pi_1$.

Если заданы проекции $A_1$ и $A_2$ точки, то по ним можно найти единственную точку А пространства. Для этого из каждой проекции к плоскостям проекций $\Pi_1$ и $\Pi_2$ надо восставить перпендикуляры, которые пересекутся в единственной точке А. Итак, две проекции вполне определяют положение геометрической фигуры в пространстве, а следовательно, могут заменить эту фигуру.

Для того, чтобы получить плоский чертеж или эпюр, совместим плоскость $П_1$ с плоскостью $П_2$ вращая $П_1$ вокруг оси $XO$ по направлению, указанному на чертеже. В результате совпадения плоскостей проекций получим эпюр Монжа, или комплексный чертеж точки, состоящий их двух проекций $A_1$ и $A_2$, которые будут лежать на одной прямой, перпендикулярной оси $XO$ (рисунок 2.12).

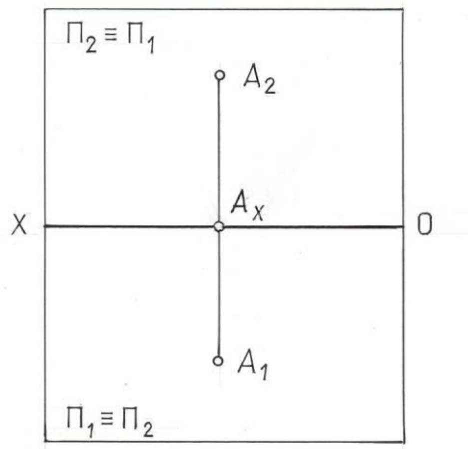



Рисунок 2.12 – Эпюр Монжа

Таким образом, под методом Монжа понимается параллельное ортогональное проецирование фигуры на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций, одна из которых вертикальна, а вторая горизонтальна, с последующим поворотом горизонтальной плоскости на 90° до совмещения с вертикальной.

Линия $A_1A_2$, соединяющая на чертеже две проекции одной и той же точки, называется линией связи.

Такой чертеж является обратимым, т.к. повернув плоскость $П_1$ в обратном направлении и произведя операции обратные проецированию восстановим единственное положение точки $A$.

Необходимо отметить, что сама точка-оригинал на чертеже отсутствует. Ортогональное проецирование точки пространства на взаимно перпендикулярные плоскости проекций и последующее совмещение этих плоскостей с одной плоскостью чертежа создает комплексный чертеж, являющийся плоскостной моделью пространства, который обладает всеми свойствами самостоятельного пространства.

В зависимости от положения точки в пространстве эпюр ее будет видоизменяться. Так, если точка во второй четверти, то на чертеже проекции ее располагаются выше оси $XO$.

Если же она принадлежит плоскости $П_1$ или $П_2$, оси $XO$ (рисунок 2.13).

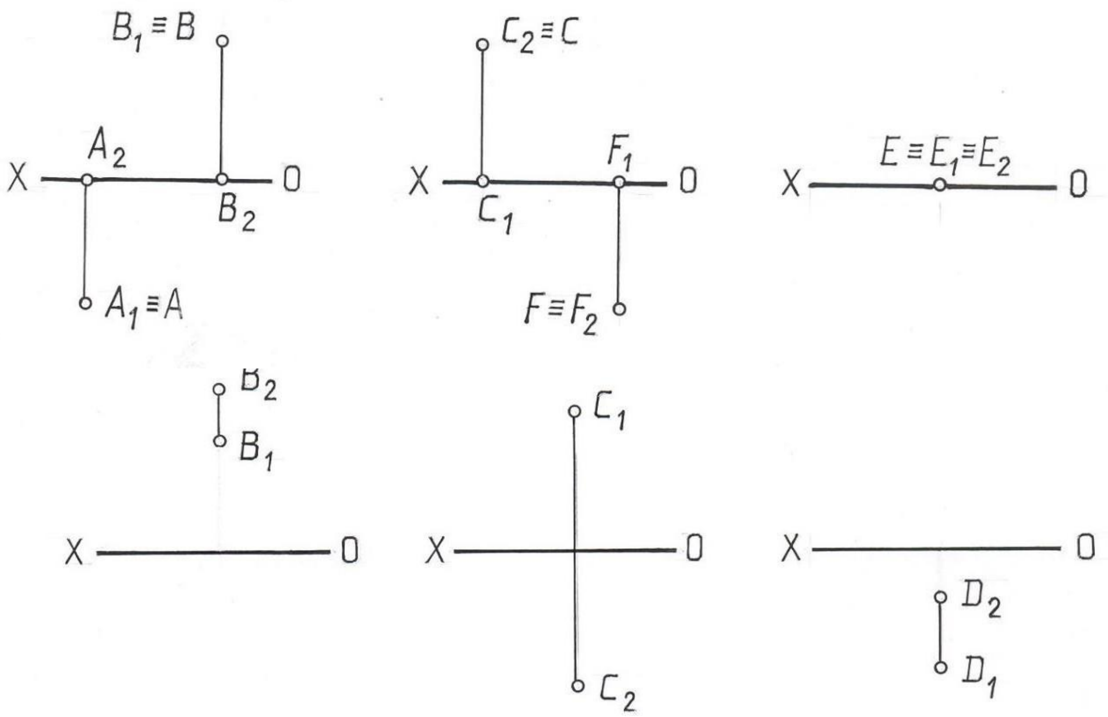



Рисунок 2.13 – Плоскости

Таким образом, зная, как расположены проекции точки относительно оси ХО, можно по чертежу определить, в какой четверти расположена точка и насколько удалена она от плоскостей проекций.

В некоторых случаях для обеспечения большей наглядности проекций и облегчения понимания формы предмета прибегают к использованию третьей плоскости проекций. Эта плоскость, перпендикулярная к двум имеющимся, называется профильной и обозначается $П_3$. Три плоскости проекций делят пространство на восемь трехгранных углов, называемых октантами, порядок нумерации которых приведен на рисунке 2.14.

Показанные на этом рисунке координатные оси $OX$, $OY$ и $OZ$ имеют положительные направления. Они соответствуют правой или европейской системе расположения проекций. Ось $OX$ направлена от начала координат влево, $OY$ – вперед к наблюдателю, $OZ$ – вверх. Обратные направления координатных осей считают отрицательными.

При построении комплексного чертежа в системе трех плоскостей горизонтальная плоскость проекций совмещается с фронтальной плоскостью проекций так, как указано выше, а профильная плоскость совмещается с фронтальной вращением против часовой стрелки вокруг оси $Z$ (если смотреть сверху).

Несмотря на то, что точки могут располагаться в разных октантах, для простоты построения чертежей обычно пользуются только первым октантом. Комплексный чертеж точки, лежащей в 1 октанте, в системе трех проекций показан на рисунке 2.15. По нему видно, что по двум любым ортогональным проекциям точки можно построить третью проекцию этой точки. Комплексный чертеж в системе трех проекций является трехкартинным.

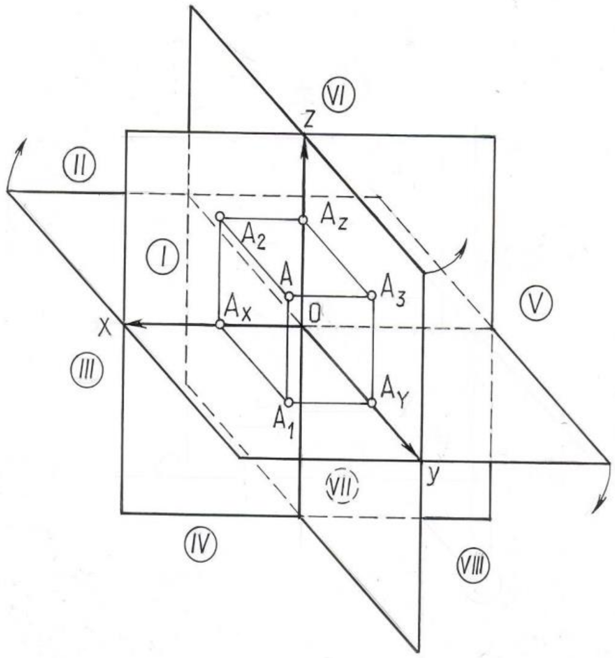



Рисунок 2.14 – Октанты

На комплексном чертеже положение точки в пространстве определяется при помощи отрезков прямых, графически показывающих расстояние от точки до соответствующей плоскости проекций. Длины этих отрезков, измеренные установленной единицей длины, называют координатами точки.

Расстояние от точки до плоскости $\Pi_1$ $A_2A_x = A_3A_y = Z$– аппликата. Расстояние от точки до плоскости $\Pi_2$ $A_1A_x = A_3A_z = Y$ – ордината. Расстояние от точки до плоскости$\Pi_3$ $A_2A_z = A_1A_y = X$ – абсцисса.

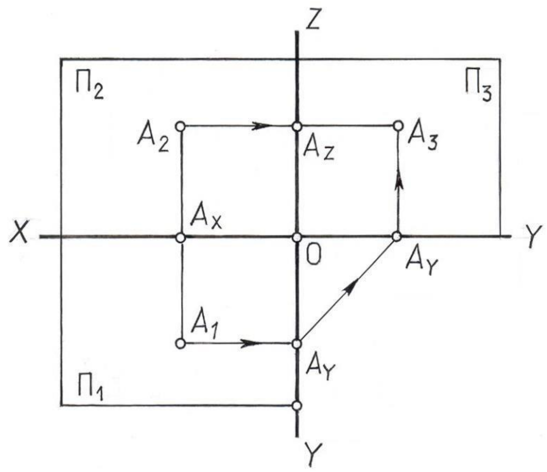



Рисунок 2.15 – Комплексный чертеж точки, лежащей в 1 октанте

Три координаты точки в совокупности составляют определитель точки, условная запись которого $A\ (X, Y, Z)$. Положение соответствующей проекции точки определяют две координаты:

– фронтальную проекцию на плоскости $\Pi_2$ определяют координаты $X$ и $Z$ – $A_2\ (X, Z)$;

– горизонтальную проекцию на плоскости $\Pi_1$ определяют координаты $X$ и $Y$ – $A_1\ (X, Y)$;

– профильную проекцию на плоскости $\Pi_3$ определяют координаты $Y$ и $Z$ – $A_3\ (Y, Z)$.

Две точки, которые принадлежат одному проецирующему лучу, называют конкурирующими. На рисунке 2.16 это точки $C$ и $M$, лежащие на одной горизонтально проецирующей прямой. Они могут использоваться для определения видимости элементов.

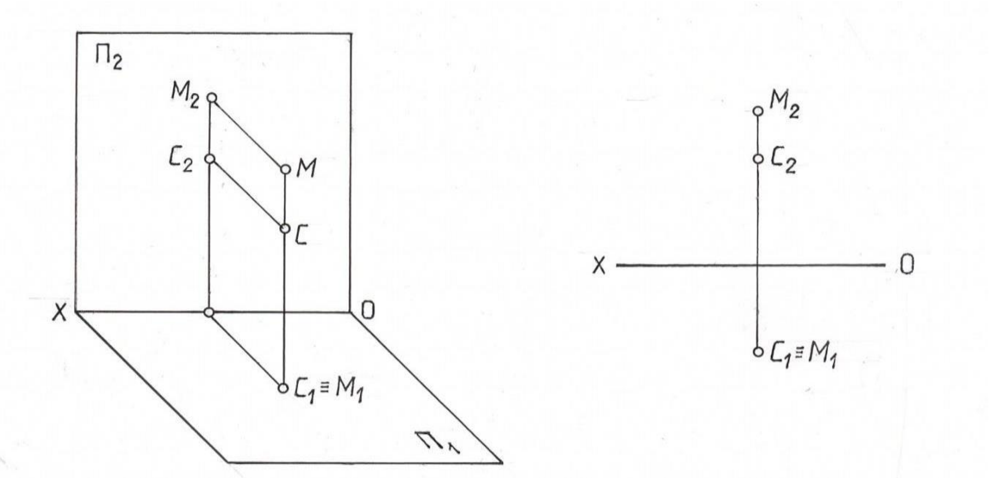



Рисунок 2.16 – Горизонтально проецирующая прямая

Из двух горизонтально-конкурирующих точек на горизонтальной проекции видима та, которая в пространстве расположена выше.

Это означает, что для того, чтобы определить видимость горизонтально-конкурирующих точек, необходимо через точку, в которой совпадают их горизонтальные проекции, провести вертикальную линию связи до пересечения с фронтальными проекциями этих точек. Видимой на горизонтальной проекции будет та точка, фронтальная проекция которой будет выше.

Из двух фронтально-конкурирующих точек на фронтальной плоскости проекций будет видна та, которая будет расположена ближе к наблюдателю, стоящему лицом к фронтальной плоскости проекций.

Поэтому, чтобы определить видимость конкурирующих точек на фронтальной проекции, необходимо через точку, в которой совпадают их фронтальные проекции, провести вертикальную линию связи до пересечения с горизонтальными проекциями этих точек. Видимой на фронтальной проекции будет та точка, горизонтальная проекция которой будет удалена дальше от плоскости $\Pi_2$.

# Тема 3 Прямая

## 3.1 Проецирование отрезка прямой линии на три взаимно перпендикулярные плоскости проекций

Прямая линия в пространстве определяется двумя точками, а так как проекция прямой – прямая, то на чертеже она может быть задана проекциями двух ее точек (рисунок 3.1).

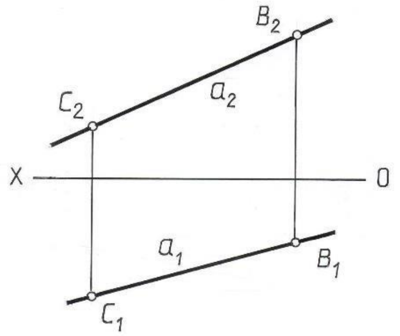



Рисунок 3.1 – Проекция двух точек

Очевидно, что пара проекций прямой $a_1$ и $a_2$ определяет в пространстве единственную прямую. Действительно, если $a_1 = \Sigma \cap \Pi_1$ и $a_2 = \Gamma \cap \Pi_2$, то $a = \Sigma \cap \Gamma$.

Если точка принадлежит прямой, то ее горизонтальная проекция будет принадлежать горизонтальной проекции прямой, а фронтальная проекция – фронтальной проекции прямой (рисунок 3.2), т.е. $A_1 \subset a_1$, $A_2 \subset a_2$ и $A_1A_2 \perp XO$. Если же хотя бы одна проекция точки не совпадает с соответствующей проекцией прямой, то данная точка не принадлежит прямой.

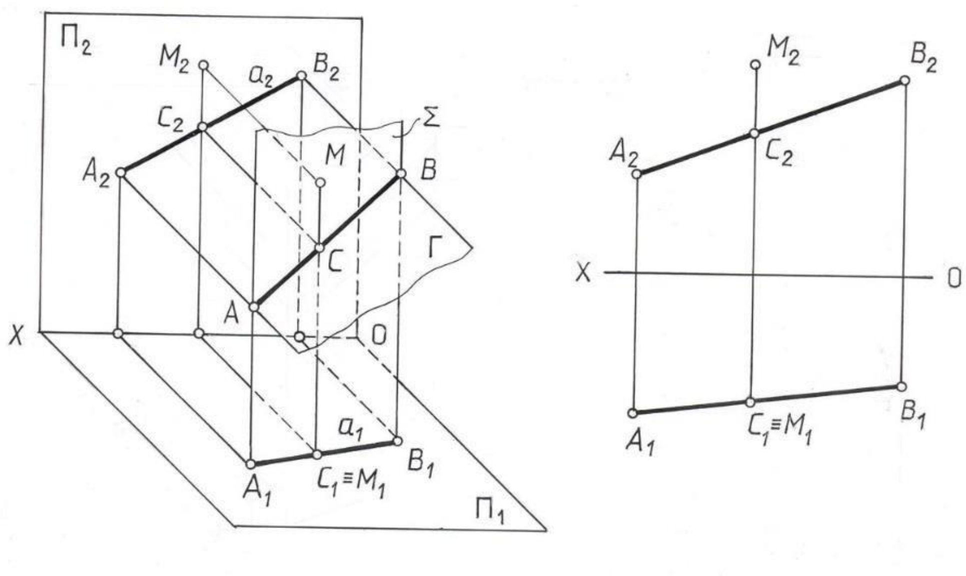



Рисунок 3.2 – Фронтальная проекция прямой

На рисунке 3.3 точка $M$ не принадлежит отрезку $AB$, т.к. ее фронтальная проекция $M_2$ не принадлежит фронтальной проекции отрезка $A_2B_2$.

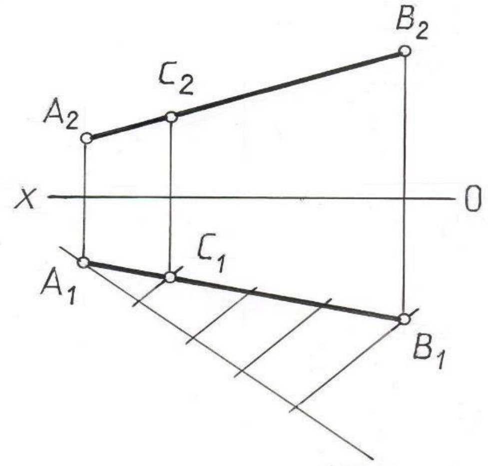



Рисунок 3.3 – Фронтальная проекция точки

Точка, лежащая на прямой, делит ее в том же соотношении, в каком проекции точки делят соответствующие проекции прямой. Согласно этому свойству параллельного проецирования $AC{:}\,CB = A_1C_1{:}\,C_1B_1$, но и $AC : CB = A_2C_2{:}\,C_2B_2$, тогда $A_1C_1{:}\,C_1B_1 = A_2C_2{:}\,C_2B_2$. Следовательно, для того, чтобы найти на чертеже проекцию точки, которая в пространстве делит отрезок $AB$ в отношении 1:3, достаточно разделить только одну проекцию.

### 3.2 Положение отрезка прямой относительно плоскости проекций (прямые частного и общего порядка)

В зависимости от положения прямой относительно плоскостей проекций прямые делятся на прямые общего и частного положения.

Прямые общего положения наклонены ко всем плоскостям проекций, частного – параллельны одной или двум плоскостям проекций.

Прямые, параллельные одной плоскости проекций, называются прямыми уровня, параллельные двум и, как следствие, перпендикулярные третьей плоскости проекций – проецирующими.

Чертеж прямой частного положения отличается от чертежа прямой общего положения. На рисунке 3.4 показана прямая $a$, параллельная горизонтальной плоскости проекций – горизонталь. Ее определяющим признаком является фронтальная проекция, расположенная параллельно оси $X$. Таким образом, если прямая $h \parallel \Pi_1$, то $h_2 \parallel OX$.

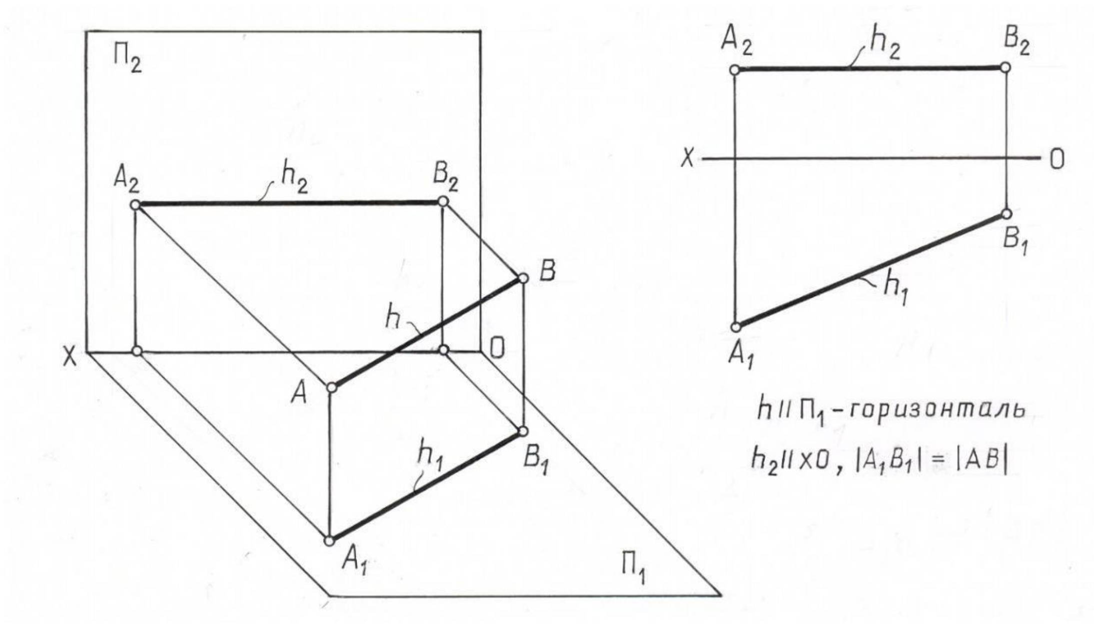



Рисунок 3.4 – Горизонталь

На рисунке 3.5 показана вторая часто встречающаяся линия частного положения – фронталь, которая параллельна плоскости $\Pi_2$. Ее горизонтальная проекция параллельна оси $OX$.

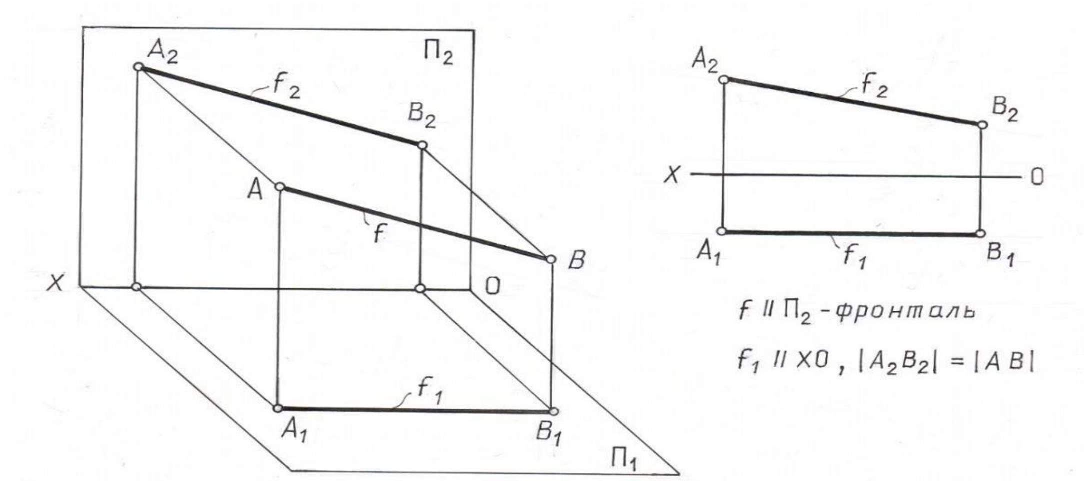


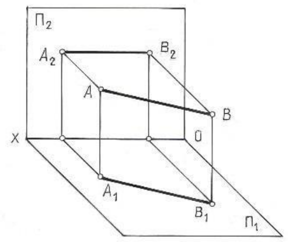
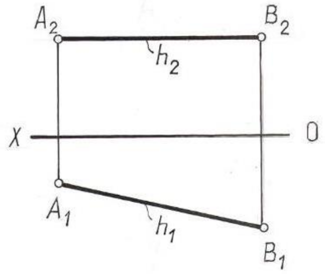
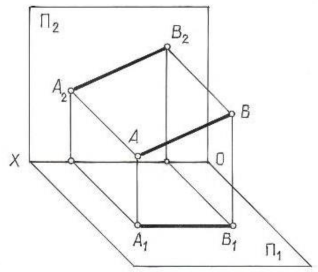
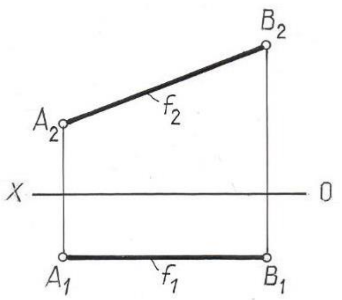
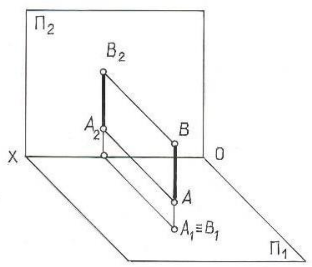
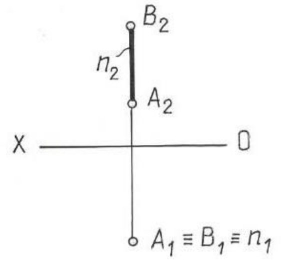
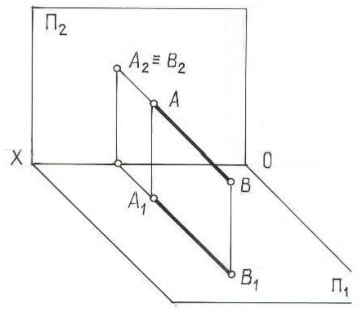
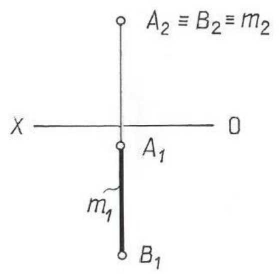
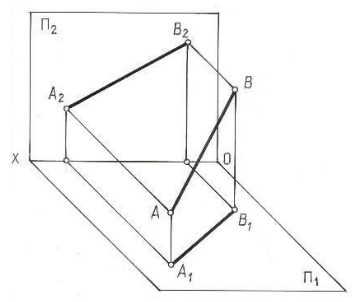
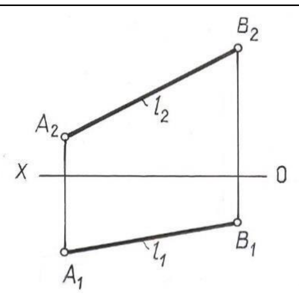

Рисунок 3.5 – Фронталь

Следовательно, если прямая $f \parallel \Pi_2$, то ее горизонтальная проекция $f_1 \parallel OX$.

Таким образом, у прямой уровня направление одной из проекций постоянно параллельно оси координат.

В таблице 3.1 приведены названия, наглядные изображения, чертежи и характерные признаки прямых частного положения.

Таблица 3.1 – Признаки прямых частного положения

| Положение прямой в пространстве | Наглядное изображение | Чертеж | Характерный признак на чертеже |
|---|---|---|---|
| $h \parallel \Pi_1$ – горизонтальная прямая |  |  | $A_2B_2 \parallel XO$<br>$A_1B_1 \parallel AB$<br>$\lvert A_1B_1\rvert \parallel \lvert AB\rvert$ |
| $f \parallel \Pi_2$ – фронтальная прямая |  |  | $A_1B_1 \parallel XO$<br>$A_2B_2 \parallel AB$<br>$\lvert A_2B_2\rvert \parallel \lvert AB\rvert$ |
| $n \parallel \Pi_1$ – горизонтально проецирующая прямая |  |  | $A_2B_2 \perp XO$<br>$A_1 \equiv B_1$<br>$\lvert A_2B_2\rvert \parallel \lvert AB\rvert$ |
| $m \perp \Pi_2$ – фронтально проецирующая прямая |  |  | $A_1B_1 \perp XO$<br>$A_2 \equiv B_2$<br>$\lvert A_1B_1\rvert \parallel AB$ |
| $l$ – прямая общего положения |  |  | $A_1B_1$ – произвольно<br>$A_2B_2$ – произвольно |

### 3.3 Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона к плоскостям проекций по правилу прямоугольного треугольника

Расположим отрезок общего положения таким образом, чтобы точка $B$ находилась на плоскости проекций П (рисунок 3.6). Прямоугольный треугольник образован так: один катет – проецирующий луч; второй – проекция отрезка на плоскость П – $A_nB$. Гипотенузой будет отрезок $[AB]$. Повернув на угол 90° треугольник $A_nB_nA'$ вокруг проекции $A_nB_n$ и совместив его с плоскостью проекций, получим изображение прямоугольного треугольника на плоскости проекций П (рисунок 3.6). Тогда правило прямоугольного треугольника можно сформулировать следующим образом: натуральная величина отрезка графически определяется как гипотенуза треугольника, у которого одним из катетов является проекция отрезка, а вторым – разность расстояний от точек отрезка до плоскости проекций. На рисунке 3.6 эта разность будет равна расстоянию от точки $A$ до плоскости проекций П (точка $B$ расположена на плоскости проекций). Угол наклона отрезка к плоскости проекций прилежит к проекции отрезка.

Покажем плоскости проекций и еще раз рассмотрим прямоугольный треугольник (рисунок 3.6). Разность расстояний от точек отрезка до плоскости проекций является разностью координат до этой плоскости проекций (в данном случае $AZ_{AB}$).

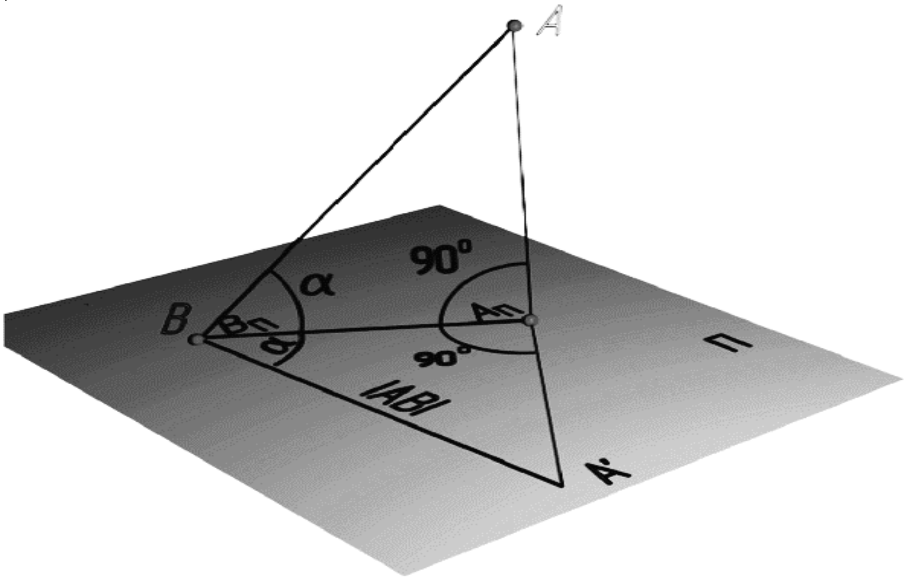



Рисунок 3.6 – Отрезок общего положения на плоскости

Следует отметить, что угол наклона к горизонтальной плоскости проекций, а не равен для отрезка общего положения углу 5 (рисунок 3.7).

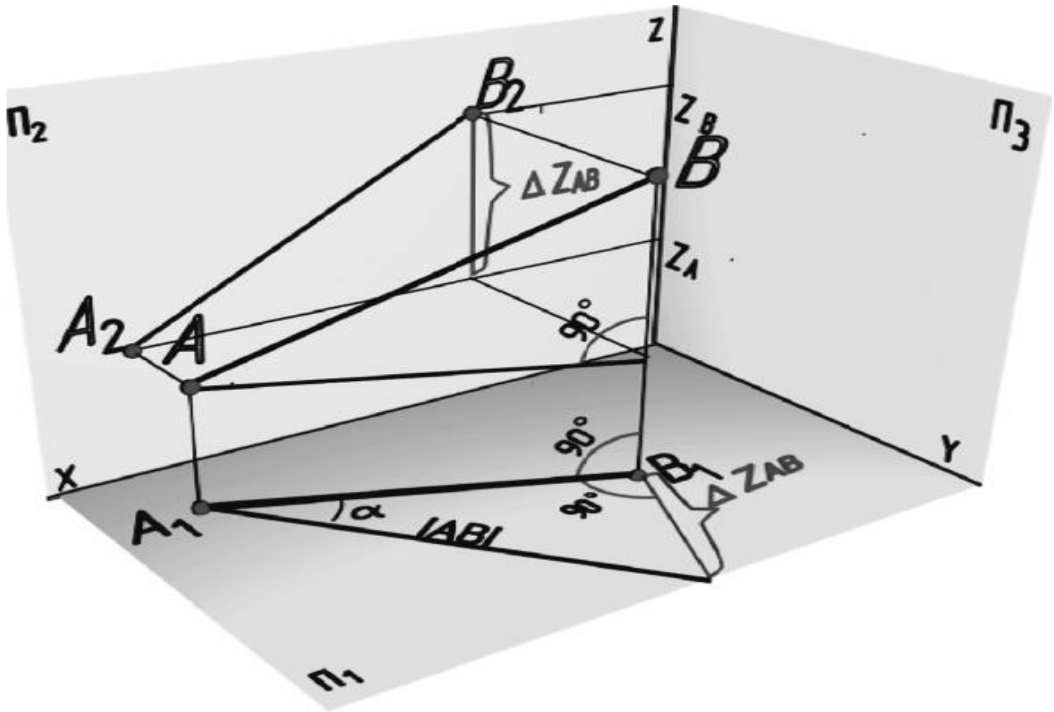



Рисунок 3.7 – Покажем плоскости проекций

Значит, для определения натуральной величины необходимо и достаточно двух проекций. Такое определение натуральной величины называется «правилом прямоугольного треугольника», которое формулируется следующим образом: натуральная величина отрезка определяется как гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого один катет – проекция отрезка, а другой катет – разность координат до плоскости проекций, на которой строится треугольник, и угол наклона к этой плоскости проекций противолежит разности координат (рисунок 3.8).

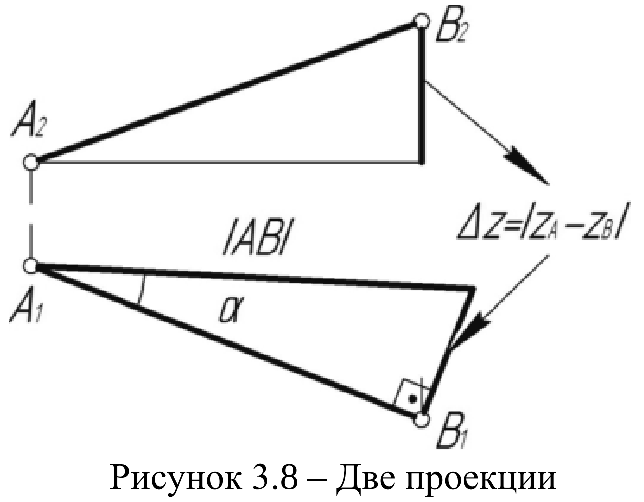



Рисунок 3.8 – Две проекции

Чтобы определить величины углов наклона $a, P$ и $y$ (к плоскостям проекций горизонтальной, фронтальной и профильной соответственно), необходимо построить по указанному выше правилу прямоугольный треугольник на этой плоскости. Естественно, во всех случаях натуральная величина одного и того же отрезка на треугольниках, построенных на разных плоскостях, будет одинакова.

### 3.4 Следы прямой

Следами прямой называются точки пересечения ее с плоскостями проекций (рисунок 3.9).

В общем случае прямая общего положения в системе трех плоскостей проекций может иметь три следа (горизонтальный, фронтальный и профильный) – три точки пересечения с плоскостями $\Pi_1$, $\Pi_2$ и $\Pi_3$ соответственно.

Прямые частного положения имеют два (прямые уровня) или даже один след (проецирующие прямые).

Для того, чтобы найти точку пересечения прямой общего положения с плоскостью $\Pi_1$ – горизонтальный след, необходимо:

1.Продлить фронтальную проекцию прямой до пересечения с осью $OX$.

$$a_2 \cap 0X = M_2.$$

Провести перпендикуляр к оси $OX$ до пересечения с горизонтальной проекций прямой $M_2M \cap OX$; $M_2M \cap a_1 = M_1$.

Проекции $M_1$ и $M_2$ – определяют положение горизонтального следа, при этом сам след совпадает со своей горизонтальной проекцией.

Для нахождения фронтального следа необходимо:

1. Продлитьгоризонтальную проекцию прямой до пересечения с осью $OX$.

$$a_1 \cap XO = N_1.$$

Провести перпендикуляр к оси $OX$ до пересечения с фронтальной проекций прямой $N_1N \cap XO$; $N_1N \cap a_2 = N_2$.

$N_1$ и $N_2$ – проекции фронтального следа, при этом сам след совпадает со своей фронтальной проекцией.

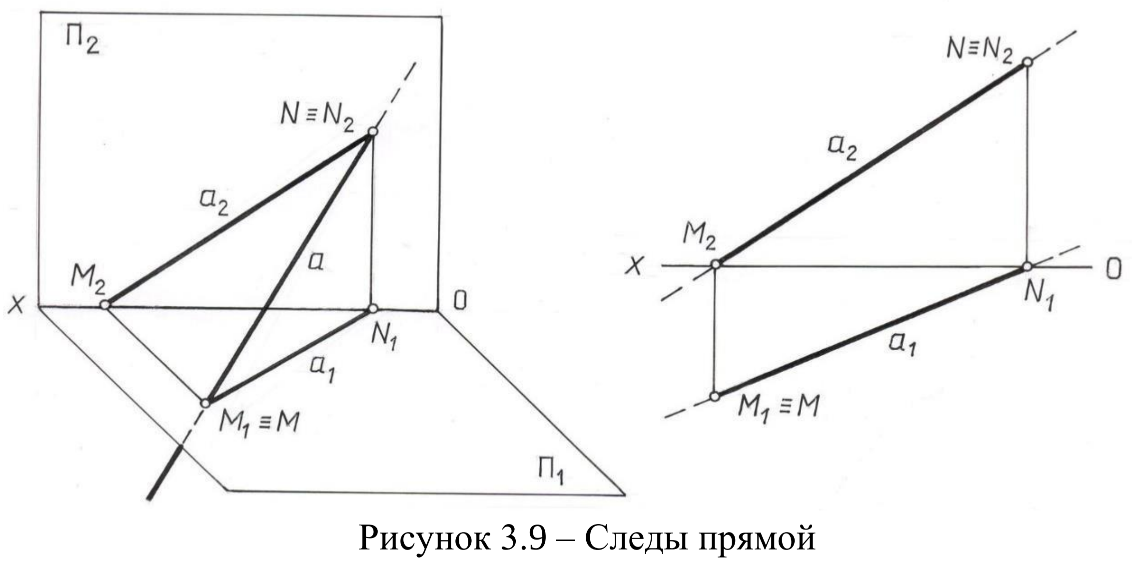



Рисунок 3.9 – Следы прямой

### 3.5 Взаимное положение двух прямых: изображение на чертеже параллельных, пересекающихся и скрещивающихся прямых

Две прямые в пространстве могут пересекаться, быть параллельными или скрещиваться, т.е. не пересекаться и не быть параллельными.

Судить по эпюру об относительном расположении прямых в каждом отдельном случае можно по следующим признакам:

Если прямые параллельны, то одноименные проекции их на любую плоскость также параллельны $l \parallel m \Rightarrow l_1 \parallel m_1, \quad l_2 \parallel m_2$. Справедливо и обратное: если на эпюре одноимённые проекции двух прямых параллельны, то параллельны и сами прямые в пространстве $l_1 \parallel m_1 \Rightarrow l_2 \parallel m_2 \Rightarrow l \parallel m$.

На рисунке 3.10 дан эпюр параллельных прямых, занимающих в пространстве общее положение относительно плоскостей проекций.

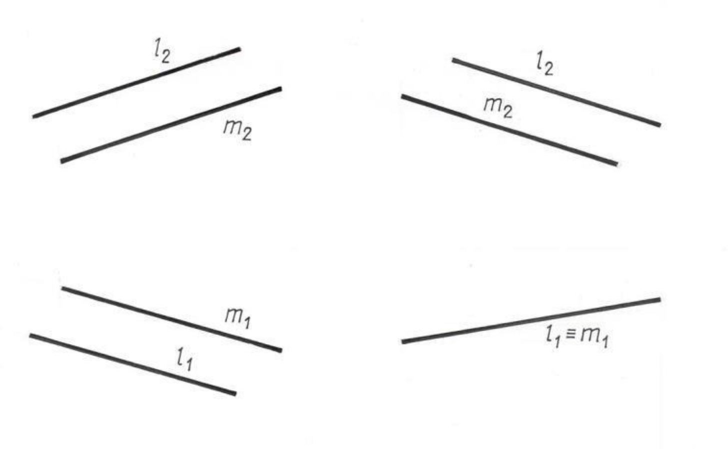



Рисунок 3.10 – Эпюр параллельных прямых

На рисунке 3.11 показан частный случай: прямые лежат в горизонтальной проецирующей плоскости (т. е. в плоскости, перпендикулярной плоскости $\Pi_1$).

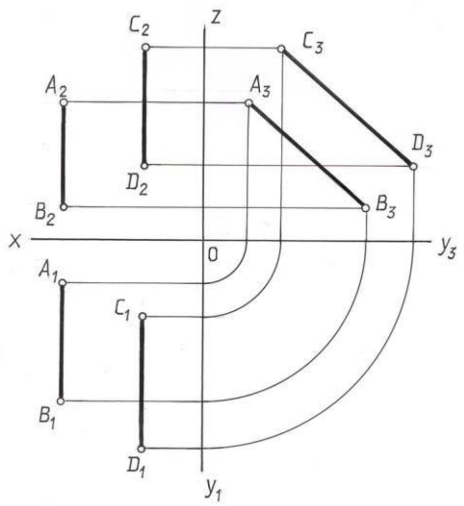



Рисунок 3.11

Для того, чтобы судить по эпюру о параллельности прямых, достаточно двух проекций каждой прямой. Только в случае профильных прямых могут возникнуть затруднения. Действительно, фронтальные и горизонтальные проекции профильных прямых всегда параллельны, но отсюда не следует, что и сами прямые параллельны: необходимо ещё, чтобы и профильные проекции их были параллельны. На рисунке 3.11 отрезки прямых $AB$ и $CD$ параллельны.

Если прямые пересекаются, то точки пересечения их одноимённых проекций ($K_1$ и $K_2$) лежат на одном перпендикуляре к оси $XO$. Это следует из того, что $K_1$ и $K_2$ являются проекциями одной и той же точки $K$, общей для обеих прямых. Если $l_1 \cap m_1, l_2 \cap m_2$ и $K_2K_1 \epsilon XO$, то $l \cap m$ (рисунок 3.12).

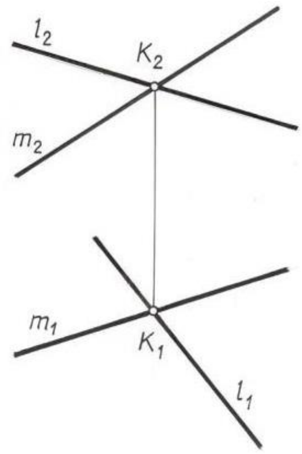



Рисунок 3.12

В частном случае одна пара одноимённых прямых проекций двух пересекающихся прямых может совпадать. Это значит, что плоскость, которую определяют обе прямые, перпендикулярна к соответствующей плоскости проекций (рисунок 3.13).

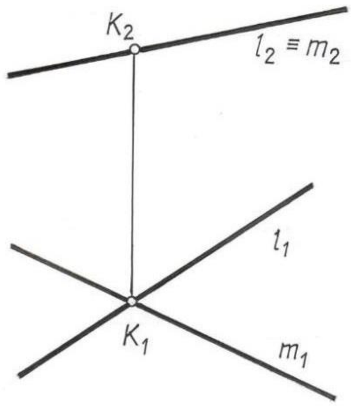



Рисунок 3.13

Угол, образованный пересекающимися прямыми, проецируется без искажения только тогда, когда его плоскость параллельна плоскости проекций. Прямой же угол проецируется без искажения и тогда, когда только одна его сторона параллельна плоскости проекций, а вторая не перпендикулярна (теорема о проекциях прямого угла).

Как известно, скрещивающиеся прямые не пересекаются и не параллельны. Следовательно, если на эпюре ни один из признаков пересечения или параллельности не выполняется, то мы имеем дело с эпюром скрещивающихся прямых. Так на эпюре (рисунок 3.14) одноимённые проекции прямых $l$ и $m$ пересекаются в точках $N_2$ и $K_1$, лежащих на различных перпендикулярах к оси $XO$. Прямые же в пространстве не пересекаются, но и не параллельны.

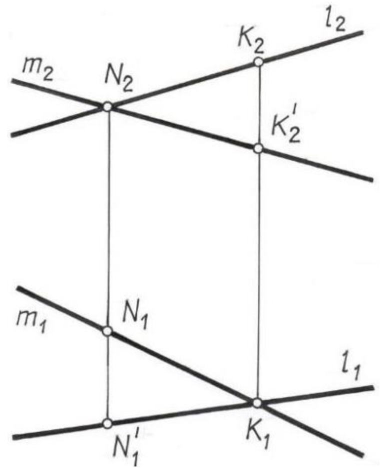



Рисунок 3.14

Точки $N_2$ и $K_1$ являются здесь проекциями разных точек. В точку $N_2$ проецируются точки $N$ и $N'$, из которых одна принадлежит прямой $(l_1, l_2)$, другая – прямой $m$ $(m_1, m_2)$, в точку $K_1$ проецируются точки $K$ и $K'$, тоже находящиеся на разных прямых.

Точки скрещивающихся прямых, лежащие попарно на проецирующих прямых, называются конкурирующими. Они используются для определения видимости элементов.

Для того чтобы определить видимость на горизонтальной проекции двух скрещивающихся прямых, необходимо через точку пересечения горизонтальных проекций этих прямых провести линию связи до пересечения с фронтальными проекциями этих же прямых. Точки пересечения будут фронтальными проекциями конкурирующих точек. Видимой будет та точка, фронтальная проекция которой будет выше.

Чтобы определить видимость на фронтальной проекции двух скрещивающихся прямых, необходимо через точку пересечения фронтальных проекций этих прямых провести линию связи до пересечения с горизонтальными проекциями этих же прямых. Точки пересечения будут горизонтальными проекциями конкурирующих точек. Видимой будет та точка, горизонтальная проекция будет удалена дальше от плоскости $\Pi_2$.

### 3.6 Конкурирующие точки на скрещивающихся прямых (правило конкурирующих точек при определении видимости геометрических образов)

Как надо рассматривать точку пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых? Она представляет собой проекции двух точек, из которых одна принадлежит первой, а другая – второй из этих скрещивающихся прямых. Например, на рис точка с проекциями $K_2$ и $K_1$ принадлежит прямой $AB$, а точка с проекциями $L_2$ и $L_1$ принадлежит прямой $CD$. Эти точки одинаково удалены от плоскости $\Pi_2$, но расстояние их от плоскости $\Pi_1$ различны: точка с проекциями $L_2$ и $L_1$ дальше от плоскости $\Pi_1$ чем точка с проекциями $K_2$ и $K_1$ (рисунок 3.15).

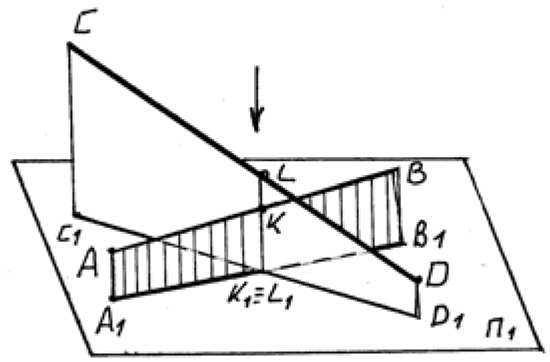



Рисунок 3.15 – Конкурирующие точки

### 3.7 Теорема о проецировании прямого угла

Если плоскость, в которой расположен некоторый угол, перпендикулярна к плоскости проекций, то он проецируется на эту плоскость проекций в виде прямой линии.

Если плоскость прямого угла не перпендикулярна к плоскости проекций и хотя бы одна его сторона параллельна этой плоскости, то прямой угол проецируется на нее в виде прямого же угла.

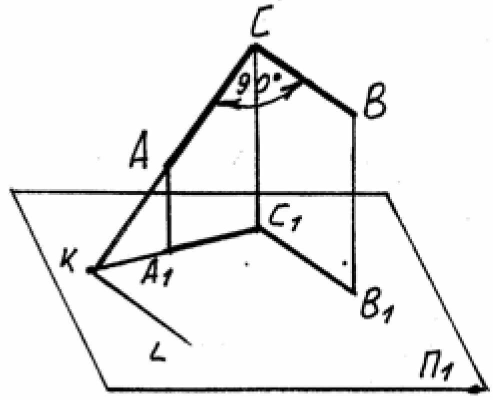



Рисунок 3.16 – Проецирование прямого угла

Положим, что сторона $BC$ прямого угла $ABC$ (рисунок 3.16) параллельна плоскости проекций. В таком случае прямая $CB$ параллельна $C_1B_1$. Пусть вторая сторона ($AC$) прямого угла пересекает свою проекцию $A_1C_1$в точке $K$. Проводим в плоскости проекций через точку $K$ прямую параллельно $C_1B_1$. Прямая $KL$ так же параллельна $CB$, и угол $CKL$ получается прямым. Согласно тереме о трех перпендикулярах угол $C_1KL$ также прямой. Следовательно, и угол $A_1C_1B_1$ прямой.

Если проекция плоскости угла представляет собой прямой угол, то проецируемый угол будет прямым лишь при условии, что по крайней мере одна из сторон этого угла параллельна плоскости проекций (рисунок 3.17).

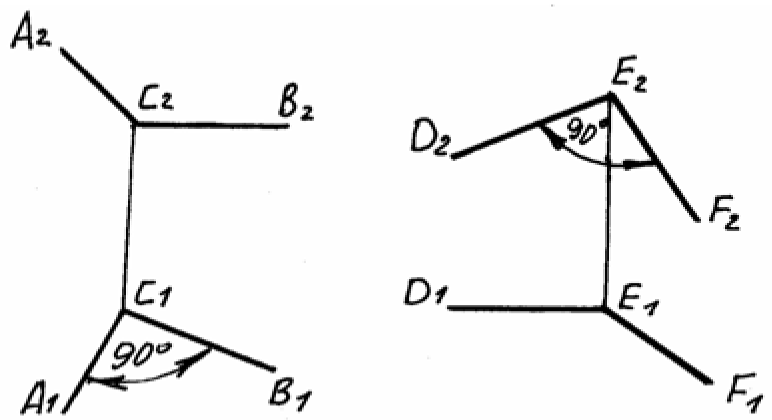



Рисунок 3.17 – Проекция плоскости угла (обратная теорема)

Если проекция некоторого угла, у которого одна сторона параллельна плоскости проекций, представляет собой прямой угол, то проецируемый угол тоже прямой.

Если стороны угла одинаково наклонены к плоскости проекций, то угол не может равняться проектируемому углу.

# Тема 4 Плоскость

## 4.1.Задание плоскости на чертеже (6 способов)

Плоскость можно представить как совокупность последовательных положений непрерывно движущейся прямой линии m, проходящей через неподвижную точку $A$ пространства и скользящей по некоторой неподвижной прямой линии $l$.

$$\Delta\ (A, l), m_i\ \supset\ A, m\ \cap\ l, i = 1,2,3\ ...$$

Укажем следующие свойства плоскости:

Прямая, проходящая через две различные точки плоскости, лежит в этой плоскости.

Через три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.

Если две различные плоскости имеют одну общую точку, то их пересечение есть прямая.

Если точки некоторой плоскости $\Delta$ спроецировать на плоскости проекций, то проекции точек плоскости $\Delta$ покроют плоскости проекций и мы не получим никакого изображения.

В частном случае, когда проецирующие лучи направлены вдоль изображаемой плоскости, можно получить изображение плоскости посредством проецирования всех ее точек (рисунок 4.1).

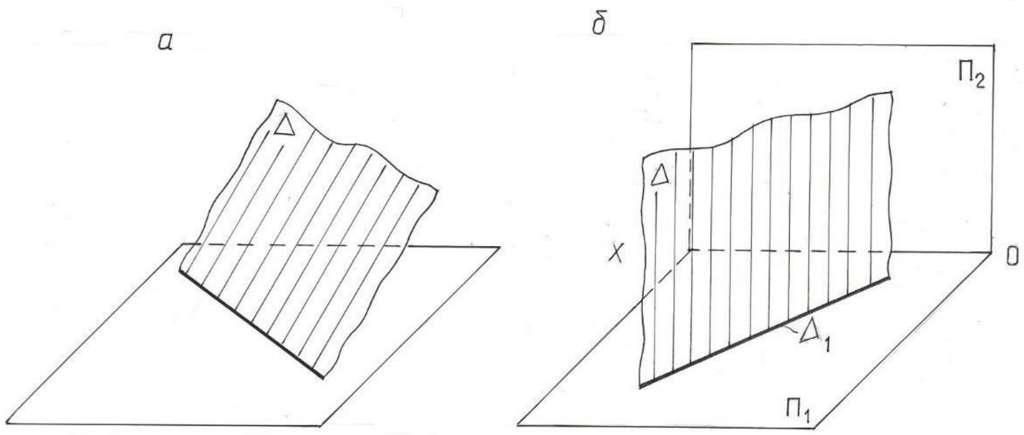



Рисунок 4.1

Такую плоскость называют проецирующей. Ее проекция имеет вид прямой линии. При ортогональном проецировании (рисунок 4.1, б) плоскость изобразится в виде прямой линии только тогда, когда изображаемая плоскость расположена перпендикулярно к плоскости проекций.

Для построения эпюра плоскости общего положения используется понятие определителя плоскости.

Определителем называется совокупность условий, необходимых и достаточных для определения геометрической фигуры в пространстве.

Из свойства плоскости известно, что через три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит одна и только одна плоскость. В этом случае плоскость определяется определителем $\Delta\ (A, B, C)$ (рисунок 4.2, а).

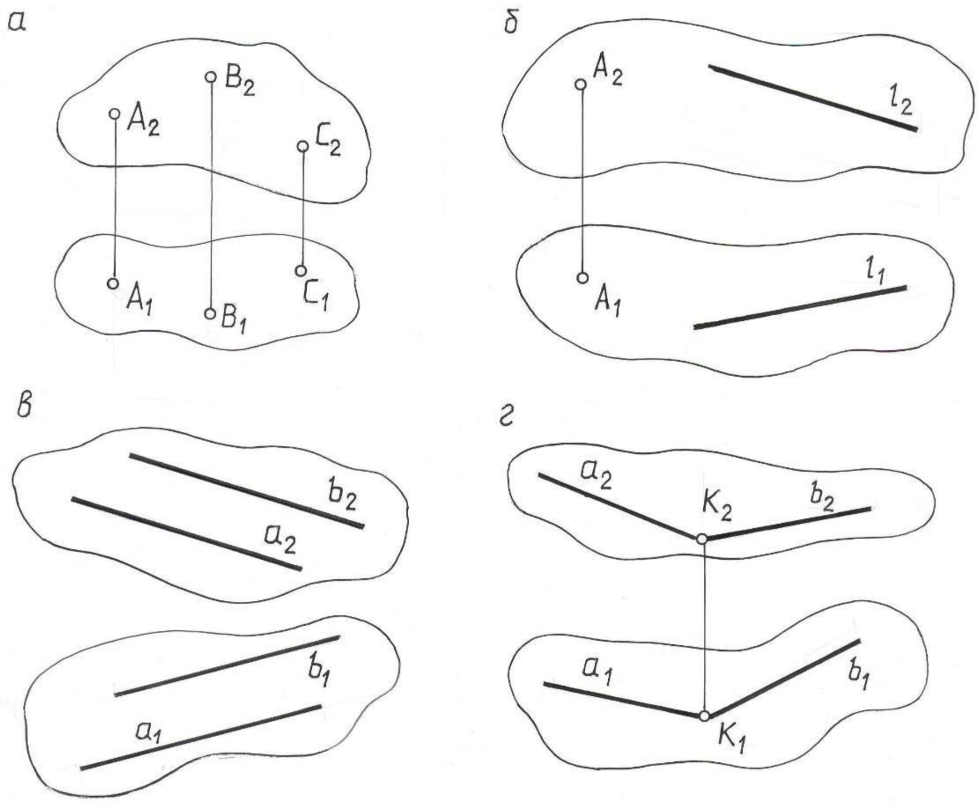



Рисунок 4.2

Как следствие этого свойства:

Через прямую и не принадлежащую ей точку можно провести одну и только одну плоскость. Определитель в этом случае $\Omega$ (A, $l$) (рисунок 4.2 б).

Через две различные параллельные прямые можно провести только одну плоскость. Определитель плоскости будет Г ($a \parallel b$) (рисунок 4.2, в).

Через две пересекающиеся прямые можно провести одну и только одну плоскость $\Sigma\ (a \cap b)$ (рисунок 4.2, г).

Поэтому проекции упомянутых сочетаний точек и прямых можно рассматривать как проекции определителей плоскости.

Каждый из перечисленных способов задания плоскости можно свести к любому из остальных. Так, например, задание тремя точками $A, B$ и $C$ равносильно заданию той же плоскости двумя пересекающимися прямыми (например, $AB$ и $BC$) или двумя параллельными прямыми. Для чего достаточно через одну из заданных точек провести прямую, параллельную прямой, проходящей через остальные две точки. Во многих случаях практики подобные переходы одного способа задания к другому позволяют упрощать графические построения в процессе решения задач, связанные с плоскостью.

Плоскость, будучи неограниченной, в общем случае пересекает обе плоскости проекций (рисунок 4.3).

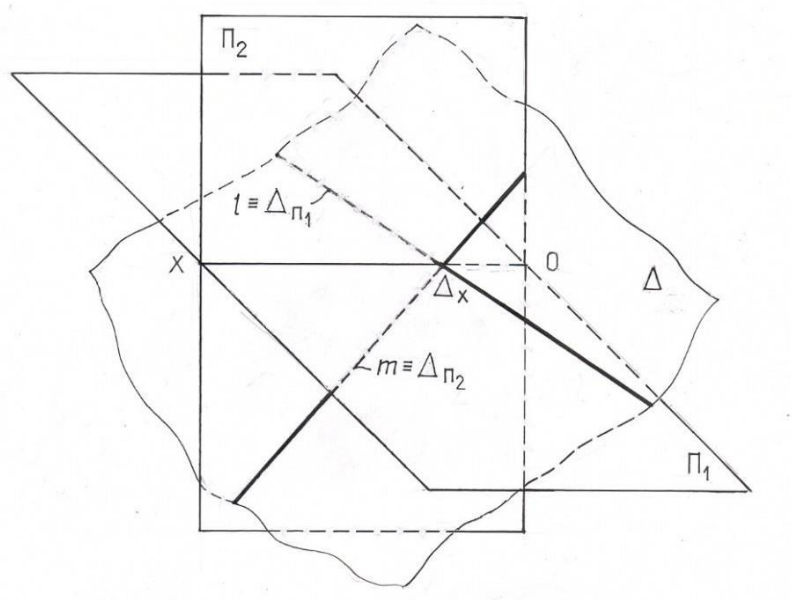



Рисунок 4.3

Получающиеся при этом линии пересечения носят названия горизонтального следа $l \equiv \Delta П_1 = \Delta \cap П_1$ и фронтального следа $m \equiv \Delta П_2 = \Delta \cap П_2$ плоскости.

Точку пересечения следов будем называть точкою схода следов и обозначать $\Delta_x$.

Следы плоскости, в зависимости от ее положения относительно плоскостей проекций, либо пересекаются (рисунок 4.3), либо параллельны друг к другу и оси проекций (рисунок 4.4). В последнем случае плоскость является профильно-проецирующей.

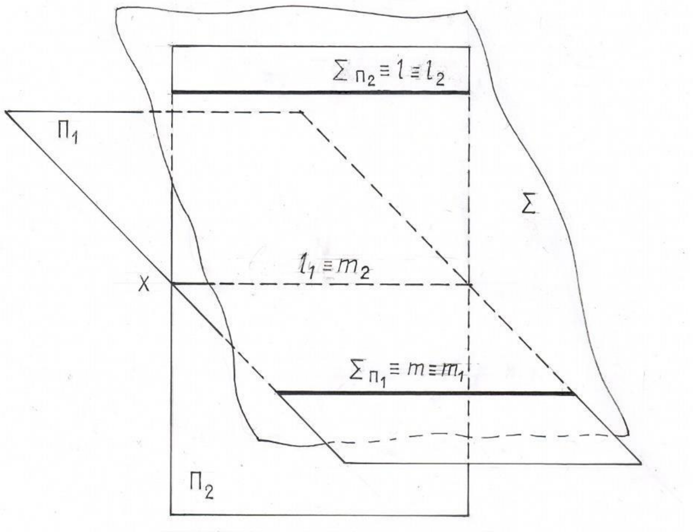



Рисунок 4.4

Таким образом, следы представляют собой случай задания плоскости двумя пересекающимися прямыми $\Delta\,(l \cap m)$ или параллельными прямыми $\Gamma\,(l \parallel m)$. Эпюры плоскостей, изображенных на рисунках 4.3 и 4.4, будут иметь вид, указанный на рисунках 4.5 и 4.6.

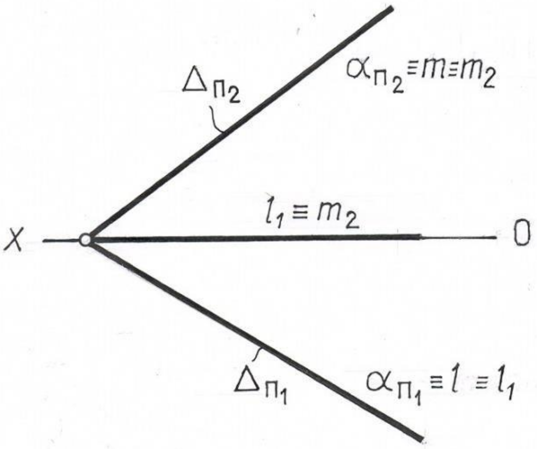



Рисунок 4.5

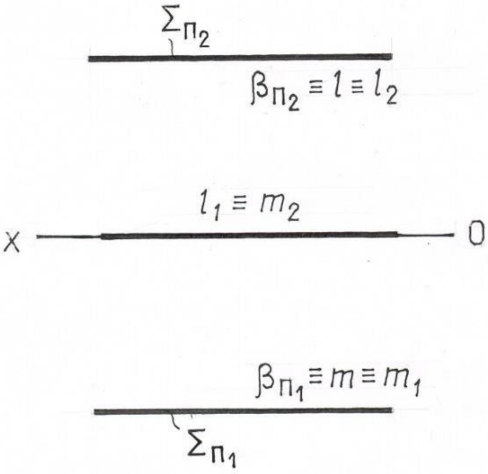



Рисунок 4.6

Если рассматривать плоскость в системе трех плоскостей проекций $П_1$, $П_2$, $П_3$, то в общем случае плоскость пересекает каждую из плоскостей проекций (рисунок 4.7) и прямая $\Gamma П_3 = \Gamma \cap П_3$ называется профильным следом плоскости.

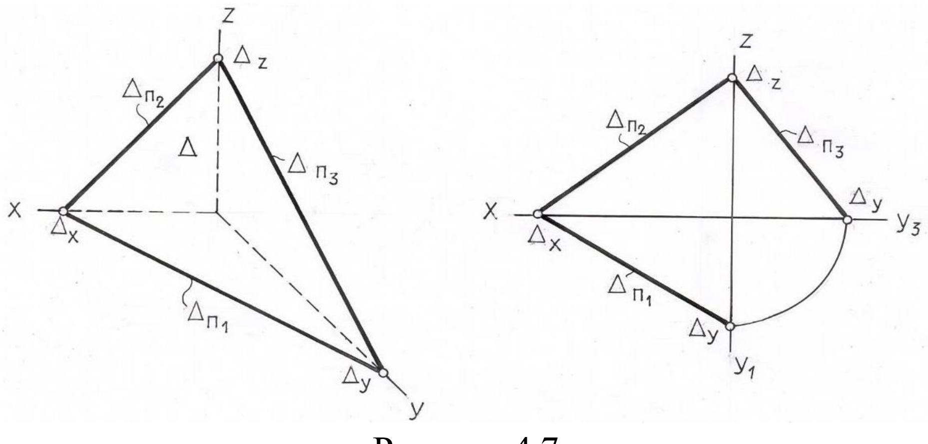



Рисунок 4.7

Любые два следа плоскости, как две пересекающиеся или параллельные прямые, вполне определяют положение плоскости в пространстве. Третий след плоскости всегда можно построить по двум данным.

Таким образом, на чертеже плоскость может быть задана проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой; проекциями прямой и точки вне этой прямой; проекциями двух пересекающихся или двух параллельных прямых, которые могут быть следами плоскости, а также проекциями любой плоской фигуры.

## 4.2 Положение плоскости относительно плоскостей проекций (плоскости частного и общего положения). Собирательное свойство проецируемых плоскостей

Основными графическими операциями, выполняемыми на плоскости, являются построение принадлежащих ей прямых линий и отдельных точек.

Вопрос о принадлежности прямой данной плоскости решается на основании аксиомы, связанной с понятием принадлежности: прямая, проходящая через две различные точки плоскости, лежит в этой плоскости.

$$A \subset \Sigma, B \subset \Sigma \Rightarrow (AB) \subset \Sigma.$$

Прямая также лежит в плоскости, если она проходит через точку, лежащую в плоскости и параллельна прямой, находящейся в этой же плоскости.

Задача 1. Достроить недостающую проекцию прямой $l$, принадлежащей плоскости $\Sigma$, заданной двумя пересекающимися прямыми $m$ и $n$ (рисунок 4.8).

$$\Sigma(m \cap n), l \subset \Sigma. \; l_1 = ?.$$

На основании аксиомы принадлежности на заданных прямых $m$ и $n$ отмечаем точки пересечения заданной фронтальной проекции прямой $l$, лежащей в плоскости $\Sigma$, с прямыми, задающими эту плоскость ($1 \subset m$ и $2 \subset n$).

Опуская линии связи на горизонтальные проекции линий $m$ и $n$, получаем горизонтальные проекции точек $1_1$ и $2_1$, которые и определяют горизонтальную проекцию искомой прямой $l$.

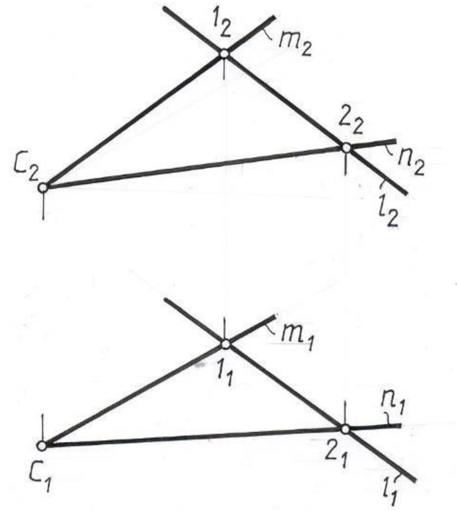



Рисунок 4.8 – Две пересекающиеся прямые

Задача 2. Достроить фронтальную проекцию прямой $l$, лежащей в плоскости ψ, заданной двумя пересекающимися прямыми $m$ и $n$ ψ $(m \cap n)$ (рисунок 4.9).

На проекции прямой $n_1$ отмечаем точку $1_1$ ее пересечения с заданной проекции прямой $l$. Достраиваем фронтальную проекцию этой точки $1_2$.

Через неё проводим проекцию прямой $l_2$ параллельно фронтальной проекции прямой $m_2$, задающей плоскость.

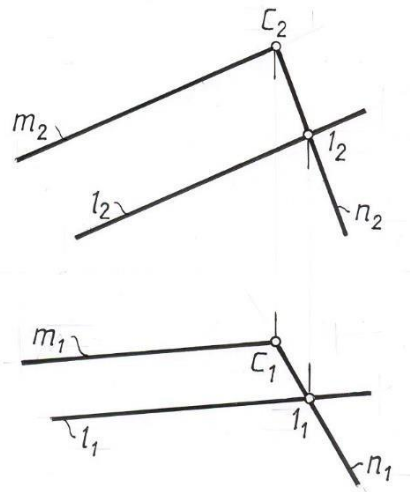



Рисунок 4.9

Условие принадлежности точки плоскости также вытекает из известной аксиомы планиметрии – точка принадлежит плоскости, если она лежит на любой прямой данной плоскости.

<u>Задача 3.</u> Дана горизонтальная проекция точки $A$, лежащей в плоскости $\Omega$ $(m \parallel n)$. Построить недостающую проекцию точки $A$ (рисунок 4.10).

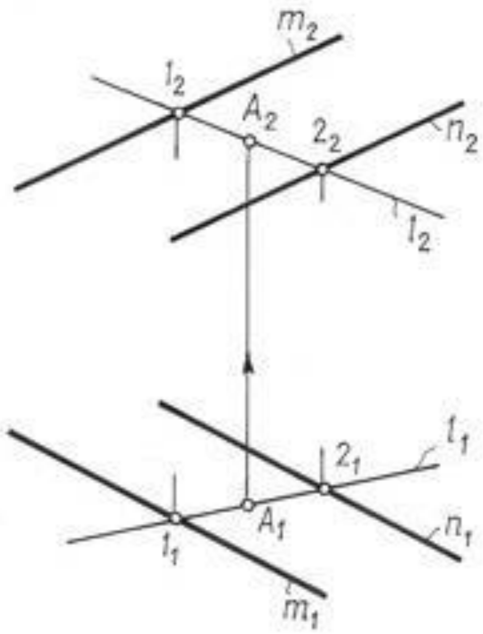



Рисунок 4.10 – Горизонтальная проекция точки $A$

Через проекцию точки $A_1$ проводим произвольную прямую $l_1$. Строим её фронтальную проекцию $l_2$ по точкам пересечения с прямыми $m$ и $n$, задающим плоскость. С помощью линии связи находим $A_2 \subset l_2$.

Из решения данной задачи следует, что для любой точки плоскости можно на чертеже задать произвольно только одну ее проекцию. Вторая проекция строится с помощью вспомогательной прямой.

Плоскости в зависимости от положения относительно плоскостей проекций делятся на плоскости общего и частного положения. Плоскости, которые не перпендикулярны ни к одной из плоскостей проекций, носят название плоскостей общего положения.

К плоскостям частного положения относятся плоскости, перпендикулярные к одной (проецирующие плоскости) или двум (плоскости уровня) плоскостям проекций.

Проекция такой плоскости вырождается в прямую линию на ту плоскость, к которой она перпендикулярна. На этой прямой лежат проекции всех точек, линий и фигур, принадлежащих данной проецирующей плоскости.

Плоскость $\Delta$, перпендикулярна плоскости $\Pi_1$ – горизонтально проецирующая плоскость (рисунок 4.11). Горизонтальная проекция такой плоскости представляет собой прямую линию, которая одновременно является горизонтальным следом $\Delta\Pi_1$ плоскости.

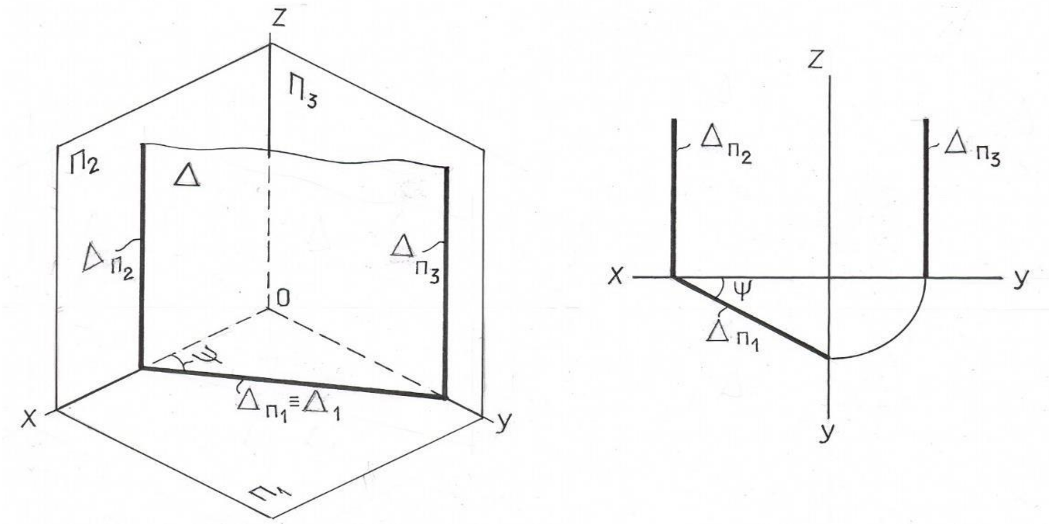



Рисунок 4.11 – Горизонтально проецирующая плоскость

Горизонтальные проекции всех точек и любых фигур, лежащих в этой плоскости, совпадают с вырожденной горизонтальной проекцией $\Delta_1$ плоскости. Угол ψ, который образуется между плоскостями $\Delta$ и $\Pi_2$, проецируются на $\Pi_1$ без искажения.

Плоскость $\Sigma$, перпендикулярная плоскости $\Pi_2$ – фронтально-проецирующая плоскость (рисунок 4.12). Фронтальная проекция такой плоскости представляет прямую, которая совпадает с фронтальным следом $\Sigma\Pi_2$ плоскости. Угол $\varphi$ между плоскостями $\Sigma$ и $\Pi_1$ проецируется на $\Pi_2$ без искажения.

На рисунке 4.13 изображена плоскость Θ, перпендикулярная плоскости $\Pi_3$ – профильно-проецирующая плоскость. Профильная проекция плоскости прямая линия $\Theta_3 \equiv \Theta\Pi_3$. Угол $\alpha$ между плоскостями Θ и $\Pi_2$ проецируется на плоскость $\Pi_3$ в натуральную величину.

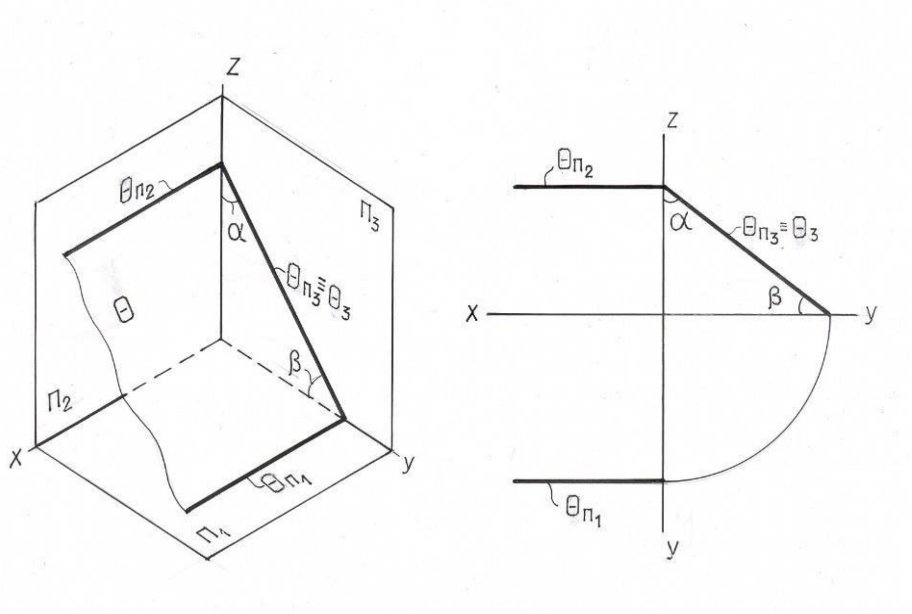



Рисунок 4.12 – Фронтально проецирующая плоскость

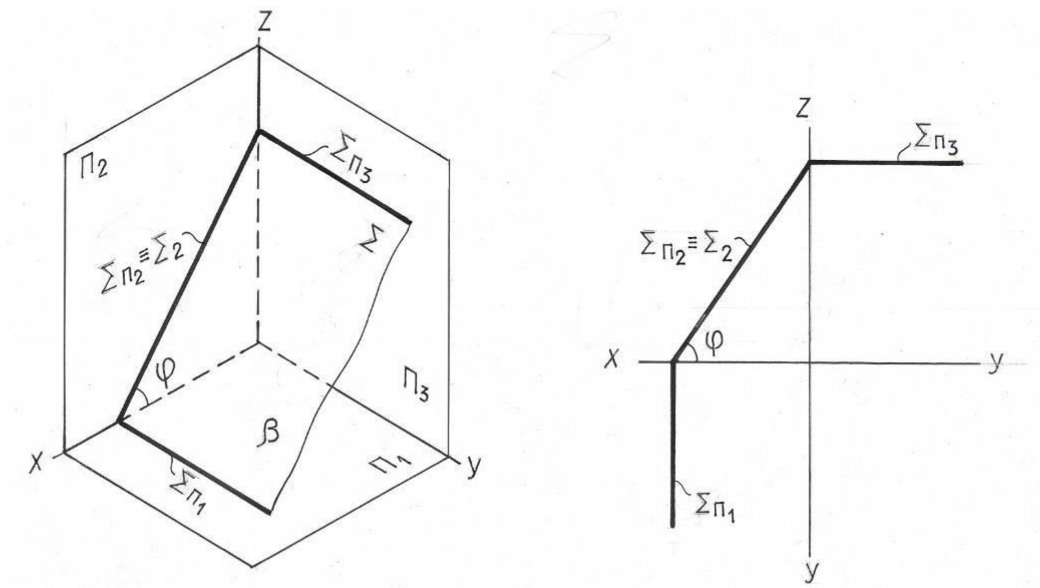



Рисунок 4.13 – Профильно-проецирующая плоскость

Плоскости, перпендикулярные к двум плоскостям проекций, называются плоскостями уровня. Плоскости, параллельные горизонтальной плоскости проекций $\Pi_1$, называется горизонтальными плоскостями уровня. На рисунке 4.14 такая плоскость, заданная треугольником $ABC$, перпендикулярна двум плоскостям проекций $\Pi_2$ и $\Pi_3$. Фронтальная и профильная проекции такой плоскости – горизонтальные прямые, совпадающие со своими одноименными следами. Любая фигура, расположенная в такой плоскости, на горизонтальную плоскость проекций $\Pi_1$ проецируется без искажения.

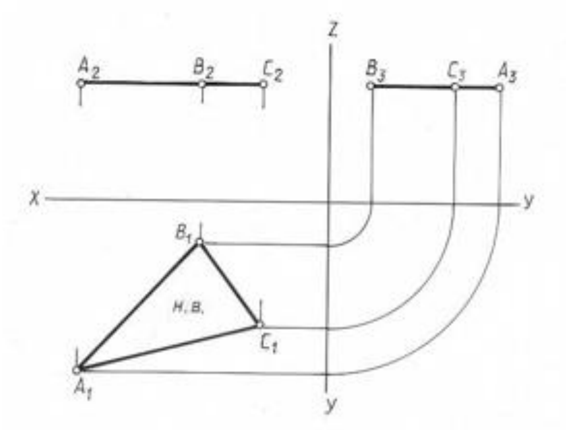



Рисунок 4.14 – Плоскость, заданная треугольником $ABC$

Плоскости, параллельные фронтальной плоскости проекций $\Pi_2$, называется фронтальными плоскостями уровня (рисунок 4.15). Такие плоскости перпендикулярны к плоскостям $\Pi_1$ и $\Pi_3$. Горизонтальная и профильная проекции такой плоскости – прямые линии, совпадающие со своими одноименными следами. Любая фигура, расположенная в такой плоскости, на фронтальную плоскость проекций $\Pi_2$ проецируется без искажения

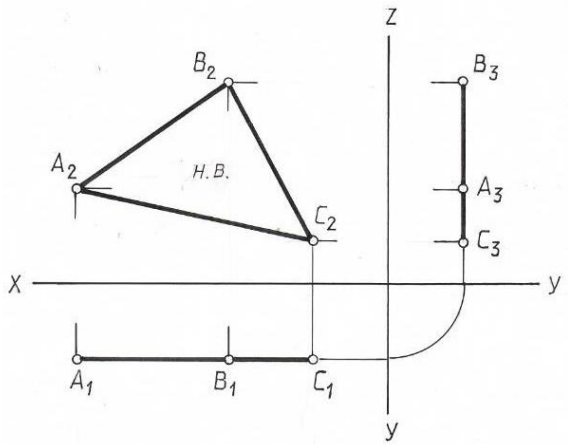



Рисунок 4.15 – Фронтальные плоскости уровня

Плоскости, параллельные профильной плоскости проекции $\Pi_3$, называются профильными плоскостями уровня. Их фронтальные и горизонтальная проекции – прямые линии, перпендикулярные оси $OX$ (рисунок 4.16). Любая фигура, расположенная в этой плоскости, проецируется на плоскость $\Pi_3$ в натуральную величину.

Прямая линия и плоскость в пространстве могут быть параллельны (в частном случае совпадая друг с другом) либо пересекаться. Прямая линия, перпендикулярная плоскости, представляет собой частный случай пересекающихся прямой и плоскости.

Две плоскости в пространстве могут быть либо взаимно параллельными (в частном случае совпадая друг с другом), либо пересекающимися. Взаимно перпендикулярные плоскости представляют собой частный случай пересекающихся плоскостей.

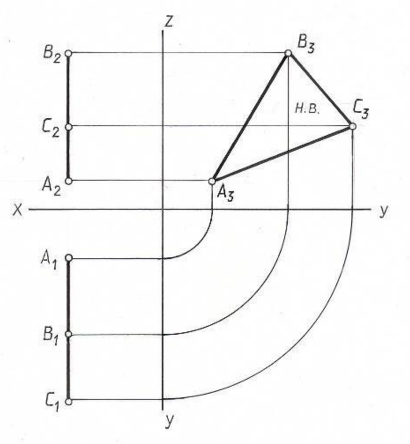



Рисунок 4.16 – Прямые линии, перпендикулярные оси OX

Вопросы пересечения двух плоскостей, а также прямой и плоскости под произвольным углом будут рассмотрены далее, здесь же рассмотрим лишь случаи частного взаимного положения этих элементов – перпендикулярность и параллельность прямой и плоскости, а также двух плоскостей.

### 4.3 Точка и прямая в плоскости: принадлежность точки и прямой плоскости, построение их недостающих проекций

К числу основных задач, которые решают на плоскости, относят следующие:

– проведение в плоскости прямой;

– построение в плоскости некоторой точки;

– построение недостающей проекции точки, лежащей в плоскости;

– проверка принадлежности точки плоскости.

Решение этих задач основано на известных положениях геометрии: прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие плоскости, или если она проходит через одну точку этой плоскости параллельно прямой, лежащей в этой плоскости.

*Построение в плоскости прямой линии*

Чтобы построить в плоскости прямую линию (рисунок 4.17), необходимо в этой плоскости отметить две точки, например точки $A$ и $K$. Затем через них провести прямую $AK$ ($ak$ и $a'k'$).

На рисунке 4.17 прямая $BK$ принадлежит плоскости треугольника $ABC$, так как она проходит через вершину $D$ и параллельна стороне треугольника $AC$ ($b'k' \parallel a'c'$ и $bk \parallel ac$).

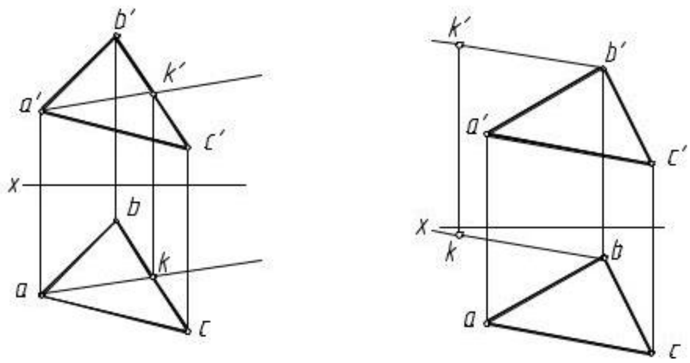


Рисунок 4.17 – Прямая линия в плоскости

*Построение в плоскости некоторой точки*

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости.

Для построения в плоскости точки в этой плоскости проводят вспомогательную прямую и на ней отмечают точку.

На чертеже плоскости, заданной проекциями точки $A$ ($a$ и $a'$) и прямой $BC$ ($bc$ и $b'c'$) (рисунок 4.18), проведены проекции вспомогательной прямой $AK$ ($ak$ и $a'k'$), принадлежащей плоскости. На ней отмечены проекции $d$ и $d'$ точки $D$, принадлежащей этой плоскости.

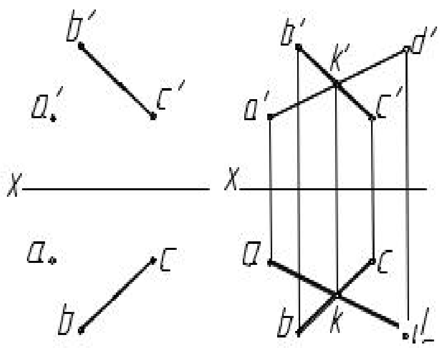


Рисунок – 4.18 – Проекции вспомогательной прямой $AK$

*Построение недостающей проекции точки*

На рисунок 4.19 плоскость задана треугольником $ABC$ ($abc$ и $a'b'c'$). Принадлежащая этой плоскости точка $D$ задана проекцией $d'$. Требуется найти горизонтальную проекцию точки $D$. Ее строят с помощью вспомогательной прямой.

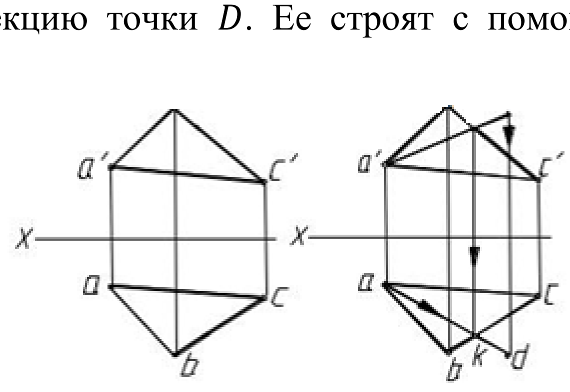


Рисунок 4.19

Прямая принадлежит плоскости и проходит через точку $D$. Для этого проводим фронтальную проекцию прямой $AK$, строим ее горизонтальную проекцию $ak$ и на ней отмечаем горизонтальную проекцию $d$ точки.

*Проверка принадлежности точки плоскости*

Для проверки принадлежности точки плоскости используют вспомогательную прямую, которая принадлежит плоскости. Так, на рисунке 4.20 плоскость задана параллельными прямыми $AB$ и $CD$, точка $E$ – проекциями $e$ и $e'$. Проекцию вспомогательной прямой проводят так, чтобы она проходила через одну из проекций точки. Например, фронтальная проекция вспомогательной прямой 1'–2' проходит через фронтальную проекцию точки $e'$.

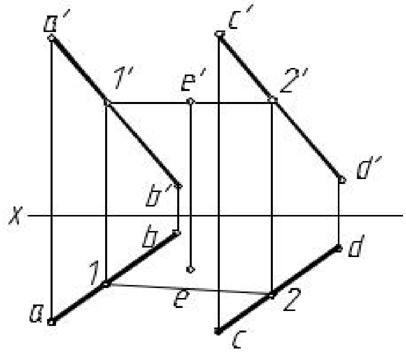



Рисунок 4.20

Из стереометрии известна аксиома: «Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то эта прямая и плоскость взаимно перпендикулярны».

Отсюда следует, что для построения плоскости, перпендикулярной данной прямой $n\ (n_1, n_2)$, достаточно построить две пересекающиеся прямые, перпендикулярные данной прямой. В качестве этих прямых целесообразно взять прямые уровня (рисунок 4.21).

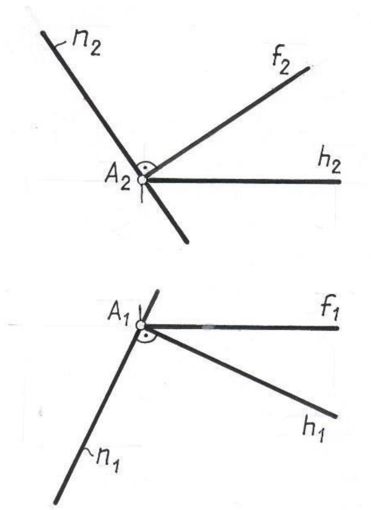



Рисунок 4.21

В этом случае теорема о перпендикуляре к плоскости будет формулироваться так:

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то горизонтальная проекция этой прямой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция – фронтальной проекции фронтали.

При профильно проецирующей плоскости этого признака недостаточно. Это и понятно: прямая, перпендикулярная к двум параллельным прямым плоскости, не обязательно должна быть перпендикулярна к самой плоскости. В этом случае надо обязательно рассмотреть взаимное положение прямой и плоскости на третьей, профильной плоскости проекций.

Задача 4. Опустить перпендикуляр из точки $A$ на плоскость $\Delta$ (ABC). Строим проекции фронтали и горизонтали плоскости $h\,(h_1, h_2)$, $f\,(f_1, f_2)$, проходящей через вершину $A$ (рисунок 4.22). Опускаем перпендикуляр $n$, $n_2 \perp f_2$ и $n_2 \perp h_1$.

Если плоскость задана следами, то $n_1$ перпендикулярна горизонтальному следу, а $n_2$ – фронтальному следу плоскости.

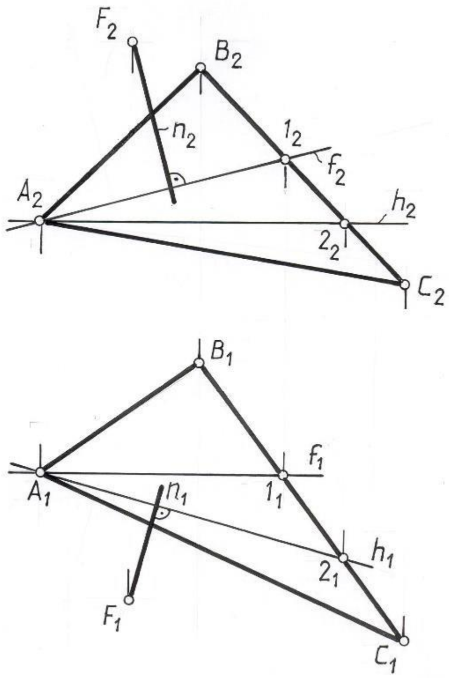



Рисунок 4.22

*Взаимно перпендикулярные плоскости*

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

Задача 5. Построить плоскость $\Delta$, проходящую через точку $A$ и перпендикулярную к плоскости $\Sigma$, заданной двумя пересекающимися прямыми ($h \cap f$) (рисунок 4.23).

Поскольку задача имеет множество решений, т.к. через один перпендикуляр можно провести пучок плоскостей, необходимо дополнительное условие, обеспечивающее единственность решения.

Примем, что одна из прямых, задающих плоскость должна быть параллельна прямой $f$, задающей плоскость.

Проводим перпендикуляр из точки $A$ к плоскости $\Delta$. Через точку $A$ проводим прямую $m$, параллельную $f$. Эти две прямые $m$ и $n$ и определяют искомую плоскость $\Delta$, перпендикулярную $\Sigma$.

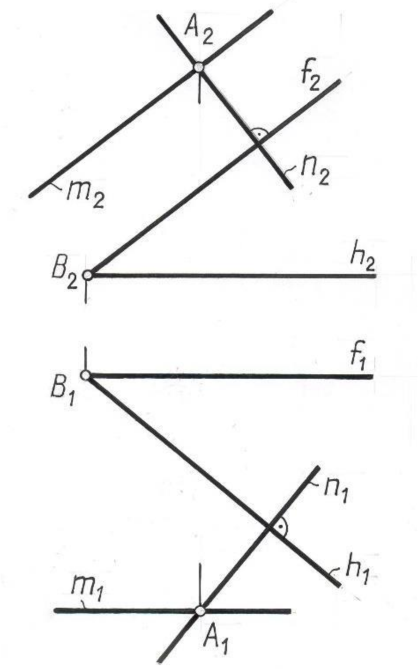



Рисунок 4.23

*<u>Прямая линия, параллельная плоскости</u>*

Признак параллельности прямой и плоскости вытекает из известной аксиомы: «Прямая параллельна плоскости, если она параллельна одной из прямых, лежащих в этой плоскости».

Через данную точку пространства можно провести бесчисленное множество прямых, параллельных данной плоскости, поэтому для единственного решения требуются дополнительные условия.

<u>Задача 6</u>. Через точку $M$ провести прямую $l \parallel \Sigma\ (ABC)$ и плоскости проекций $\Pi_1$ (рисунок 4.24).

Прямая, параллельная двум плоскостям проекций одновременно, параллельна линии их пересечения. Линией пересечения плоскости общего положения с горизонтальной плоскостью проекций является горизонталь.

Строим горизонталь, проходящую через вершину $C$.

Через проекции точки $M$ проводим проекции прямой $l$ параллельно соответствующим проекциям построенной горизонтали. $l_2 \parallel h_2$ и $l_1 \parallel h_1$.

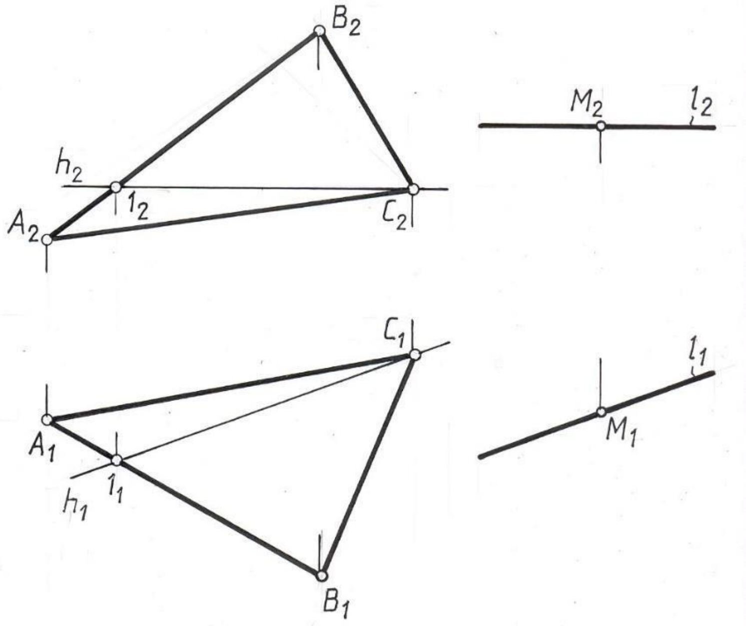



Рисунок 4.24

*Две взаимно параллельные плоскости*

Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

У параллельных плоскостей одноименные линии уровня взаимно параллельны.

Задачи построения плоскости, параллельной заданной, решается в следующей последовательности: в заданной плоскости строим или выделяем две пересекающиеся прямые; через заданную точку $A$ вне плоскости строим две прямые, параллельные выделенным прямым.

Задача 7. Через точку $A$ провести плоскость $\Omega$ ( $a \cap b$ ), параллельную плоскости $\Sigma$ ( $m \parallel n$ ) (рисунок 4.25).

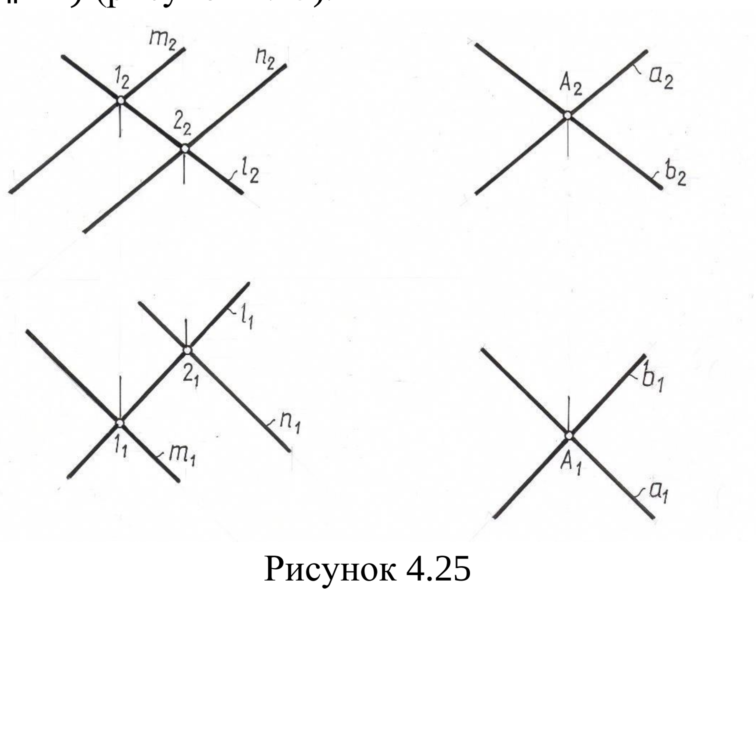



Рисунок 4.25

В плоскости $\Sigma$ строим две проекции произвольной прямой $l$. На основании аксиомы о параллельности двух плоскостей через проекции точки $A$ проводим соответствующие проекции двух прямых $a$ и $b$, параллельных прямым $m$ и $l$ плоскости $\Sigma$ соответственно. Эти прямые и задают искомую плоскость $\Omega$, $\Omega\ (a\ \cap\ b)\ \parallel\ \Sigma(m\ \parallel\ n)$.

Задача 8. Через точку $A$ провести плоскость $\Delta$, параллельную плоскости $\Sigma$ (рисунок 4.26).

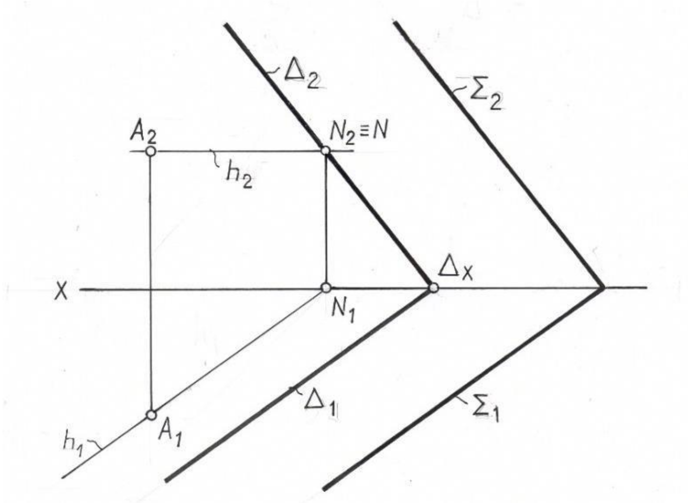



Рисунок 4.26

Через точку $A$ проводим горизонталь $h$ параллельно плоскости $\Sigma$ ($h_1 \parallel \Sigma_1$). $N$ – фронтальный след горизонтали этой горизонтали. Поэтому след $\Delta_2$ пройдет через точку $N$ параллельно $\Sigma_2$, а $\Delta_1$ через точку $\Delta_x$ параллельно следу $\Sigma_1$.

Плоскости взаимно параллельны, если их одноименные следы взаимно параллельны.

### 4.4 Характерные линии плоскости (линии уровня и линии наибольшего наклона плоскости)

На любой плоскости можно провести бесчисленное множество прямых в самых различных направлениях.

Среди этих линий особое место занимают прямые уровня следующих направлений:

а) горизонтали – прямые, лежащие в плоскости и параллельные горизонтальной плоскости проекций (рисунок 4.27).

Фронтальная проекция горизонтали плоскости как линии, параллельной плоскости $\Pi_1$ – параллельна оси $OX$ (перпендикулярна линиям связи).

б) фронтали – прямые, расположенные в плоскости и параллельные плоскости $\Pi_2$ (рисунок 4.28).

Горизонтальная проекция фронтали плоскости как линии, параллельной плоскости $\Pi_2$, параллельна оси $OX$ (перпендикулярна линиям связи).

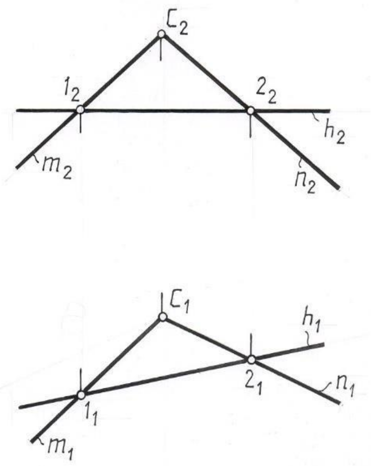



Рисунок 4.27 – Горизонтальные прямые

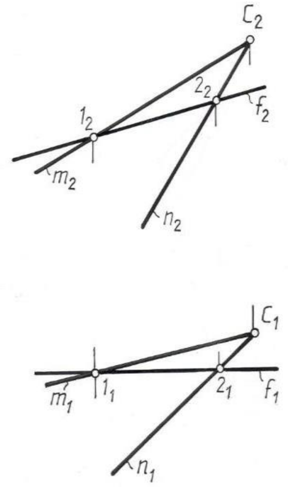



Рисунок 4.28 – Фронтальные прямые

в) профильные прямые – прямые, которые находятся в данной плоскости и параллельны плоскости $\Pi_3$ (рисунок 4.29).

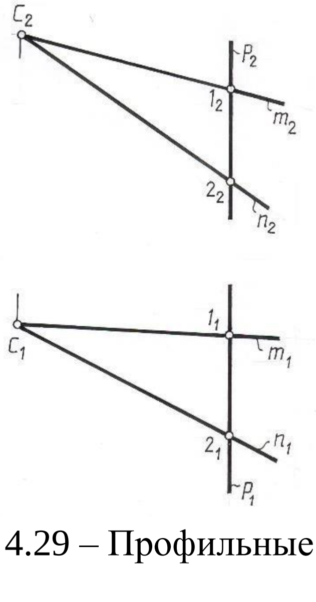



Рисунок 4.29 – Профильные прямые

г) линии наибольшего наклона к плоскостям $П_1$, $П_2$ и $П_3$ – это прямые, расположенные в плоскости и перпендикулярные к горизонталям, фронталям и профильным линиям плоскости соответственно. Линии наибольшего наклона к плоскости $П_1$ называют линиями ската.

Перечисленные прямые называют главными линиями плоскости. На любой плоскости можно провести бесчисленное множество главных линий. Все горизонтали плоскости параллельны между собой, все фронтали плоскости также параллельны друг другу и т. д.

Следует заметить, что следы плоскости также можно отнести к главным линиям. Горизонтальный след – это горизонталь плоскости, фронтальный – фронталь, профильный – профильная линия плоскости.

# Тема 5 Поверхности

## 5.1 Образование, каркас поверхности

В начертательной геометрии рассматривают кинематический способ образования поверхности.

Под поверхностью понимают совокупностьпоследовательных положений непрерывно перемещающейся в пространстве линии.

Перемещающуюся в пространстве линию называют образующей.

Она может быть прямой или кривой, постоянной или непрерывно изменяющейся. Образующей может быть также поверхность (рисунок 5.1). Многообразие поверхностей зависит не только от формы образующей, но и от закона ее перемещения.

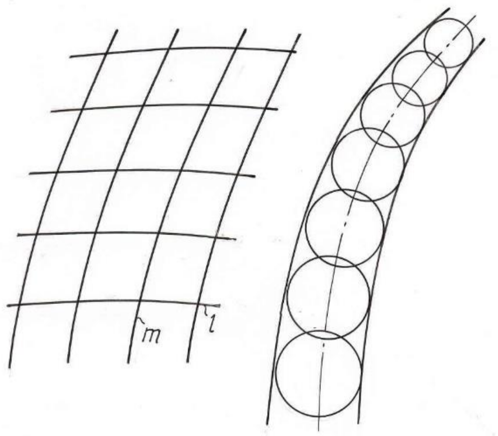



Рисунок 5.1 – Образующая поверхность

Закон перемещения образующей может быть оговорен словесно (перемещение поступательное, вращательное, винтовое) или же задан графически проекциями неподвижной линии, по которой скользит образующая. Эту линию называют направляющей поверхности. Образующие и направляющие могут меняться местами.

На каждой поверхности можно выделить два множества линий: множество образующих и множество направляющих, при этом должно быть выполнено условие, что линии одного множества между собой не пересекаются, но каждая линия одного множества пересекает все линии другого множества.

Многие поверхности можно рассматривать, как образованные различными приемами, так, например, поверхность цилиндра вращения можно рассматривать как поверхность, образованную вращением вокруг оси прямой или кривой линии, принадлежащей поверхности, или же как поверхность, образованную поступательным перемещением окружности, когда центр окружности перемещается по неподвижной оси цилиндра, а плоскость окружности остается перпендикулярной этой оси.

Из множества вариантов образования поверхности следует выбирать те из них, которые сочетают простую форму образующей с несложной кинематикой ее перемещения, так как такие варианты удобны для изображения данной поверхности на чертеже и решения конкретных задач, связанных с ней.

### 5.2 Виды поверхностей

Поверхности по их определенным признакам могут быть разбиты на ряд отдельных классов, причем деление это во многих случаях условное, так как одна и та же поверхность, исходя из того, какой ее признак положен в основу классификации, может быть отнесена одновременно к двум и более классам.

а) По форме образующей поверхности делят на:

– линейчатые;

– нелинейчатые.

Поверхность, которая может быть образована перемещением прямой линии, называется линейчатой.

Поверхность, для которой образующей может быть только кривая линия, называется нелинейчатой, т.е. криволинейной.

б) По закону движения образующей поверхности делят на:

– поверхности вращения;

– поверхности с поступательным перемещением образующей;

– винтовые поверхности.

в) По признаку развертываемости поверхности делят на:

– развертываемые;

– неразвертываемые.

Развертываемые поверхности можно без разрывов и складок совместить с плоскостью проекций.

г) По закону образования поверхности делят на:

– закономерные;

– незакономерные.

Если известен закон образования поверхности, ее называют закономерной; в противном случае поверхность незакономерная.

д) Если поверхность состоит из отсеков плоскостей, ее называют гранной, все остальные поверхности кривые.

Следует отметить, что это неполная классификация поверхностей, так как кроме перечисленных в основу могли быть взяты иные признаки поверхности.

*Торсовые поверхности*

Возьмем кривую линию двоякой кривизны $n$ (рисунок 5.2) и отметим на ней ряд произвольных точек $A, B, C, D$ и проведем секущие $AB - a, BC - b, CD - c$.

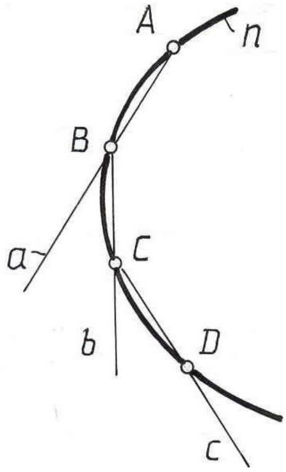


Рисунок 5.2

Если точки $A, B, C, D$ взяты достаточно близко друг к другу, то секущие пары $AB - a$ и $BC - d, BC - b$ и $CD - c$ и т.д., образуют плоскости, которые наклонены друг к другу. Совокупность всех плоских элементов образует многогранную поверхность, т.к. кривая $n$ – пространственная. У такой поверхности, пересекающиеся прямые $a \cap b, b \cap c$ и т.д. образуют грани, а прямые $a, b, c$ и т.д. – ребра. При бесконечном увеличении точек на кривой хорды $AB, BC, CD$ будут стремиться к нулю, а секущие перейдут в касательные и многогранная поверхность перейдет в линейчатую кривую поверхность называемую торсом (рисунок 5.3).

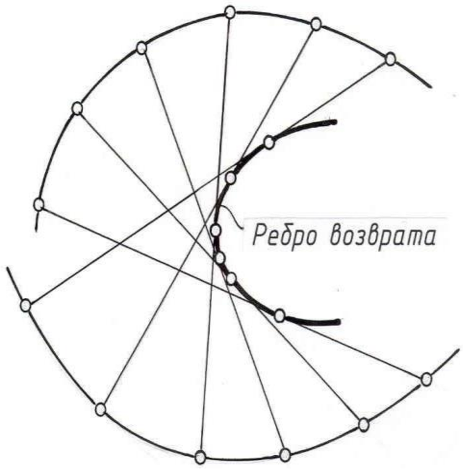


Рисунок 5.3

Иными словами, торсом называется поверхность, образованная непрерывным перемещением прямолинейной образующей, во всех своих положениях касающейся некоторой пространственной кривой – ребра возврата.

В случае вырождения ребра возврата в точку (конечную или бесконечно удаленную) поверхность торса превращается в коническую или цилиндрическую.

*Линейчатые поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана)*

Линейчатые поверхности с двумя направляющими требуют дополнительного условия для их задания, т.к. две направляющие не определяют однозначно положения поверхности в пространстве. Таким дополнительным условием является направляющая плоскость или плоскость параллелизма, которой параллельны все образующие рассматриваемой поверхности.

*Цилиндроид*

Кривая поверхность образованная непрерывным перемещением прямолинейной образующей $l$ во всех своих положениях пересекающей две пространственные кривые $m$ и $n$ (направляющие) и остающейся параллельной заданной плоскости параллелизма называется цилиндроидом (рисунок 5.4, а).

*Коноид*

Кривая поверхность образованная непрерывным перемещением прямолинейной образующей *l* во всех своих положениях пересекающей одну пространственную кривую m и вторую прямолинейную направляющую n и остающейся параллельной заданной плоскости параллелизма называется коноидом (рисунок 5.4, б).

*Косая плоскость или гиперболический параболоид*

Кривая поверхность образованная непрерывным перемещением прямолинейной образующей $l$ во всех своих положениях пересекающей две скрещивающиеся прямые $m$ и $n$ и остающейся параллельной заданной плоскости параллелизма называется косой плоскостью (рисунок 5.4, в).

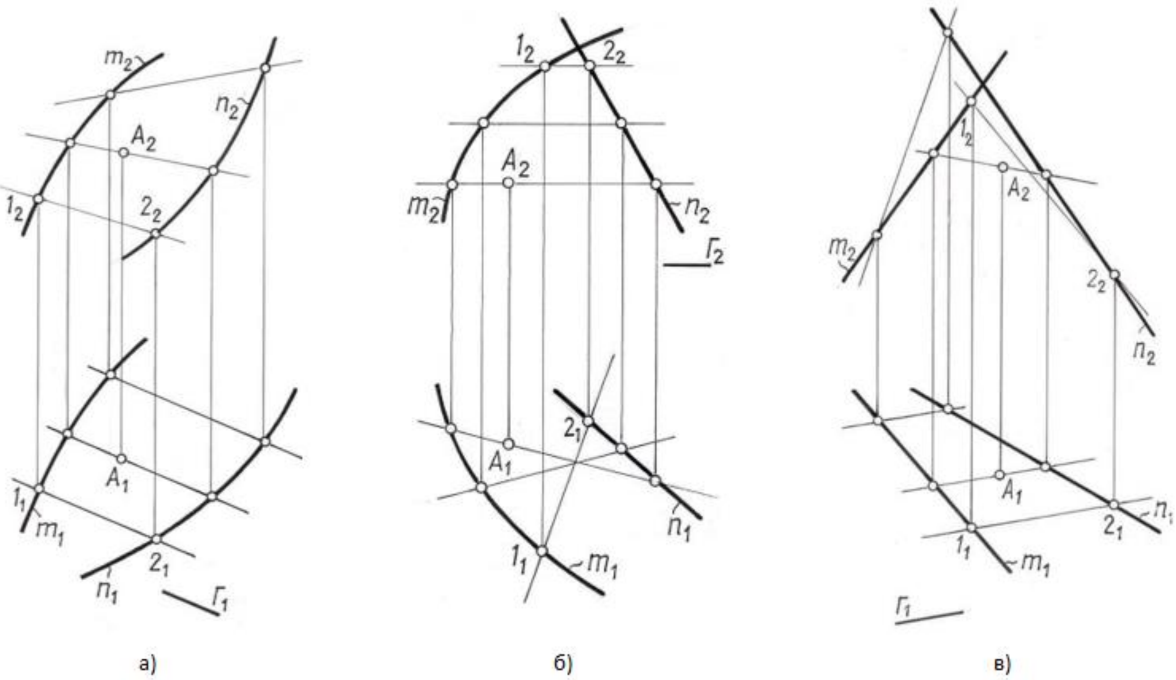



Рисунок 5.4 – Линейчатые поверхности

*Поверхности вращения*

Поверхностью вращения называют поверхность, образованную вращением некоторой линии (образующей поверхности) вокруг неподвижной прямой, называемой осью поверхности. Образующей поверхности вращения может быть любая плоская или пространственная кривая линия, в частности ею может быть прямая линия.

Поверхность вращения считается заданной, если известны её образующая и ось, которые и являются определителем поверхности.

Рассмотрим поверхность вращения (тело) общего вида (рисунок 5.5). Для удобства ось поверхности возьмём перпендикулярной плоскости $\Pi_1$.

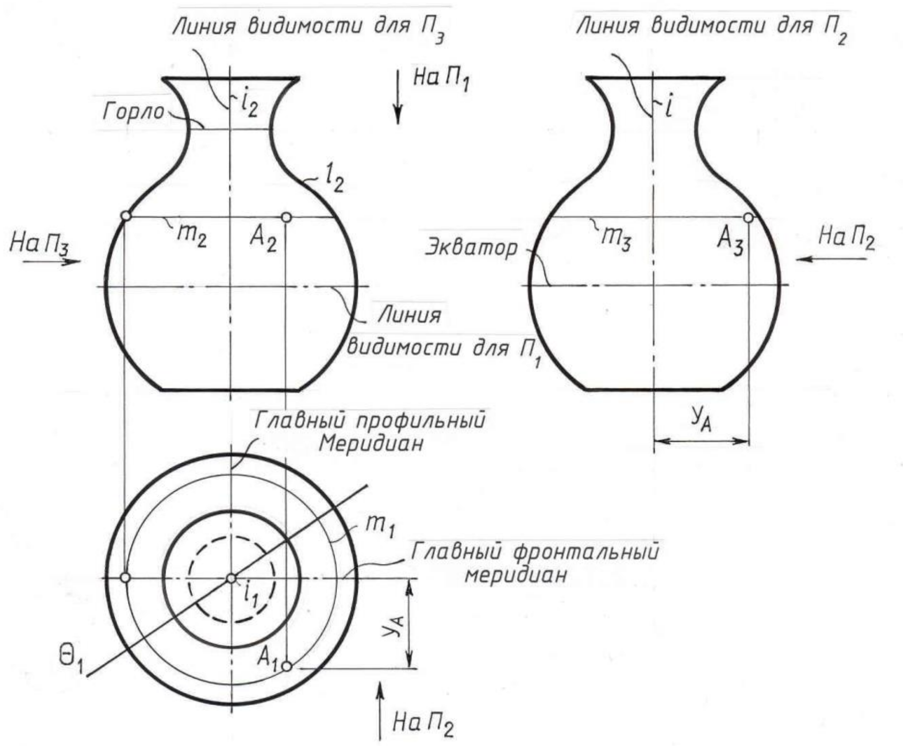



Рисунок 5.5 – Поверхность вращения (тело) общего вида

Все точки образующей $l$ при её вращении вокруг оси $i$ описывают радиус окружности, плоскости которых перпендикулярны оси поверхности, т.е. являются плоскостями уровня. Эти окружности называют параллелями поверхности. Они проецируются без искажения на ту плоскость проекций, которой они параллельны.

Среди множества ближайших смежных параллелей поверхности выделяют параллель наименьшего радиуса, которую называют горлом поверхности и параллель наибольшего радиуса, называемую экватором поверхности. Поверхность может иметь несколько параллелей, называемых горлом и экватором.

Любая плоскость, проходящая через ось поверхности вращения, например, плоскость $\Theta$, пересекает её по образующим, называемым меридианами поверхности. У поверхности вращения все меридианы равны.

Тот меридиан, проекция которого даёт очерк поверхности, называют главным меридианом.

Меридиан, принадлежащий плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций, называют не только главным, но ещё и фронтальным, а меридиан, расположенный в плоскости, параллельной профильной плоскости проекций, называют профильным меридианом.

Для поверхности вращения любая меридиальная плоскость является плоскостью симметрии. Заметим, что каркас поверхности вращения может быть составлен из меридианов и параллелей.

Для поверхности вращения графически простой линией является её параллель, т.е. окружность. Поэтому для того, чтобы построить недостающую проекцию точки, принадлежащей поверхности вращения, в качестве вспомогательной линии, проходящей через данную точку поверхности, проводят её параллель.

Построение вспомогательной параллели начинают с проведения той её проекции, которая одноимённа с заданной проекцией точки.

Так, на рисунке 5.5 через заданную фронтальную проекцию $A_2$ точки $A$ проведена фронтальная (вырожденная) проекция параллели, т.е. горизонтальная прямая, пересечение которой с фронтальным очерком даёт радиус параллели. Построив горизонтальную проекцию параллели, намечаем на ней искомую горизонтальную проекцию $A_1$ с учётом того, что по условию задачи точка $A$ в проекции на $\Pi_2$ видима. Заметим, что во фронтальной проекции видимы те точки поверхности, которые расположены перед фронтальным меридианом.

Горизонтальную проекцию фронтального меридиана, иначе горизонтальную проекцию фронтального очерка называют линией видимости для проекции на плоскость $\Pi_2$.

Поэтому во фронтальной проекции видимы те точки поверхности, которые расположены перед линией видимости для плоскости $\Pi_2$.

Аналогично можно сказать, что в профильной проекции видимы те точки поверхности, которые расположены перед линией видимости для плоскости $\Pi_3$.

Видимость точки в горизонтальной проекции определяется видимостью в горизонтальной проекции соответствующей параллели, которой принадлежит точка.

Поверхность вращения называют линейчатой в том случае, если ее образующей является прямая линия.

Если прямая образующей поверхности вращения параллельна оси поверхности, получаем поверхность цилиндра вращения; если пересекает ось, получаем поверхность конуса вращения и если скрещивается – поверхность однополостного гиперболоида вращения.

Поверхности как правило задают на чертеже их отсеками, что во многих случаях совпадает с изображением на чертеже соответствующих геометрических тел.

**5.3 Задание поверхности на чертеже. Определитель поверхности**

Поверхность считается на чертеже заданной, если относительно каждой точки пространства можно однозначно решить вопрос о ее принадлежности данной поверхности.

Вопрос принадлежности точки поверхности решается аналогично тому, как это делалось при решении вопроса принадлежности точки плоскости (рисунок 5.6).

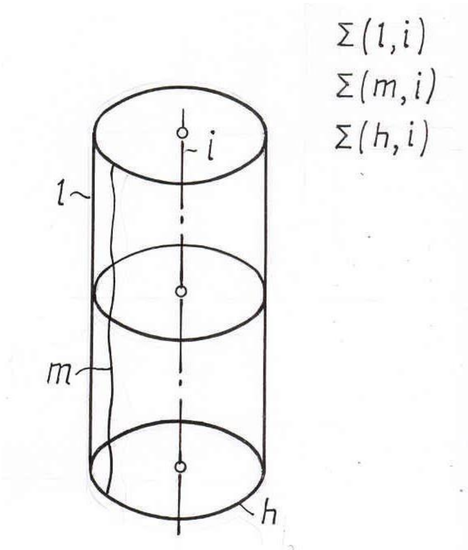



Рисунок 5.6 – Поверхности

Точка принадлежит поверхности в том случае, если она принадлежит некоторой линии данной поверхности. В качестве таких линий выбирают обычно графически простые линии поверхности (прямые или окружности).

В инженерной практике поверхность задают различными способами:

– моделью;

– геометрическим множеством точек, отвечающих определенным условиям;

– уравнением;

– чертежом и т. д.

Рассмотрим способы задания поверхности чертежом.

Поверхность на чертеже может быть задана определителем, очерком или каркасом, а также их сочетанием.

Совокупность условий, однозначно определяющих поверхность, т.е., выделяющих ее из всего многообразия поверхностей, называют определителем.

В определитель поверхности входят форма образующей и направляющей – геометрическая часть определителя, а также дополнительные условия, позволяющие реализовать или наиболее полно описать закон перемещения образующей.

Задача 1. Построить недостающую проекцию точки $A$, принадлежащей данной поверхности $\Sigma$ (рисунок 5.7).

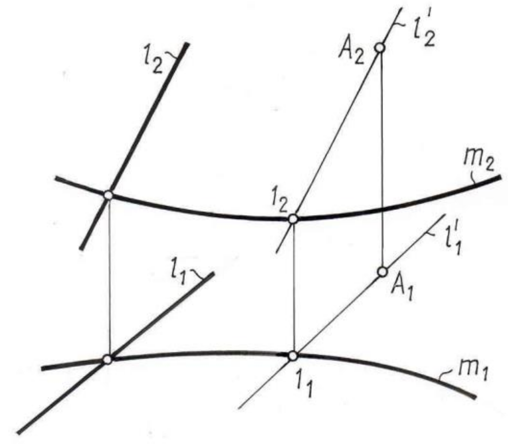



Рисунок 5.7 – Поверхность $\Sigma$

Дано: $\Sigma(m, l)$ – заданная поверхность $l' \parallel l, A \subset \Sigma, A_2 -?$

Решение:

$$l_1' \parallel l_1; l' \supset A_1'; \cap m_1 = l_1 l_2' \supset l_2;$$
$$l_2' \parallel l_2; A_2 \supset l_2.$$

Через известную проекцию точки $A$ проводим образующую $l_1' \parallel l_1$ до пересечения с горизонтальной проекцией направляющей $m_1$.Строим вторую проекцию образующей $l_2' \parallel l_1$ через $l_2'$ – фронтальную проекцию точки 1. На $l'$ с помощью линии связи получаем $A_2$.

Задание поверхности на чертеже проекциями ее определителя не обладает достаточной наглядностью, поэтому с целью увеличения наглядности на чертеже, кроме наиболее важных точек и линий, определяющих поверхность, строят еще и ее очерк. В некоторых случаях поверхность может быть задана только очерком.

Очерком поверхности на данной плоскости проекций (рисунок 5.8) называют линию пересечения плоскости проекций с проецирующей поверхностью, образованной лучами, касающимися данной поверхности. Линию касания заданной поверхности с проецирующей поверхностью называют линией контура. Очерк поверхности можно рассматривать также как проекцию линии контура поверхности на данную плоскость проекций.

Линия контура делит поверхность на видимую и невидимую части. Видима на данной плоскости проекций та часть поверхности, которая расположена между глазом наблюдателя и линией контура; та же часть поверхности, которая расположена за линией контура – невидима. Так, в проекции на плоскость $\Pi_2$ точка $B$ видима, а точка $A$ невидима; на плоскость $\Pi_1$ точка $A$ видима, точка $B$ невидима.

Проекцию линии контура на плоскость, перпендикулярную данной плоскости проекций, называют линией видимости. По расположению этой линии на проекциях судят о видимости точек в той или иной проекции.

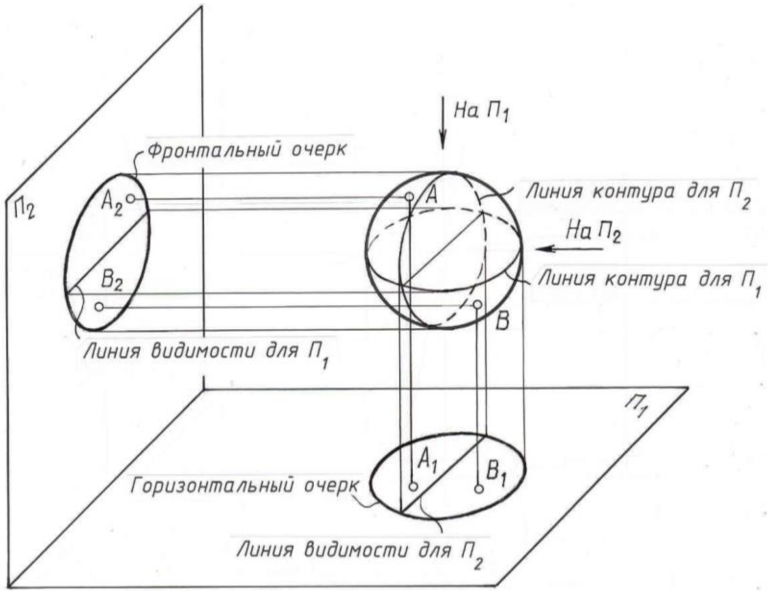



Рисунок 5.8 – Пересечения плоскости проекций с проецирующей поверхностью, образованной лучами

В общем случае поверхность может быть задана каркасом.

Каркас поверхности – это совокупность некоторого числа линий ей принадлежащих (рисунок 5.9).

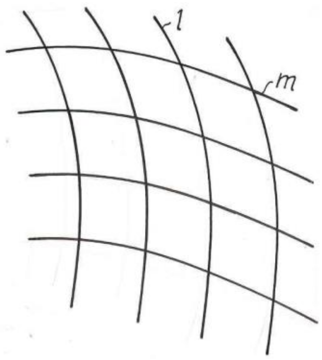



Рисунок 5.9 – Каркас поверхности

Каркас может быть непрерывный и дискретный. Под непрерывным каркасом поверхности понимают множество линий, сплошь заполняющее данную поверхность, это по существу кинематический способ задания поверхности на чертеже.

Дискретный каркас поверхности – это совокупность отдельных линий данной поверхности.

Задание поверхности дискретным каркасом не является достаточно полным, так как при этом не определяется однозначно положение точек поверхности, расположенных между отдельными линиями каркаса.

Это значит, что при одном и том же дискретном каркасе можно получить поверхности, несколько отличающиеся друг от друга.

К заданию поверхности дискретным каркасом прибегают в том случае, если образование поверхности не подчинено никакому геометрическому закону.

Примером поверхностей, задаваемых дискретным каркасом, являются поверхности обшивки самолетов, кузова автомобилей, рельеф земной поверхности и т.д.

На чертеже такие поверхности задают обычно проекциями некоторых линий каркаса, которые рассматривают как результат пересечения поверхности плоскостями (рисунок 5.10).

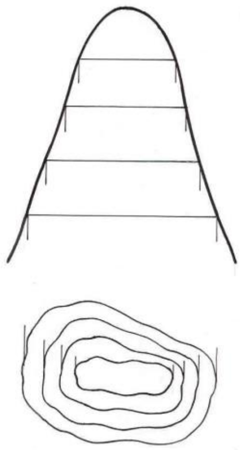


Рисунок 5.10 – Проекции линий каркаса

### 5.4 Гранные, цилиндрические и конические поверхности (общие случаи)

К гранным относятся поверхности, образованные перемещением прямолинейной образующей $l$ по ломаной направляющей $m$. При этом если одна точка $S$ образующей неподвижна, создается пирамидальная поверхность (рисунок 5.11).

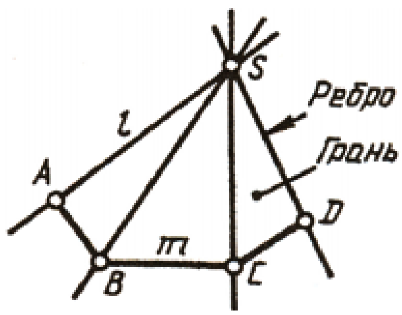



Рисунок 5.11 – Пирамидальная поверхность

Если образующая при перемещении параллельна заданному направлению $S$, то создается призматическая поверхность (рисунок 5.12).

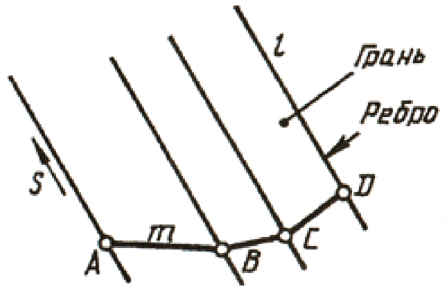



Рисунок 5.12 – призматическая поверхность

Элементами гранных поверхностей являются: вершина $S$ (у призматической поверхности она находится в бесконечности), грань (часть плоскости, ограниченная одним участком направляющей m и крайними относительно него положениями образующей l) и ребро (линия пересечения смежных граней).

Определитель пирамидальной поверхности включает в себя вершину $S$, через которую проходят образующие, и направляющие: $l' \ni S; l \cap m$.

Определитель призматической поверхности, кроме направляющей $m$, содержит направление $S$, которому параллельны все образующие $l$ поверхности: $l \parallel S; l \cap m$.

Замкнутые гранные поверхности, образованные некоторым числом (не менее четырех) граней, называются многогранниками. Из числа многогранников выделяют группу правильных многогранников, у которых все грани правильные и конгруэнтные многоугольники, а многогранные углы при вершинах выпуклые и содержат одинаковое число граней. Например: гексаэдр – куб (рисунок 5.13, а), тетраэдр – правильный четырехугольник (рисунок 5.13, б), октаэдр – многогранник, (рисунок 5.13, в).

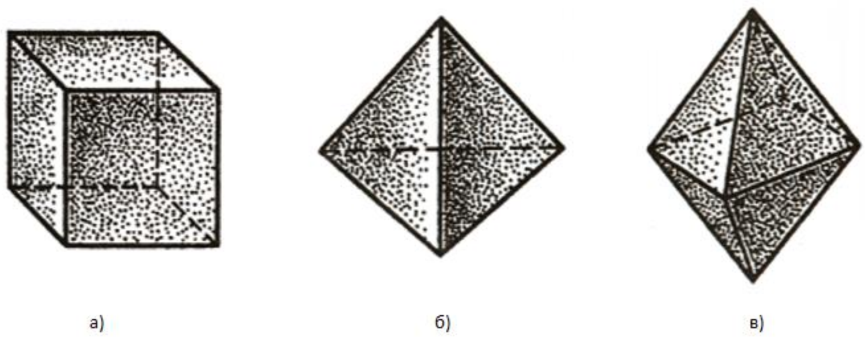



Рисунок 5.13 – Замкнутые гранные поверхности

Форму различных многогранников имеют кристаллы.

К цилиндрическим относятся поверхности, образованные прямой образующей $l$, перемещающейся по криволинейной направляющей $m$ параллельно заданному направлению $S$ (рисунок 5.14). Цилиндрическую поверхность можно рассматривать как частный случай конической поверхности с бесконечно удаленной вершиной $S$.

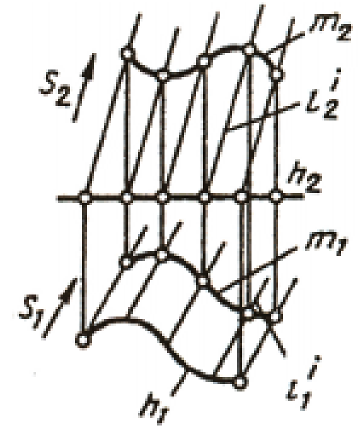



Рисунок 5.14 – Цилиндрическая поверхность

Определитель цилиндрической поверхности состоит из направляющей $m$ и направления $S$, образующих $l$, при этом $l' \parallel S$; $l' \cap m$.

Если образующие цилиндрической поверхности перпендикулярны плоскости проекций, то такую поверхность называют проецирующей. На рисунке 5.15, показана фронтально проецирующая цилиндрическая поверхность.

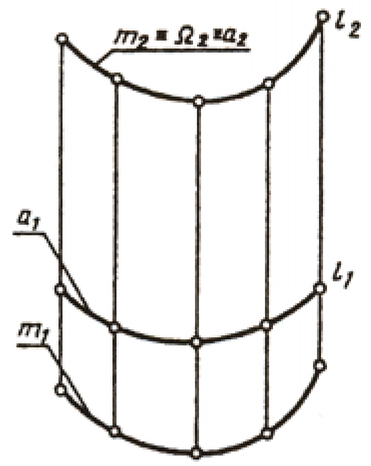



Рисунок 5.15 – Фронтально проецирующая цилиндрическая поверхность

К коническим относятся поверхности, образованные перемещением прямолинейной образующей $l$ по криволинейной направляющей m. Особенностью образования конической поверхности является то, что при этом одна точка образующей всегда неподвижна. Эта точка является вершиной конической поверхности (рисунок 5.16).

Определитель конической поверхности включает вершину S и направляющую m, при этом $l' \in S$; $l' \cap m$.

На цилиндрической и конической поверхностях заданные точки строят с помощью образующих, проходящих через них. Линии на поверхностях, например линия $a$ на рисунке 5.16, или горизонтали $h$ на рисунке 5.14-5.15 строятся с помощью отдельных точек, принадлежащих этим линиям.

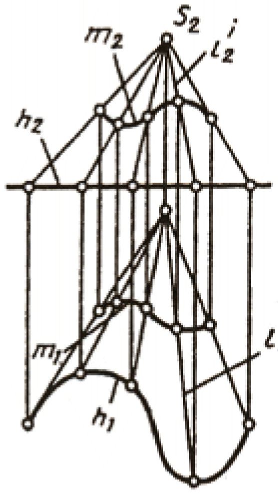


Рисунок 5.16 – Коническая поверхность

**5.5 Частные случаи поверхностей. Многогранники: правильные прямые призма и пирамида**

Как правило, на практике имеют место частные случаи пересечения поверхностей, которые очень просты в построении, но их сложнее представить. Рассмотрим некоторые частные случаи пересечения поверхностей.

Известно, что порядок линии пересечения поверхностей равен произведению порядков поверхностей. При определенных условиях линия пересечения, в общем случае пространственная кривая линия, может распадаться на несколько линий более низкого порядка. При этом сумма порядков линий, на которые распадается алгебраическая кривая линия, равна порядку самой линии. Следует иметь ввиду, что некоторые линии, на которые распадается кривая, могут мнимыми линиями. Случаи, когда кривая четвертого порядка (линия пересечения двух поверхностей второго порядка) распадается на четыре прямые линии, можно проследить на примерах пересечения двух цилиндрических поверхностей второго порядка с параллельными образующими или двух конических поверхностей второго порядка с общей вершиной. Условия, при которых кривая четвертого порядка распадается на две кривые второго, могут быть сформулированы следующими теоремами:

1. Если две поверхности второго порядка пересекаются по одной плоской кривой, то они пересекаются еще по одной плоской кривой линии.

2. Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую линию, соединяющую точки касания.

3. Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности, то их линия пересечения может распадаться на две плоские кривые

линии второго порядка, плоскости которых проходят через прямую линию, соединяющую точки пересечения линий касания.

На рисунке 5.17 приведены примеры пересечения двух цилиндров одинакового диаметра и цилиндра и конуса, описанных около одной сферы.

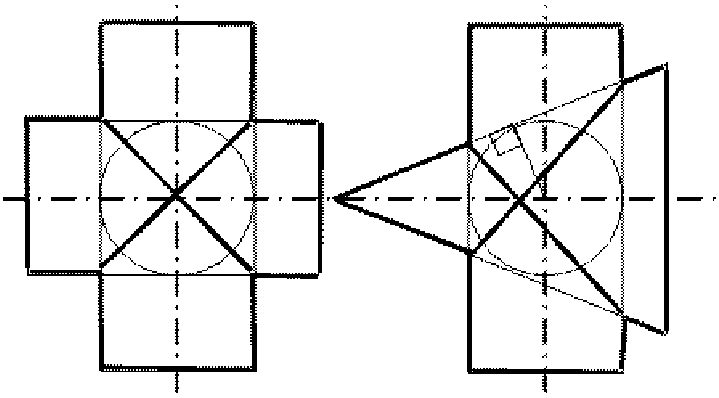


Рисунок 5.17 – Пересечение двух цилиндров одинакового диаметра и цилиндра и конуса, описанных около одной сферы

Вспомогательные сферы минимального радиуса касаются обеих поверхностей. Вспомогательные сферы больших диаметров будут пересекать заданные поверхности по линиям, которые будут симметрично расположены, и все точки будут лежать во фронтальной проекции на прямых линиях, являющимися проекциями эллипсов.

Если поверхности имеют общую плоскость симметрии, то их линия пересечения на плоскости проекций, параллельной плоскости симметрии, имеет порядок в два раза меньше.

Многогранники называются правильными, если все грани представляют собой правильные многоугольники.

## 5.6 Точки и линии на поверхности призмы и пирамиды. Их сечения проецирующими плоскостями

Из большого числа многогранников рассмотрим призмы и пирамиды.

Призма − многогранник, у которого две грани − основания − одинаковые и взаимно параллельные многоугольники, а остальные грани (боковые) – параллелограммы (рисунок 5.18).

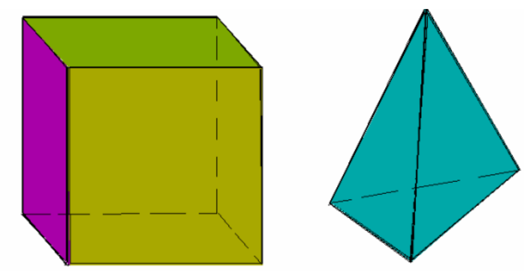


Рисунок 5.18 – Многогранник (параллелограмм и пирамида)

Призма называется прямой, если ее ребра перпендикулярны плоскости основания, и наклонной − если они не перпендикулярны.

Пирамида − многогранник, у которого одна грань, которая принимается за основание, является произвольным многоугольником, а остальные грани (боковые) − треугольники с общей точкой, которая называется вершиной (рисунок 5.18).

Если одна из пересекающихся поверхностей − плоскость, то такое пересечение принято называть сечением поверхности плоскостью, а полученную при этом линию – линией сечения. Если она замкнута, то полученную фигуру называют сечением. В сечении поверхности плоскостью получается плоская линия.

При пересечении поверхности призмы прямой линией получаются две точки. На рисунке 5.19 приведено построение точек пересечения прямой $AB$ и треугольной призмы. Положение проекций $K'$ и $M'$ очевидно, так как боковые грани призмы перпендикулярны к плоскости проекций $\Pi_1$. По точкам $K'$ и $M'$ найдены точки $K''$ и $M''$.

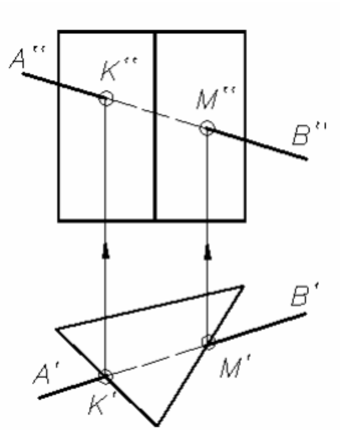



Рисунок 5.19 – Построение точек пересечения прямой $AB$ и треугольной призмы

На рисунке 5.20 приведено построение точек пересечения наклонной треугольной призмы $AA_1BB_1CC_1$ и прямой $m$.

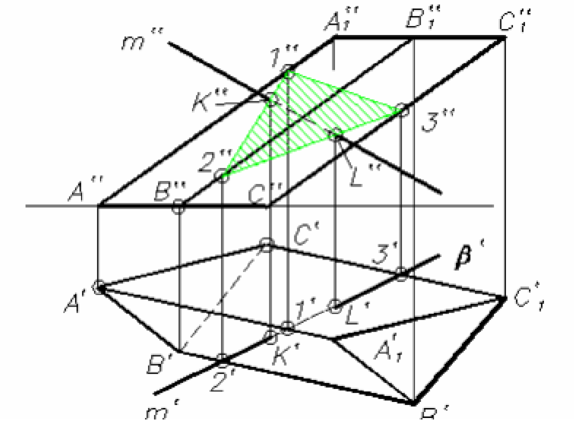



Рисунок 5.20 – Построение точек пересечения наклонной треугольной призмы

Последовательность построений следующая:

− прямая $m$ заключается во вспомогательную секущую плоскость $\beta$ ($\beta'$ − горизонтально-проецирующая плоскость), проходящую через прямую $m$;

− определяется линия пересечения призмы и секущей плоскости. Для этого на горизонтальной плоскости проекций отмечаются точки пересечения проецирующей плоскости $\beta$ с ребрами призмы: точка 1 находится на ребре $AA_1$, 2 − на ребре $BB_1$, 3 – на ребре $CC_1$. Полученные точки проецируются на фронтальную плоскость и соединяются между собой. Треугольник $1'' - 2'' - 3''$ (на рисунке заштрихован) представляет собой сечение призмы плоскостью $\beta$;

− находим точки $K''$ и $L''$ пересечения прямой $m$ с треугольником $1 - 2 - 3$ на фронтальной плоскости, затем по линиям связи находим горизонтальные проекции точек $K'$ и $L'$;

− определяем видимые и невидимые части прямой $m$. Невидимая часть прямой, заключенная между точками $K$ и $L$, изображается штриховой линией.

На рисунке 5.21 приведен пример определения точек входа и выхода при пересечении прямой с пирамидой.

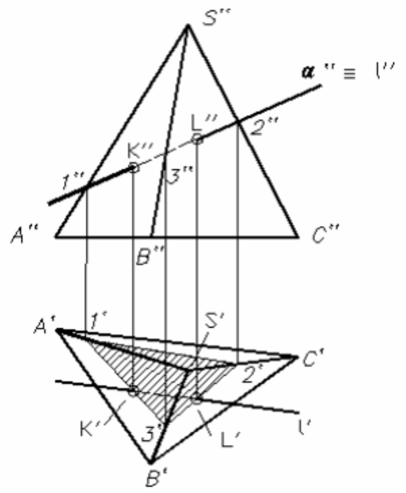



Рисунок 5.21 – Пересечение прямой с пирамидой

Для решения задачи проводим фронтально проецирующую секущую плоскость $\alpha$.

Определяем точки ее пересечения с ребрами пирамиды. Используя полученные точки, строим проекции треугольного сечения, точки пересечения горизонтальной проекции которого с прямой $l$ (точки $K'$ и $L'$) есть горизонтальные проекции искомых точек. Строим их фронтальные проекции $K''$ и $L''$, после чего определяем видимость прямой.

В общем случае линия на любой поверхности строится по точкам.

Среди множества точек линии выделяют так называемые характерные (опорные) точки. К ним относятся:

а) точки видимости, расположенные на очерковых образующих. Они делят линию на видимую и невидимую части;

б) точки, лежащие на осях симметрии;

в) экстремальные точки, т.е. наиболее близкие или удалённые от плоскости проекций;

г) для многогранников – точки, лежащие на ребрах. Эти точки подлежат обязательному построению.

Кроме опорных точек в зависимости от вида линии для ее построения может быть использовано любое количество случайных точек.

Ниже показаны приемы построения точек и линий на различных поверхностях.

Поверхности, ограниченные отсеками плоскостей, называют гранными. Многогранникомназываюттело,ограниченноеплоскими многоугольниками. Элементами многогранников являются его вершины и ребра. Из многогранников рассмотрим призму и пирамиду. У призмы боковые ребра параллельны друг другу, у пирамиды они пересекаются в одной точке.

*Призма*

Рассмотрим построение проекций линии, принадлежащей боковой поверхности призмы по заданной ее фронтальной проекции (рисунок 5.22). Задачу будем решать в трех проекциях, так как в инженерной практике во многих случаях требуется умение выполнять проекции изделия более чем на двух плоскостях проекций. Данная призма прямая. Ее ребра горизонтально проецирующие прямые, значит, боковые грани призмы представляют собой тоже горизонтально проецирующие плоскости.

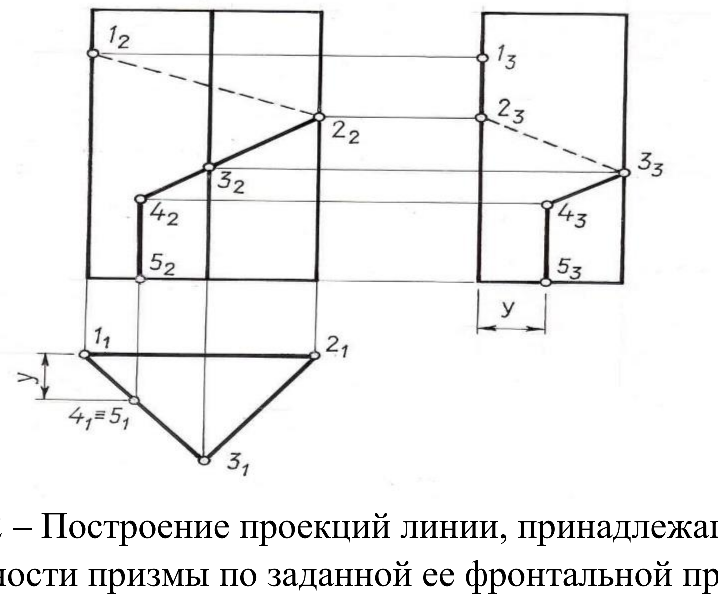



Рисунок 5.22 – Построение проекций линии, принадлежащей боковой поверхности призмы по заданной ее фронтальной проекции

Горизонтальная проекция такой призмы вырождается в треугольник, обладающий собирательным свойством. Это значит, что горизонтальные проекции всех точек, принадлежащих боковой поверхности призмы, располагаются на этом треугольнике – горизонтальном очерке призмы.

Строим профильную проекцию призмы, принимая за базу отсчета измерений в направлении оси $Y$ заднюю грань призмы. Построение недостающих проекций точек заданной линии начинаем с того, что обозначаем на фронтальной проекции цифрами точки, подлежащие определению в других проекциях. Это будут точки, принадлежащие ребрам призмы (1, 2, 3, 5) и точка излома (4).

Отметив горизонтальные проекции обозначенных точек, строим их профильные проекции, используя для этого измерения в направлении осей $Y, Z$. Соединение полученных точек в профильной проекции производим с учетом видимости в последовательности, определяемой их расположением во фронтальной проекции. Заметим, что отрезками прямых соединяем точки, принадлежащие одной грани и на видимой грани получаем видимые отрезки прямых.

*Пирамида*

Рассмотрим построение линии на поверхности пирамиды по ее фронтальной проекции (рисунок 5.23).

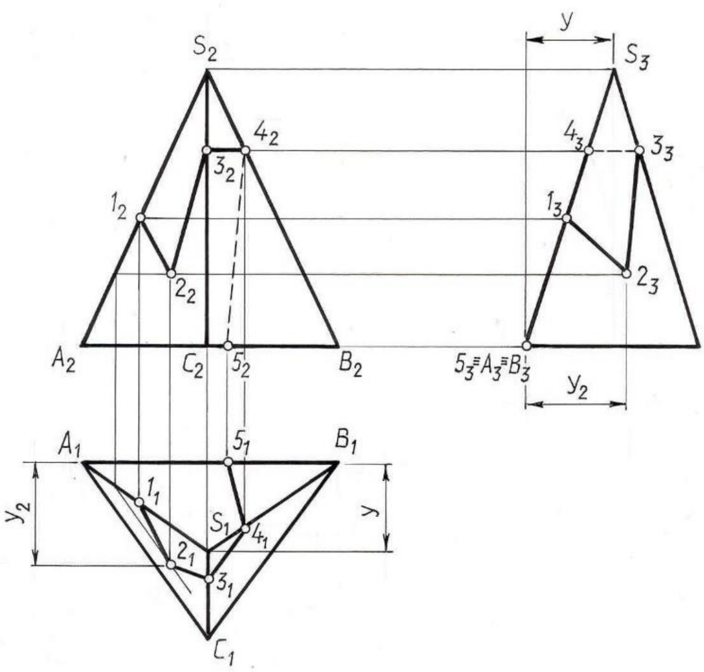



Рисунок 5.23 – Построение линии на поверхности пирамиды по ее фронтальной проекции

Анализируя проекции пирамиды, видим, что две передние грани ее являются плоскостями общего положения, задняя грань – профильно-проецирующая плоскость, основание – горизонтальная плоскость. Отмечаем на фронтальной проекции точки, подлежащие определению в двух других проекциях. Это будут точки принадлежащие рёбрам пирамиды (1, 3, 4, 5) и точка излома (2). Горизонтальные и профильные проекции отмеченных точек находим исходя из принадлежности их к ребру или грани пирамиды. При этом помним, что точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой плоскости. Так, для определения горизонтальной проекции точки 2 проведена фронтальная проекция вспомогательной прямой, параллельной ребру основания пирамиды, найдена её горизонтальная проекция и на ней отмечена проекция $2_1$.

Профильные проекции отмеченных точек строят по двум проекциям (фронтальной и горизонтальной), используя для этого измерения в направлении осей $z$ и $y$. Заметим, что проекции $4_3$, $1_3$, $5_3$ располагаются на вырожденной проекции грани $ASB$.

# Тема 6 Поверхности вращения

## 6.1 Образующая и ось вращения поверхности, очерк поверхности

*<u>Цилиндр</u>*

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью вращения и двумя секущими плоскостями, называют круговым цилиндром. На рисунке 6.1 показан цилиндр вращения, ось которого перпендикулярна плоскости $П_1$. Такой цилиндр называют горизонтально проецирующим, так как все его образующие горизонтально проецирующие прямые. Его боковая поверхность в проекции на горизонтальную плоскость вырождается в окружность, обладающую собирательным свойством. Это значит, что горизонтальные проекции всех точек и линии, принадлежащих боковой поверхности цилиндра, располагаются на этой окружности.

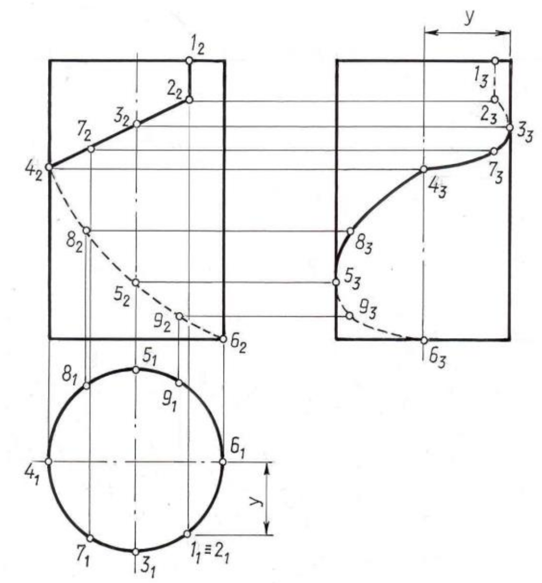



Рисунок 6.1

Рассмотрим построение линии на поверхности цилиндра по заданной ее фронтальной проекции. Построение проекций заданной линии начинаем с того, что отмечаем на ней цифрами точки, принадлежащие очерковым образующим и точки излома линии. Эти точки называют характерными. Между ними в случае надобности отмечают так называемые случайные точки, помогающие установить характер линии.

Точка 3 принадлежит передней образующей, 5 – задней, 4 – правой, 6 – левой. Правая и левая образующие в проекции на плоскость $П_3$ сливаются с осью цилиндра. Точка 2 – точка излома, точки 7, 8, 9 – случайные. Так как данный цилиндр горизонтально проецирующий, то горизонтальные проекции всех отмеченных точек располагаются на вырожденной проекции боковой поверхности цилиндра, т. е. на окружности. Профильные проекции точек строим по двум заданным, при этом за базу отсчета измерений в направлении оси y принимаем фронтальную плоскость, проходящую через ось поверхности.

При соединении точек в профильной проекции следует учитывать их видимость и характер получаемой линии.

Для определения видимости в профильной проекции делаем анализ расположения точек относительно линии видимости для плоскости $\Pi_3$. Точки 1, 2, 9, 6 в профильной проекции невидимы, так как они расположены правее линии видимости для $\Pi_3$.

Заметим, что цилиндрическую поверхность вращения можно рассматривать как множество прямых, отстоящих от данной прямой (оси цилиндра) на расстоянии, равном радиусу цилиндра.

*Конус*

Тело, ограниченное конической поверхностью вращения и плоскостью, пересекающей все образующие конуса, называют круговым конусом.

Принадлежность точки поверхности конуса определяются с помощью образующих или параллелей конуса, проходящих через данную точку (рисунок 6.2, а, б).

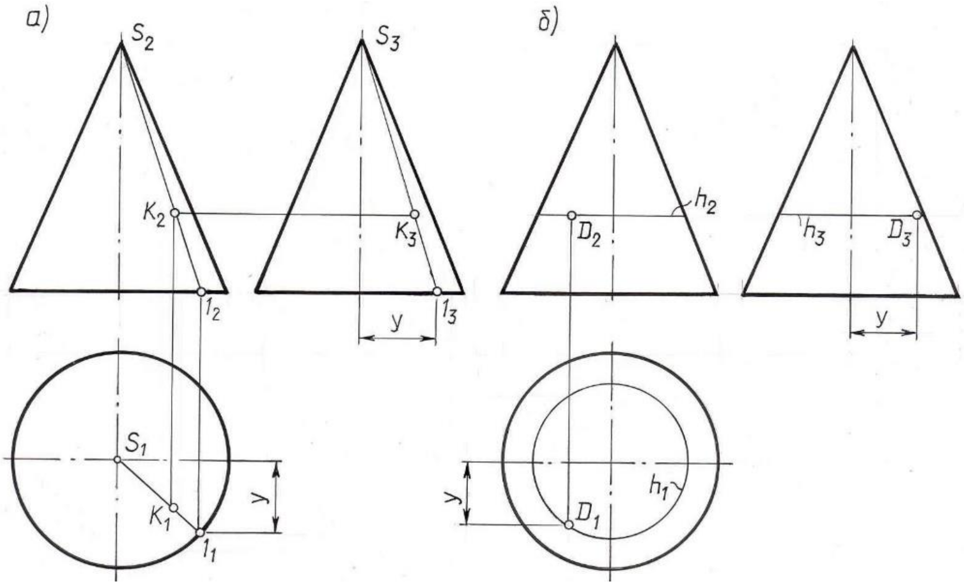



Рисунок 6.2

Задача 2. $\Sigma$ – конус вращения, $K \subset \Sigma, D \subset \Sigma$, $K_2 -?, K_3 -?, D_1 -?, D_3 -?$.

Недостающие проекции точки $K$ строим с помощью образующей $S_1$, проходящей через эту точку, а проекции $D_1$, $D_3$ с помощью параллели (окружности) $h$.

Точка $K$ видима во фронтальной проекции и невидима в профильной. Точка $D$ видима во фронтальной и профильной проекции. На горизонтальной проекции обе точки видимы.

При построении линии, принадлежащей поверхности конуса, в первую очередь строят характерные точки, принадлежащие очерковым образующим конуса, затем строят случайные точки данной линии.

Коническую поверхность вращения можно рассматривать как множество прямых, составляющих с данной прямой, осью конуса, определенный угол.

*Шар*

При вращении окружности вокруг ее диаметра образуется поверхность вращения, называемая сферой. Часть пространства, ограниченную сферой, называют шаром. Все три очерка шара одинаковы (рисунок 6.3).

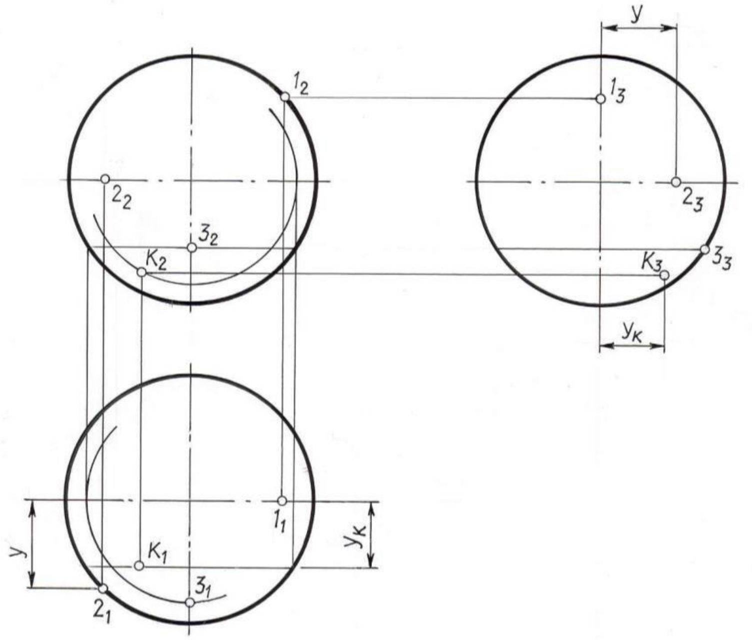



Рисунок 6.3

Фронтальный очерк шара является фронтальной проекцией главного фронтального меридиана шара, горизонтальной – проекцией экватора шара, профильный – профильной проекцией его профильного меридиана. Если точка принадлежит очерку шара, то проекции точки располагаются на соответствующих проекциях этого очерка (см. точки 1, 2, 3).

Видимость точек определяется из анализа расположения их относительно линии видимости соответствующей плоскости проекций. Точка 1 невидима в профильной проекции, точки 3 и К невидима в горизонтальной. Остальные проекции отмеченных точек видимы.

Всякая произвольная точка на поверхности шара может быть построена с помощью параллели шара.

Заметим, что так как у шара за ось вращения может быть принят любой его диаметр, то на поверхности шара можно выделить для построения параллели, параллельные любой из плоскостей проекций $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$.

Если необходимо построить проекции линии, принадлежащей поверхности шара, то строят проекции отдельных точек линии, выделяя в первую очередь характерные точки, т.е. точки, расположенные на очерках шара.

*Тор*

Поверхность, образованная вращением окружности $l$ вокруг оси $i$, лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр, называется тором. Пример тора дан на рисунке 6.4

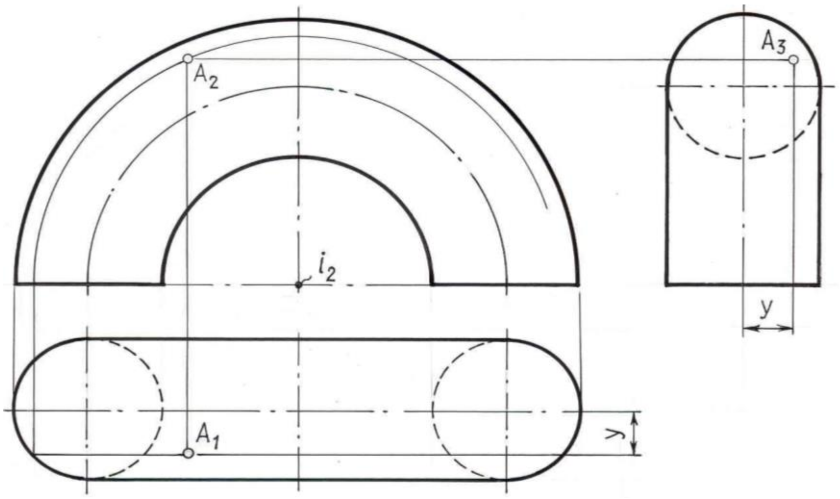



Рисунок 6.4

Проекции точки, принадлежащей поверхности тора, строят с помощью параллели тора.

Задача 3. $\Sigma$ – поверхность тора, $A \subset \Sigma$, $A_2$ –?, $A_3$ –?

Точка видима во всех проекциях. Если требуется построить проекции линии, принадлежащей поверхности тора строят, прежде всего, проекции ее характерных точек, принадлежащих очерковым образующим, затем находят ее случайные точки.

# Тема 7 Пересечение фигур

## 7.1 Случаи пересечения фигур

В пересечении двух заданных фигур (прямой, плоскости, поверхности) могут быть получены:

– точка или несколько точек, если прямая пересекает плоскость или поверхность;

– прямая линия, если пересекаются две плоскости;

– плоская кривая или ломаная, если пересекается плоскость и поверхность;

– пространственная кривая или ломаная, если пересекаются две поверхности.

Если фигурой пересечения является плоская или пространственная кривая, то построение проекций этой линии проводится по отдельным точкам, которые затем соединяются между собой. Среди множества точек линии обязательному построению подлежат так называемые характерные (опорные) точки. К ним относятся:

а) точки видимости, расположенные на очерковых образующих. Они делят фигуру пересечения на видимую и невидимую части;

б) точки, лежащие на осях симметрии;

в) экстремальные точки, т.е. наиболее близкие или удалённые от плоскости проекций;

г) для многогранников – точки, лежащие на ребрах.

Заметим, если две заданные фигуры имеют общую плоскость симметрии, то искомая фигура пересечения будет иметь ось симметрии, расположенную в плоскости симметрии. Если общая плоскость симметрии проецирующая, то проекция фигуры пересечения симметрична относительно вырожденной проекции – следа плоскости.

Чтобы построить проекции фигуры пересечения, необходимо найти проекции точек фигуры пересечения заданных фигур. Решение задачи на проекционном чертеже значительно упрощается, если заданные фигуры (или одна из них) занимают проецирующее положение.

Все задачи на пересечение фигур можно отнести к одному из трёх возможных случаев:

– случай 1 – обе геометрические фигуры занимают проецирующее положение;

– случай 2 – одна фигура занимает проецирующее положение, а вторая-общее положение;

– случай 3 – обе геометрические фигуры занимают общее положение.

Решение задачи на построение проекций фигуры пересечения необходимо выполнять в последовательности:

– провести анализ заданных геометрических фигур – выяснить вид фигуры пересечения, уточнить положение заданных фигур относительно плоскостей проекций с целью выявления случая пересечения;

– построить проекции фигуры пересечения по алгоритму, соответствующему данному случаю пересечения;

– установить видимость отдельных частей пересекающихся фигур и фигуры пересечения.

Для каждого из названных ранее случаев расположения заданных фигур относительно плоскостей проекций существует единый общий алгоритм решения, т.е. построения проекций фигуры пересечения.

### 7.2 Первый случай пересечения фигур

Обе заданные фигуры занимают проецирующее положение.

Если обе геометрические фигуры, заданные на чертеже, занимают проецирующее положение безразлично к одной и той же или различным плоскостям проекций, то две проекции общей фигуры пересечения уже непосредственно заданы на чертеже. Они совпадают с вырожденными проекциями проецирующих фигур.

Проиллюстрируем это на примерах.

Задача 1. Дано: Г ($\Gamma_2$); $a$ $(a_1, a_2)$ (рисунок 7.1) Г $\cap$ a.

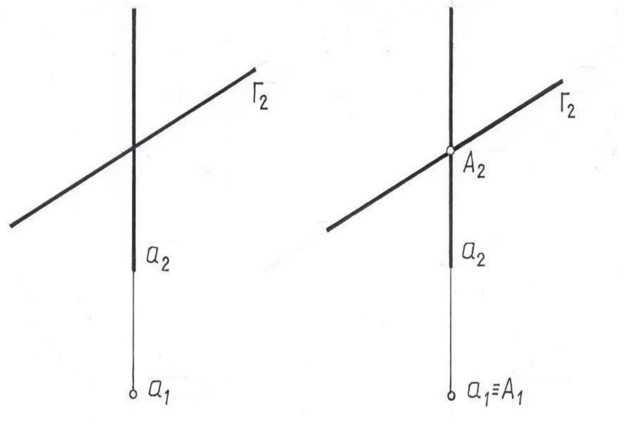



Рисунок 7.1

Решение:

1) $\Gamma \perp \Pi_2$; $a \perp \Pi_1$; $\Gamma \cap a = A$;

$A \subset a$; $a \perp \Pi_1 \Rightarrow A_1 \equiv a_1$,

$A \subset \Gamma$; $\Gamma \perp \Pi_2 \Rightarrow A_2 \equiv \Gamma_2$,

$A_2 \subset a_2 \Rightarrow A_2 \equiv \Gamma_2 \cap a_2$.

Фигурой пересечения прямой и плоскости является точка $A$. Фронтальная проекция этой точки находится на пересечении $a_2$ и $\Gamma_2$. Горизонтальная проекция совпадает с вырожденной проекцией $a_1$.

Задача 2. Дано: $\Gamma\ (\Gamma_1);\ \theta\ (ABC);\ \Gamma\ \cap\ \theta -?$ (рисунок 7.2.).

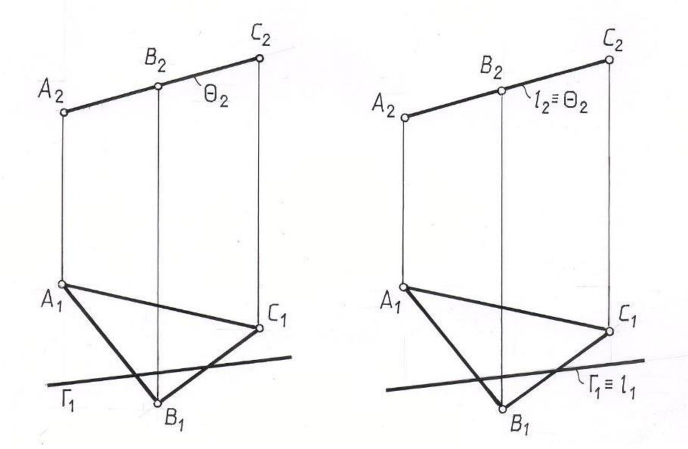



Рисунок 7.2

Решение:

1) $\Gamma\ \cap\ \theta = l;\ \Gamma\ \perp\ \Pi_1,$

$l\ \subset \Gamma\ \Rightarrow l_1\ \equiv \Gamma_1,$

$l\ \subset\ \theta\ \Rightarrow\ l_2 \equiv A_2\ B_2\ C_2\ \equiv\ \theta_2.$

Задача 3. Дано: $\Gamma\ (\Gamma_2)$; Ф – призматическая поверхность (рисунок 7.3) $\Gamma\ \cap \Phi - ?$

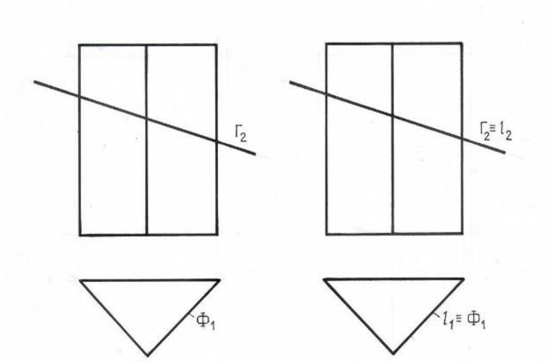



Рисунок 7.3

Решение:

$\Gamma\ \perp\ \Pi_2;\ \Phi\ \perp\ \Pi_1;\ \Gamma\ \cap\ \theta =\ l$ – ломаная линия

$l \subset\ \Gamma \Rightarrow l_2\ \equiv \Gamma_2 l \subset\ \Phi \Rightarrow l_1\ \equiv\ \Phi_1.$

Задача 4.

Дано: $\Phi, \theta$ – цилиндрические поверхности (рисунок 7.4), $\Phi\ \cap\ \theta - ?$

Решение:

$\Phi\ \perp\ \Pi_1;\ \theta\ \perp\ \Pi_2.$

Обе заданные поверхности являются проецирующими, т.е. имеет место первый случай пересечения.

Фигурой пересечения двух цилиндров является пространственная кривая линия.

$\Phi \cap \theta = l$ – пространственная кривая.

Проекции линии пересечения совпадают с частями вырожденных проекций одной проецирующей фигуры, находящихся внутри контура второй фигуры.

Так, горизонтальная проекция линии пересечения $l_1$ совпадает с частью вырожденной горизонтальной проекции цилиндра $\Phi_1$.

$$l \subset \Phi \Rightarrow l_1 \equiv \Phi_1.$$

Фронтальная проекция линии пересечения $l_2$ совпадает с частью вырожденной фронтальной проекции цилиндра $\theta_2$.

$$l \subset \theta \Rightarrow l_2 \equiv \theta_2.$$

Профильная проекция построена по отдельным точкам, которые соединены потом плавной кривой. Построение показано для точки 2.

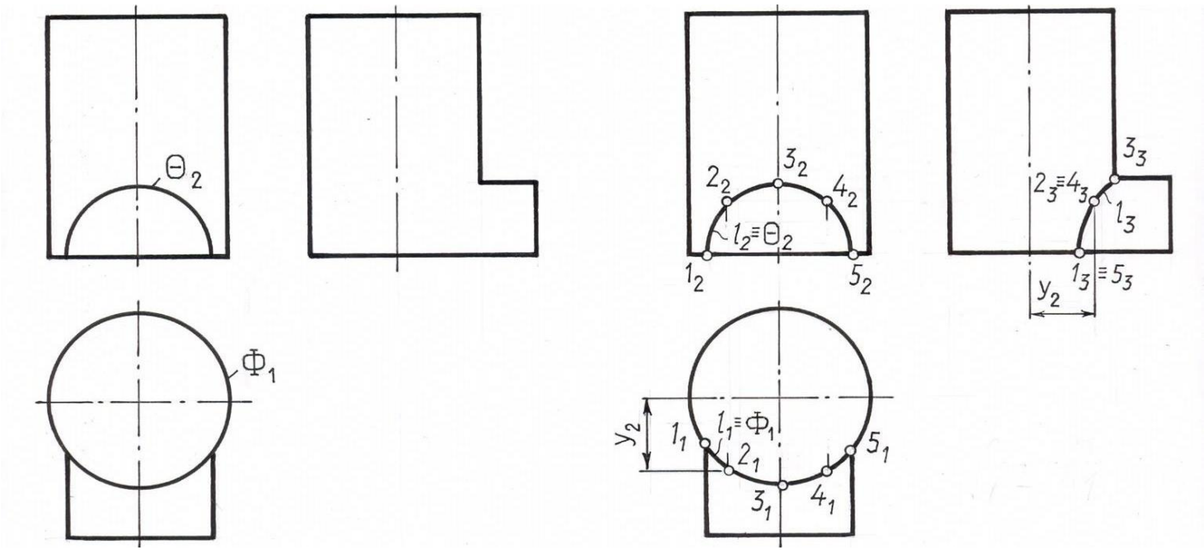



Рисунок 7.4

### 7.3 Второй случай пересечения фигур

Одна из геометрических фигур занимает проецирующее положение, а вторая – общее положение.

Если одна из геометрических фигур занимает проецирующее положение, то одна проекция искомой фигуры пересечения уже непосредственно задана на чертеже.

Она совпадает с вырожденной проекцией (или с ее частью) проецирующей фигуры. Вторая проекция фигуры пересечения строится на основе условия принадлежности ее точек поверхности фигуры общего положения.

Таким образом, задача на пересечение практически сводится к решению более простой – задачи на принадлежность.

Рассмотрим графическое построение на примерах.

Задача 5. Дано: $l$, $\Gamma$ ($\Gamma_1$) (рисунок 7.5) $l \cap \Gamma$ –?

Решение:

1) $Г \perp П_1$; $l$ – общего положения $l \cap Г = Т$;

2) Так как $Т \subset Г$ и $Г \perp П_1 \Rightarrow T_1 \subset Г_1$.

В тоже время $Т \subset l \Rightarrow T_1 \subset l_1$.

Определяем $T_1 = l_1 \cap Г_1$ – горизонтальная проекция точки пересечения является пересечением горизонтальной проекции прямой и вырожденной проекцией плоскости;

$T_2 \subset l_2$ – фронтальная проекция точки пересечения строится из условия ее принадлежности прямой $l$.

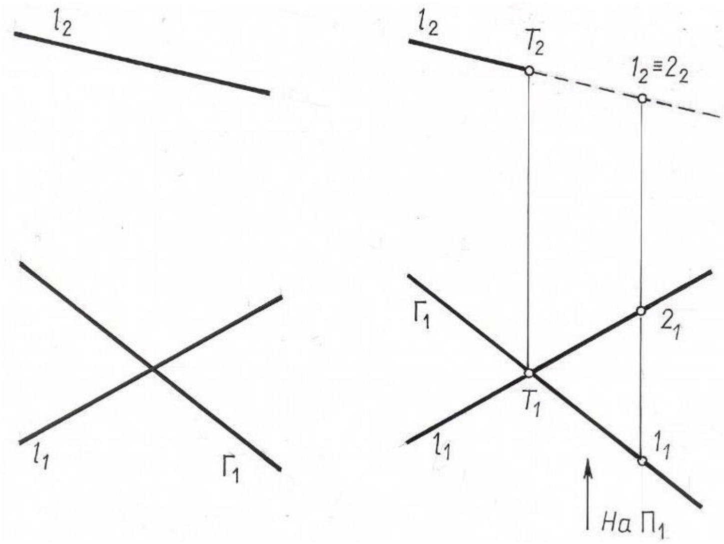



Рисунок 7.5

Определяем видимость на плоскости $П_2$ с помощью фронтально конкурирующих точек 1 и 2.

Отметим, что если среди двух заданных геометрических фигур одна является проецирующей плоскостью, то на эпюре часто видимость определяют по представлению, не прибегая к помощи конкурирующих точек.

Задача 6. Дано: $l$, Г (АВС) (рисунок 7.6), $Г \cap l - ?$

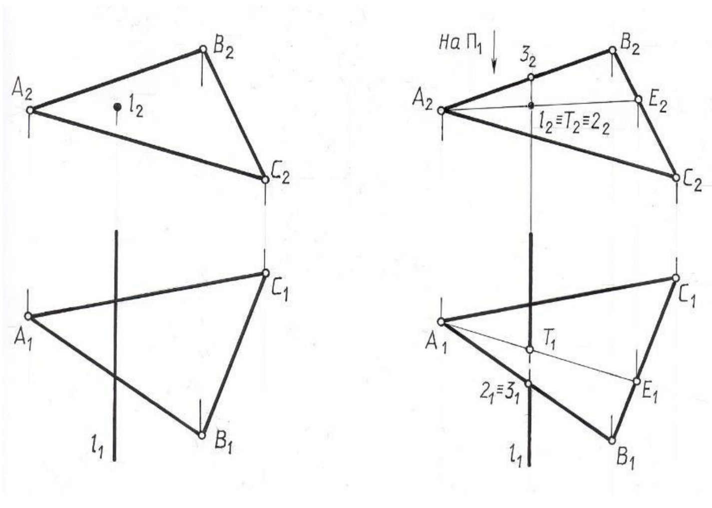



Рисунок 7.6

Решение: 1) $\Gamma \cap l = T\ l \perp \Pi_2$;

2) $\mathrm{T} \subset l$ и $l \perp \Pi_2 \Rightarrow T_2 \equiv l_2$.

Горизонтальную проекцию искомой точки $T$ построим на основе принадлежности её плоскости общего положения при помощи вспомогательной прямой плоскости – прямой $AE$.

Видимость прямой $l$ на плоскости $\Pi_1$ определим при помощи горизонтально конкурирующих точек 2 и 3.

Задача 7.

Дано: $\Theta$ – коническая поверхность, $l$ (рисунок 7.7), $l \cap \Theta$ – ?

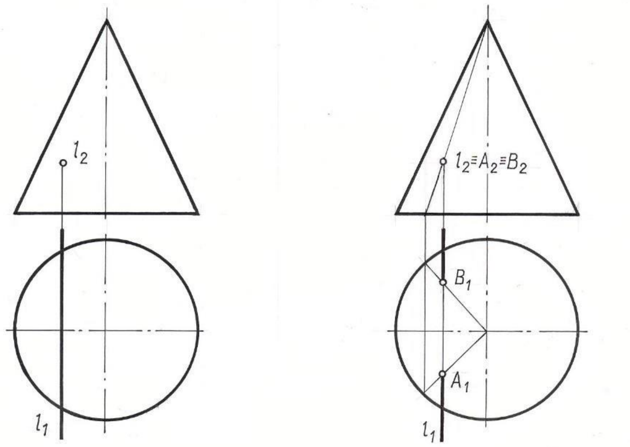



Рисунок 7.7

Решение: 1) $l \cap \Theta = A, B$;

$A, B \subset l$; $l \perp \Pi_2 \Rightarrow A_2, B_2 \equiv l_2$.

Горизонтальные проекции точек $A$ и $B$ определяем из условия их принадлежности боковой поверхности конуса с помощью его образующих. Очевидно, что на горизонтальной проекции эти точки видимы. Часть проекции прямой между точками $A$ и $B$, находящуюся внутри конуса, на чертеже показывают тонкой сплошной линией построения.

Задача 8. Дано: Ф – поверхность цилиндра; $\theta$ – поверхность конуса (рисунок 7.8); $\Phi \cap \theta$ –?

Решение: 1) $\Phi \cap \theta = l$ – пространственная кривая,

$l \subset \Phi$ и $\Phi \perp \Pi_2 \Rightarrow l_2 \equiv \Phi_2$.

Имея фронтальную проекцию искомой кривой, отмечаем опорные точки $A, B, C, D, M, N, E, F, K, T$ на плоскости $\Pi_2$. Горизонтальные и профильные проекции этих точек находим их условия принадлежности их соответствующим образующим или параллелям конуса.

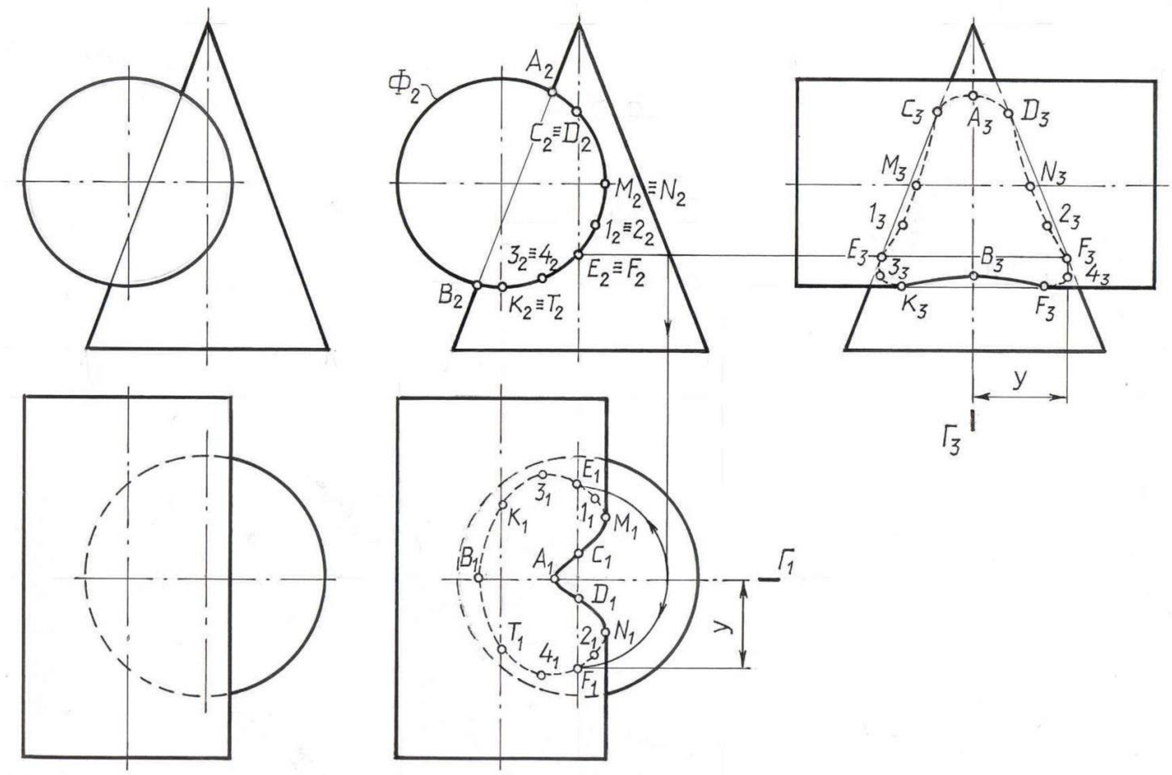



Рисунок 7.8

Случайные точки 1, 2, 3, 4 построены с помощью параллелей конуса. Заметим, что заданные фигуры имеют общую плоскость симметрии – фронтальную плоскость Г. Поэтому горизонтальная и профильная проекция искомой кривой $l$ симметричны относительно соответствующих проекций плоскости $\Gamma_1$ и $\Gamma_3$.

При определении видимости отдельных частей кривой $l$ учитываем, что на проекции та часть линии пересечения видима, которая расположена на видимой части двух заданных пересекающихся фигур.

Таким образом, решение задачи на пересечение геометрических фигур, когда одна из них является проецирующей фигурой, выполняется в такой последовательности:

– выделяем из 2-х заданных фигур проецирующую и отмечаем ее вырожденную проекцию;

– обозначаем ту проекцию искомой фигуры пересечения (точки, линии), которая совпадает с вырожденной проекцией проецирующей фигуры. Если совпадение только частичное, то находим границы общей части; строим вторую проекцию искомых общих точек по условию их принадлежности геометрической фигуре общего положения.

### 7.4 Третий случай пересечения фигур

Если две пересекающиеся геометрические фигуры занимают общее (не проецирующее) положение, то основой алгоритма решения такой задачи является использование вспомогательных поверхностей – посредников (чаще всего плоскостей или сфер) с целью выявления общих точек заданных фигур. Сущность способа вспомогательных сечений плоскостями-посредниками заключается в следующем:

Две заданные фигуры пересекаем некоторой вспомогательной поверхностью – $\Phi_i$ (рисунок 7.9).

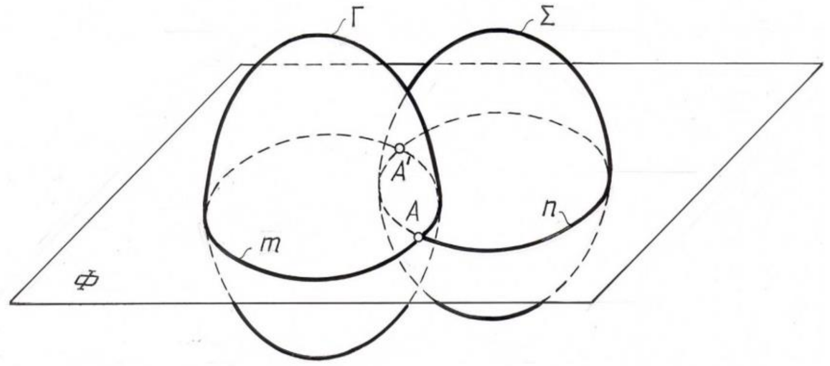



Рисунок 7.9

Находим пересечение поверхности посредникас заданными фигурами $\Phi_i \cap \Gamma = m_i; \Phi_i \cap \Sigma = n_i$.

Определяем точки $A$ и $A'$, общие для заданных фигур и поверхности посредника $m_i \cap n_i = A, A'$.

Если для нахождения пересечения заданных фигур необходимо найти множество точек, то, повторяя этот прием несколько раз, определяем достаточное количество точек, необходимых для построения искомой фигуры пересечения.

Посредники выбирают так, чтобы в пересечении с заданными фигурами они давали графически простые линии (прямые или окружности), при этом окружности должны проецироваться без искажения на плоскости проекций.

В зависимости от условия задачи поверхность-посредник может пересекать заданные геометрические фигуры (рисунок 7.10) или же проходить через одну из них, если одна из заданных фигур является линией (прямой или кривой).

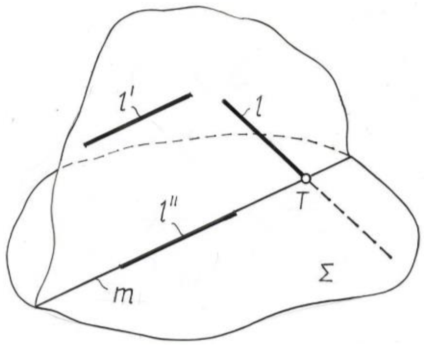



Рисунок 7.10

С помощью указанного алгоритма можно выяснить любое положение прямой относительно заданной плоскости (рисунок 7.11).

Так, если:

$$m \parallel l' \Rightarrow l' \parallel \Sigma,$$
$$m \equiv l'' \Rightarrow l'' \subset \Sigma\, m \cap l \Rightarrow l \cap \Sigma = T.$$

Рассмотрим графические построения, связанные с нахождением пересечения фигур общего положения, на примерах.

<u>Задача 1.</u> Дано: $\Sigma$ (a || $b$); $l$ ($l_1$; $l_2$) (рисунок 7.11), $\Sigma \cap l = ?$

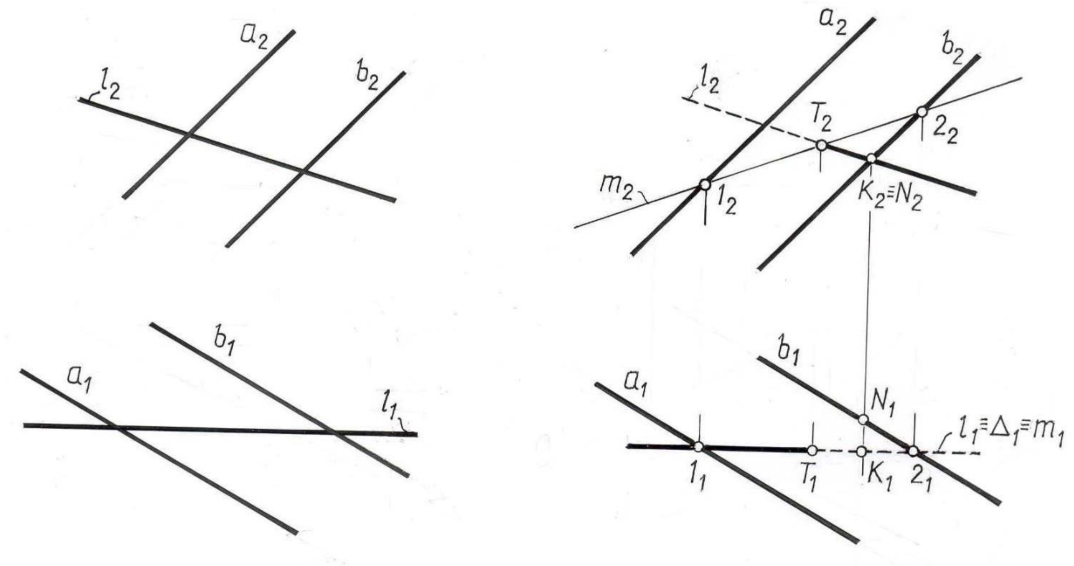



Рисунок 7.11

Решение:

$\Sigma, l$ – общего положения $\Sigma \cap l = T$.

Точку пересечения прямой с плоскостью определяют вышеуказанным способом сечений. В качестве посредника целесообразно выбрать проецирующую плоскость, проходящую через заданную прямую.

Алгоритм решения этой задачи состоит из трех операций:

а) Ф (вводим плоскость – посредник Ф; Ф $\supset l$);

б) Ф $\cap \Sigma = m$;

в) $m \cap l = T$ ($T_2 = l_2 \cap m_2$; $T_1 \subset l_1$.

Видимость прямой $l$ определяется методом конкурирующих точек. Поскольку из двух фронтально конкурирующих точек $K$ и $N$, лежащих на прямых $l$ и $b$ соответственно, дальше от плоскости $\Pi_2$ расположена точка $K$, то в этом месте чертежа видимой будет заданная прямая $l$ до точки пересечения $T$ (рисунок 8.3). Далее прямая $l$ невидима.

<u>Задача 2.</u> Дано: $\Sigma$ – поверхность вращения; $l$ (рисунок 7.12), $l \cap \Sigma = ?$

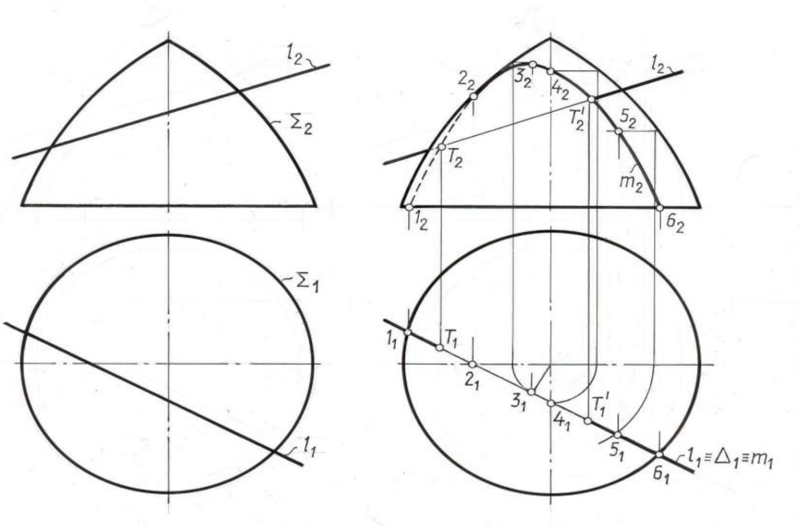



Рисунок 7.12

Решение:

$\Sigma, l$ – общего положения $l \cap \Sigma = T, T'$.

Точки пересечения прямой с поверхностью, «точки входа и выхода» $T$ и $T'$ определяются с помощью способа вспомогательных сечений. Прямую $l$ заключаем в проецирующую плоскость $\Delta$. Критерием выбора вспомогательной плоскости является наибольшая простота построения полученной на поверхности кривой сечения.

Алгоритм решения:

а) $\Delta \supset l, \Delta \perp \Pi_1 \Rightarrow \Delta_1 \equiv l_1$;

б) $\Delta \cap \Sigma = m; m_1 \equiv \Delta_1$,

$m_2$ строим по точкам, исходя из принадлежности их заданной поверхности $\Sigma$.

в) $m \cap l = T, T'; m_2 \cap l_2 = T_2, T_2'; T_1 \subset l_1; T_1' \subset l_1$.

При определении видимости отдельных участков прямой исходим из того, что прямая будет видима, если она пересекает поверхность в видимой точке. Участок прямой, заключенный внутри поверхности, изображаем тонкой сплошной линией.

Из рассмотренных примеров видно, что для построения точек (точки) пересечения прямой с поверхностью (плоскостью) достаточно применить одну вспомогательную проецирующую плоскость – посредник, проходящую через данную прямую.

В ряде случаев, выбрав оптимальный путь решения задачи, построения можно упростить.

<u>Задача 3.</u> <u>Дано:</u> $\Sigma$ – наклонный цилиндр с осью $i$ и основанием $k$; $l$ – прямая (рисунок 7.13), $l \cap \Sigma = ?$

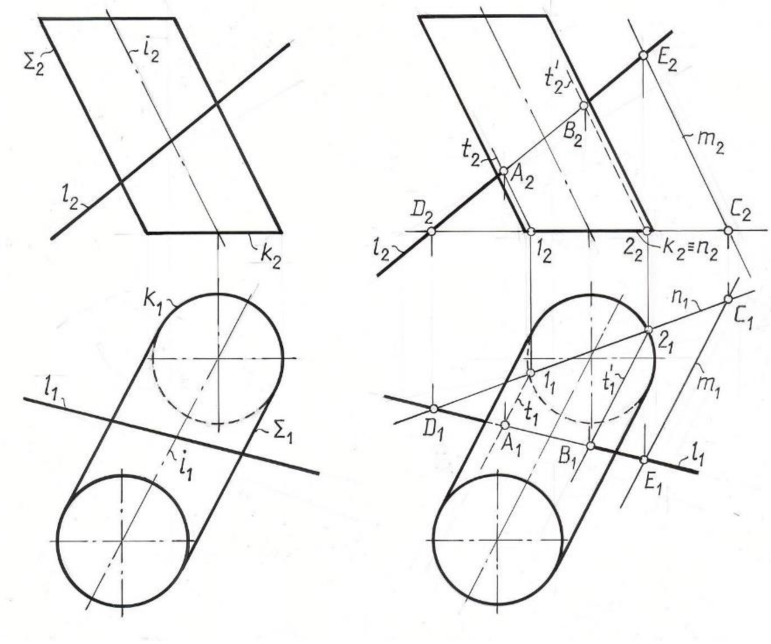



Рисунок 7.13

Решение:

$$l \cap \Sigma = A, B;$$
$$l \subset \Gamma, \Gamma \parallel i, \Gamma(m \cap n), m \parallel i,$$
$$n \cap k = 1{,}2,$$
$$\Gamma \cap \Sigma = t, t' \parallel i,$$
$$l \cap t = A, l \cap t' = B.$$

Заключаем прямую $l$ в плоскость $\Gamma \parallel i$.

Для этого плоскость Г задаем пересекающимися прямыми $n$, лежащей в плоскости основания цилиндра, и прямой $m$ параллельной оси цилиндра $i$. Обозначим точки взаимного пересечения трех прямых $n \cap m$, $n \cap l$, $m \cap l$ соответственно $C, D, E$.

Так как плоскость посредник $\Gamma \parallel i$, то она пересечет боковую поверхность цилиндра по образующим $t$ и $t'$, положение которых определяют точки *1* и *2* пересечения прямой $n$ и окружности основания $k$.Остается только отметить на чертеже точки $A$ и $B$, как результат пересечения прямой $l$ с образующими цилиндра $t$ и $t'$.

Пример 4. Построить пересечение двух плоскостей. Дано: $\Phi(ABC)$; $\theta(l||n)$ (рисунок 7.14), $\Phi \cap \theta - ?$

Решение:

1) $\Phi \cap \theta = d$ – прямая общего положения.

2) Так как прямую вполне определяют две точки, то для построения прямой пересечения $d$ достаточно ввести две вспомогательные проецирующие плоскости $\Sigma$ и $\Delta$. Алгоритм решения заключается в следующем:

а) $\Sigma \perp \Pi_2$;

б) $\Sigma \cap \ \Phi(ABC) = \ k$;

$\Sigma \cap \ \theta( \ l \ \parallel \ n) = \ m$;

в) $k \ \cap \ m \ = \ T$;

г) $\Delta \parallel \ \Sigma \ \perp \ \Pi_2$;

д) $\Delta \cap \ \Phi \ (ABC) = a$;

$\Delta \ \cap \ \theta \ (l \ \parallel \ n) \ = \ b$;

$a \ \cap \ b \ = \ T\,'; T \ \cup \ T' = d/$

Поскольку в условии задачи плоскости не заданы ограниченными наложенными друг на друга контурами, их взаимная видимость не определяем.

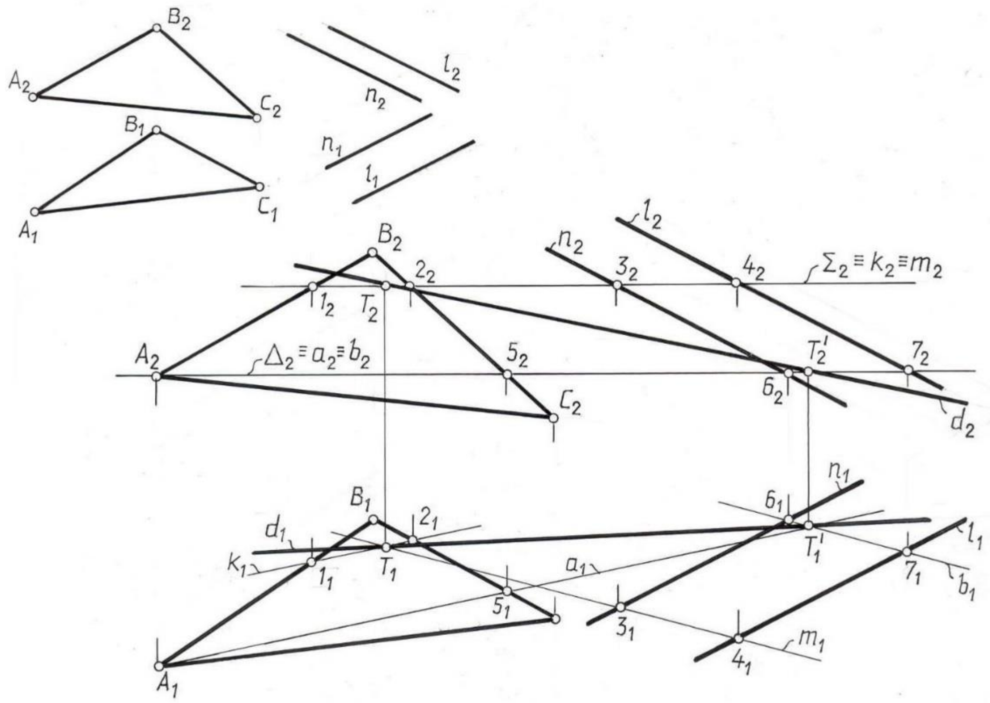



Рисунок 7.14

<u>Задача 5.</u> Найти фигуру сечения пирамиды плоскостью общего положения.

<u>Дано</u>: $\Sigma \ (SKMN); \theta \ (a \ || \ b)$ (рисунок 7.15), $\Sigma \ \cap \ \theta \ = ?$

<u>Решение:</u> 1) $\Sigma \ \cap \ \theta$ – плоская ломаная линия.

Сечение многогранника – это множество точек, общих для секущей плоскости и граней поверхности.

Невырожденное плоское сечение есть многоугольник, число вершин которого равно числу пересекаемых ребер, а число сторон равно числу пересекаемых граней. Сечение можно найти, построив либо его вершины, как точки пересечения ребер с секущей плоскостью, либо его стороны, как линии пересечения граней с той же плоскостью, или комбинируя первый прием со вторым.

На рисунок 7.15 показано решение первым способом. Вспомогательные секущие плоскости посредника проведены через ребра пирамиды. Отсюда алгоритм решения:

$\varDelta \supset SK; \varDelta \perp \Pi_2;$

$\varDelta \cap \theta = n; n_2 \equiv \varDelta_2 \equiv S_2K_2;$

$n \cap SK = A; A_1 = n_1 \cap S_1K_1; A_2 \subset S_2K_2.$

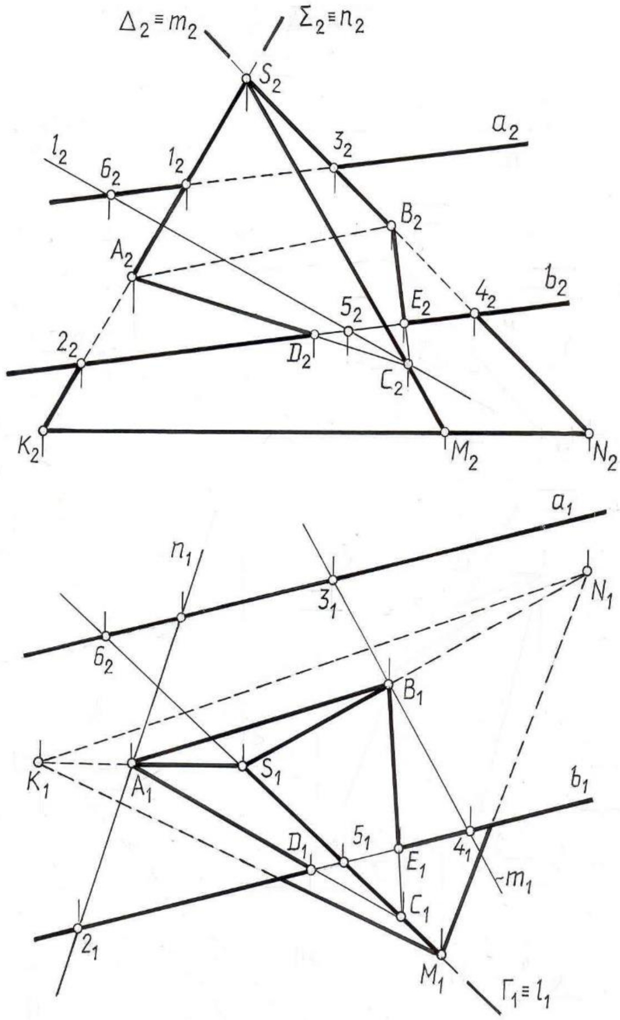



Рисунок 7.15

Остальные вершины искомого сечения определяем путем проведения аналогичных операций.

$\Sigma \perp \Pi_2; \Sigma \supset SN;$

$\Sigma \cap \theta = m; \Sigma_2 \equiv S_2N_2 \equiv m_2;$

$m \cap SN = B; B_1 = m_1 \cap S_1N_1; B_2 \subset m_2.$

И далее:

$\varGamma \perp \Pi_1; \varGamma \supset SM;$

$\varGamma \cap \theta = l; \Gamma_1 \equiv S_1M_1 \equiv l_1;$

$l \cap SM = C; C_1 = l_1 \cap S_1M_1; C_2 \subset l_2.$

Найденные точки сечения соединяем так, чтобы две из них лежали в одной грани пирамиды. Точка С лежит за пределами секущей плоскости $\theta$ $(a \parallel b)$, поэтому контур сечения ограничиваем точками $D$ и $E$, между которыми прямая

$b$ пересекает грани пирамиды.

При определении видимости контуров найденного сечения следует исходить из условия, что прямая будет видимой, если она лежит в видимой грани пирамиды.

<u>Задача 6.</u> Построить фигуру сечения конуса плоскостью общего положения.

<u>Дано</u>: $\psi$ – конус; $\theta$ (ABC) (рисунок 7.16, а); $\Psi \ \cap \ \theta = ?$

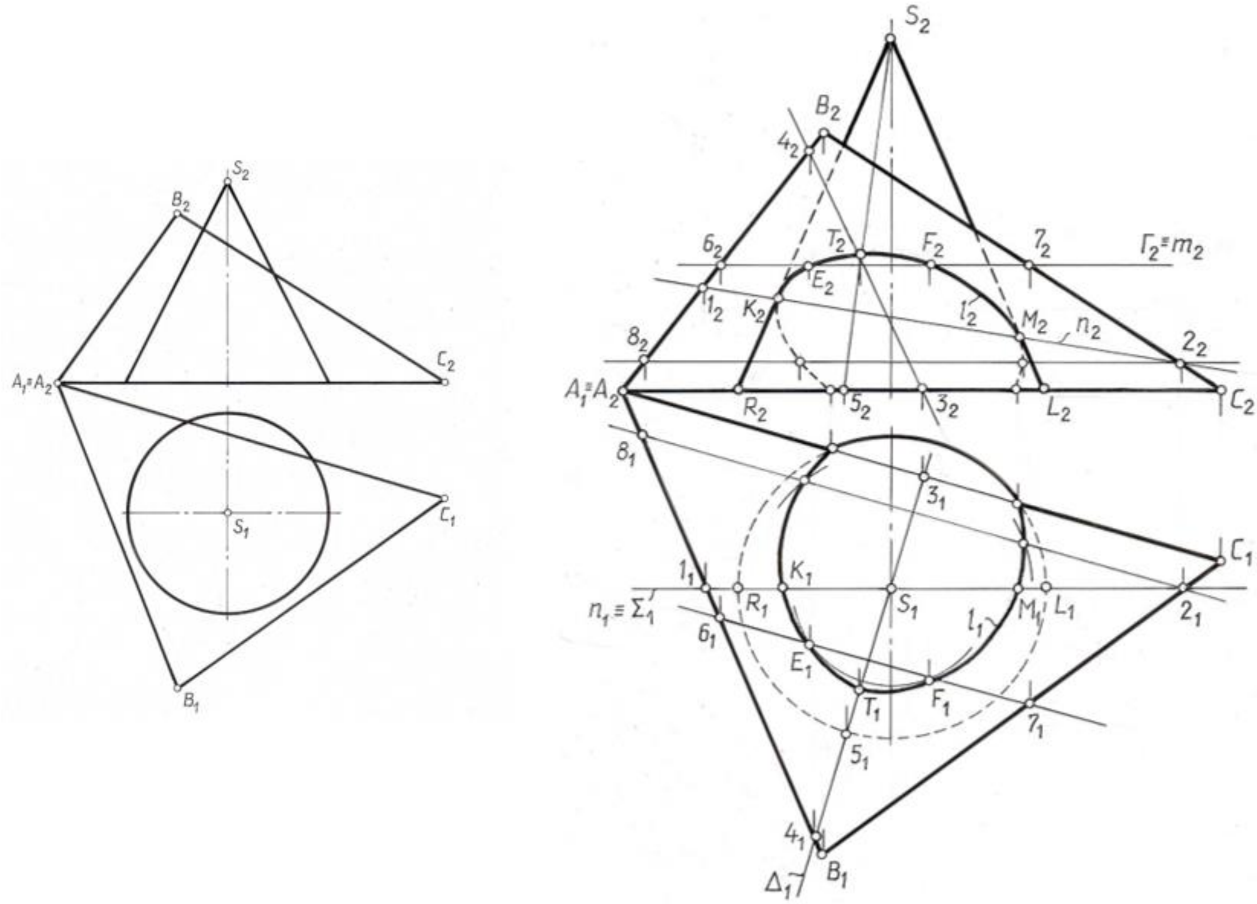
<u>Решение:</u>

1) $\theta \cap \ \psi = \ l$ – плоская кривая;

2) Секущая плоскость $\theta$ не проходит через вершину конуса, следовательно, фигурой сечения конуса $\psi$ плоскостью $\theta$ будет кривая $l$ (эллипс или его часть).

Для построения этой кривой находим необходимое количество точек, ей принадлежащих. Вначале определяют характерные точки, которые определяют характер искомой кривой.

Так, для нахождения наивысшей точки кривой $T$, вспомогательная плоскость $\Delta$ проводится через вершину конуса, перпендикулярно горизонтальному следу секущей плоскости $AC$. Плоскость $\Delta$ будет являться плоскостью симметрии сечения (рисунок 7.16, б)




а) б)

Рисунок 7.16

1) $\Delta_1 \perp A_1 C_1$;

2) $\Delta \cap \theta = 3{,}4$; $\Delta \cap \psi = 5S$;

3) $3{,}4 \cap 5S = T$.

Для нахождения видимости, лежащей на очерковой образующей конуса, проводим фронтальную плоскость-посредник, проходящую через вершину конуса.

1) $\Sigma \parallel \Pi_2$; $\Sigma \supset S$;

2) $\Sigma \cap \psi = RSL$; $\Sigma \cap \theta = 1{,}2 = n$;

3) $RSL \cap 1{,}2 = K, M$.

Точки границы видимости $K$ и $M$ получены как результат пересечения фронтального очерка конуса $R_2\, S_2\, L_2$ и $n_2$.

Для построения случайных точек кривой $l$, проводим секущие горизонтальные плоскости.

$\Gamma \parallel \Pi_1$;

$\Gamma \cap \psi = m$ – окружность;

$\Gamma_2 \equiv m_2$; $\Gamma \cap \theta = 6 - 7$;

$m \cap 6 - 7 = E, F$;

$K, E, T, F, M$ и т.д. представляют собой точки искомого эллипса.

Задача 7. Построить фигуру пересечения двух поверхностей вращения.

Дано: $\psi$ – сфера; $\Omega$ – поверхность вращения (рисунок 7.17) $\Omega \cap \Psi = ?$

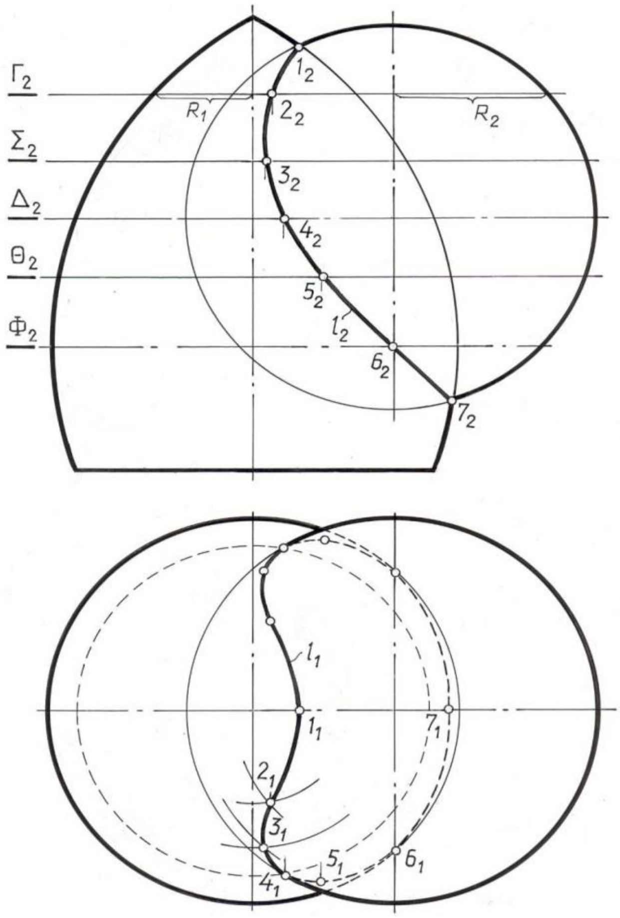



Рисунок 7.17

Решение:

1) $\Omega \cap \Psi = l$ – пространственная кривая

Плоскость симметрии обеих фигур параллельна фронтальной плоскости проекций, поэтому точки $1_2$ и $7_2$ пересечения фронтальных образующих фигур будут являться точками линии их пересечения.

Промежуточныеточкинайдемспомощьюплоскостей – посредников, параллельных плоскости $\Pi_1$.

Для нахождения точки 2 проведем плоскость $\Gamma \perp \Pi_1$, $\Gamma \cap \Omega$ – окружность радиуса $r_1$;

$\Gamma \cap \Psi$ – окружность радиуса $r_2$..

Пересечение этих окружностей дает две точки 2 и 2'.

Точки 3, 4, 5, 6 находятся аналогично с помощью плоскостей – посредников $\Sigma, \Delta, \Theta$ и Ф соответственно.

# Тема 8 Пересечение поверхностей вращения

Линией пересечения поверхностей второго порядка является в общем случае кривая четвертого порядка. Для ее построения не всегда целесообразно воспользоваться плоскостями-посредниками, т. к. их применение в ряде усложняет промежуточные построения. В качестве посредников при решении таких задач применяются вспомогательные сферические поверхности. Их применение основано на свойстве соосных поверхностей пересекаться по окружностям.

## 8.1 Построение линии пересечения соосных поверхностей вращения

Поверхности вращения называются соосными, если их оси вращения совпадают.

$\Sigma(i, a)$ –поверхность вращения;

$\Theta\ (i, b\ )$ – поверхность вращения (рисунок 8.1)

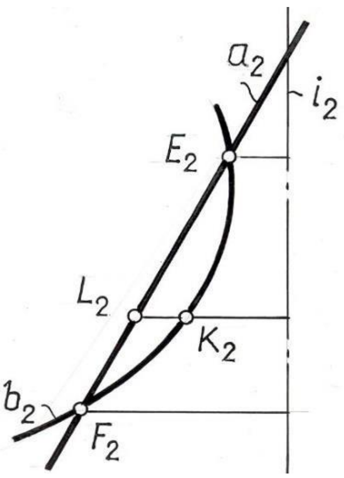



Рисунок 8.1

Теорема. Две соосные поверхности вращения всегда пересекаются по окружностям, число которых равно числу пересечения образующих, находящихся по одну сторону общей оси вращения. Плоскости этих окружностей перпендикулярны общей оси вращения.

Доказательство. Поверхности заданы главными меридианами $a$ и $b$ (рисунок 8.1), пересекающимися в точках $E$ и $F$. Каждая из этих точек опишет окружность при образовании поверхностей $\Sigma$ и $\theta$. Другие точки, принадлежащие меридианам и лежащие в плоскости, перпендикулярной оси вращения, например $L$ и $K$, при образовании поверхностей также опишут концентрические окружности.

На рисунке 8.2. приведены примеры пересечений цилиндра и конуса с шаром. В обоих указанных случаях шар является соосным с поверхностью вращения, так как центр его расположен на осях этих поверхностей.

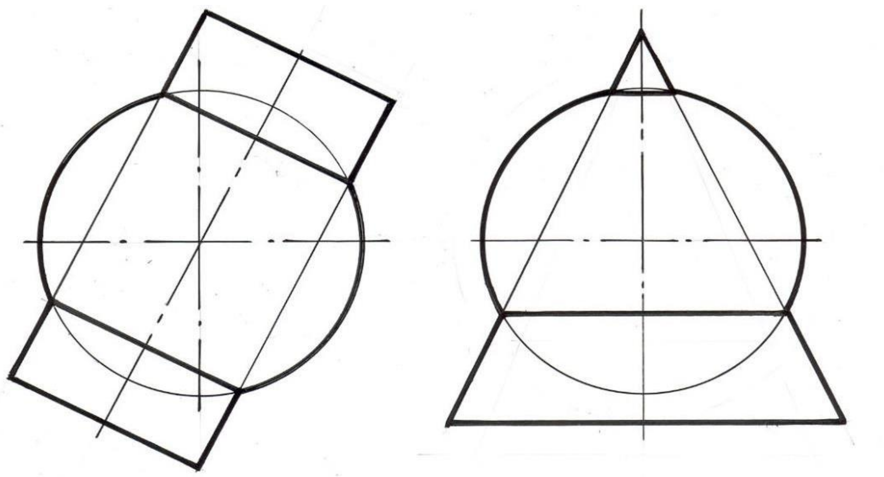


Рисунок 8.2

Поэтому конус и цилиндр вращения пересекаются с шаром по окружностям. Проекции этих окружностей на плоскость, параллельную оси вращения поверхностей, вырождаются в прямые линии, так как плоскости этих окружностей перпендикулярны осям вращения цилиндра и конуса.

### 8.2 Метод концентрических сфер-посредников

Для построения линии пересечения двух поверхностей вращения с пересекающимися осями целесообразно в качестве посредников применять

сферические поверхности, соосные с обеими пересекающимися поверхностями. Центры таких сфер должны находиться в точке пересечения осей данных поверхностей. Сфера-посредник пересекает каждую из поверхностей по окружностям, принадлежащим этому посреднику, а пересечения на выбранной сфере-посреднике окружностей одной поверхности с окружностями другой поверхности даст точки искомой линии пересечения данных поверхностей. При последовательном применении ряда сфер-посредников получаем достаточное количество точек искомой линии пересечения.

Применение концентрических сфер-посредников для построения линии пересечения возможно при двух условиях:

– если обе поверхности являются поверхностями вращения;

– если оси их пересекаются, так как только при этом можно построить сферические посредники, соосные одновременно обеим поверхностям. Для более удобного решения задачи плоскость пересекающихся осей должна быть параллельна одной из плоскостей проекций.

Задача 1. Построить линию пересечения конуса с цилиндром.

Дано: $\Sigma$ – конус вращения;

$\theta$ – цилиндр вращения (рисунок 8.3.);

$\Sigma \cap \theta = ?$

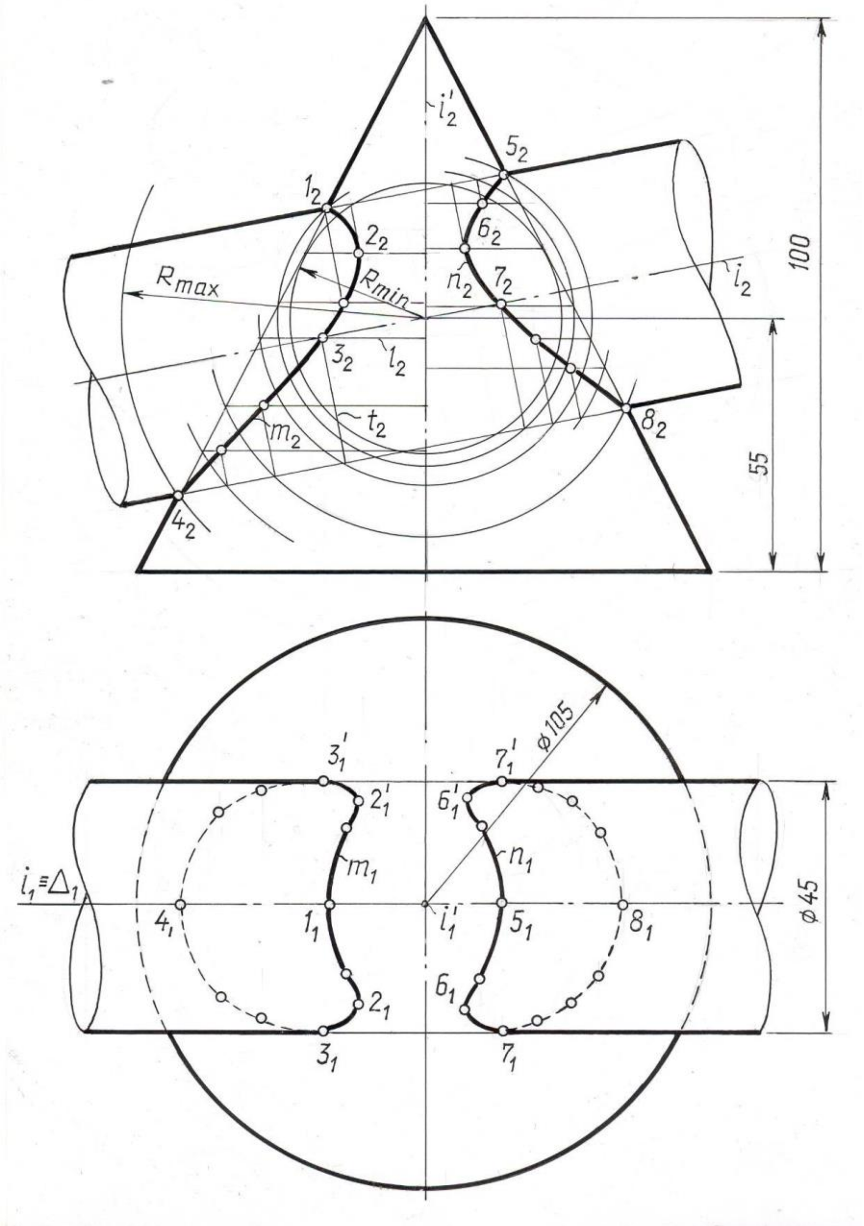



Рисунок 8.3

<u>Решение</u>:

1. $\Sigma \cap \theta = m, n$ – две пространственные кривые.

Для решения задачи используем рассмотренный алгоритм применения концентрических сфер-посредников.

Оси вращения этих поверхностей пересекаются и параллельны плоскости $\Pi_2$. Очерковые образующие поверхностей конуса и цилиндра лежат в одной плоскости $\Delta$ и параллельны плоскости $\Pi_2$. Следовательно, фронтальные проекции $1_2$, $4_2$, $5_2$, $8_2$ этих точек находятся в пересечении очерковых образующих на $\Pi_2$. Горизонтальные проекции $1_1$, $4_1$, $5_1$, $8_1$ тех же точек будут принадлежать вырожденной проекции $\Delta_1$ плоскости $\Delta$. Для построения других точек линии пересечения в качестве посредников выбраны концентрические сферы с центром в точке пересечения осей вращения цилиндра и конуса.

Поверхности вращения пересекутся с этим посредником по окружностям, плоскости которых перпендикулярны соответственно оси конуса и оси цилиндра и поэтому проекции окружностей вырождаются на $\Pi_2$ в прямые.

При построении линии пересечения прежде всего надо провести две сферы радиусами $R_{min}$ и $R_{max}$.

Все остальные посредники должны располагаться между ними. Сфера наименьшего радиуса выбирается так, чтобы она касалась одной из поверхностей и одновременно пересекала бы другую поверхность.

$$\theta \cap \Phi\, R_{min} \upsilon \Sigma,$$

$R_{max}$ равен расстоянию от центра сфер-посредников до наиболее удаленной от него точки пересечения очерковых образующих. В данной задаче это точка 4.

При нахождении достаточного количества точек, принадлежащих пространственным кривым $m$ и $n$, соединяем их с помощью лекала с учетом видимости отдельных участков кривых. Кривую будем считать видимой, если ее точки принадлежат одновременно двум видимым образующим конуса и цилиндра. При определении характера линии пересечения, полученной с помощью метода сферических посредников, учитываем, что поверхность, в которую вписывалась сфера с наименьшим радиусом, пресекается со второй поверхностью частично, не все ее образующие имеют на себе точки, принадлежащие искомой пространственной кривой.

### 8.3 Метод эксцентрических сфер-посредников

В некоторых случаях возможно использование сфер-посредников, центры которых не лежат в одной точке. Этот способ иногда называют способом скользящих сфер. Он применим в случаях, когда оси заданных фигур не имеют точки пересечения, когда одна из поверхностей не является поверхностью вращения, но имеет две системы круговых сечений.

Задача 2. Построить линию пересечения конуса с тором.

Дано: $\Omega$ – конус вращения; $\psi$ –круговой тор (рисунок 8.4) $\Omega \cap \psi = ?$

$\Omega \cap \Psi = m$ – пространственная кривая.

Оси заданных поверхностей не пересекаются, но поверхности имеют общую плоскость симметрии, параллельную плоскости $\Pi_2$. В качестве посредников в этой задаче целесообразно использовать эксцентрические сферы-посредники, центры которых лежат в разных точках на оси симметрии конуса.

Выбор центра и радиуса сферы-посредника производится так:

а) через ось тора проводим произвольную фронтально проецирующую плоскость $\Gamma_2$, пересекающую тор по окружности $l$ с центром $P$.

б) находим центр сферы-посредника, которая бы проходила через полученную окружность и пересекала конус по окружности n. Этот центр будет расположен в точке O на пересечении оси конуса с перпендикуляром, восстановленным из точки P к фронтальному следу плоскости $Г_2$.

В пересечении окружностей $n$ и $l$ будут получены точки 2 и 2'.

Пересекая тор фронтально проецирующими плоскостями $\Sigma, \Delta, \Theta$ и производя построения, аналогичные выполненным, находим точки 3, 4, 5. Точки 1 и 6 получены как принадлежащие фронтальной плоскости симметрии обеих поверхностей.

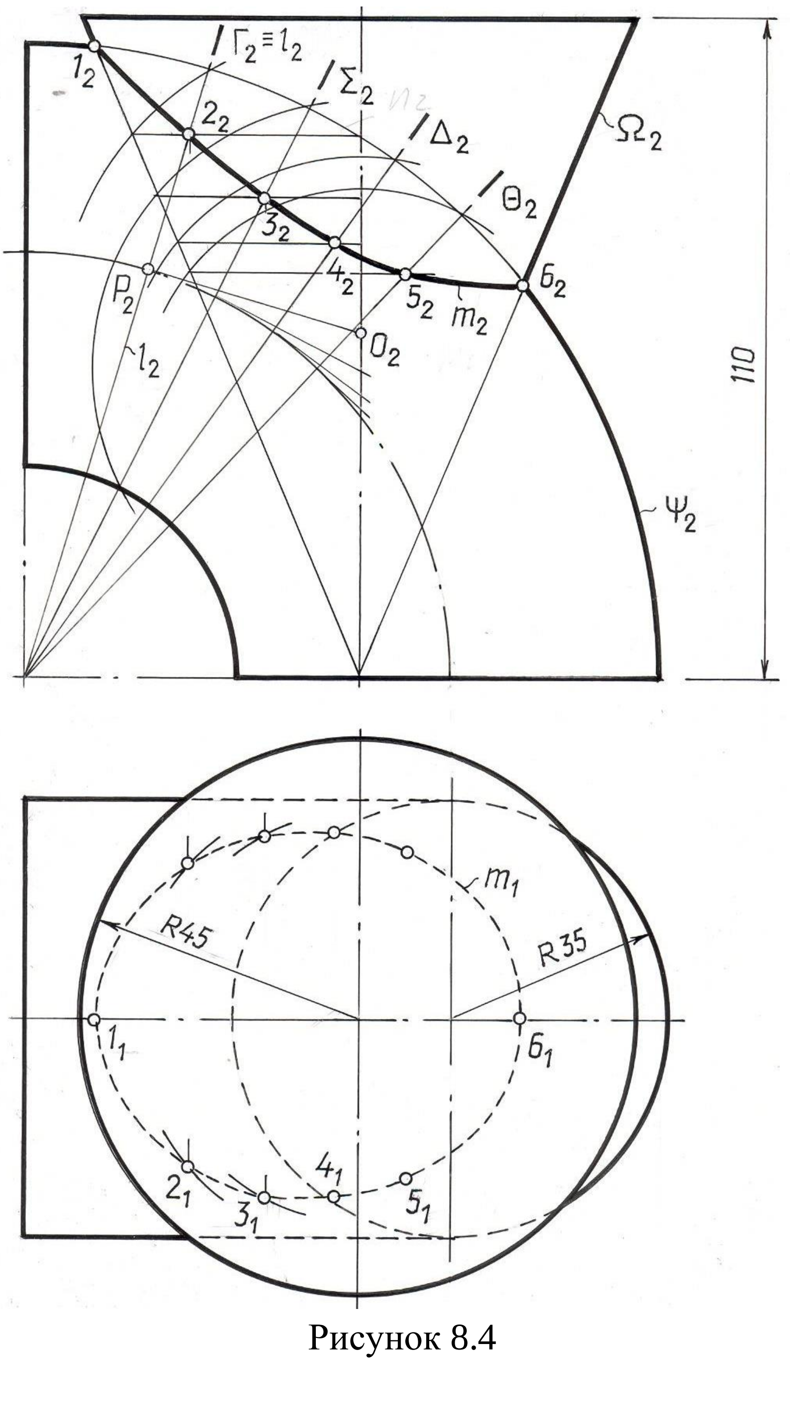



Рисунок 8.4

Горизонтальные проекции построенных точек можно построить с помощью окружностей-параллелей конуса, проходящих через эти точки.

## 8.4 Теорема Монжа

В особых случаях пространственная кривая, полученная в результате пересечения двух поверхностей вращения, распадается на плоские кривые или прямую (линию 1-го порядка) и кривую 3-го порядка и т. д. Так, если две поверхности второго порядка соприкасаются в двух точках, то кривая пересечения распадается на две кривые второго порядка.

В курсе аналитической геометрии доказывается теорема Монжа: две поверхности второго порядка, описанные около третьей поверхности второго порядка (или в нее вписанные), пересекаются между собой по двум плоским кривым второго порядка, причем плоскости этих кривых проходят через прямую, определяемую точками соприкосновения всех трех поверхностей.

Поясним смысл теоремы на примере пересечения двух цилиндров вращения равного диаметра.

Задача 3. Найти линию пересечения двух цилиндров (рисунок 8.5)

Дано: $\Sigma$ и $\theta$ – цилиндры вращения, $\Sigma \cap \theta = ?$

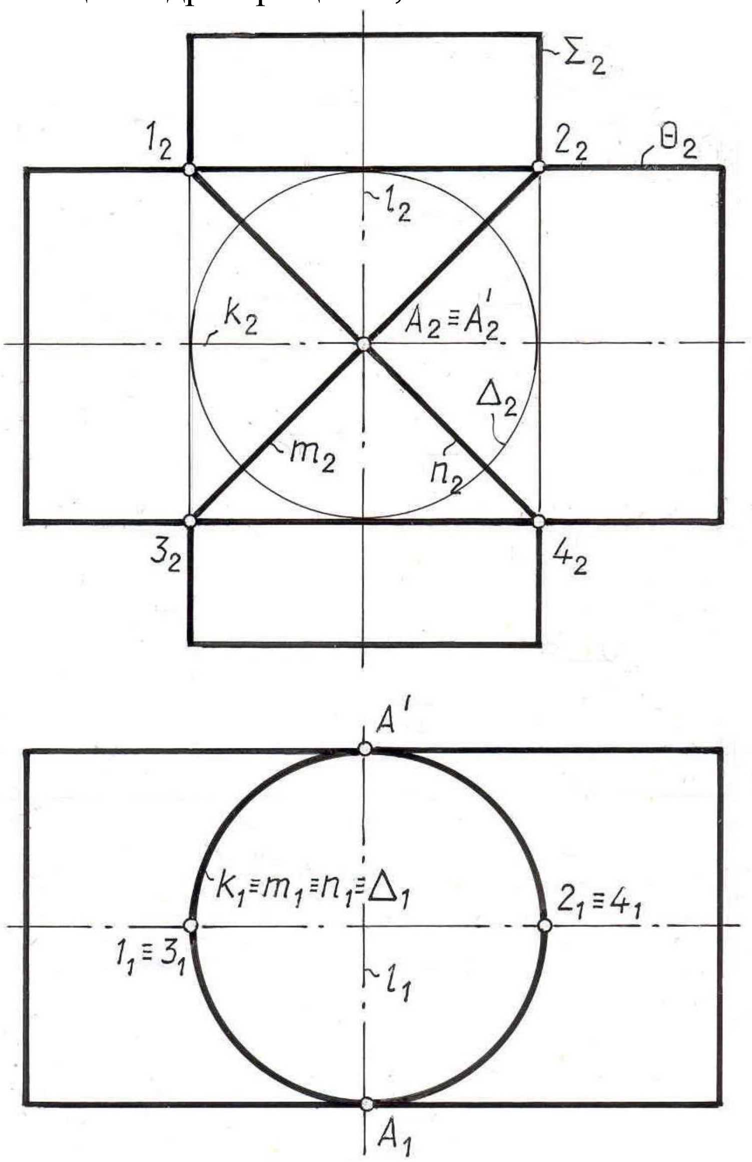



Рисунок 8.5

Решение: $\theta \cap \Sigma = m, n$ – плоские кривые.

Обе цилиндрические поверхности $\Sigma$ и $\theta$ можно рассматривать как описанные около поверхности сферы $\Delta$. Очевидно, что поверхности $\Sigma$ и $\theta$ будут касаться поверхности сферы соответственно по окружностям $l$ и $k$, точки пересечения которых $A$ и $A'$ будут общими для всех трех поверхностей. Эти две точки и являются точками соприкосновения, отмеченными в теореме Монжа. Соединив по диагонали проекции точек пересечения фронтальных очерковых цилиндров $1_2$, $4_2$ и $2_2$, $3_2$, мы получим вырожденные фронтальные проекции плоских кривых их пересечения $m_2$ и $n_2$.

В данном примере кривые $m$ и $n$ представляют собой эллипсы, пересекающиеся в точках соприкосновения $A$ и $A'$, а значит, их плоскости проходят через отрезок $AA'$, что отвечает требованию теоремы.

На практике эта теорема находит широкое применение в случае пересечения поверхностей вращения, описанных около общей для них сферы.

Рассмотрим приложение выше сказанного к построению линий пересечения двух прямых круговых конусов: вертикального $\Delta$ и горизонтального Г.

Задача 4. Найти линию пересечению двух прямых круговых конусов

Дано: $\Delta$ и Г – конусы (рисунок 8.6).

$\Delta \cap \Gamma = ?$

Решение: $\Delta$ и $\Gamma = m, n$ – две плоские кривые.

Оба конуса описаны около общей сферы, следовательно, пересекутся по двум плоским кривым. Боковая поверхность конуса Г будет касаться сферы по окружности $k$, а конуса $\Delta$ по окружности $l$. Обе окружности пересекутся в точках $A$ и $A'$, так как принадлежат одной сфере. Это и есть точки соприкосновения двух рассматриваемых конусов. Остается только соответственно соединить фронтальные проекции точек пересечения очерковых $1_2$, $2_2$, $3_2$, $4_2$ и мы получим вырожденные фронтальные проекции плоских кривых пересечения $m_2$ и $n_2$, которые и в этом случае будут эллипсами. Если задача решена с достаточной точностью, то $m$ и $n$ обязательно пересекутся в точках соприкосновения $A$ и $A'$.

В других случаях, отвечающих условиям теоремы Монжа, при изменении относительных размеров и взаимного положения поверхностей вращения в пространстве линии их пересечения могут принимать форму гипербол или парабол.

Следует отметить, что пересечение по теореме Монжа является пограничным случаем в очертании линий пересечения поверхностей вращения.

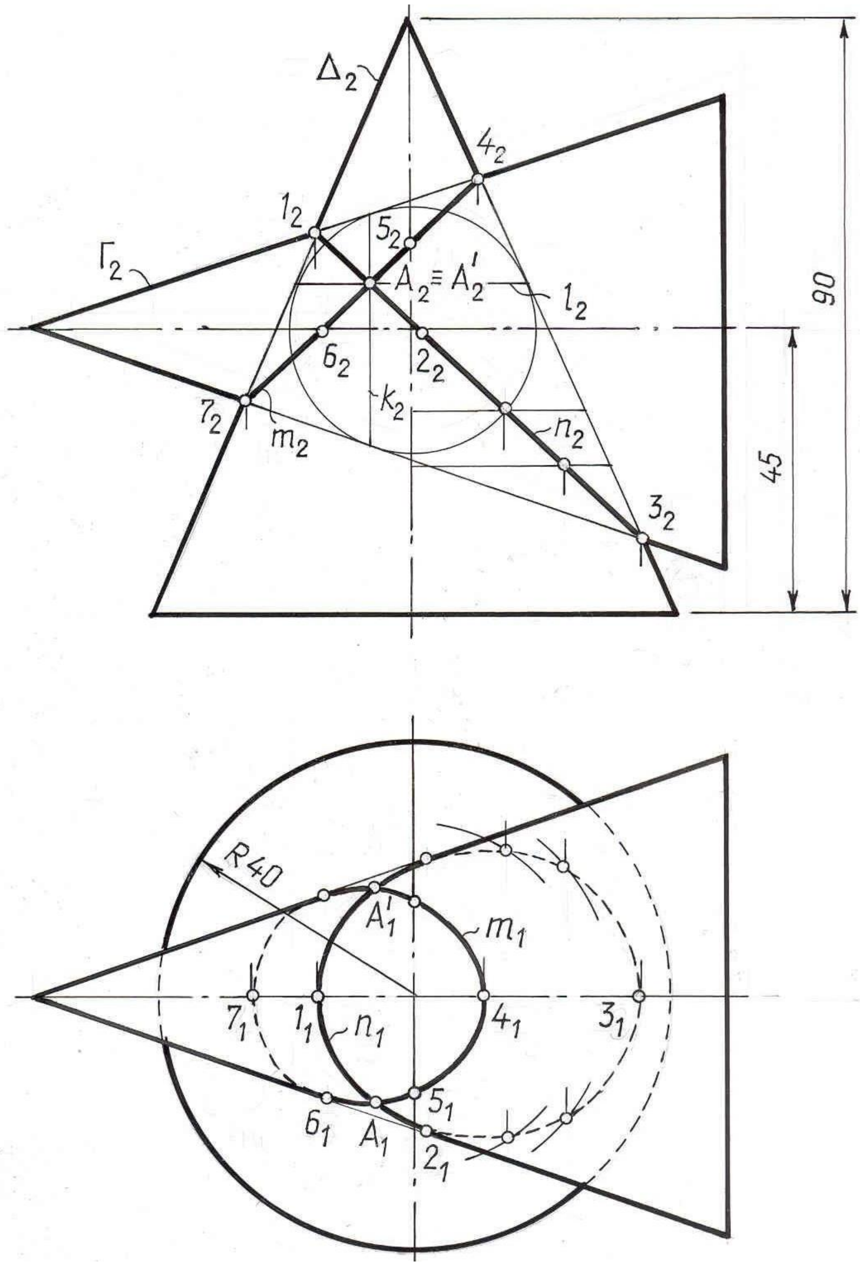



Рисунок 8.6

Если в последней задаче изменить относительные размеры конусов так чтобы сфера минимального радиуса ($R_{min}$) вписывалась быв вертикальный конус $\Delta$, а горизонтальный пересекала, то линии их пересечения распадутся на две пространственные кривые $m$ и $n$, полностью пересекающие образующие горизонтального конуса $\Gamma$ (рисунок 8.7). В этом случае горизонтальный конус протыкает вертикальный.

При изменении параметров конусов таким образом, чтобы сфера минимального радиуса $R_{min}$ вписывалась в горизонтальный конус и пересекала вертикальный (рисунок 8.8), характер пересечения меняется. Теперь уже вертикальный конус протыкает горизонтальный.

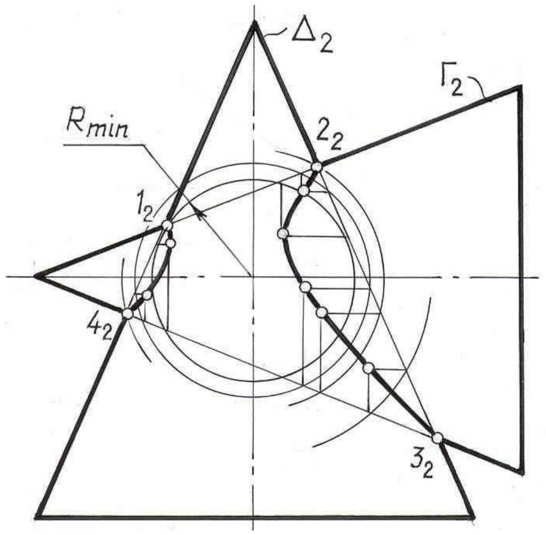


Рисунок 8.7

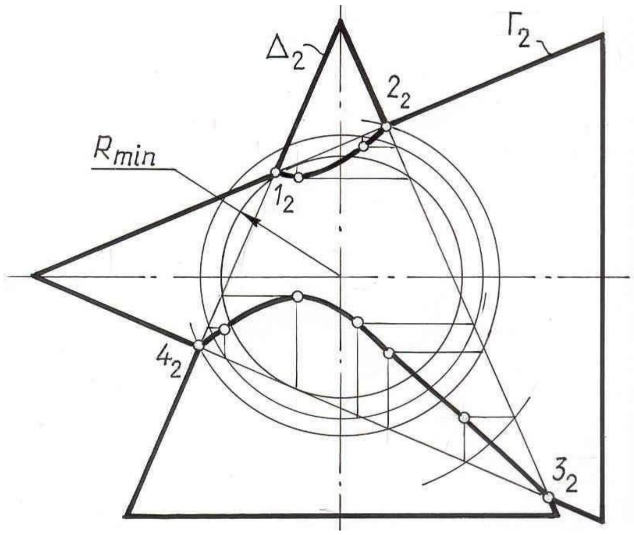


Рисунок 8.8

# Тема 9 Способы преобразования проекций и их применение к решению задач

## 9.1 Общие понятия

Решение многих пространственных задач (позиционных и метрических) на эпюре часто усложняется из-за того, что заданные геометрические объекты (оригиналы) расположены произвольно относительно плоскостей проекций и, следовательно, проецируются на эти плоскости в искажённом виде. Задание на эпюре прямых и плоскостей частного положения значительно упрощает решение задач и делает их выполнимым при помощи простейших графических построений. Например, проекции отрезка, расположенного наклонно ко всем плоскостям проекций, не дают непосредственно его натуральную величину и величину углов наклона его к плоскостям проекций (рисунок 9.1, а).

На рисунок 9.1, б отрезок расположен параллельно фронтальной плоскости проекций, поэтому он проецируется на эту плоскость без искажения, т.е. $|A_2B_2| = |AB|$.

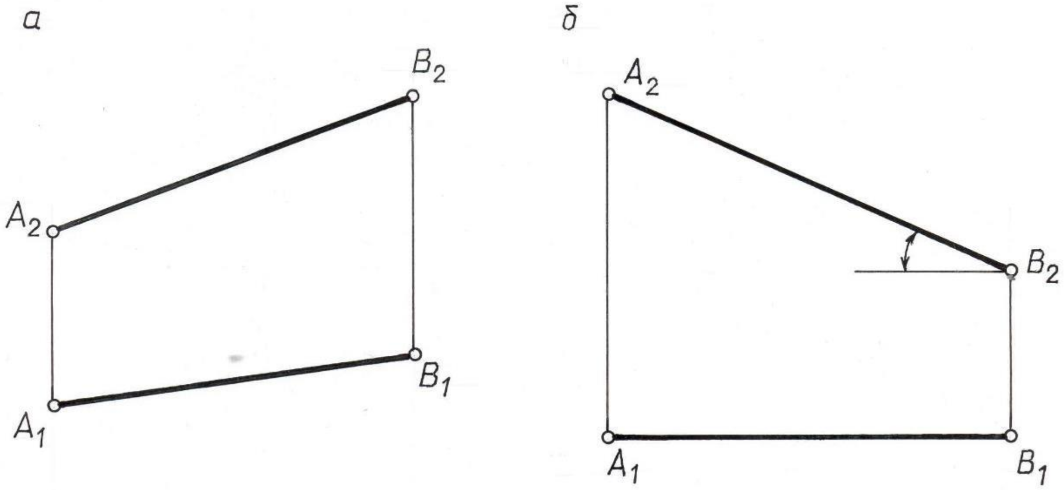



Рисунок 9.1

По данному чертежу определяется также и угол наклона прямой $AB$ к горизонтальной плоскости проекций $AB \hat{} \Pi_1$. При таком положении отрезка $AB$ можно считать его проекции удобно расположенными для решения поставленных задач.

Если на эпюре изображена плоская фигура общего положения (рисунок 9.2, а), то без специальных построений нельзя сказать, какой угол образует она с плоскостью проекций, например, с $\Pi_1$. Между тем, если плоскость фронтально проецирующая (рисунок 9.2, б), то наклон её фронтальной проекций (фронтальная проекция треугольника) к оси проекций $X$ непосредственно даёт величину угла, образованного плоскостью треугольника $ABC$ с плоскостью $\Pi_1$.

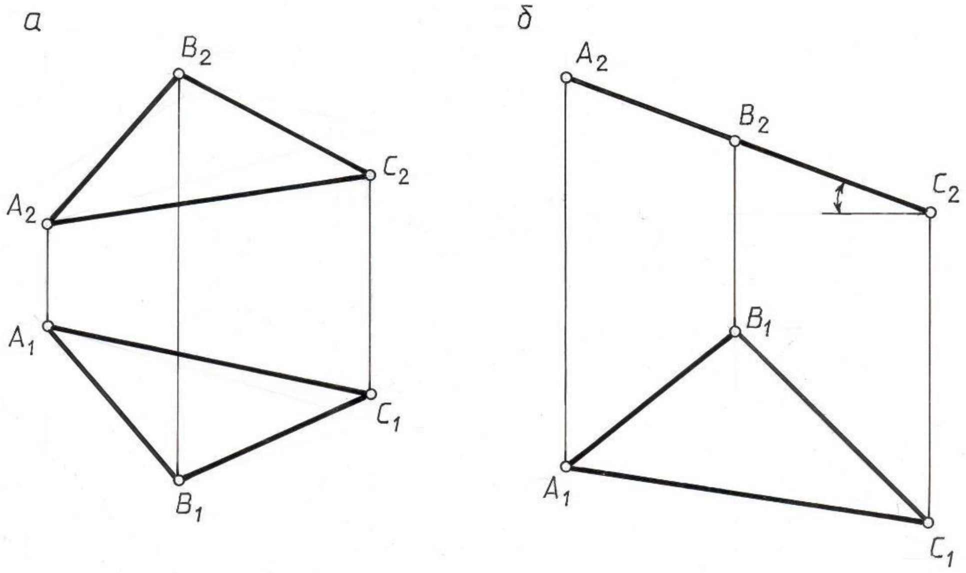



Рисунок 9.2

Для построения перпендикуляра из точки $A(A_1, A_2)$ к горизонтальной прямой $h(h_1, h_2)$ достаточно провести горизонтальную проекцию прямой $A_1B_1 \perp h_1$ (рисунок 9.3), по линии связи найти точку $B_2$ и соединить её с точкой $A_2$.

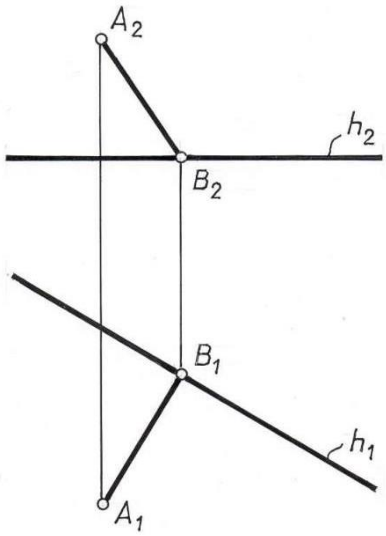



Рисунок 9.3

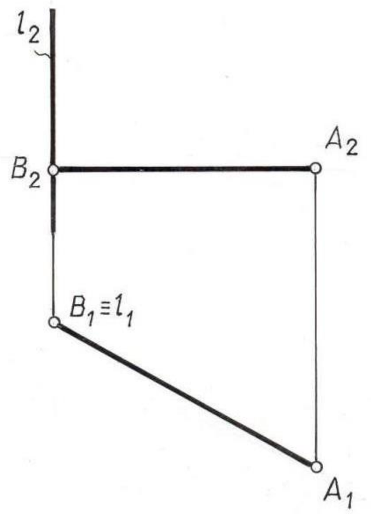



Рисунок 9.4

Если прямая $l(l_1, l_2)$ – горизонтально проецирующая (рисунок 10.4), то легко не только построить перпендикуляр $AB$ $(A_1B_1, A_2B_2)$ из точки $A$ к прямой $l(l_1, l_2)$, но и определить натуральную величину расстояния $|AB| = |A_1B_1|$ от точки до прямой.

Возникает вопрос, как же следует поступить в том случае, если заданные фигуры неудобно расположены относительно плоскостей проекций и затрудняют решение какой-либо задачи. В таких случаях прибегают к преобразованию проекций, т.е. замене исходных проекций изображаемой фигуры новыми (частного положения) с таким расчётом, чтобы последние позволили проще решать поставленную задачу.

В начертательной геометрии применяются в качестве основных следующие способы преобразования проекций:

Способ замены плоскостей проекций. Способ плоскопараллельного перемещения Способ вращения.

Основными задачами преобразования комплексного чертежа являются следующие:

Преобразование прямой общего положения в прямую уровня. Преобразование прямой общего положения в проецирующую прямую.

Преобразованиеплоскостиобщегоположениявпроецирующую плоскость.

Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня.

## 9.2 Способ замены плоскостей проекций

Сущность способа состоит в том, что положение изображаемой фигуры в пространстве остаётся неизменным, а исходная система плоскостей проекций, относительно которой задана фигура, заменяется новой.

При выборе новой плоскости проекций должен быть выполнен основной принцип ортогонального проецирования (метода Монжа) – взаимной перпендикулярности плоскостей проекций, т.е. новую плоскость проекций необходимо обязательно располагать перпендикулярно одной из основных исходных плоскостей проекций.

Пусть задана система плоскостей проекций $\Pi_1$ и $\Pi_2$ (в дальнейшем будем обозначать сокращенно $\Pi_2/\Pi_1$). Спроецируем какую либо точку $A$ на эти плоскости и найдем ее проекции $A_2$ и $A_1$ (рисунок 9.5).

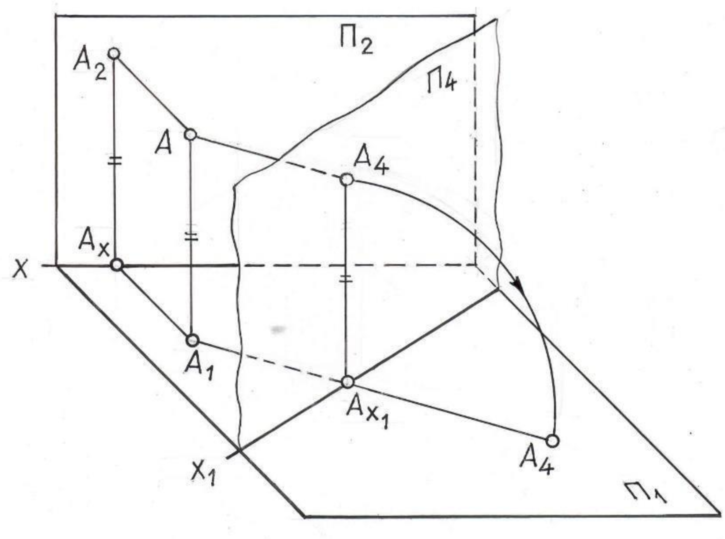



Рисунок 9.5

Предположим, что при решении какой-либо задачи мы нашли целесообразным заменить плоскость $\Pi_2$ другой фронтальной плоскостью $\Pi_4$, перпендикулярной к плоскости $П_1$. Линия пересечения плоскостей проекций $П_1$ и $П_4$ называется новой осью проекций и обозначается $X_1$. Построим ортогональные проекции точки $A$ в системе $П_4/П_1$. Так как, плоскость $П_1$ осталась прежней, то и проекция точки $A$ на эту плоскость на изменит своего положения.

Для получения новой фронтальной проекции точки на новую плоскость $П_4$ опускаем перпендикуляр из $A$ на плоскость $П_4$. Основание $A_4$ этого перпендикуляра определяет искомую фронтальную проекцию точки $A$.

Установим, какая связь существует между проекциями $A(A_1, A_2)$ и $A(A_1, A_4)$ одной и той же точки в обеих системах.

Горизонтальная проекция у них общая и так как расстояние точки $A$ от плоскости $П_1$ не изменилось, то $|AA_1| = |A_2A_x| = |A_4A_{x1}|$, т.е. расстояние новой фронтальной проекции до новой оси равно расстоянию заменяемой проекции до предыдущей оси.

Чтобы перейти к эпюру, повернём плоскость $П_4$ вокруг оси $X_1$ и совместим с плоскостью $П_1$. Тогда и новая фронтальная проекция $A_4$ совместится с плоскостью $П_1$ и при этом окажется на одном перпендикуляре к оси $x_1$ с проекцией $A_1$.

На рисунке 9.6 показаны те построения, которые надо произвести на эпюре. Чтобы от проекций $A_1A_2$ точки $A$ в системе $П_2/П_1$ перейти к проекциям $A_1A_4$ той же точки в системе $П_4/П_1$, необходимо провести новую ось проекций $x_1$, которая определяет положение горизонтально-проецирующей плоскости $П_4$, затем из горизонтальной проекции точки $A_1$ опустить перпендикуляр на новую ось $x_1$. На построенном перпендикуляре отложить (от новой оси) отрезок $A_xA_4 = A_xA_2$. Полученная таким образом точка $A_4$ является проекцией точки $A$ на плоскость $П_4$.

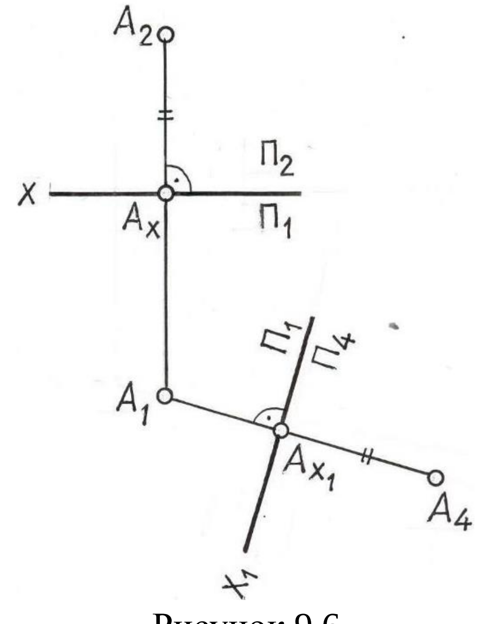



Рисунок 9.6

Замена горизонтальной плоскости $\Pi_1$ новой плоскостью $\Pi_4$ и построение новых проекций точки $A$ в системе $\Pi_2/\Pi_4$ осуществляется аналогично рассмотренному случаю, с той лишь разницей, что теперь остается без изменения фронтальная проекция точки, а для нахождения новой горизонтальной проекции $A_4$ точки $A$ необходимо из фронтальной проекции точки $A_2$ опустить перпендикуляр на новую ось $x_1$ и отложить на нем от точки пересечения с осью $x_1$ отрезок $A_4A_x'$, равный расстоянию старой горизонтальной проекции от старой оси $A_4A_x$ (рисунок 9.7).

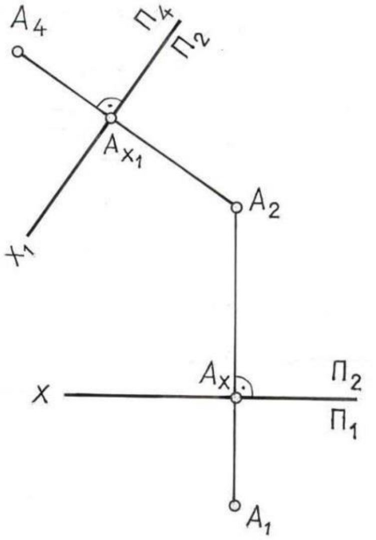



Рисунок 9.7

Рассмотренные примеры позволяют установить следующее общее правило: для того, чтобы построить проекцию точки в новой системе плоскостей проекций, необходимо из неизменяемой проекции точки опустить перпендикуляр на новую ось проекций и отложить на нем от новой оси до новой проекции расстояние, равное расстоянию от заменяемой проекции до предыдущей оси.

### 9.3 Замена двух плоскостей проекций

Некоторые задачи не могут быть решены заменой только одной плоскости проекций. Так, при определении действительной величины какой-либо геометрической фигуры или для получения более полного (наглядного) ее изображения, замены одной плоскости проекций бывает недостаточно.

На рисунке 9.8 показан пример замены двух плоскостей проекций. Проекция заданной точки $A$ на плоскость $\Pi_4$ построена известным способом (рисунок 9.6). Для построения проекции $A_5$ на плоскость $\Pi_5$ из точки $A_4$ опущен перпендикуляр на новую ось $X_2$ и на этом перпендикуляре отложен отрезок $A_2A_5 = A_1A_1$.

Следует следить за тем, чтобы не происходило накладывания новых проекций на старые и чтобы геометрические фигуры, расположенные в первой четверти пространства, оставались в нем и после замены плоскостей проекций.

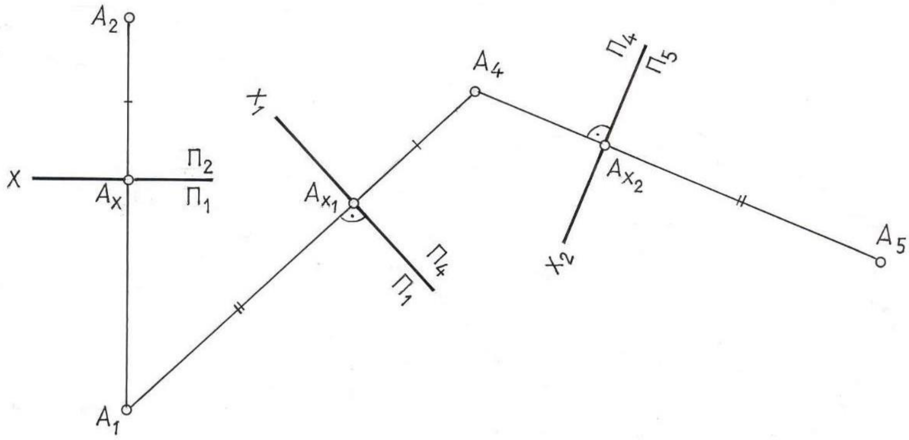
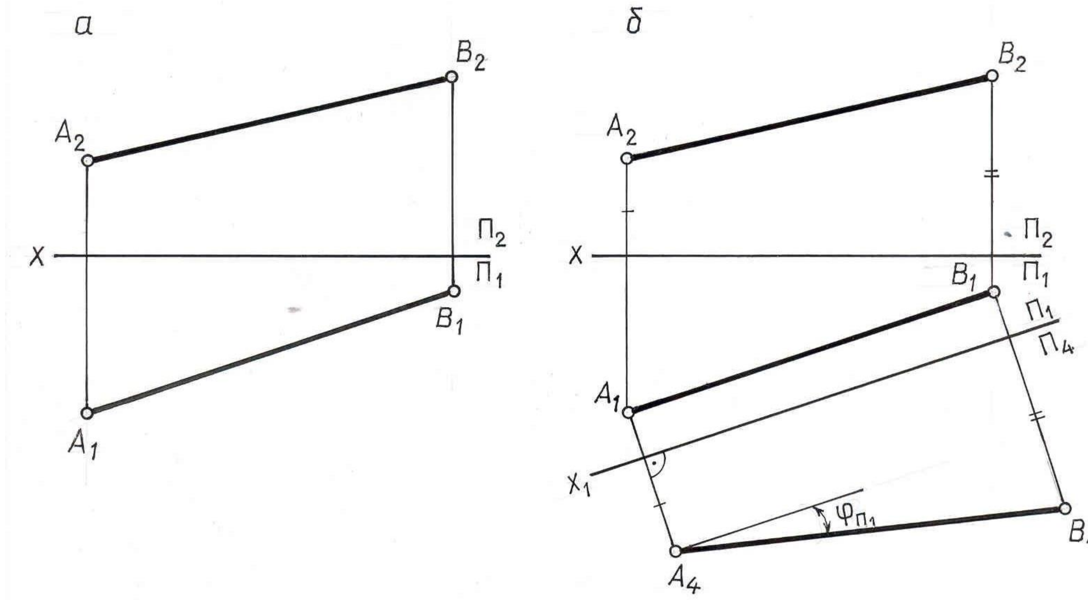



Рисунок 9.8

### 9.4 Основные задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций

<u>Задача 1.</u> Преобразовать эпюр, изображенный на рисунке 9.9 так, чтобы прямая общего положения оказалась параллельной одной из плоскостей проекций новой системы. Для решения задачи необходимо расположить новую плоскость проекций параллельно заданному отрезку ($\Pi_4 \parallel AB$). Тогда на эту плоскость проекций отрезок проецируется без изменений.




Рисунке 9.9

Решение этой задачи показано на рисунке 9.9, б. Параллельно $A_1B_1$ проведена ось $X_1$ и в системе плоскостей проекций $\Pi_1/\Pi_4$ построена новая фронтальная проекция отрезка $A_4B_4$. Очевидно, что $|A_4B_4| = |AB|$ и угол $\varphi$, образованный проекцией $A_4B_4$ с осью $X_1$ равен углу наклона прямой $AB$ к плоскости $\Pi_1$.

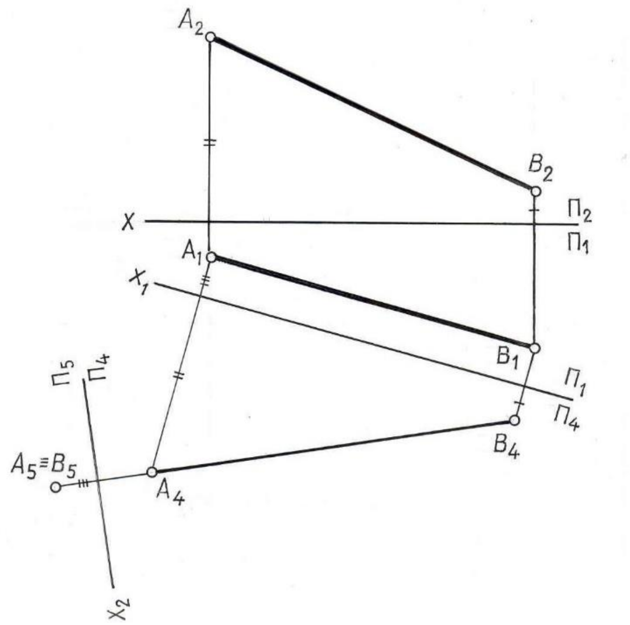
<u>Задача 2.</u> Преобразовать эпюр, изображенный на рисунке 9.10 так, чтобы

отрезок $AB$ прямой линии общего положения оказался перпендикулярным одной из плоскостей проекций.

Для решения задачи нужно произвести последовательно две замены плоскостей проекций:

– систему $\Pi_2/\Pi_1$ заменяем системой $\Pi_4/\Pi_1$, расположив плоскость $\Pi_4$ параллельно $AB$;

– от системы $\Pi_4/\Pi_1$ переходим к $\Pi_4/\Pi_5$, расположив плоскость $\Pi_5$ перпендикулярно прямой $AB$. Выполненные построения приведены на рисунке 9.10.




Рисунке 9.10

<u>Задача 3.</u> Преобразовать плоскость общего положения в проецирующую.

Для решения данной задачи необходимо ввести новую плоскость проекций так, чтобы она была перпендикулярна заданной плоскости $\Gamma(ABC)$ и одной из плоскостей проекций, т.е. перпендикулярна линии их пересечения. Линией пересечения плоскости $\Gamma$ с плоскостью проекций является соответствующий след плоскости $\Gamma$. Поэтому новая плоскость проекций должна быть перпендикулярна одному из следов данной плоскости или одной из ее линий уровня, которая параллельна соответствующему следу.

На рисунке 9.11 показано преобразование плоскости $\Gamma(ABC)$ в проецирующую. Для этого в плоскости $\Gamma$ проведена горизонталь $h(h_2h_1)$ и перпендикулярно к ней, а, следовательно, и ко всей плоскости $\Gamma$ введена новая плоскость $\Pi_4$, для чего ось $X_1$ новой системы плоскостей проекций $\Pi_4/\Pi_1$. проведена перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали $X_1 \perp h_1$, и в соответствии с известным правилом построена новая проекция $A_4B_4C_4$ треугольника $ABC$, представляющая отрезок прямой линии.

После проведенных построений плоскость $\Gamma(ABC)$ оказалась перпендикулярной плоскости проекций $\Pi_4$ и с плоскостью $\Pi_1$ составляет угол $\varphi$.

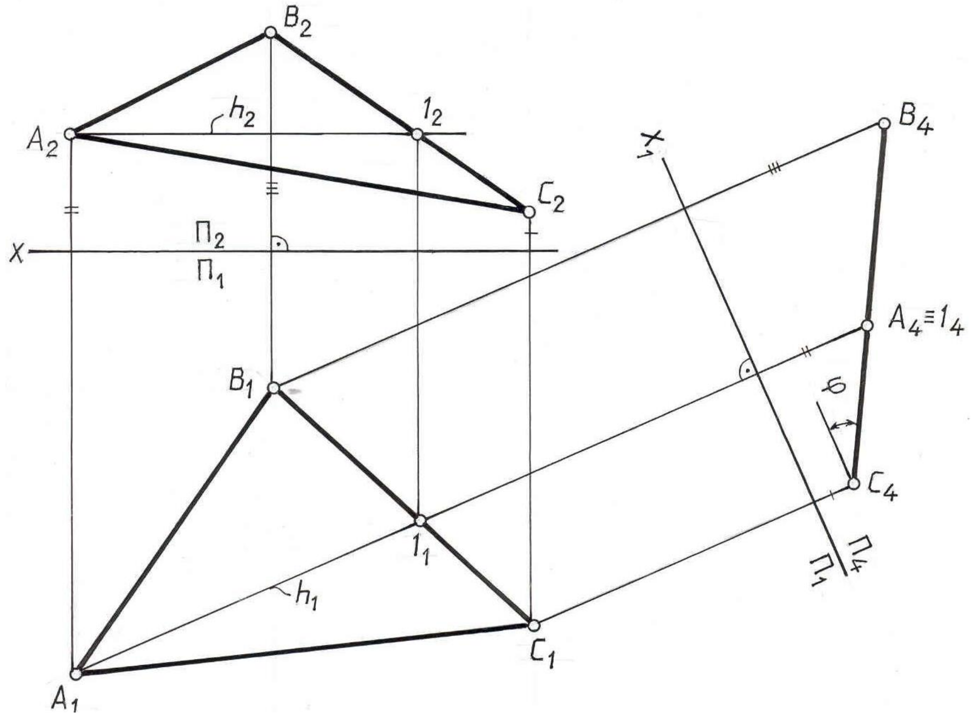


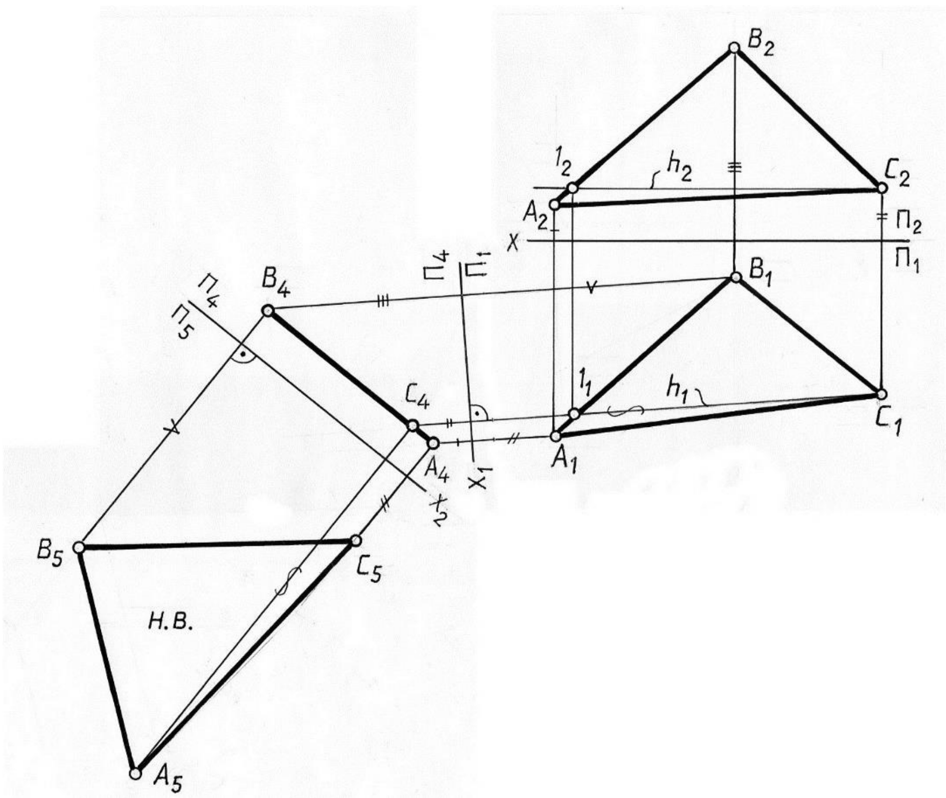

Рисунок 9.11

<u>Задача 4.</u> Преобразовать плоскость общего положения $\Gamma(ABC)$ в плоскость уровня.

Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня производится последовательно двумя заменами плоскостей проекций – вначале плоскость общего положения преобразуется в проецирующую, затем полученная проецирующая плоскость преобразуется в плоскость уровня.

На рисунке 9.12 для преобразования плоскости $\Gamma$ в проецирующую введена новая плоскость проекций $\Pi_4$, перпендикулярная плоскости $\Gamma$. Ось новой системы плоскостей $\Pi_4/\Pi_1$ проведена перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали. Полученная проекция $A_4B_4C_4$ является вырожденной проекцией плоскости $\Gamma$, т.к. плоскость $\Gamma$ является проецирующей по отношению к плоскости $\Pi_4$.

Для преобразования проецирующей плоскости в плоскость уровня введена новая плоскость проекций $\Pi_5$, параллельная плоскости $\Gamma$. Ось $X_2$ новой системы плоскостей проекций $\Pi_4/\Pi_5$ параллельна вырожденной проекции $A_4B_4C_4$ плоскости $\Gamma$. При построении новой проекции $A_5B_5C_5$ использованы расстояния от заменяемых проекций $A_1B_1C_1$ до оси $X_1$. Так как в новой системе плоскостей проекций $\Pi_4/\Pi_5$ плоскость $\Gamma(ABC)$ является параллельной плоскости $\Pi_5$, то на эту плоскость она проецируется в натуральную величину.




Рисунке 9.12

Рассмотренные четыре основные задачи лежат в основе решения многих других задач способом замены плоскостей проекций.

Рассмотрим примеры решения некоторых задач.

Пример 1. Преобразовать плоскость $\Gamma$ общего положения, заданную следами, в проецирующую (рисунке 9.13).

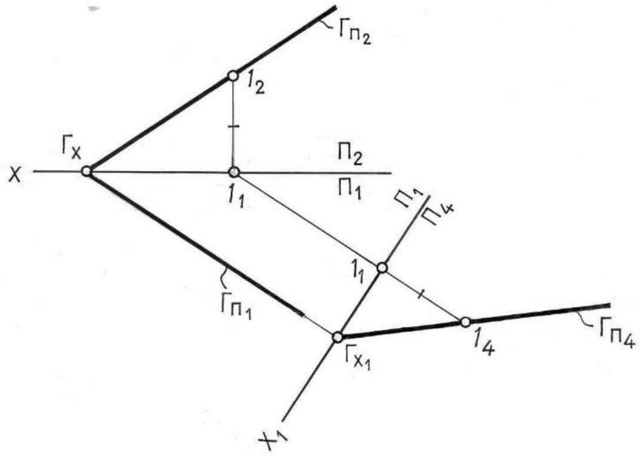



Рисунок 9.13

Плоскость $\Gamma$ преобразуем во фронтально-проецирующую. Известно, что горизонтальный след фронтально-проецирующей плоскости перпендикулярен оси $X$, следовательно новую ось $X_1$ проводим перпендикулярно к $\Gamma_{\Pi 1}$. Через точку, в которой $\Gamma_{\Pi 1} \cap X_1 = \Gamma_{X1}$ пройдет фронтальный след $\Gamma_{\Pi 4}$. Для определения его направления достаточно найти одну точку. В качестве такой точки можно взять произвольную точку $1 \in \Gamma$ и указать ее фронтальную проекцию $1_4$ на новой плоскости $\Pi_4$. Через $\Gamma_{X1}$ и $1_4$ проводим $\Gamma_{\Pi 4}$.

<u>Пример 2.</u> Определить расстояние от точки $T$ до плоскости $\Sigma$ общего положения, заданной $DABC$(рисунок 9.14).

Плоскость $\Sigma(ABC)$ преобразуем в проецирующую, для чего в плоскости построим горизонталь $h(h_2 h_1)$.

Перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали проведем ось $X_1$ новой системы плоскостей проекций $\Pi_4/\Pi_1$.

Строим новые проекции точек $A_4 B_4 C_4$, откладывая расстояния от оси $X_1$, равные расстояниям от заменяемых проекций $A_2 B_2 C_2$ до оси $X$.

Плоскость $\Sigma(ABC)$ оказалась перпендикулярной плоскости проекций $\Pi_4$ и спроецировалась на эту плоскость в прямую линию. На плоскость $\Pi_4$ переносим точку $T(T_4)$ и опускаем перпендикуляр на плоскость $DABC$. $T_4 K_4 \perp A_4 B_4 C_4$, где $K$ – основание перпендикуляра. Расстояние от точки $T$ до плоскости $DABC$ на плоскости $\Pi_4$ проецируется без искажения. $|T_4 K_4| = |TK|$.

Возвращаем проекции перпендикуляра на плоскость $\Pi_4/\Pi_1$ для этого из точки $T_1$ проводим проекцию перпендикуляра $T_1 K_1$ параллельно оси $X_1$ и перпендикулярно $h_1$. Дальнейшие выполненные построения показаны на рисунок 10.14.

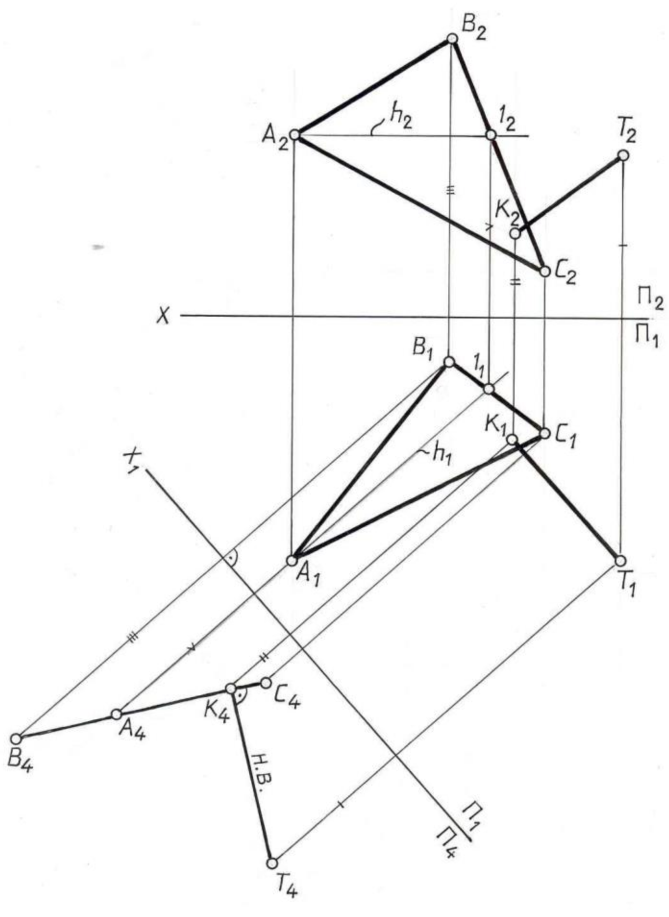



Рисунок 9.14

# Тема 10 Способы преобразования чертежа

## 10.1 Плоскопараллельное перемещение. Способ вращения. Вращение вокруг проецирующих осей и линий уровня

Плоскопараллельное перемещение – это такое перемещение геометрической фигуры в пространстве, когда все ее точки двигаются в плоскостях, параллельных какой-либо плоскости проекций.

На рисунке 10.1 показано плоскопараллельное перемещение точки $A$ в плоскости Г, параллельной горизонтальной плоскости проекций. При таком перемещении точки траектория ее движения m проецируется на горизонтальную плоскость проекций без искажения ($m_1 \equiv m$), а на фронтальную плоскость в прямую, параллельную оси $OX$ ($m_2 \parallel OX$).

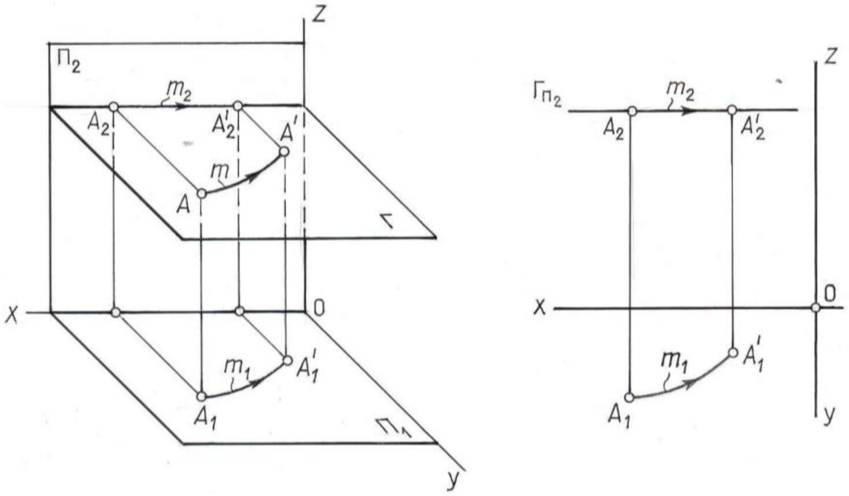



Рисунок 10.1

При плоскопараллельном перемещении точки $B$ во фронтальной плоскости ($\Sigma \parallel \Pi_2$) ее траектория $t$ на фронтальную плоскость проекций проецируется без искажения ($l \equiv l_2$), а на горизонтальную – в прямую, параллельную оси $OX$ ($t_1 \parallel X$) (рисунок 10.2).

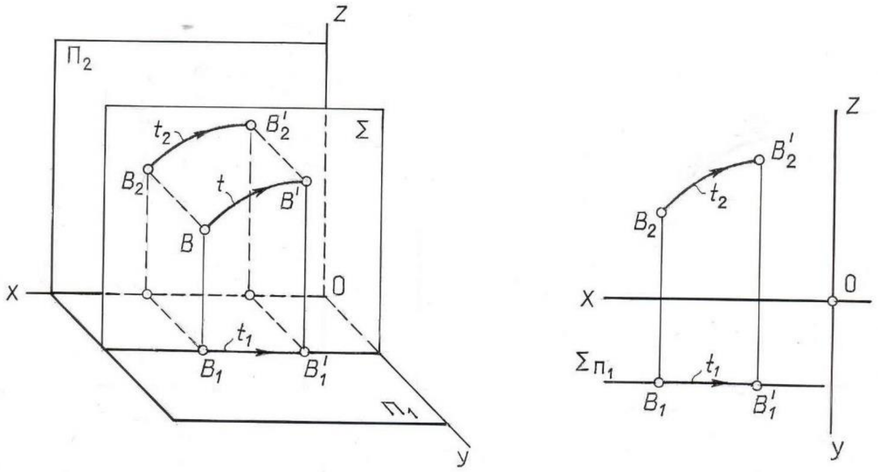



Рисунок 10.2

Таким образом, можно сформулировать правило плоскопараллельного перемещения геометрических фигур.

При плоскопараллельном перемещении геометрической фигуры Ф все точки которой двигаются в плоскостях, параллельных плоскости проекций $\Pi_1$, горизонтальная проекция фигуры $\Phi_1$ перемещается не меняя формы и размеров ($\Phi_1 = \Phi_1{}'$) а фронтальные проекции всех точек фигуры перемещаются по прямым, параллельным оси $OX$ (рисунок 10.3).

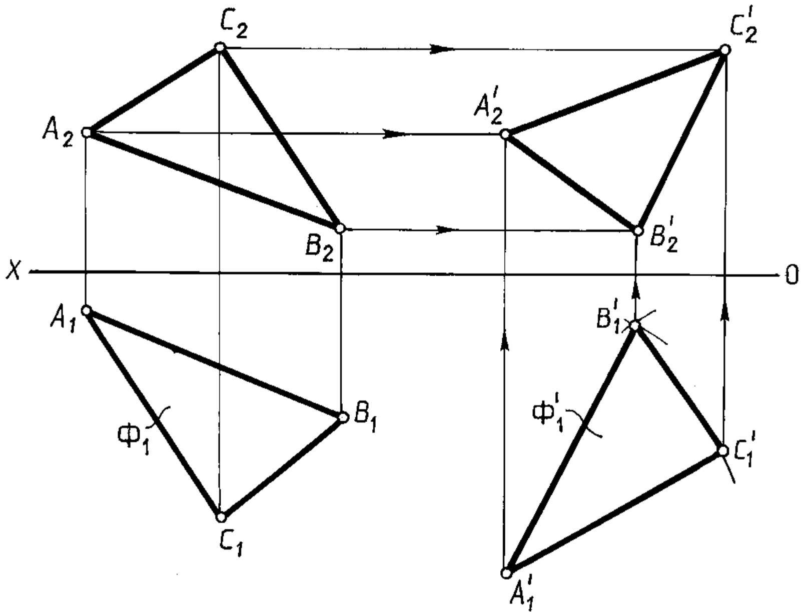


Рисунок 10.3

При плоскопараллельном перемещении геометрической фигуры Ф все точки которой двигаются в плоскостях, параллельных плоскости проекций $\Pi_2$, фронтальная проекция этой фигуры перемещается не меняя формы и размеров ($\Phi_2 = \Phi_2{}'$), а горизонтальная проекция всех точек фигуры перемещается по прямым, параллельным оси $OX$ (рисунок 10.4).

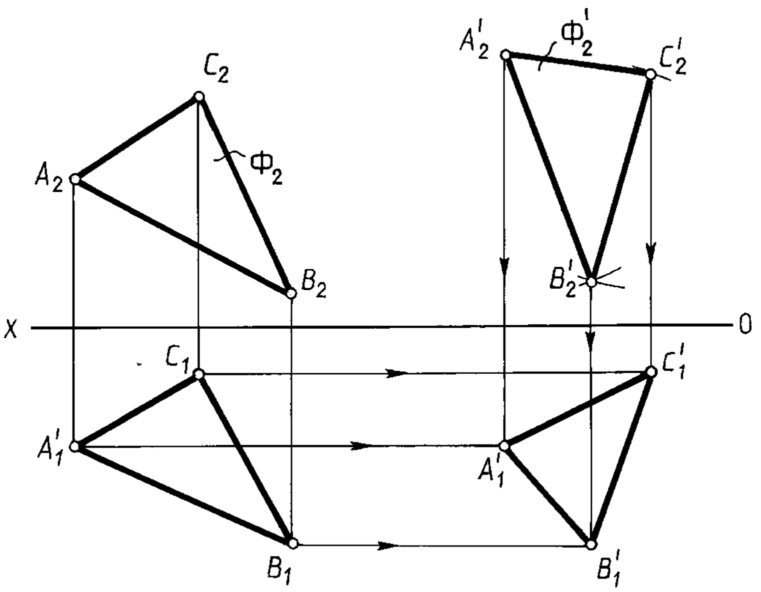


Рисунок 10.4

Рассмотрим ряд практических примеров применения изложенного метода.

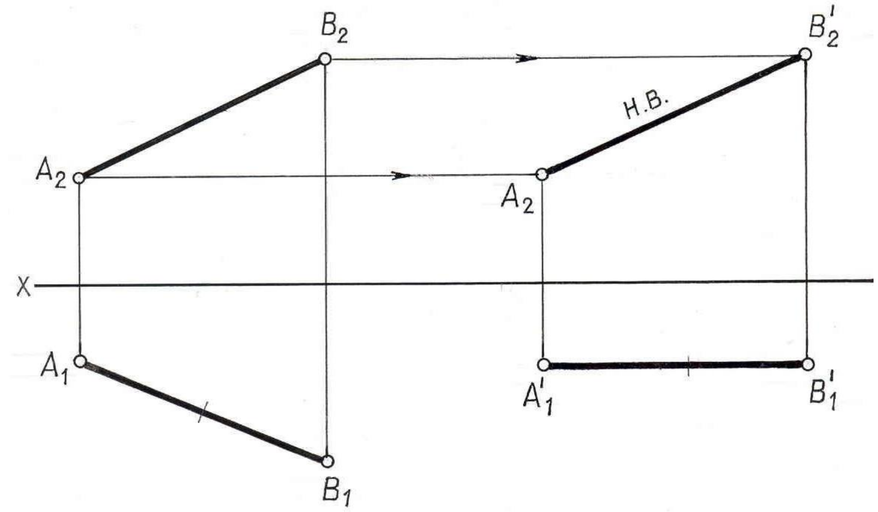
Пример 1. Определить натуральную величину отрезка $AB$ общего положения.

Отрезок проецируется в натуральную величину на плоскость проекций, если он параллелен этой плоскости проекций, поэтому отрезок $AB$ расположим параллельно фронтальной плоскости проекций, т.е. его горизонтальная проекция должна быть параллельна оси $OX$. Перемещение отрезка в новое положение осуществляем так, чтобы все его точки двигались в плоскостях, параллельных плоскости $\Pi_1$. При таком перемещении новая горизонтальная проекция конгруэнтна исходной. Фронтальные проекции точек отрезка ($A_2B_2$) будут перемещаться по прямым, параллельным оси $OX$.

На рисунке 10.5 построения выполнены в следующей последовательности.

Через произвольную точку $A'$ проводим прямую, параллельную оси $OX$. Откладываем на ней от точки $A_1{}'$ отрезок $A_1{}'B_1{}'$ равный $A_1B_1$.

Из точек $A_1{}'$ и $B_1{}'$ проводим вертикальные линии связи до встречи с горизонтальными прямыми проведенными соответственно через точки $A_2B_2$. Полученные точки $A_2{}'B_2{}'$ являются фронтальной проекцией отрезка $AB$, параллельного плоскости $\Pi_2$ и его натуральной величиной $|A_2{}'B_2{}'| = |AB|$.




Рисунке 10.5

Пример 2. Отрезок $CD$ общего положения преобразовать в положение $\perp \Pi_2$.

Для преобразования отрезка общего положения в проецирующее, необходимо последовательно выполнить два перемещения параллельно плоскостям проекций: вначале перевести его в положение, параллельное плоскости $\Pi_1$. Затем переместить отрезок в положение $\perp \Pi_2$. Все преобразования показаны на рисунке 10.6.

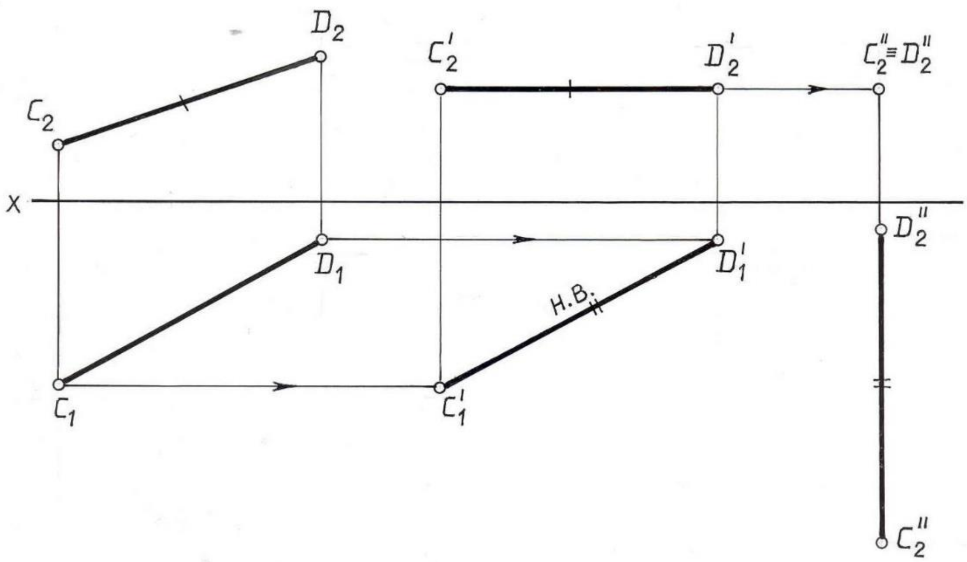



Рисунок 10.6

Пример 3. Плоскость $\Gamma(ABC)$ преобразовать в положение, перпендикулярное к плоскости $\Pi_2$ (рисунок 10.7).

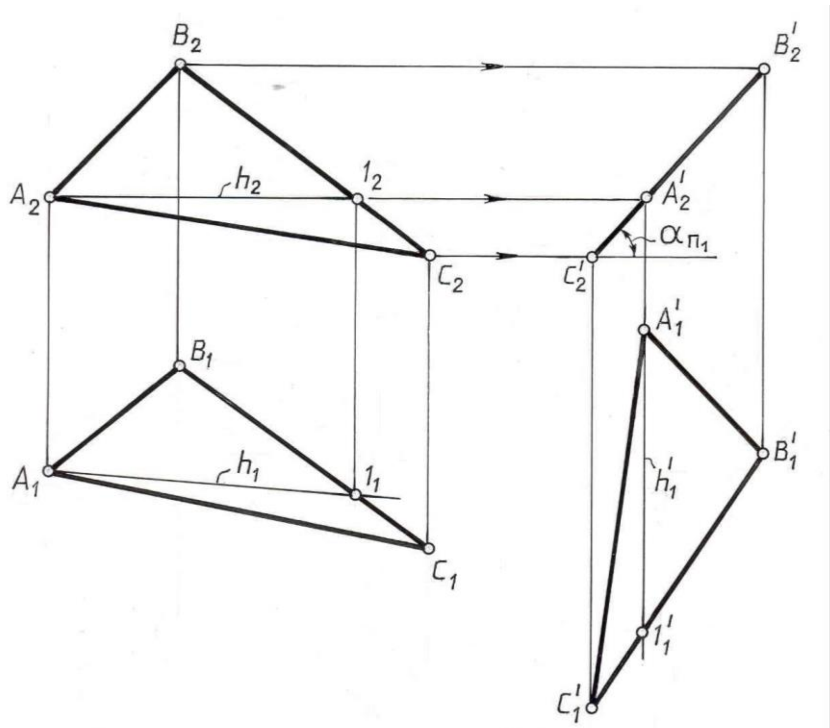



Рисунок 10.7

Отметим, что у фронтально-проецирующей плоскости горизонтали перпендикулярны плоскости $\Pi_2$. Проводим в плоскости $\Gamma(ABC)$ горизонталь $h(h_2h_1)$. Расположим плоскость $\Gamma(ABC)$ перпендикулярно плоскости $\Pi_2$. При этом горизонталь займет проецирующее положение.

Проводим $A'1' \perp OX$; $|A'1'| = |A1|$; $\Delta(A'B'C') \cong \Delta(ABC\ )$.

Фронтальные проекции вершин треугольника $A'B'C'$ находим в пересечении соответствующих линий проекционной связи с горизонтальными прямыми.

В таком положении плоскость треугольника становится фронтально-проецирующей и треугольник $ABC$ проецируется в виде отрезка прямой $A'B'C'$.

Пример 4. Плоскость $\Gamma(ABC)$ общего положения преобразовать в положение параллельное плоскости проекций $\Pi_1$ (рисунок 10.8).

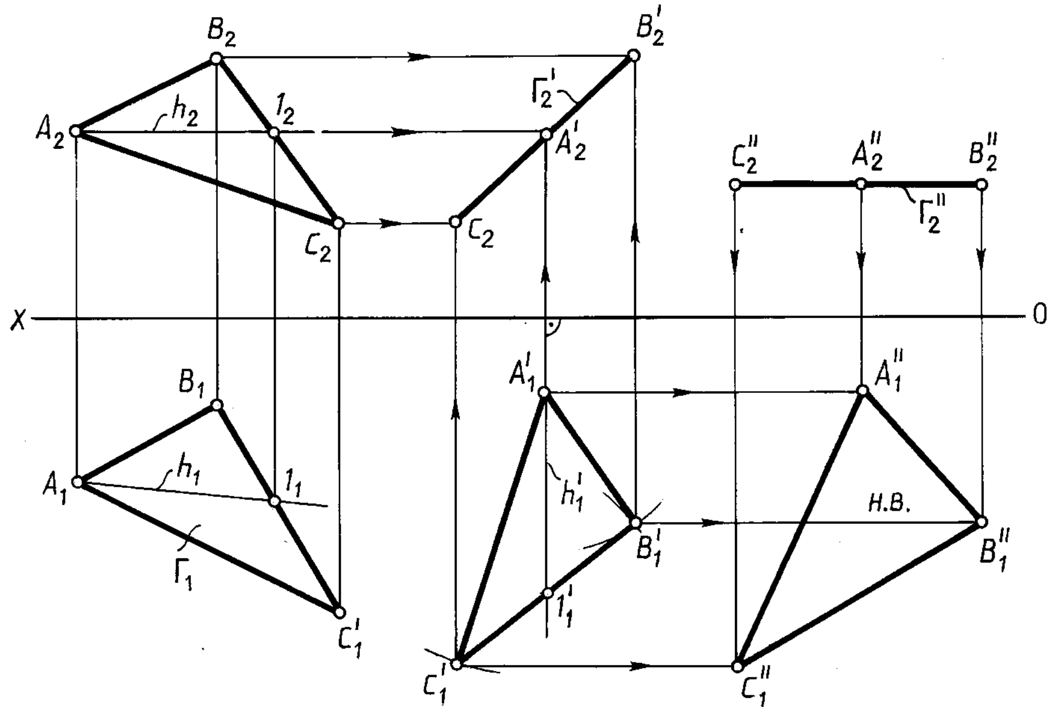


Рисунок 10.8

Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня производится последовательно двумя перемещениями в пространстве. Вначале треугольник $ABC$ из заданного положения перемещают в положение фронтально-проецирующей плоскости.

Затем треугольник $ABC$ перемещается в положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций (все точки треугольника перемещаются во фронтальных плоскостях). При таком перемещении фронтальная проекция треугольника остается неизменной ($A_2{}'B'C' = A'B'C'$), а горизонтальные проекции всех точек ($A_1{}''B_1{}''C_1{}''$) перемещаются параллельно оси $OX$.

В результате двукратного перемещения в пространстве треугольник $ABC$ занял положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций, поэтому на эту плоскость проекций он проецируется без искажения $|A_1{}''B_1{}''C_1{}''| = |ABC|$.

**10.2 Способ вращения**

Вращение вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций

Вращение вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций, является частным случаем плоскопараллельного перемещения; все точки геометрической фигуры перемещаются в пространстве также в плоскостях, параллельных плоскостям проекций, но не по произвольной траектории, а по окружностям.

Сущность способа заключается в том, что проецируемую фигуру путем поворота ее вокруг выбранной оси приводят относительно плоскостей проекций в новое положение, при котором легко получить решение задачи.

Все точки геометрической фигуры, не лежащие на оси вращения, вращаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения (рисунок 10.9): $\Sigma \perp i$; $A \in \Sigma$. Центр $O$ окружности $m$, которую описывает точка $A$, является точкой пересечения оси $i$ с плоскостью $\Sigma$; $O = i \cap \Sigma$. Отрезок $AO$ является радиусом $R$ окружности $m$.

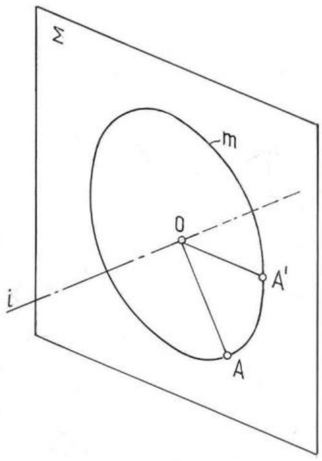



Рисунок 10.9

Рассмотрим, как изменяется положение проекций точки при вращении ее вокруг оси, перпендикулярной к плоскости $\Pi_1$ (рисунок 10.10).

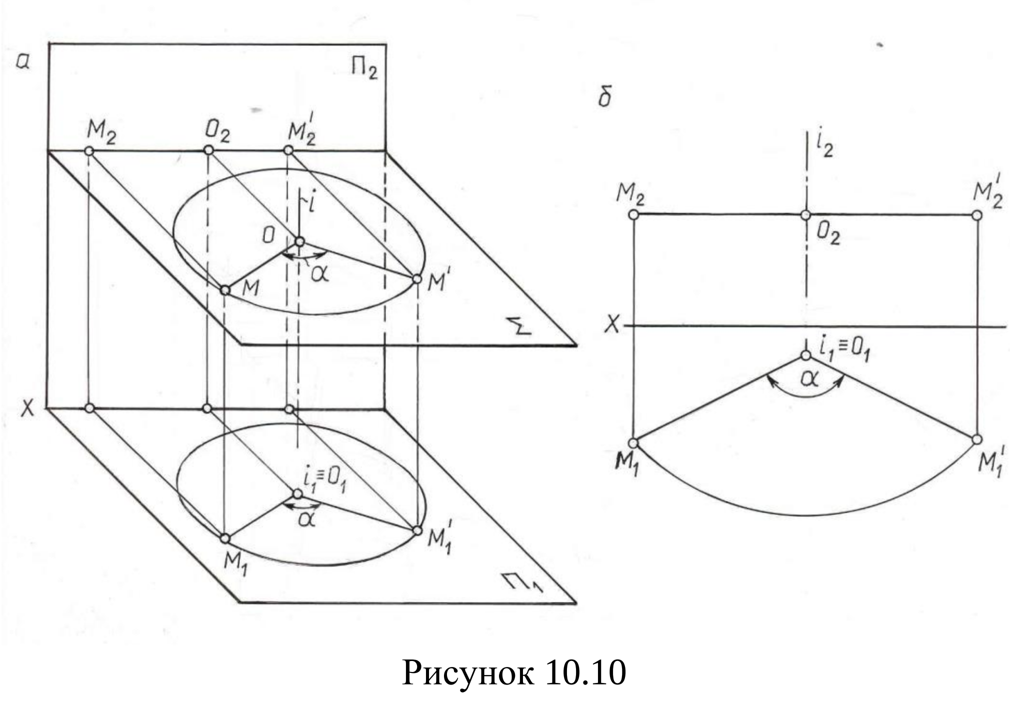



Рисунок 10.10

При вращении точки $M$ вокруг оси $i \perp \Pi_1$ (центр вращения $O$, радиус вращения $OM \perp i$) на угол $\alpha$, ее горизонтальная проекция $M_1$ перемещается по окружности (с центром в точке $O_1 \cong i_1$) того же радиуса, в ту же сторону и на тот же угол$\alpha$, что и сама точка $M$. Траектория движения точки $M$ в пространстве на плоскость $\Pi_1$ проецируется без искажения, т.к. она принадлежит плоскости $\Sigma$, параллельной $\Pi_1$. Фронтальная проекция точки $M(M_2)$ перемещается по прямой, параллельной оси $OX$.

Вращение геометрических фигур сводится к вращению конечного числа точек, определяющих данную фигуру. При этом полезно иметь в виду следующее:

а) точки, лежащие на оси вращения, не меняют своего положения, остальные точки вращаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения;

б) все вращающиеся точки поворачиваются в одну сторону на один и тот же угол;

в) если ось перпендикулярна некоторой плоскости проекций, то проекции на эту плоскость вращающейся фигуры в любом ее положении конгруэнтны. Последнее вытекает из рассмотренных свойств метода плоскопараллельного перемещения, т.к. вращение вокруг осей, перпендикулярных к плоскостям проекций представляет собой частный случай этого метода.

Рассмотрим, как осуществляется на эпюре перемещение отрезка общего положения в частное положение путем вращения вокруг оси перпендикулярной плоскостям проекций.

<u>Пример 1</u>. Отрезок $AB$ общего положения преобразовать в положение параллельное плоскости проекций $\Pi_2$.

Чтобы осуществить такое преобразование, достаточно повернуть отрезок $AB$ вокруг оси $i \perp \Pi_1$ на угол $\alpha$. Для сокращения количества геометрических построений ось $i \ni$ B (рисунок 10.11).

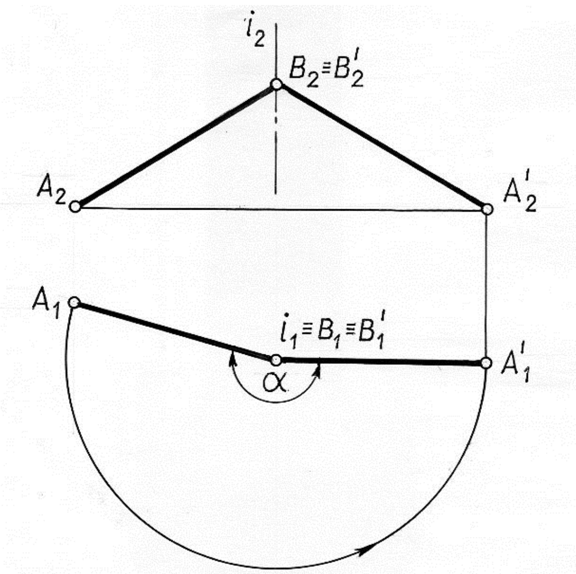



Рисунок 10.11

Величина угла $\alpha$ принимается такой, чтобы после поворота горизонтальная проекция отрезка заняла положение $\parallel OX$. Так как точка $B$ принадлежит оси вращения, то она не будет менять своего положения в процессе преобразования, следовательно, $B_1 \equiv B_1''$ и $B_2 \equiv B_2''$. Для нахождения точки $A_2'$ необходимо из $A''$ провести вертикальную линию связи и отметить точку пересечения ее в горизонтальной прямой, проведенной через $A_2$.

Вращение вокруг линий уровня

Вращение вокруг линий уровня применяют в тех случаях, когда данную плоскую фигуру требуется совместить с какой-либо плоскостью, параллельной плоскости проекций. В таком положении плоская фигура проецируется на соответствующую плоскость проекций без искажения.

На рисунке 10.12 показано вращение некоторой точки $A$ вокруг горизонтальной оси $h \parallel \Pi_1$. В этом случае плоскостью вращения точки $A$ (плоскость, в которой расположена траектория движения точки $A$ – окружность) будет являться плоскость $\Sigma$, перпендикулярная оси вращения $(\Sigma \perp h)$ и, следовательно, горизонтальной плоскости проекций $\Sigma \perp \Pi_1$.

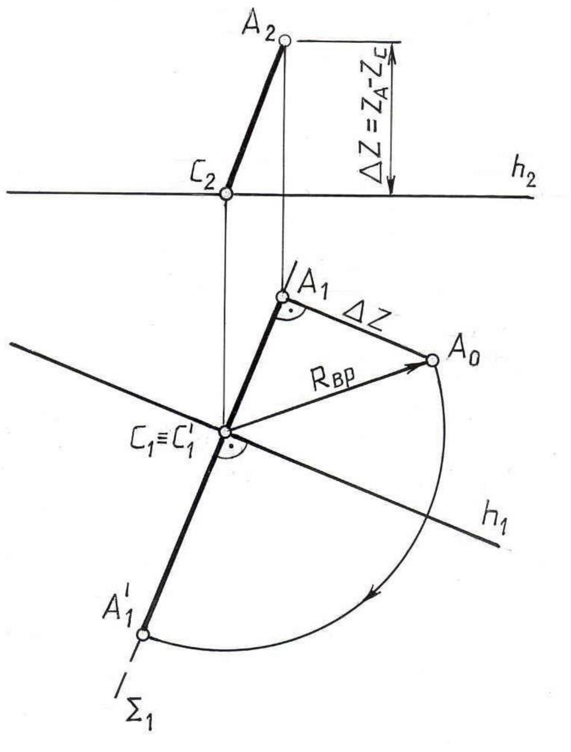



Рисунок 10.12

Точка $A$ будет перемещаться по окружности с центром в точке $C$ (точка пересечения оси вращения с плоскостью $\Sigma$) $\mathrm{C} = h \cap \Sigma$. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки $A$ до оси вращения $h (R = \mathrm{AC})$.

Плоскость $\Sigma$ – горизонтально проецирующая $(\Sigma \perp \Pi_1)$, поэтому траектория движения точки $A$ в пространстве (окружность) спроецируется на плоскость $\Pi_1$

в прямую, совпадающую с горизонтальным следом плоскости $\Sigma(\Sigma_{\Pi 1})$.

Когда точка $A$, вращаясь вокруг оси $h$, совместится с плоскостью, параллельной плоскости проекций $\Pi_1$, радиус вращения этой точки $R = CA$ займет горизонтальное положение и спроецируется на $\Pi_1$ без искажения: $C_1A_1 = CA = R$.

<u>План решения задачи следующий.</u>

Через горизонтальную проекцию $A_1$ точки $A$ проведем горизонтальный след плоскости $\Sigma(\Sigma_1 \perp h_1)$ и отмечаем центр вращения $C(C_1C_2)$.

Определяем натуральную величину радиуса вращения $R_{\text{вр}} = A_0C_1$ (как гипотенузу прямоугольного треугольника, катетами которого являются горизонтальная проекция радиуса вращения $A_1C_1$ и разность координат $Z$ точек $A$ и С, $\Delta Z = Z_A - Z_c$. Гипотенуза треугольника $\Delta C_1A_1A_0$, $C_1A_0 = R_{\text{вр}}$.

Новое, после поворота, положение точки $A_1{}'$ находится в месте пересечения дуги окружности, проведенной из горизонтальной проекции центра вращения $C_1$ радиусом, равным $C_1A_0$ с горизонтальным следом $\Sigma_1$ плоскости $\Sigma$.

На рисунке 10.13 показан пример вращения треугольника $ABC$ вокруг его горизонтали $AD(AD \subset ABC,\, AD \parallel \Pi_1)$.

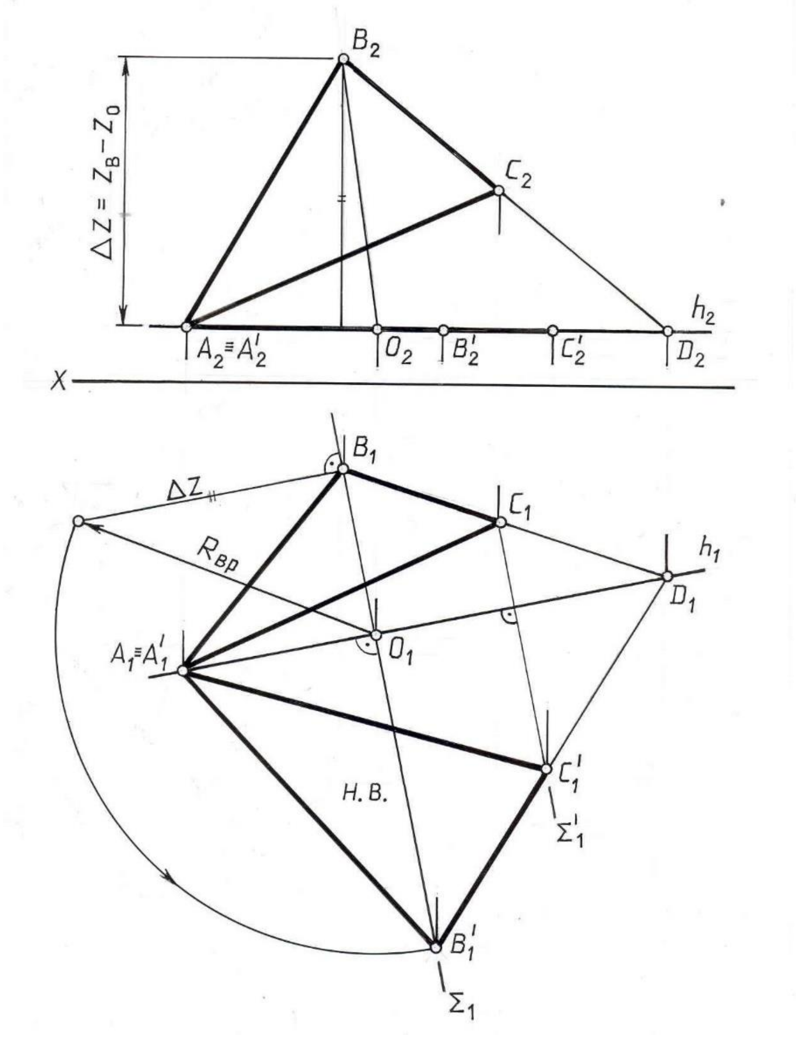



Рисунок 10.13

Точки $D$ и $A$ не меняют своего положения в процессе вращения треугольника ($A_1 \equiv A_1{}'$, $D_1 \equiv D_1{}'$), т.к. они принадлежат оси вращения $h(D \in h, \mathrm{A} \in h)$, а горизонтальные проекции точек $B$ и $C$ перемещаются по прямым, перпендикулярным $h_1(B_1B_1{}' \perp h_1$ и $C_1C_1{}' \perp h_1)$. Положение точки $B_1{}'$ после поворота треугольника определено описанным выше способом ($O_1B_1{}' = O_1B_0 = R_{\text{вр}}$). В результате вращения треугольник $ABC$ занял положение $A'B'C'$, параллельное плоскости П, и спроецировался на эту плоскость без искажений: $|A'B'C'| = |ABC|$. Фронтальная проекция треугольника после поворота $A_2{}'B_2{}'C_2{}'$ – прямая линия, параллельная оси координат.

# Тема 11 Метрические задачи (развертки)

В практике инженерного проектирования и строительства часто возникает необходимость моделировать поверхность плоской фигурой, которая может быть названа «выкройкой» поверхности или разверткой. Разверткой поверхности называется плоская фигура, в которую преобразуется поверхность при ее совмещении с плоскостью. При этом поверхность представляется в виде гибкой, но нерастяжимой и несжимаемой пленки.

Построение разверток поверхностей является технической задачей, имеющей большое значение при изготовлении различных деталей и конструкций из листового материала, например: воздуховодов для промышленной вентиляции, водосточных труб, кожухов, цистерн, различных отводов.

Для обеспечения необходимой точности изготовления и экономичного расходования материала изделие конструируют таким образом, чтобы каждая часть изделия была развертывающейся поверхностью.

Развертывающейся поверхностью называется поверхность, которая всеми своими точками может быть совмещена с плоскостью, т. е. деформирована в плоскость без складок и разрывов. Каждой точке на поверхности соответствует единственная точка развертки, т.е. поверхность и ее развертку можно рассматривать как две геометрические фигуры, между точками которых существует взаимно-однозначное соответствие, обладающие свойствами:

Длины отрезков линий, расположенных на поверхности и на ее развертке, равны между собой.

Углы между соответствующими линиями поверхности и развертки равны между собой.

Однако, угол между двумя образующими на конической поверхности меньше угла между соответствующими им прямыми на развертке, так как вершина конуса является особой точкой, и она не обладает свойствами, которые характерны обыкновенным точкам.

Площади фигур, ограниченные соответствующими замкнутыми линиями на поверхности и развертке равны между собой. Следует помнить, что все размеры на развертке имеют натуральную величину.

Рассмотрим поверхность $\theta_0$ и ее развертку $\theta$ (рисунок 11.1). Длина дуги $AB$ равна длине дуги $A_0B_0$, угол $\alpha$ равен углу $\alpha_0$, и площадь $F$ равна площади $F_0$. Заметим, что углом между двумя кривыми называется угол между их касательными. Прямой линии на поверхности (образующей) всегда соответствует прямая на развертке, параллельные прямые на поверхности переходят на развертке в параллельные.

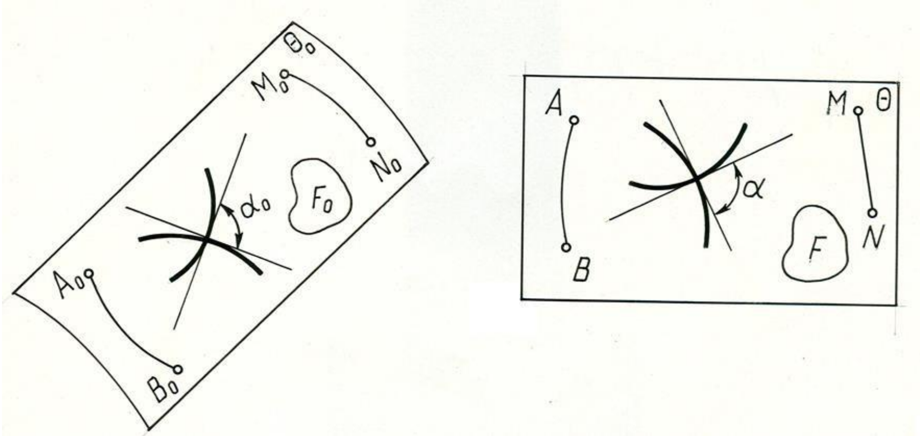



Рисунок 11.1

Линия кратчайшего расстояния между двумя точками на поверхности называется геодезической. На развертке этой линии соответствует прямая. Например, дуга $M_0N_0$ является кратчайшей из всех дуг на поверхности, проведенных между точками $M_0N_0$, так как на развертке этой линии соответствует прямая $MN$.

### 11.1 Развертывающиеся и неразвертывающиеся поверхности

К развертывающимся поверхностям относятся все многогранные поверхности. Разверткой многогранной поверхности является плоская фигура, полученная последовательным совмещением с одной и той же плоскостью всех ее граней, поэтому построение развертки многогранной поверхности сводится к построению истинных размеров и формы отдельных граней, которые затем совмещают с плоскостью без изменения формы и размеров.

Из кривых поверхностей, к развертывающимся относятся линейчатые поверхности, которые образованы взаимно-параллельными или пересекающимся образующими. К таким поверхностям относятся торсы и их частные виды – конические и цилиндрические поверхности. Остальные линейчатые и нелинейчатые поверхности относятся к неразвертывающимся поверхностям.

Развертки развертывающихся и неразвертывающихся поверхностей, которые, как правило, строятся графически, являются приближенными. При построении этих разверток заданную поверхность заменяют (аппроксимируют) другой поверхностью, которую вписывают или описывают около нее. Аппроксимирующими поверхностями выбирают развертывающиеся поверхности. Линейчатые поверхности заменяют многогранными, например, цилиндр – вписанной в него призмой, конус – вписанной в него пирамидой, а торс – вписанной в него многогранной поверхностью (гранный торс). Поверхности с криволинейными образующими предварительно заменяют цилиндрическими и коническими поверхностями вращения, которые затем заменяют многогранными.

Количество граней в аппроксимирующей поверхности должно быть достаточным для обеспечения необходимой точности построения развертки.

### 11.2 Общие правила построения разверток

В общем случае построение развертки выполняется в следующей последовательности.

В данную кривую поверхность вписывается многранная поверхность.

Определяется натуральная величина всех граней вписанного многогранника. Для построения натуральной величины боковых граней, определяют истинную длину каждого бокового ребра. Если грани имеют более трех сторон, то следует разбить их диагоналями на треугольники и определить натуральную величину диагоналей.

Строится на плоскости чертежа натуральная величина первой грани и к ней, пользуясь смежными ребрами, последовательно пристраиваются остальные грани.

Соответствующие концы всех ребер на развертке соединяются плавными кривыми линиями.

Линии обрезки ребер обводятся сплошными толстыми линиями, а линии изгибов штрихпунктирными линиями с двумя точками.

### 11.3 Построение разверток пирамидальной и конической поверхности

Построение разверток пирамидальных поверхностей сводится к многократному построению натурального вида граней – треугольников, из которых состоит данная пирамидальная поверхность. Развертка боковой поверхности конуса в общем случае строится по схеме развертки поверхности пирамиды, вписанной в данную коническую поверхность и заменяющую ее.

<u>Пример 1.</u> Построить развертку боковой поверхности наклонной треугольной пирамиды $SABC$ (рисунок 11.2).

Развертку боковой поверхности пирамиды строим по следующей схеме.

Определяем длины ребер и сторон основания пирамиды.

Строим на плоскости чертежа последовательно по трем сторонам треугольники (грани пирамиды), примыкающие друг к другу и с общей вершиной.

<u>Решение.</u>

Как видно из чертежа, основание $ABC$ пирамиды расположено в горизонтальной плоскости и поэтому его стороны на $\Pi_1$ проецируются в натуральную величину. Натуральные размеры боковых ребер определяем с помощью прямоугольных треугольников, у которых одним катетом является превышение точки $S$ над точками $A, B, C$ (отрезок $S_2S_0$), а вторым катетом отрезок, равный горизонтальной проекции соответствующего бокового ребра ($S_0A_0 = S_1A_1, S_0B_0 = S_1B_1, S_0C_0 = S_1C_1$). Натуральной величиной боковых ребер являются отрезки $S_2A_0$, $S_2B_0$, $S_2C_0$. После определения натуральных величин ребер приступаем к построению развертки. Для этого из произвольной точки S проводим произвольную прямую а. Откладываем на ней от точки $S - SA = S_2A_0$. Из точки $A$ проводим дугу радиусом $A_1C_1$, а из точки $S$-дугу радиусом $S_2C_0$. Пересечение дуг определяет положение вершины $B$ треугольника $SAB$ – натуральной величины грани пирамиды. Аналогично находим точки $B$ и $A$. Соединив точки $ACBAS$, получим развертку боковой поверхности пирамиды $SABC$.

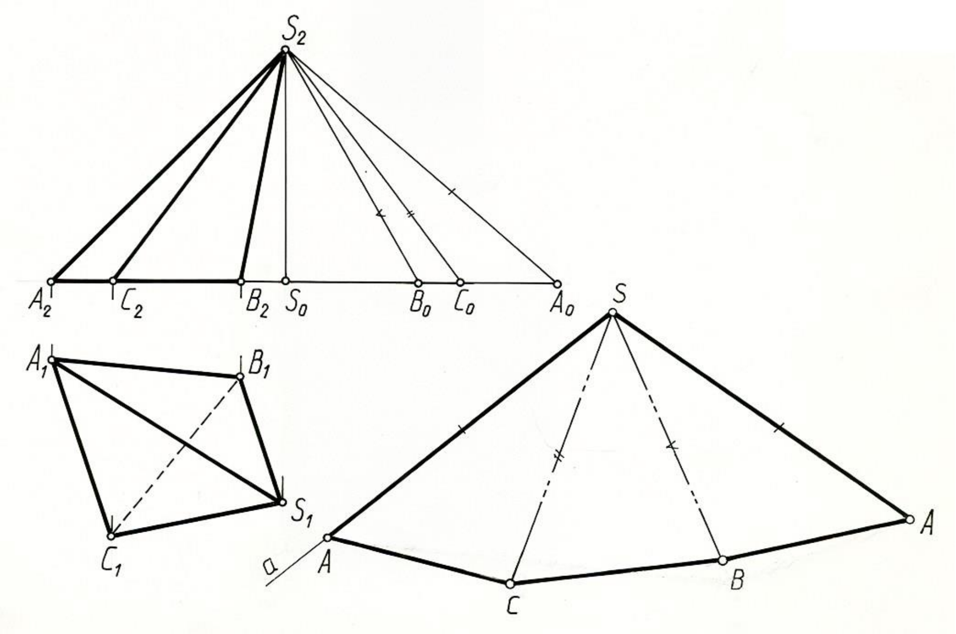



Рисунок 11.2

<u>Пример 2.</u> Построить развертку боковой поверхности наклонного эллиптического конуса с круговым основанием (рисунок 11.3).

Развертка конической поверхности выполняется по схеме построения развертки боковой поверхности пирамиды, способу треугольников. Для этого коническая поверхность аппроксимируется (заменяется) вписанной в нее многогранной пирамидальной поверхностью.

<u>Решение.</u>

В данную коническую поверхность впишем двенадцатиугольную пирамиду. Так как коническая поверхность имеет плоскость симметрии Г, то можно построить развертку только одной половины поверхности. Разделим половину окружности на 6 равных частей, начиная от точки ($O_1$) пересечения ее с плоскостью симметрии Г ($Г_1$), которая делит поверхность и, следовательно, ее развертку на 2 симметричные части. Через точки деления $O_1, 1_1, 2_1$ ... и вершину $S_1$ проводим горизонтальные проекции образующих конуса- прямые $S_1O_1$, $S_11_1$, $S_12_1$..., которые являются боковыми ребрами вписанной пирамиды. Сторонами основания пирамиды являются хорды, соединяющие точки деления и проецирующиеся на $\Pi_1$ в натуральную величину. Натуральную величину боковых ребер определяем способом прямоугольных треугольников. Проводим ось симметрии развертки и от точки $S$ откладываем отрезок $SO = S_2O_0$ (рисунок 11.3). Из точки $S$ радиусом $S_21_0$ проводим дугу окружности, а из точки $O$ радиусом $O_11_1$ делаем на ней засечку. Точка 1 – искомая точка развертки. Для построения смежной грани из точки $S$ радиусом $S_22_0$, а из точки 1 радиусом $1_12_1$ сделаем засечки и в пересечении отметим точку 2 и т.д. Соединив точки 0, 1, 2 ... 6 плавной кривой получим развертку ½ боковой поверхности конуса.

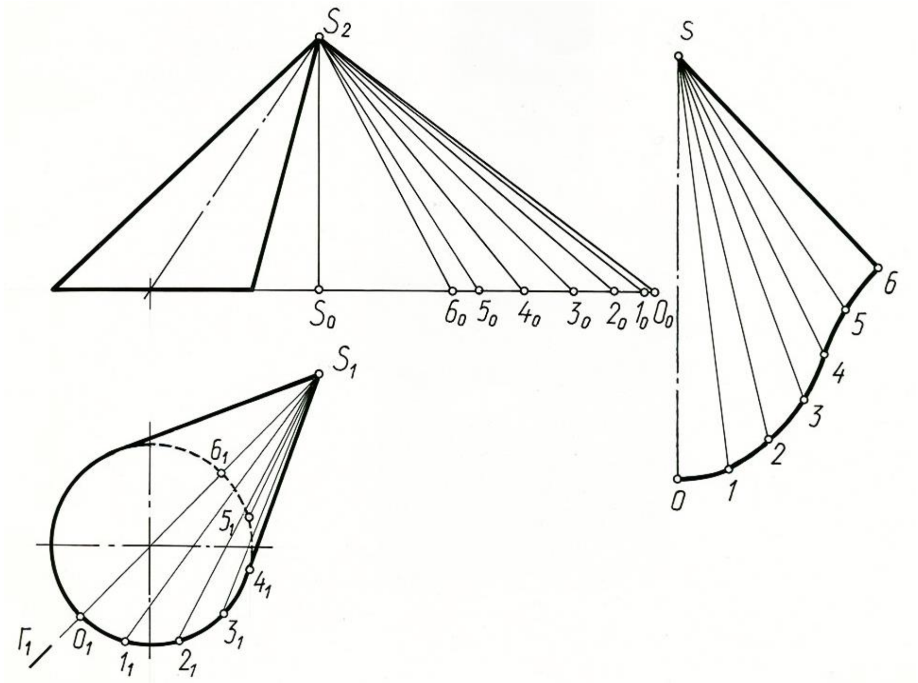



Рисунок 11.3

### 11.4 Построение разверток призматических и цилиндрических поверхностей

Построение разверток призматических поверхностей сводится к построению истинных размеров и формы отдельных граней, что и выполняется на чертеже различными способами. Построение разверток цилиндрических поверхностей соответствует построению разверток призматических поверхностей вписанных в цилиндрическую поверхность.

Построение развертки проводится по следующей схеме.

Каждая боковая грань призмы, представляющая параллелограмм, разбивается диагоналями на два треугольника.

Определяются длины сторон граней (параллелограммов) и построенных диагоналей.

Наплоскостичертежапосторонамидиагоналистроятся последовательно грани (параллелограммы).

Пример 3. Построить развертку боковой поверхности наклонной треугольной призмы (рисунок 11.4).

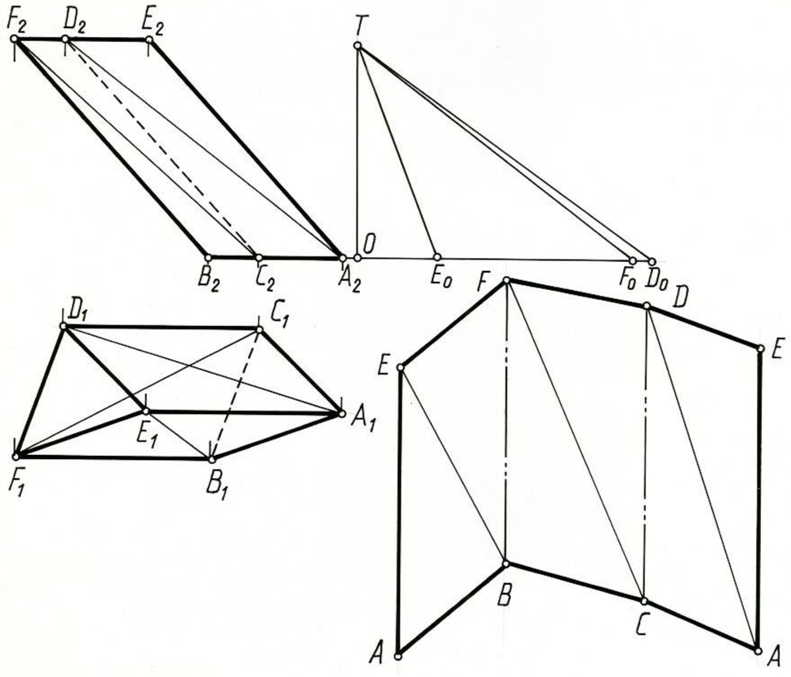



Рисунок 11.4

Решение. Каждую боковую грань призмы делим диагональю на два треугольника. Натуральные длины диагоналей $AD, BE, CF$ определим как гипотенузы прямоугольных треугольников, у которых одним катетом является высота призмы, а другим – горизонтальная проекция соответствующей диагонали ($A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1$). В нашем примере боковые ребра призмы параллельны фронтальной плоскости проекций и проецируется на $\Pi_2$ в натуральную величину, а стороны основания параллельны горизонтальной плоскости проекций и проецируются на $\Pi_1$ в натуральную величину.

На плоскости чертежа по трем сторонам строим треугольники боковой поверхности призмы, соблюдая их последовательность.

### 11.5 Способ нормального сечения

Для получения нормального сечения проводится плоскость перпендикулярная к боковым ребрам призмы.

Определяется натуральная величина нормального сечения. Стороны этого сечения определяют расстояние между боковыми ребрами, т.е. ширину граней.

Нормальное сечение разворачивается в прямую и через концы отрезков проводятся ребра призмы, которые перпендикулярны построенной прямой, а следовательно, и к периметру 1, 2, 3 сечения.

На проведенных ребрах откладываются длины отрезков боковых ребер, заключенных между линией сечения и основаниями. Полученные точки соединяются последовательно между собой.

Пример 4. Построить полную развертку наклонной треугольной призмы (рисунок 11.5).

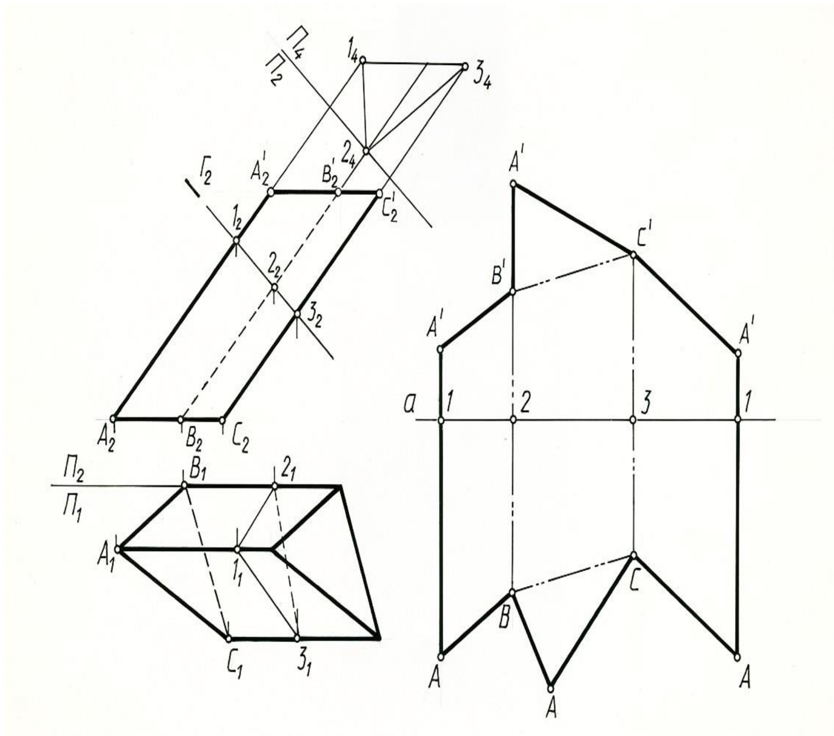


Рисунок 11.5

Призма расположена относительно плоскостей проекций так, что ее боковые ребра параллельны фронтальной плоскости проекций и проецируются на $\Pi_2$ в натуральную величину. Стороны основания проецируется без искажения на плоскость $\Pi_1$. Пересечем призму в произвольном месте плоскостью Г перпендикулярной боковым ребрам.

В нашем примере эта плоскость является фронтально-проецирующей плоскостью и пересекает призму по треугольнику 123. ($1_2 2_2 3_2$, $1_1 2_1 3_1$). Стороны треугольника определяют расстояние между боковыми ребрами. Определяем натуральную величину сечения (треугольник $A_4 B_4 C_4$), используя способ замены плоскостей проекций. Стороны нормального сечения; последовательно отложим на прямой а: $1 – 2 = 1_4 - 2_4$, $2 – 3 = 2_4 - 3_4$, $3 – 1 = 3_4 - 1_4$. Полученный отрезок $1 – 1$ равен периметру нормального сечения.

Через точки 1, 2, 3 проведем прямые перпендикулярные к, развертке периметра сечения и на них отложим натуральную величину боковых ребер $1\text{A} = 1_2 A_2$ и $1\text{A}' = 1_2 A_2{}'$, $2B = 2_2 B_2$ и $2B' = 2_2 B_2{}'$, $3C = 3_2 C_2$ и $3C' = 3_2 C_2{}'$ и т.д. Соединив концы отложенных отрезков, получим развертку боковой поверхности призмы. Для построения полной развертки необходимо к развертке боковой поверхности пристроить натуральные величины оснований, используя натуральные величины их сторон.

### 11.6 Способ раскатки

Способ раскатки применяется для построения разверток призматических и цилиндрических поверхностей в случае, когда боковые ребра призмы или образующие цилиндра параллельны какой-либо плоскости проекций, следовательно, проецируются в натуральную величину, а стороны основания параллельны другой плоскости проекций.

Схема построения развертки.

Мысленно разрезается боковая поверхность по одному из ребер.

Последовательным вращением вокруг боковых ребер, как вокруг линий уровня, все боковые грани совмещаются с плоскостью уровня, проходящей через ребро, по которому разрезается данная призма.

Пример 5. Построить полную развертку поверхности наклонной треугольной призмы.

Решение:

Развертку боковой поверхности призмы строим способом раскатки, так как боковые ребра ее параллельны фронтальной плоскости проекций, а стороны основания параллельны горизонтальной плоскости проекций и проецируются в натуральную величину (рисунок 11.6)

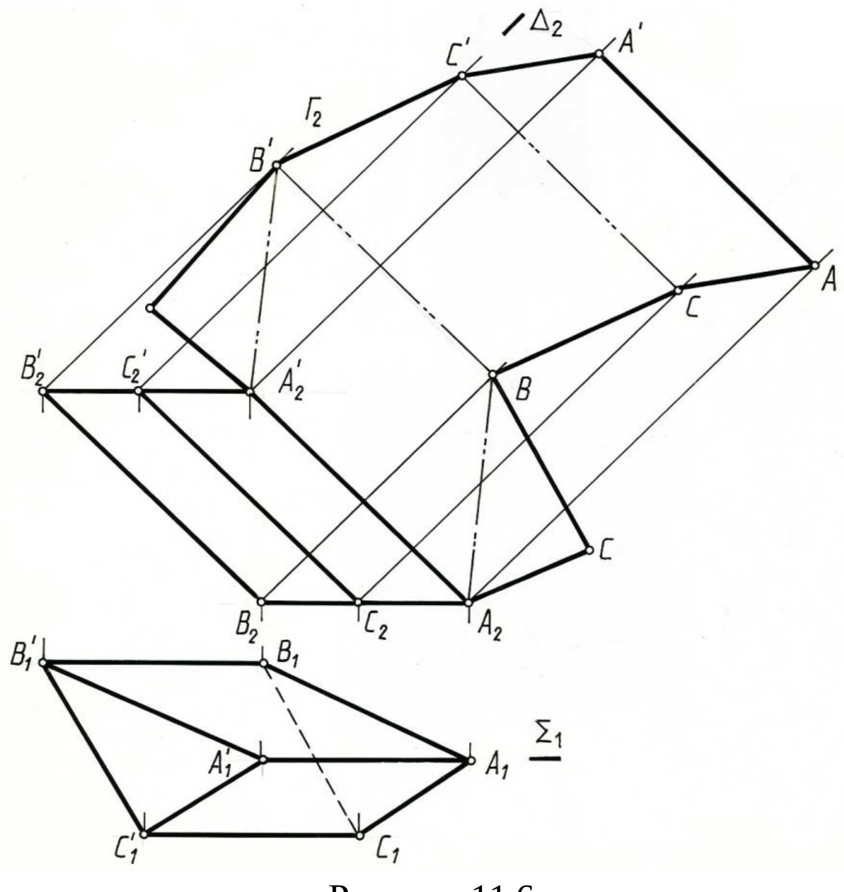



Рисунок 11.6

Так как боковые ребра параллельны фронтальной плоскости $\Pi_2$, можно каждую грань повернуть вокруг соответствующего ребра до положения, когда эта грань окажется параллельна плоскости $\Pi_2$. Тогда она и спроецируется на плоскость $\Pi_2$ без искажения. Повернув таким образом каждую грань, получим развертку боковой поверхности призмы.

Примем за плоскость развертки плоскость $\Sigma(\Sigma_1)$, проходящую через ребро $AA'$, и параллельную фронтальной плоскости проекций. Совместим грань $AA'B'B$ с плоскостью $\Sigma$. Для этого мысленно разрежем поверхность призмы по ребру $AA'$ и повернем грань $AA'B'B$ вокруг ребра (как вокруг фронтали) до совмещения с фронтальной плоскостью $\Sigma$, проходящей через это ребро.

Для определения совмещенного положения ребра $BB'$ с плоскостью $\Sigma$, из точки $B_2'$ проводим вырожденную проекцию плоскости $\Gamma(\Gamma_2)$ , в которой вращается точка $B'$, перпендикулярную $AA'$, на которой из точки $A_2'$ делаем засечку дугой окружности радиуса $A_2'B' = A_1B_1$. Через точку $B'$ проводим прямую $B'B$ параллельную $A'A$. Принимаем совмещенное положение ребра $B'B$ за новую ось и вращаем вокруг нее грань $B'BCC'$ до совмещения с плоскостью $\Sigma$. Для этого из точки $C_2'$ проводим вырожденную проекцию плоскости $\Delta(\Delta_2)$ перпендикулярную ребру $BB'$, а из точки $B'$ – дугу окружности радиусом равным $B_1C_1$. Пересечение дуги с $\Delta_2$ определит положение точки $C'$. Аналогично определяем положение ребра $A'A$. Соединив соответствующие точки прямыми линиями, получим развертку боковой поверхности призмы. Достроив основание призмы, получим полную развертку.

### 11.7 Построение приближенных разверток неразвертывающихся поверхностей

Общий прием построения приближенных разверток таких поверхностей состоит в следующем.

Данная поверхность разбивается на равные или примерно равные части.

Каждая такая часть аппроксимируется (заменяется) развертывающейся поверхностью.

Строится развертка этих частей, совокупность которых и представляет собой приближенную развертку неразвертывающейся поверхности. Чем на большее число частей разбивается кривая поверхность, тем ближе аппроксимирующие поверхности будут по форме воспроизводить заданную.

Приближенные развертки поверхностей вращения с криволинейными образующими обычно строят способом вспомогательных цилиндров или конусов, которые описываются или вписываются в данную поверхность.

Пример 6. Построить развертку сферической поверхности (рисунок 11.7).

Решение. При построении развертки сферы, как всякой поверхности вращения с криволинейной образующей, разбивают поверхность с помощью меридиальных сечений на узкие доли. Каждую такую долю («лепесток») заменяют описанной цилиндрической поверхностью, ось которой проходит через центр сферы (радиус цилиндрической поверхности равен радиусу сферической). При этом цилиндрическая поверхность касается данной сферической поверхности в точках среднего меридиана доли. Этот средний меридиан является нормальным сечением цилиндрической поверхности. Границами цилиндрической поверхности доли будут меридианы, ограничивающие ее.

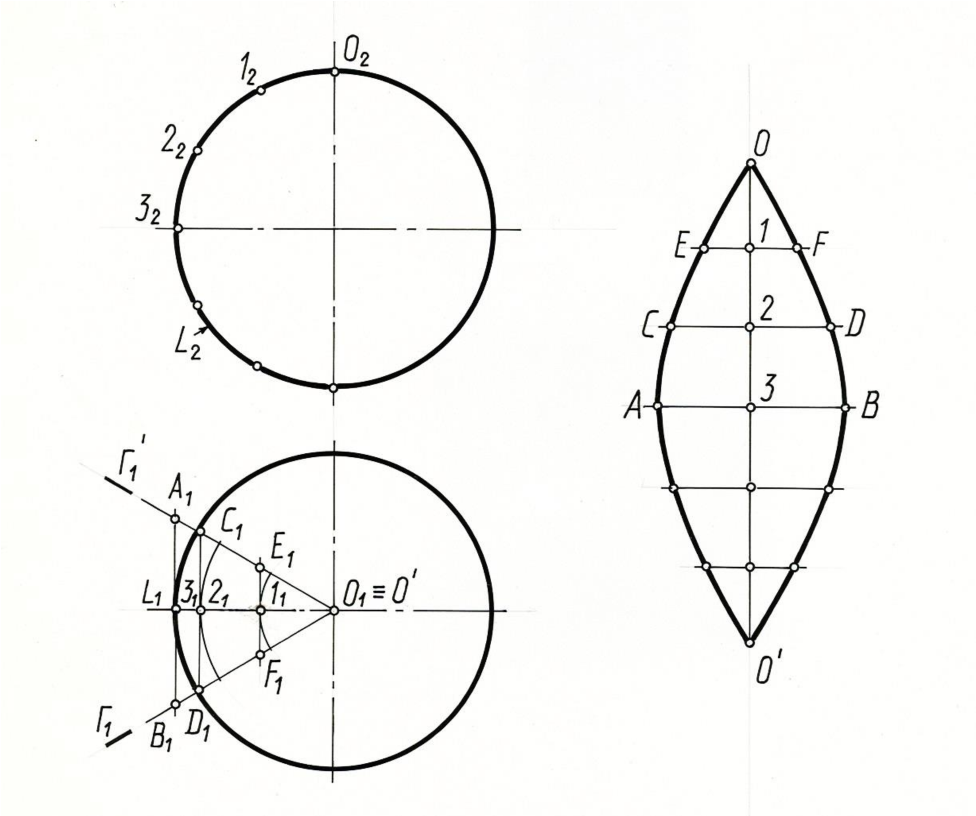



Рисунок 11.7

В нашем примере сферическая поверхность разделена на 6 равных частей. Для получения более точной развертки сферической поверхности, ее разбивают на 12 и более частей. Рассмотрим построение приближенной развертки одного «лепестка», у которого средним меридианом является главный меридиан $l\,(l_1, l_2)$. Заменим этот «лепесток» отсеком цилиндрической поверхности, описанной около него. Эта поверхность – фронтально-проецирующая и поэтому образующие проецируется на плоскость проекций $\Pi_1$ в натуральную величину. Нормальным сечением цилиндрической поверхности этой части является половина главного меридиана $l\,(l_1, l_2)$, а границами поверхности являются плоскости меридианов $\Gamma\Gamma'$ $(\Gamma_1 {\Gamma_1}')$, ограничивающие ее.

Для построения развертки этой цилиндрической поверхности заменяем ее вписанной призматической поверхностью, для чего делим половину главного меридиана $(l)$ на 6 равных частей и через точки деления $1(1_1)$, $2(2_1)$, $3(3_1)$ проводим образующие $AB\,(A_1B_1)$, $CD\,(C_1D_1)$, $EF\,(E_1F_1)$ цилиндрической поверхности.

Развертку строим способом нормального сечения. А так как нормальным сечением аппроксимирующей поверхности является полумеридиан $l$, то на развертке спрямляем его в отрезок $OO'$ $(01 = 0_2 1_2)$и через точки деления 1, 2, 3, проводим перпендикулярно к нему образующие, на которых отмечаем точки $A, B, C, D, E, F, \ldots$, используя соответствующие отрезки: $AB = A_1B_1$, $CD = C_1D_1$ и т.д. Соединив концы этих образующих плавными кривыми, получим приближенную развертку 1/6 части сферы. Полная развертка будет состоять из шести таких долей.

# Тема 12 Аксонометрические проекции

Аксонометрическая проекция, или аксонометрия есть параллельная проекция фигуры-оригинала и осей координат пространства, к которым эта фигура отнесена на одну плоскость проекций, называемой аксонометрической плоскостью проекций ($\Pi'$).

Аксонометрическую проекцию получают по методу параллельного проецирования, поэтому все свойства параллельного проецирования остаются справедливыми и для аксонометрической проекции. Например, сохраняется параллельность прямых и пропорциональность деления отрезков.

Достоинством такой проекции является наглядность. Недостатком – проецирование на одну плоскость проекций.

Сущность метода рассмотрим на примере получения аксонометрии точки $A$. Выберем в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$ и точку $A$, положение которой относительно осей координат определено: $X_A = OA_X$, $Y_A = A_XA_1$, $Z_A = A_1A$ (рисунок 12.1). Полученная ломаная $AA_1A_XO$ – координатная ломаная точки $A$. По каждому из направлений натуральной системы координат ($xyz$) отложим отрезки единичной длины $e_X$, $e_Y$, $e_Z$.

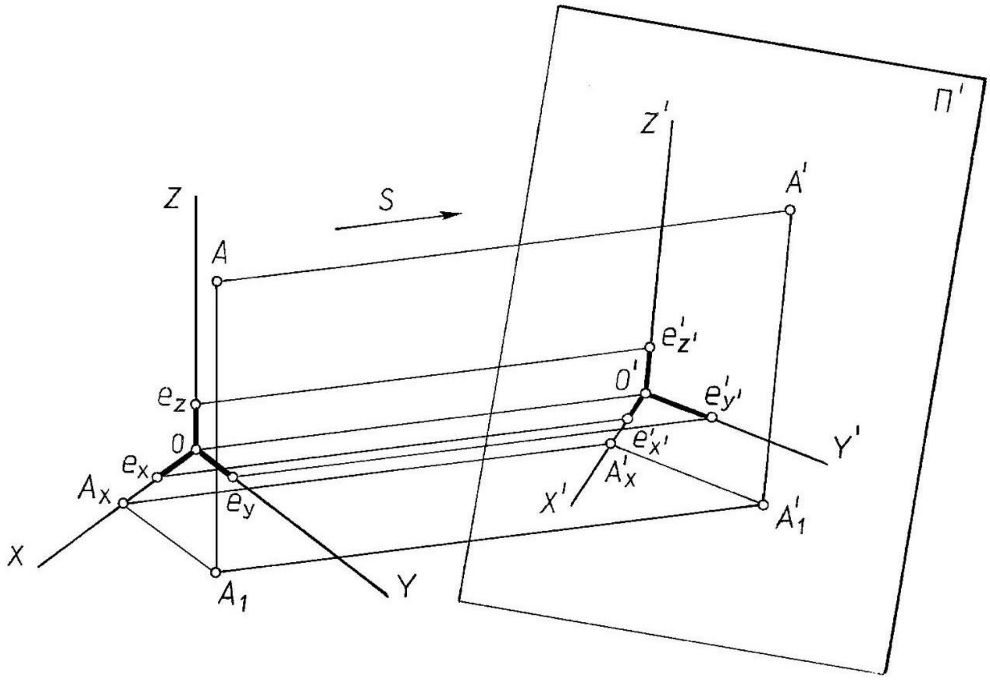



Рисунок 12.1

Спроецируем в направлении $S$ на плоскость $\Pi'$ выбранную декартовую систему координат $Oxyz$ вместе с точкой $A$ и ее горизонтальной (прямоугольной) проекцией $A_1$ на координатной плоскости $xOy$, а также единичные отрезки $e_X$, $e_Y$, $e_Z$.

Оси $O'x'y'z'$, полученные проецированием координатных осей пространства на аксонометрическую плоскость проекций $\Pi'$, называются аксонометрическими осями; проекция $A'$ – аксонометрической проекцией точки $A$, а $A'_1$ – вторичной проекцией точки $A$. $A'A'_1A'_XO'$ – аксонометрическая проекция координатной ломаной точки $A$.

Для получения обратимого чертежа в том случае, если проецирование ведется на одну плоскость проекций необходимо использовать вторичную проекцию. Вторичной проекцией называется аксонометрическое изображение не самой точки, а одной из ее ортогональных проекций (чаще всего горизонтальной). Этот термин хорошо подчеркивает тот факт, что проекция $A'_1$ получается в результате двух последовательных проецирований. Заметим, что для получения наглядного аксонометрического изображения, направление проецирования $S$ не должно быть параллельным ни одной из координатных осей $(x, y, z)$ или координатной плоскости, так как при этом аксонометрическая проекция такой плоскости изобразится прямой линией, и чертеж утратит свою наглядность.

Если плоскость аксонометрических проекций $\Pi'$ не параллельна ни одной из координатных осей, то, очевидно, что любые отрезки, расположенные в пространстве на осях $e_X, e_Y, e_Z$ (или параллельные осям), проецируются на плоскость $\Pi'$ с некоторым искажением $e_{X'}, e_{Y'}, e_Z{}'$. Отношение длины аксонометрической проекции отрезка, лежащего на координатной оси или параллельного ей, к истинной длине этого отрезка называется коэффициентом (показателем) искажения по соответствующей аксонометрической оси:

$$\frac{e_{X'}}{e_X} = m,$$
$$\frac{e_{Y'}}{e_Y} = n,$$
$$\frac{e_{Z'}}{e_Z} = k.$$

Числовое выражение коэффициентов искажения показывает, во сколько раз увеличиваются или уменьшаются отрезки по осям на аксонометрических изображениях. В зависимости от соотношения коэффициентов искажения аксонометрические проекции делятся на:

– изометрические, если коэффициенты искажения по всем трем осям равны $m = n = k;$

– диметрические, если коэффициенты искажения одинаковы лишь по двум осям, например, $m = k \neq n;$

– триметрические, если все три показателя искажения разные $m \neq n \neq k.$

В зависимости от угла $\varphi$ между направлением проецирования $S$ и аксонометрической плоскостью проекций $\Pi'$ различают:

– прямоугольную аксонометрическую проекцию, если $\varphi = S \wedge \Pi' = 90°$;

– косоугольную аксонометрическую проекцию, если $\varphi = S \wedge \Pi' \neq 90°$

Между коэффициентами искажения и углом $\varphi$, образованным направлением проецирования $S$ с плоскостью $\Pi'$, существует следующая зависимость:

$$m^2 + n^2 + k^2 = 2 + ctg^2\varphi. \qquad (12.1)$$

Так в общем случае можно получить множество аксонометрических проекций, отличающихся друг от друга направлением аксонометрических осей и коэффициентами искажения по ним. Это положение сформулировано в 1851 году и доказано теоремой К. Польке, которая гласит: три отрезка произвольной длины, лежащие в одной плоскости и, выходящие из одной точки под произвольными углами друг к другу, представляют параллельную проекцию трёх равных отрезков, отложенных на прямоугольных осях координат от начала.

Позже Г. Шварц обобщил теорему К. Польке, которая имеет существенное значение, как для теории аксонометрии, так и для многих её приложений. На основании теоремы Польке системы аксонометрических осей, а также отношение коэффициентов искажения по ним, могут быть заданы совершенно произвольно. При произвольном выборе характеристических данных, определяющих аксонометрическую систему, получается косоугольная триметрическая проекция общего вида.

Однако из многих систем аксонометрических проекций на практике чаще всего пользуются теми, которые рекомендует ГОСТ 2.317-69. «Аксонометрические проекции», а именно: прямоугольной изометрией и диметрией, косоугольной фронтальной и горизонтальной изометрией и фронтальной косоугольной диметрией.

## 12.1 Стандартные аксонометрические проекции

Прямоугольная изометрия

Прямоугольная изометрия – наиболее простой вид прямоугольной аксонометрии, при котором все координатные оси наклонены к аксонометрической плоскости проекций под одинаковыми углами, и, таким образом, имеют одинаковые коэффициенты искажения. Числовое значение коэффициентов искажения легко вычислить. Поскольку $m = n = k$, и $\varphi = 90°$, то на основании формулы (12.1), можно записать, что $3m^2 = 2$, и тогда $m = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}82$. В этом случае 0,82 – фактические коэффициенты искажения.

Следовательно, при построении изометрической проекции размеры отрезков, откладываемые по аксонометрическим осям или параллельно им, умножают на 0,82. Такой перерасчёт неудобен, поэтому ГОСТ 2.317-69 рекомендует строить прямоугольную изометрию без сокращений размеров по аксонометрическим осям, т. е. пользоваться так называемыми приведенными коэффициентами (показателями) искажения, равными 1.

При пользовании приведенных коэффициентов искажения аксонометрическое изображение пропорционально увеличивается в 1,22 раза (1:0,82 = 1,22), каждый же отрезок, откладываемый по осям $x', y', z'$ или параллельно им, сохраняет свою величину, что удобно при построении. На рисунке 12.2 показано расположение осей изометрической проекции.

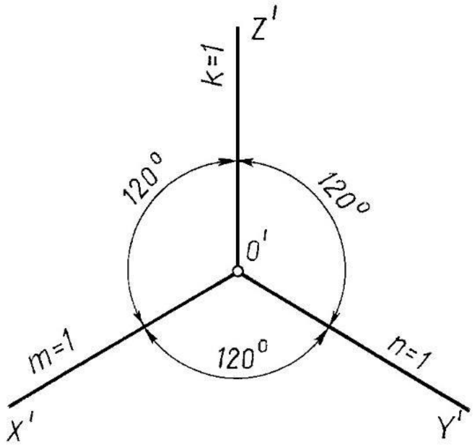



Рисунок 12.2

Прямоугольная диметрия

В прямоугольной диметрии коэффициенты искажения $m = k$, а третий $n$ – не равен им. Для практических целей применяется диметрия, у которой $m = k$ и $n = 0{,}5m$. При таком соотношении коэффициентов искажений аксонометрические оси расположены под углами, указанными на рисунке 12.3. Подставляя в формулу прямоугольной аксонометрии значения $m = k$ и $n = 0{,}5m$, получим $m = k = 0{,}94$; $n = 0{,}47$. Однако для практических целей применяются приведенные коэффициенты искажения ($m = k = 1$ и $m = 0{,}5$). Изображение, построенное с приведенными коэффициентами искажения, будет увеличено в *1,06* раза (1:0,94=0,5:0,47=1,06).

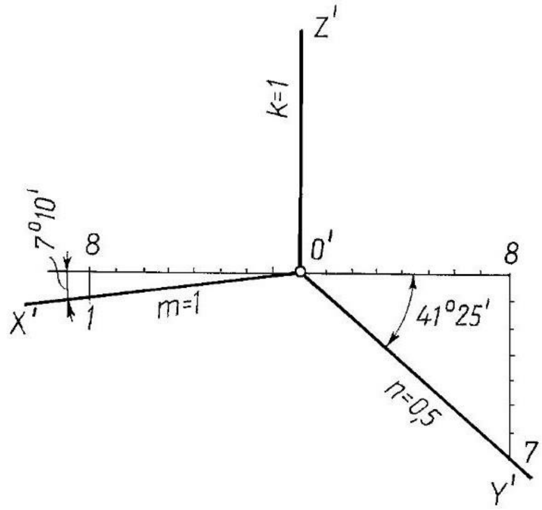



Рисунок 12.3

Косоугольные аксонометрические проекции

Косоугольные аксонометрические проекции характеризуются двумя основными признаками:

– плоскость аксонометрических проекций располагается параллельно одной из сторон объекта (параллельно одной из координатных плоскостей);

– все плоские фигуры, расположенные в этой координатной плоскости или параллельно ей, изображаются без искажения;

– проецирование косоугольное (проецирующие лучи составляют с аксонометрической плоскостью проекций острый угол), что даёт возможность спроецировать и две другие стороны объекта, но уже с искажением.

Аксонометрические искажения при косоугольном проецировании оказываются менее наглядными, чем при прямоугольном проецировании. Однако они обладают и важным преимуществом – элементы объекта, параллельные плоскости аксонометрических проекций, проецируются без искажения.

Фронтальная изометрия и диметрия (рисунок 12.4) применяются, в основном, тогда, когда изображаемый объект имеет большое количество окружностей или других кривых линий, расположенных во фронтальной плоскости. Коэффициенты искажения по аксонометрическим осям $x'$ и $z'$ равны 1, а угол между ними составляет $90^\circ$. Коэффициент искажения по оси $y'$ равен 1 для изометрии и 0,5 для диметрии.

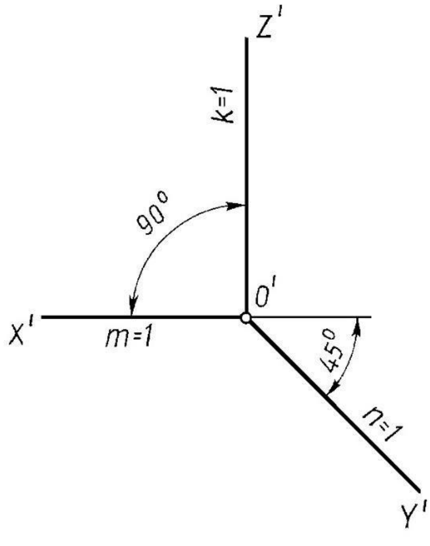



Рисунок 12.4

Горизонтальная изометрия (рисунок 12.5) целесообразна для применения в тех случаях, когда изображаемый объект имеет большое количество окружностей или других кривых линий, расположенных в горизонтальных плоскостях. При построении горизонтальной изометрии плоскость аксонометрических проекций располагают горизонтально, параллельно координатной плоскости $xOy$, и все коэффициенты искажения принимают равными единице.

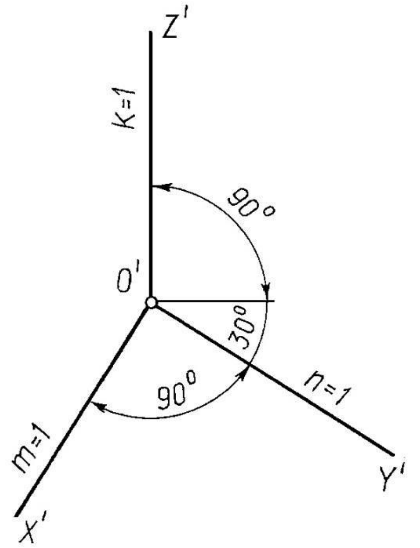



Рисунок 12.5

**12.2 Построение аксонометрических изображений по ортогональным проекциям**

Переход от эпюра Монжа (ортогональных проекций) к аксонометрическому изображению рекомендуется выполнять в такой последовательности:

– на ортогональном чертеже размечают оси прямоугольной системы координат, к которой относят данный объект. Оси ориентируют так, чтобы они допускали удобное измерение координат точек объекта, совмещая их с осями симметрии объекта или с основными его гранями;

– строят оси выбранной аксонометрической проекции;

– строят вторичную проекцию (чаще всего аксонометрию горизонтальной проекции объекта) по размерам, взятым с ортогональных проекций объекта (с учетом приведенных коэффициентов искажения по осям для выбранной аксонометрии);

– достраивают аксонометрию объекта, построив высоты (аппликаты) характерных точек вторичной проекции;

– оформляют чертеж.

Рассмотрим примеры построения аксонометрических изображений некоторых фигур.

<u>Аксонометрия точки</u>

<u>Пример.</u> Построить прямоугольную изометрию и прямоугольную диметрию точки $A$ (рисунок 12.6, а).

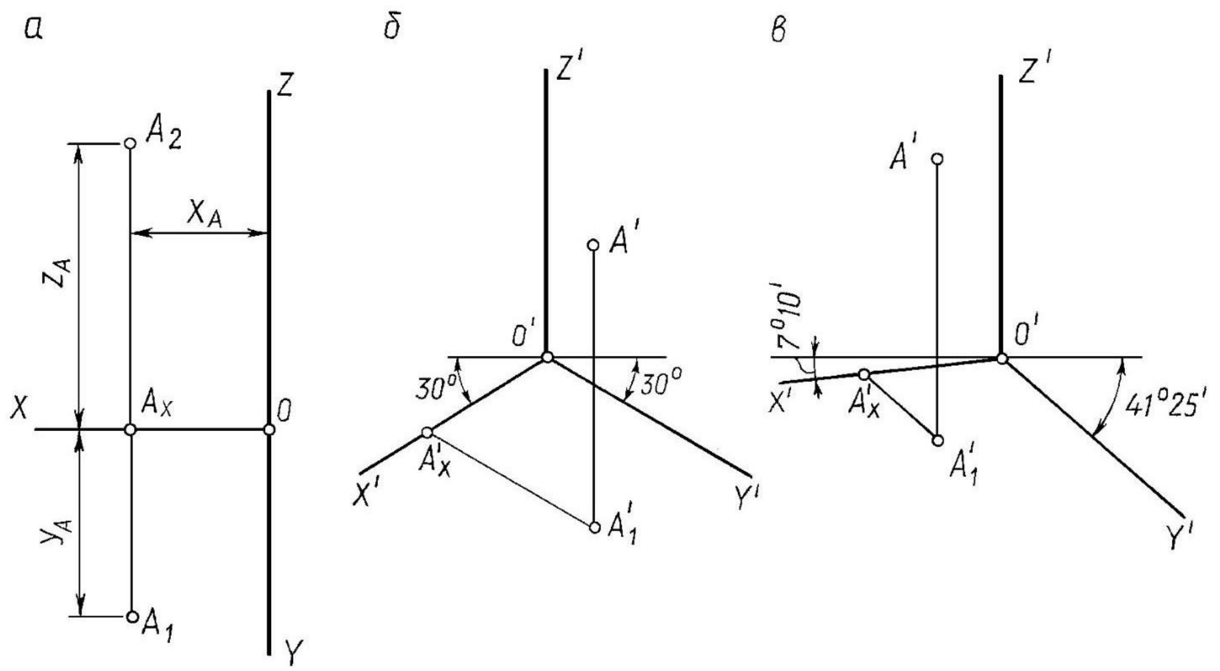



Рисунок 12.6

Решение.

Задают оси аксонометрических проекций. На рисунке 12.6, б – оси прямоугольной изометрии, на рисунке, в – оси прямоугольной диметрии.

От точки $\mathrm{O}'$ на оси $X'$ откладывают координату $\mathrm{X}_A$, взятую с ортогонального чертежа, – получают точку $A_x{}'$, $O'A'_x = OA_x = X_A$.

Через $A_1{}'$ проводят прямую, параллельную оси $Y'$ и откладывают на ней координату $Y_A$, взятую также с ортогонального чертежа. При этом должен быть обязательно учтен коэффициент искажения по оси $Y$.

Так, на рисунке 12.6, б в прямоугольной изометрии по направлению $Y'$ отложен отрезок, равный $Y_A$, а на рисунке 12.6, в в прямоугольной диметрии отложен отрезок $0{,}5Y_A$ (приведенный коэффициент искажения в прямоугольной диметрии по оси у равен 0,5).

$A_1{}'$ – вторичная проекции точки $A$.

Через $A_1{}'$ проведена прямая, параллельная оси $Z$, и на ней отложен отрезок, равный отрезку $Z_A$, $A_1{}'A' = A_xA_2 = Z_A$.

Итак, любую аксометрическую проекцию точки можно получить, построив в аксонометрии координатную ломаную линию, определяющую положение этой точки в пространстве.

### 12.3 Аксонометрия плоской фигуры

Пример. Построить прямоугольную изометрическую проекцию шестиугольника по его ортогональному чертежу (рисунок 12.7, а)

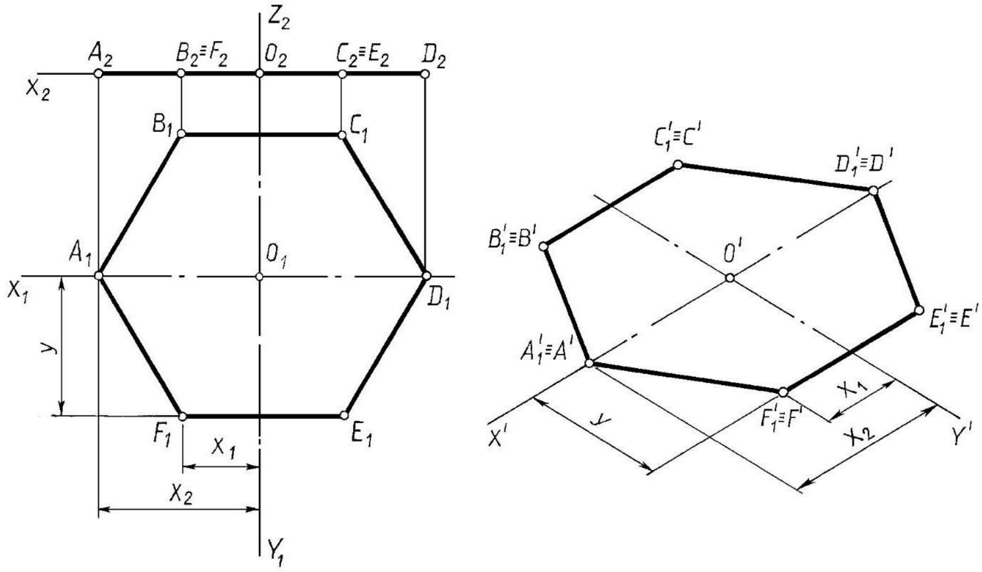



Рисунок 12.7

<u>Решение.</u>

За оси координат $X$ и $Y$ принимаем оси симметрии шестиугольника.

Строим оси прямоугольной изометрии.

Плоский шестиугольник расположен в плоскости $XOY$, поэтому аксонометрия его совпадает со вторичной проекцией. Аксонометрию многоугольника строим по координатам вершин, пользуясь приведенными коэффициентами искажения, равными 1. Выполненные построения ясны из чертежа.

## 12.4 Аксонометрия призматической поверхности

<u>Пример</u>. Построить прямоугольную *изометрию* и *диметрию* прямой четырехгранной призмы в основании которой квадрат (рисунок 12.8, а).

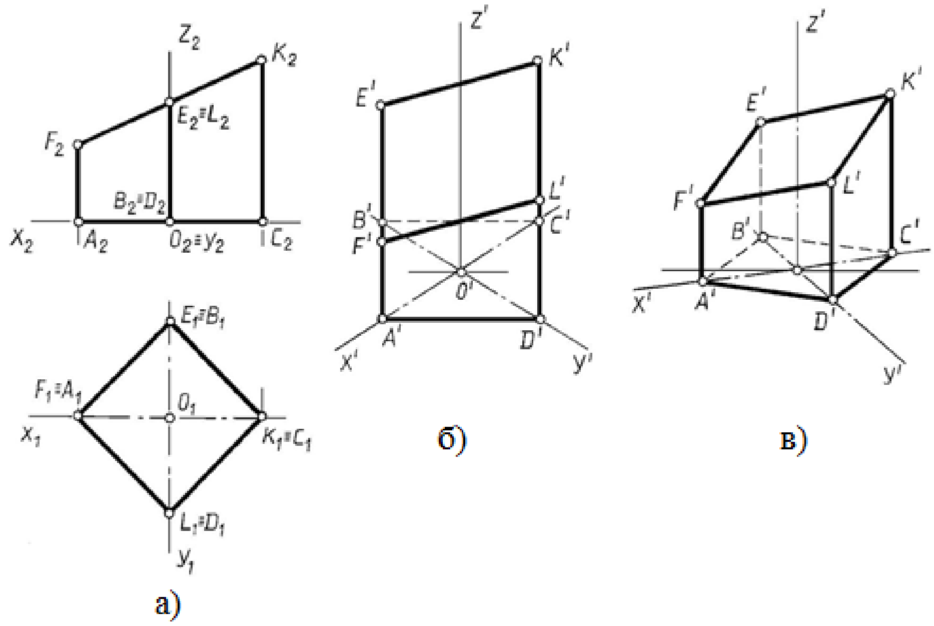



Рисунок 12.8

Решение.

Относим призму к натуральной системе координат, задав на ортогональном чертеже начало координат точку $O$ и оси $X, Y, Z$.

Задаем оси прямоугольной изометрии (рисунок 12.8, б) и диметрии (рисунок 12.8, в).

Строим вторичную проекцию квадрата, пользуясь приведенными коэффициентами искажения для прямоугольной изометрии (рисунок 12.8, б) и диметрии (рисунок 12.8, в).

Через вторичные проекции вершин проводим прямые, параллельные оси $Z'$, и откладываем на них отрезки, равные значению соответствующих вертикальных ребер призмы.

Соединив построенные аксонометрические проекции вершин, получаем аксонометрию заданной призмы.

Анализ рисунок 12.8, б и рисунок 12.8, в позволяет сделать вывод о целесообразности построения прямоугольной диметрии (рисунок 12.8, в) такой призмы. Прямоугольная изометрия в данном случае не является наглядным изображением.

## 12.5 Решение позиционных задач в аксонометрии

Алгоритмы решения позиционных задач на аксонометрическом чертеже не отличаются от алгоритмов решения этих задач в ортогональных проекциях на эпюре Монжа.

Пример. Построить следы прямой $l$ (рисунок 12.9).

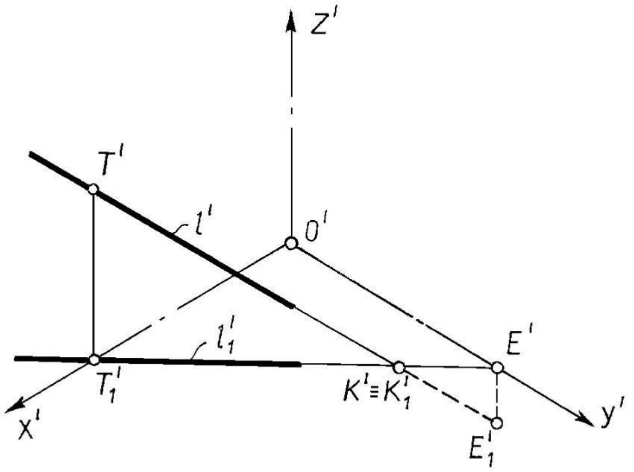



Рисунок 12.9

Решение. Алгоритм решения задачи такой же, как и на эпюре Монжа.

$T$ – фронтальный след прямой $l$, $K$ – горизонтальный след и $E$ – профильный след (рисунок 12.9).

Рассмотрим примеры построения пересечения геометрических фигур в аксонометрии.

Пример. Построить пересечение заданной прямой $l$ и плоскости $\Gamma(ABC)$ (рисунок 12.10).

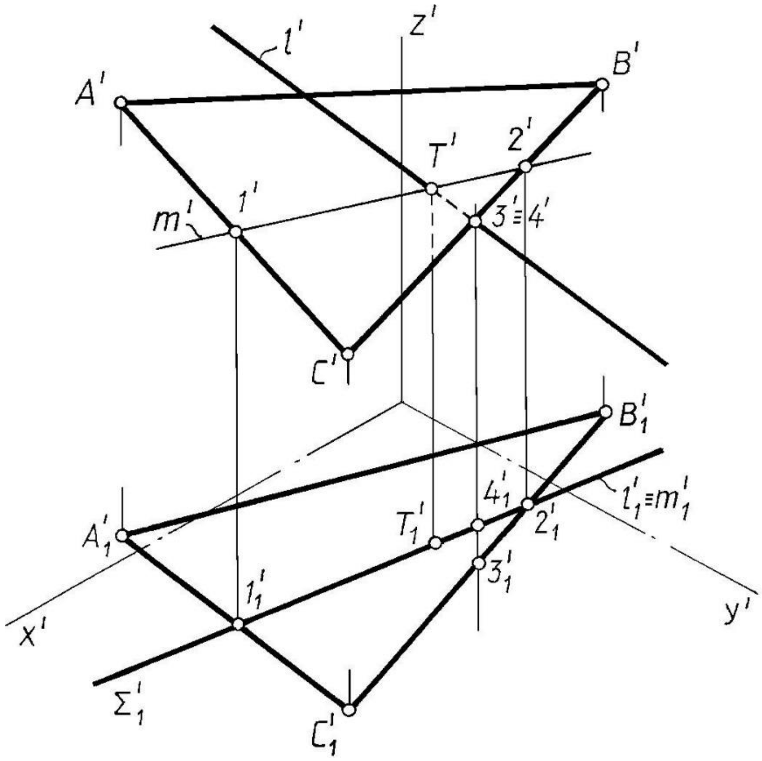



Рисунок 12.10

Решение.

Плоскость $\Gamma(ABC)$ и прямая $l$ заданы своими аксонометрическими и вторичными проекциями. Задачу решаем, используя вспомогательную плоскость-посредник.

Заключаем прямую $l$ во вспомогательную вертикальную плоскость $\Sigma$. При этом $\Sigma_1{}'$, совпадающая с $l_1{}'$, представляет собой вторичную проекцию вертикальной плоскости-посредника. Отметим, что вторичная проекция любой фигуры, расположенной в плоскости $\Sigma$, совпадает с вторичной проекцией $\Sigma_1{}'$.

Строим пересечение заданной плоскости $\Gamma(ABC)$ с плоскостью-посредником $\Sigma$;во-первых находим точки пересечения вторичных проекций плоскостей ($\Sigma_1{}' \cap A_1'B_1'C_1' = 1_1'2_1'$); затем проводим вертикальные линии связи из $1_1'$и $2_1'$ до пересечения с аксонометрическими проекциями соответствующих сторон заданной плоскости, а именно $1'$ и $2'$. Объединяем точки в прямую $1'2'$.

Определяем точку $T'$ пересечения прямой $l'$ и плоскости $A'B'C'$, а именно $l' \cap 1'2' = T'$. По принадлежности к $l_1{}'$, находим вторичную проекцию точки пересечения $T_1{}'$.

Для определения видимости прямой относительно заданной плоскости воспользуемся конкурирующими точками *3* и *4*, принадлежащими соответственно заданной прямой и стороне $BC$ плоскости. Проведя линии связи, определяем вторичные проекции выбранных точек. По положению вторичных проекций определяем видимость заданной прямой относительно плоскости.

Пример. Построить пересечение прямой $l$ и конической поверхности $\Delta$ (рисунок 12.11).

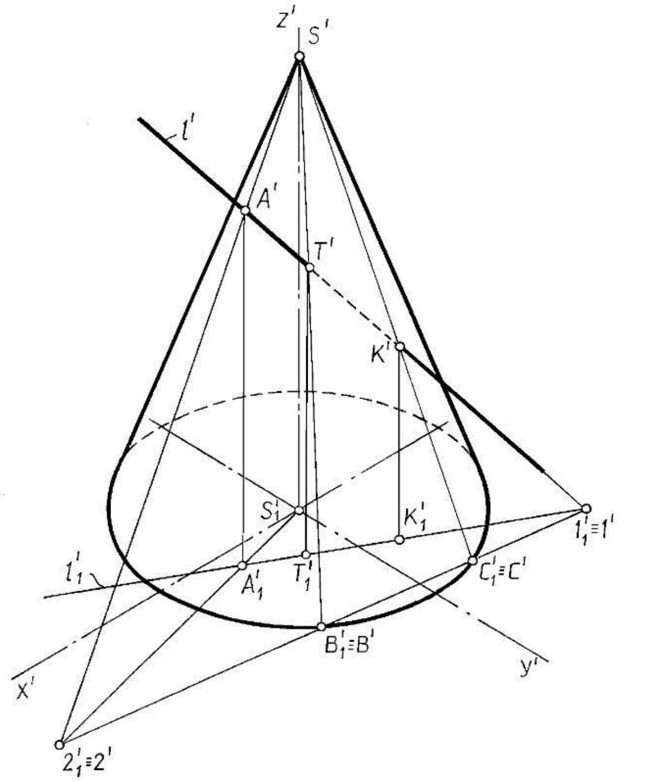



Рисунок 13.11

Пример. Построить пересечение призмы и плоскости Г (рисунок 12.12).

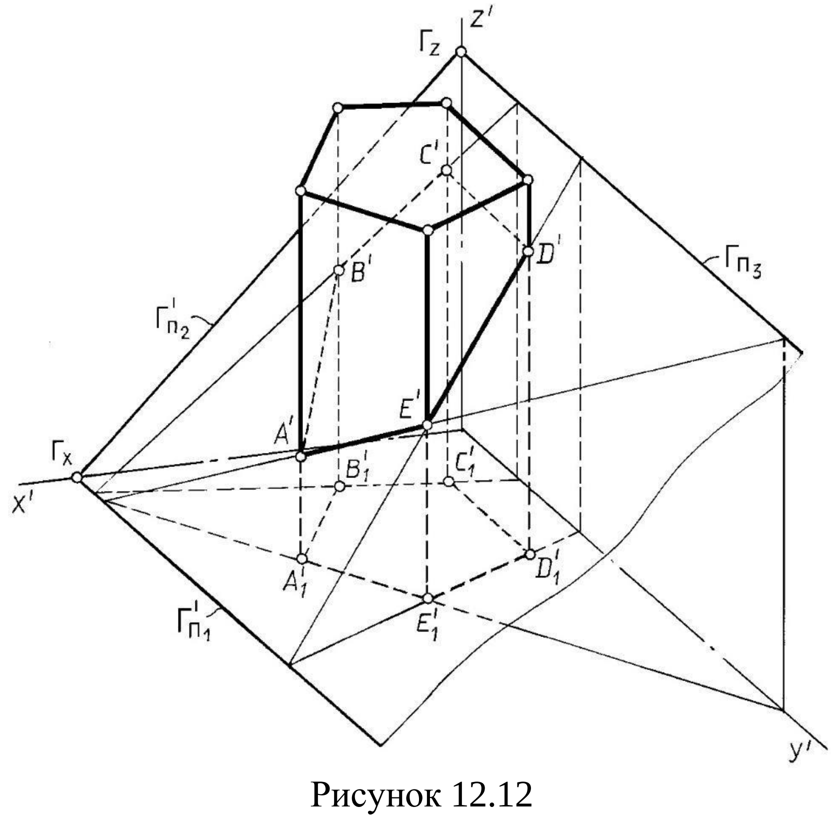



Рисунок 12.12

<u>Пример</u>. Построить пересечение цилиндра и плоскости $\Sigma$ (рисунок 12.13).

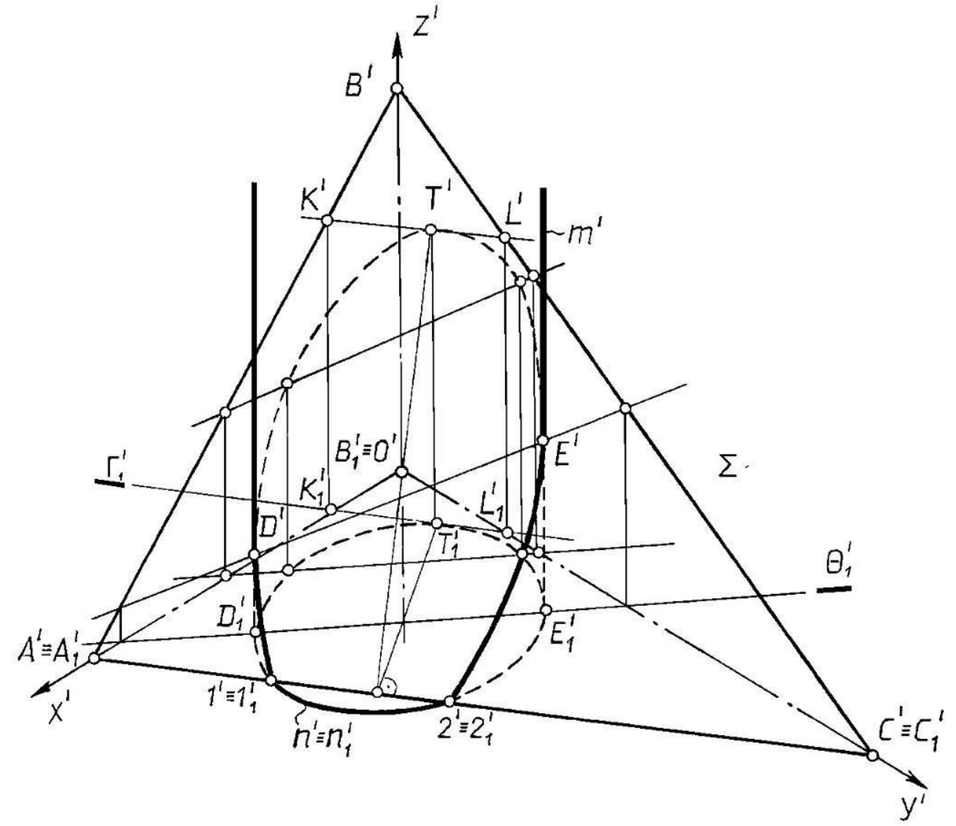



Рисунок 12.13

<u>Пример</u>. Построить пересечение призмы и цилиндра (рисунок 12.14).

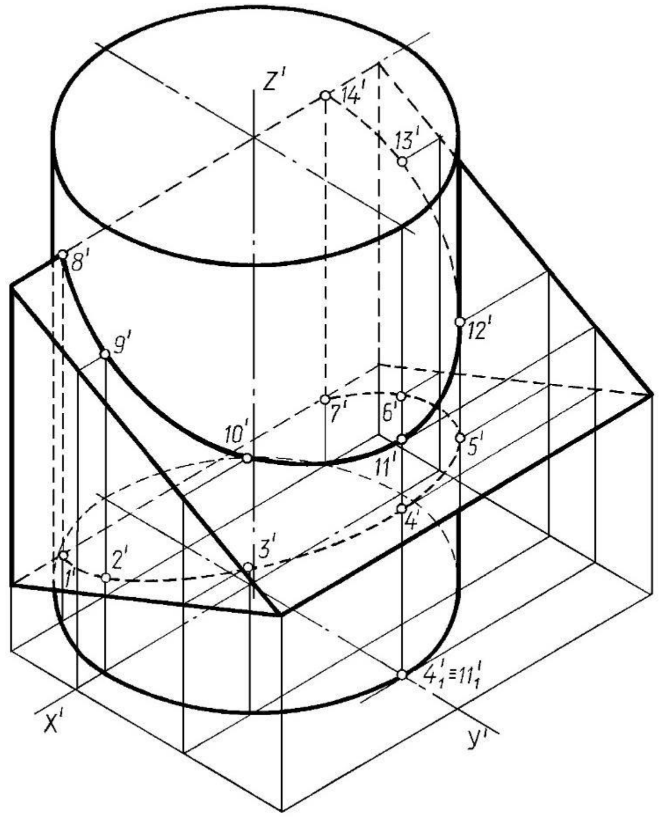


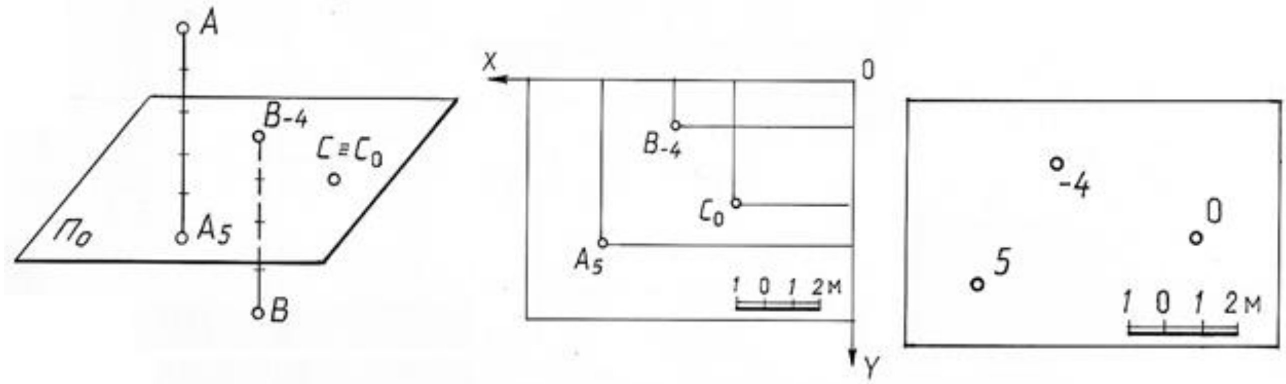

Рисунок 12.14

# Тема 13 Проекции с числовыми отметками

При проектировании инженерно-строительных сооружений приходится прибегать к изображению земной поверхности. Форма поверхности земли и земляных сооружений – сложна, а их вертикальные размеры по отношению к горизонтальным очень малы, например: дороги, мосты, аэродромы, строительные площадки, гидротехнические объекты и т.д. Для их изображения на строительных чертежах существует специальный метод – проекции с числовыми отметками.

## 13.1 Проекции точки

Сущность метода проекций с числовыми отметками состоит в том, что точки объекта проецируются ортогонально на одну горизонтальную плоскость. Так как одна параллельная (ортогональная) проекция не определяет положения объекта в пространстве, то для получения обратимого чертежа указывается не только горизонтальная проекция точки, но и её удаление от горизонтальной плоскости проекций. т.е. координата $Z$, которая называется числовой отметкой (или просто отметкой) этой точки (рисунок 13.1, а).




а) б) в)

Рисунок 13.1

Горизонтальная плоскость проекций $\Pi_0$, на которую проецируются геометрические объекты, называется основной или плоскостью нулевого уровня. Положение проекций точек на плане определяется координатами $x$ и $y$, а числовые отметки указывают величину координаты $z$ (рисунок 13.1, б).

Если точки расположены над плоскостью проекций, то их отметки считаются положительными, если ниже плоскости проекций – отрицательными. Отметки точек, принадлежащих плоскости проекций, называются нулевыми (рисунок 13.1, б).

В некоторых случаях, когда наименование точки не имеет значения, для упрощения не указывают буквенного обозначения точек, а оставляют только их числовые отметки (рисунок 13.1, в).

На чертежах, выполненных в проекциях с числовыми отметками, не указывают координатные оси, начало координат и индекс плоскости проекций. Условимся такие чертежи называть планами. На планах необходимо вычерчивать линейный масштаб, которым приходится пользоваться при решении различных метрических задач, размеры обычно указываются в метрах (рисунок 13.1, в).

На территории СНГ за плоскость нулевого уровня принят уровень Балтийского моря (нуль Крондштадского Фудштока). При проектировании инженерных сооружений за горизонтальную плоскость проекций может быть принята любая горизонтальная плоскость (плоскость промежуточного уровня) при условии, что известно расстояние до уровня Балтийского моря.

Если план выполнен на плоскости нулевого уровня (рисунок 13.2), то числовые отметки имеют абсолютные значения $(A_7, B_{-2})$. Если план выполнен на плоскости проекций промежуточного уровня, то числовые отметки точек имеют относительные значения $(A_2, B_{-7})$ (удаление от плоскости промежуточного уровня).

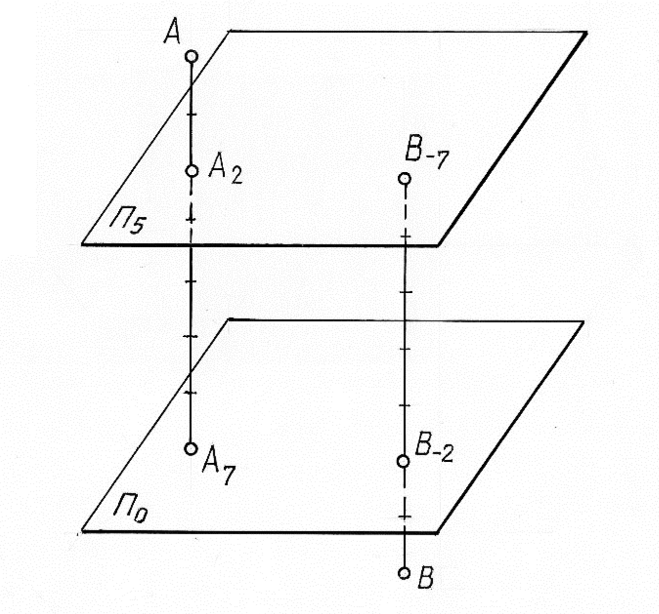



Рисунок 13.2

### 13.2 Проекции прямой

При геометрических операциях на прямых линиях используют понятия: заложение отрезка прямой, интервал и уклон прямой линии. На рисунке 13.3 изображён отрезок прямой $AB$ и его проекция $A_{1,5}B_{3,5}$ на плоскости $\Pi_0$. Величина горизонтальной проекции отрезка называется заложением отрезка и обозначается буквой $L$. Разность отметок концов отрезка прямой (расстояние по вертикали между концами отрезка) называется превышением отрезка и обозначается буквой $H$.

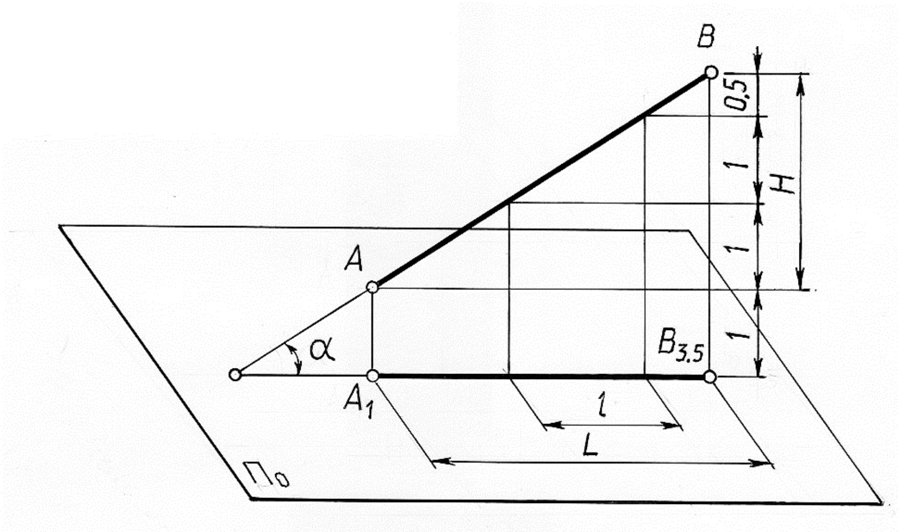



Рисунок 13.3

Уклоном прямой называется отношение превышения отрезка прямой к его заложению. Уклон обозначается буквой $i$ и равен тангенсу угла наклона прямой к плоскости $П_0$ (рисунок 13.3).

$$i = \frac{H}{L} = tg\alpha.$$

Заложение прямой, соответствующее единице превышения, называется интервалом прямой и обозначается буквой $l$ (рисунок 13.3). Нетрудно заметить, что интервал прямой есть величина, обратная её уклону.

$$i = \frac{1}{l}.$$

В проекциях с числовыми отметками прямая общего положения может быть задана:

– проекциями двух точек прямой и их отметками (рисунок 13.4, а);

– горизонтальной проекцией, отметкой одной из точек прямой и углом наклона прямой к плоскости проекций (рисунок 13.4, б);

– проекцией на основную плоскость, отметкой одной из её точек и уклоном прямой (рисунок 13.4, в).

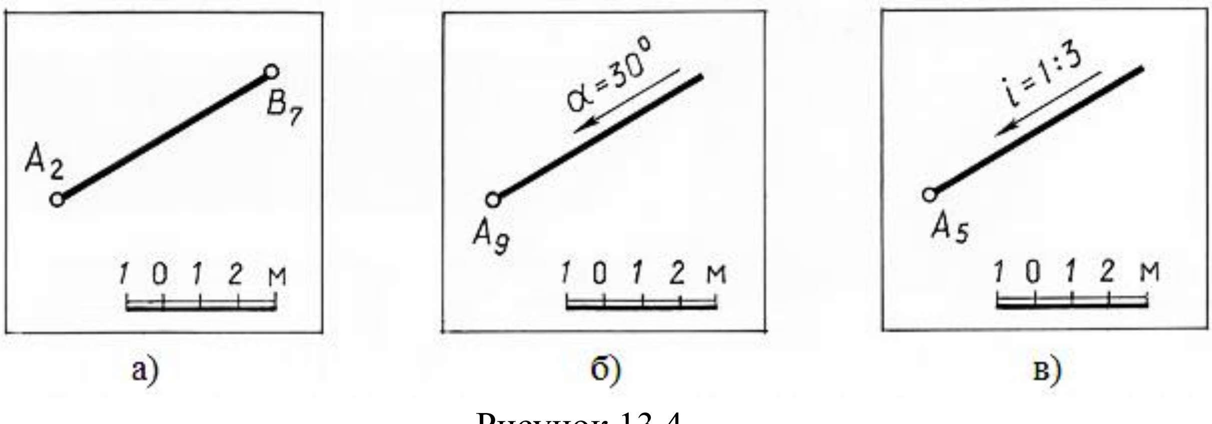



Рисунок 13.4

Обозначение угла наклона или уклона прямой должно быть дополнено стрелкой, указывающей направление спуска прямой. Горизонтальную прямую будем обозначать буквой $h$ с указанием числовой отметки, например $h_5$, или только отметкой $5$. Отрезок вертикальной прямой задается концевыми точками с указанием их отметок.

### 13.3 Градуирование прямой

Графические действия по определению интервала прямой называются градуированием прямой. Проградуировать прямую – это значит определить на её горизонтальной проекции точки, разность высотных отметок которых равна единице.

Существует несколько способов градуирования прямой. Все они представляют различные варианты решения задачи деления отрезка в данном отношении.

Рассмотрим наиболее распространённые способы решения этой задачи.

<u>1-й способ</u> (рисунок 13.5) – использование пропорционального деления отрезка.

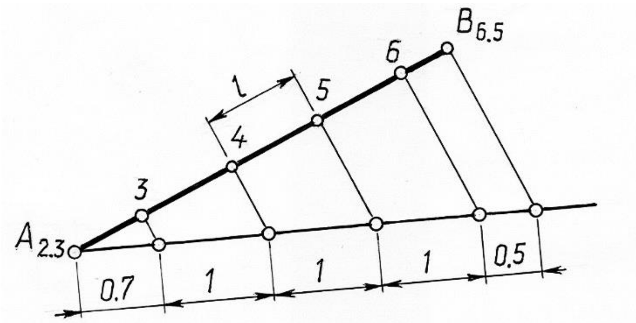



Рисунок 13.5

Через один из концов отрезка ($A_{2,3}$) проводится вспомогательная прямая любого направления, и на этой прямой в произвольном масштабе откладываются величины, соответствующие превышения между концевыми и искомыми точками отрезка прямой. Построенная последняя точка на вспомогательной прямой соединяется со вторым концом отрезка, и через точки деления проводятся прямые параллельно замыкающей прямой. Эти прямые определяют на заданной проекции отрезка искомые точки.

Отметим, что заложение между двумя точками, разность отметок которых равна единице есть интервал прямой. На рисунке 13.5 – величина интервала показана между точками с отметками 4 и 5.

<u>2-ой способ</u> (рисунок 13.6 – использование дополнительной горизонтально проецирующей (вертикальной) плоскости $\Pi'$, параллельной заданному отрезку (или проходящей через него) и совмещённой затем с плоскостью проекций $\Pi_0$ с поворотом $\Pi'/\Pi$ вокруг оси.

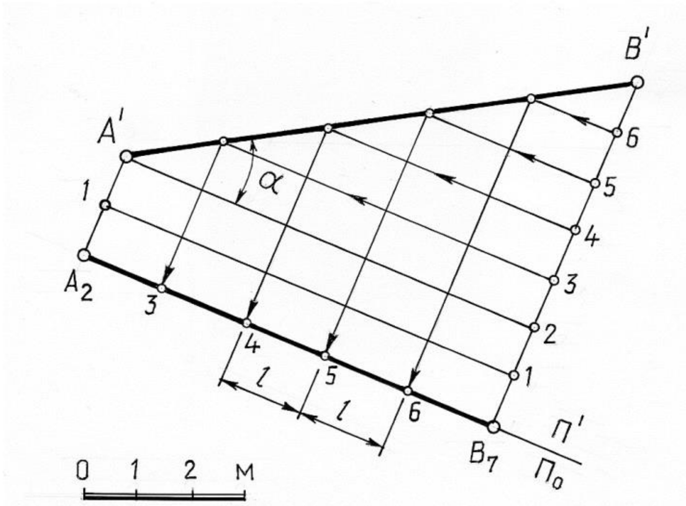



Рисунок 13.6

На рисунок 13.6 вспомогательная плоскость $\Pi'$ проведена через заданный отрезок $AB$ $(AB)$, поэтомуось $\Pi'/\Pi$ совпадаетс проекциейотрезка.

Восстановив перпендикуляры к проекции отрезка (линии связи) в точках, являющихся проекциями концов отрезка, и, отложив на них отрезки, равные высотам этих точек, получают $A'B'$ – натуральную величину отрезка $AB$ и угла $\alpha$ – угла наклона прямой к плоскости $\Pi_0$. Затем с помощью прямых, параллельных проекции отрезка, на $A'B'$ определены точки с целыми отметками. После чего построены проекции этих точек на заданной проекции отрезка.

<u>3-ий способ</u> – графическое определение интервала прямой с помощью графика уклона прямой, называемого масштабом уклонов.

Этот способ можно использовать. Если прямая задана проекцией, одной точкой с целой числовой отметкой и известен уклон прямой или угол наклона к основной плоскости.

На рисунке 13.7 показано градуирование прямой, которая задана горизонтальной проекцией, точкой $A_9$ и углом наклона к плоскости проекций.

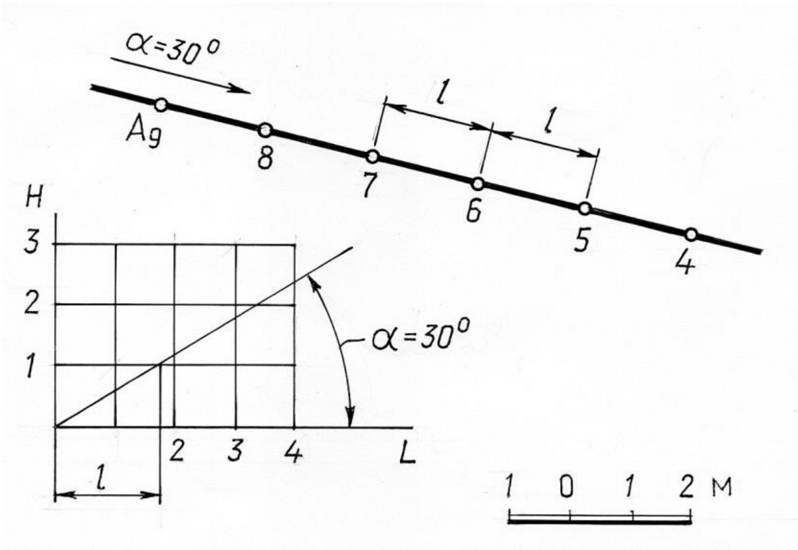



Рисунок 13.7

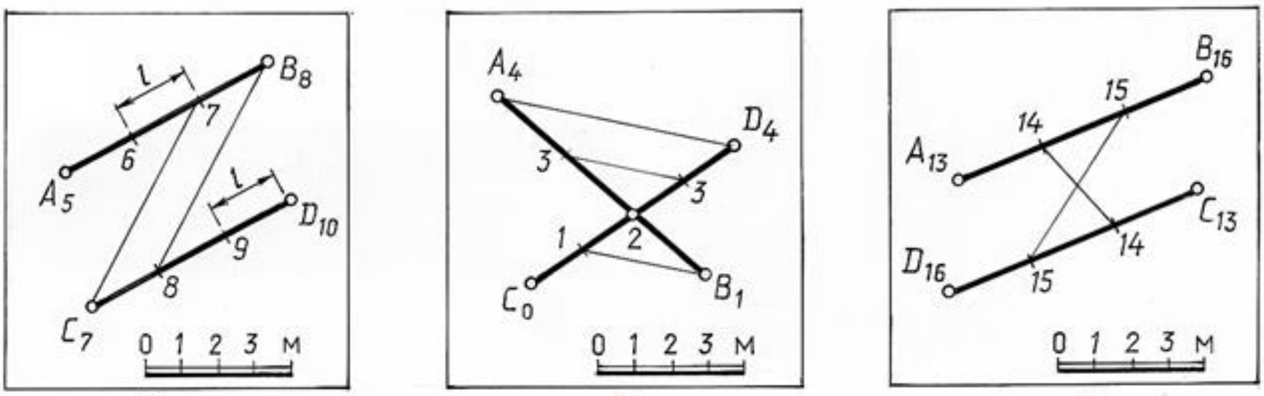
График уклона прямой выполняется в масштабе чертежа: по одной (горизонтальной) оси откладываются заложения, а по другой (вертикальной) превышения $H$. Из начала координат проводится прямая под заданным углом $\alpha$ к оси $L$. На этом графике величина заложения, соответствующая единице превышения и будет интервалом $l$ данной прямой.

Найденная величина интервала $l$ откладывается на заданной прямой от заданной точки $A$.

### 13.4 Взаимное положение двух прямых

Две прямые в пространстве могут пересекаться, скрещиваться и быть параллельными. Однако отсутствие второй проекции не дает возможности определить взаимное расположение прямых непосредственно по чертежу, не проведя предварительно вспомогательных построений. Так взаимное расположение прямых можно определить, если проградуировать прямые и сравнить интервалы, уклоны и отметки точек пересечения проекций прямых. Отметим признаки характерные для различных случаев расположения прямых.

Параллельные прямые – проекции прямых параллельны, уклоны (или интервалы) равны, и числовые отметки возрастают (или убывают) в одном направлении (рисунок 13.8, а). При этом прямые, соединяющие точки с одинаковыми отметками, параллельны. Они являются горизонталями плоскости, проходящей через заданные прямые.




а) б) в)

Рисунок 13.8

Пересекающиеся прямые – проекции прямых пересекаются в точке, которая, будучи отнесена к каждой из пересекающихся прямых, имеет одинаковую отметку (рисунок 13.8, б). Это легко проверить, если прямые проградуированы. Отметим, что прямые, соединяющие точки с одинаковыми отметками, параллельны. Они являются горизонталями плоскости, проходящей через заданные пересекающиеся прямые.

Скрещивающиеся прямые – прямые, у которых признаки пересечения и параллельности отсутствуют (рисунок 13.8, в). В этом случае прямые, соединяющие точки с одинаковыми отметками, не параллельны.

Пример. Через точку $A(A_3)$ провести горизонтальную прямую, пересекающую заданную прямую $CD(C_1D_7)$ (рисунок 13.9).

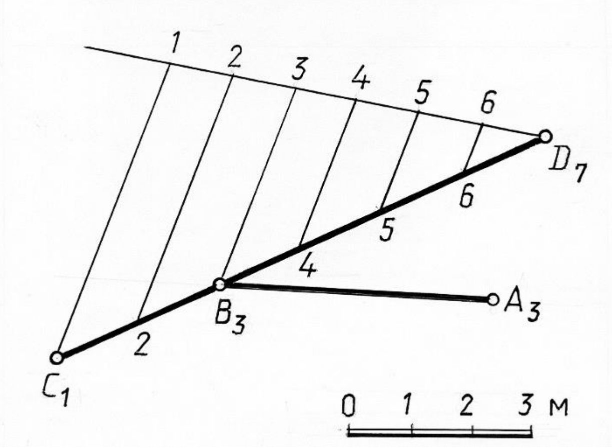



Рисунок 13.9

Решение. Искомая горизонтальная прямая определяется точкой $A(A_3)$ и точкой $B(B_3)$ на прямой $CD$, имеющей такую же отметку.

Проградуируем прямую $CD$, применяя пропорциональное деление отрезка. Построенную проекцию $B_3$ соединим с проекцией $A_3$. Прямая $AB(A_3B_3)$ – искомая.

### 13.5 Плоскость

Плоскость в проекциях с числовыми отметками может быть задана проекциями с числовыми отметками следующих геометрических элементов: трёх точек, не лежащих на одной прямой (рисунок 13.10, а); прямой и точки вне этой прямой (рисунок 13.10, б); параллельных прямых (рисунок 13.8, а); пересекающихся прямых (рисунок 13.8, б); плоской фигурой (рисунок 13.10, в).

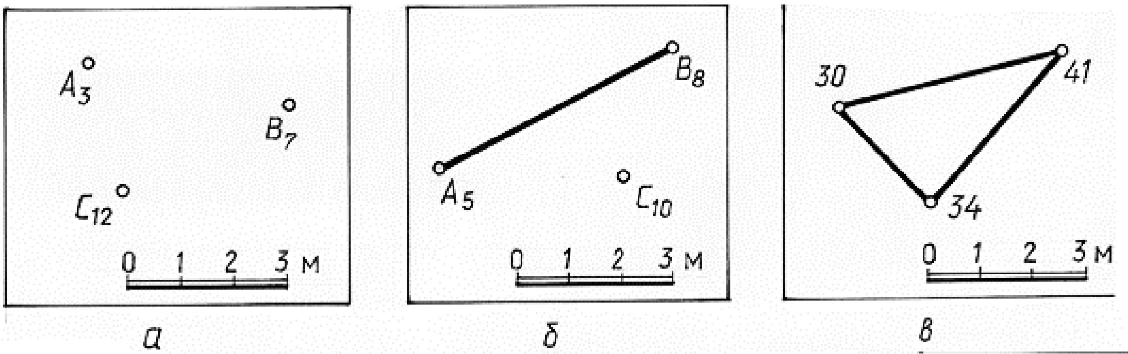



Рисунок 13.10

Но наиболее удобным и наглядным изображением плоскости в проекциях с числовыми отметками является задание с помощью масштаба уклона плоскости.

Масштаб уклона плоскости,или масштаб падения – проградуированная проекция линии наибольшего ската плоскости. На рисунке 13.11 дано наглядное изображение плоскости Г общего положения. Дадим определения основных элементов этой плоскости, которые используются в проекциях с числовыми отметками.

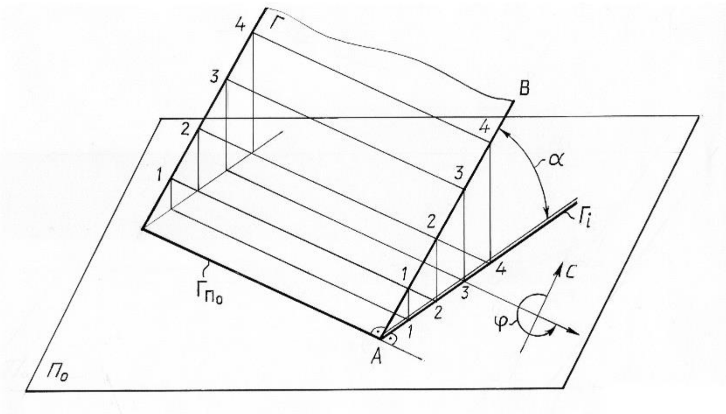


Рисунок 13.11

Отметка горизонтали – высота горизонтали над плоскостью проекций (на рисунке 13.11 горизонтали проведены соответственно с отметками 1, 2, 3 единицы масштаба). След плоскости $\Gamma_{\Pi 0}$ является горизонталью с нулевой отметкой.

Линия наибольшего ската плоскости иначе называется линией падения $AB$ (рисунок 13.11) – прямая, принадлежащая плоскости и перпендикулярная ее горизонталям ($AB \perp \Gamma_{\Pi 0}$). Она определяет угол наклона и угол падения плоскости. Так как линия наибольшего ската перпендикулярна горизонталям, то масштаб уклона плоскости (проекция линии наибольшего ската) тоже перпендикулярен проекциям горизонталей (теорема об ортогональном проецировании прямого угла).

Изображение плоскости Г масштабом уклона плоскости показано на рисунке 13.12. Масштаб уклона плоскости изображается двумя параллельными прямыми (толстой и тонкой) и обозначается той же буквой, что и плоскость, с нижним индексом $i - \Gamma_i$.

Перпендикулярно масштабу уклона плоскости проводятся проекции горизонталей. Вдоль масштаба уклона плоскости (со стороны тонкой линии) указываются отметки этих горизонталей. Цифры числовых отметок проставляются так, чтобы их верх был ориентирован в сторону подъёма плоскости.

Расстояния между соседними делениями масштаба уклона $l$, соответствующие единице превышения, являются интервалом линии наибольшего ската, а, следовательно, и интервалом плоскости.

Угол падения плоскости $\alpha^0$ – угол наклона плоскости к плоскости проекций (угол наклона линии наибольшего ската к плоскости проекций). На чертеже в проекциях с числовыми отметками угол падения $\alpha$ определяется из прямоугольного треугольника, у которого один катет равен интервалу линии наибольшего ската, а второй катет равен единице высоты в масштабе чертежа (рисунок 13.12).

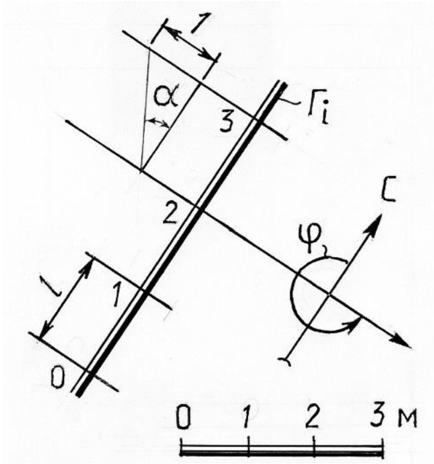



Рисунок 13.12

Уклон плоскости – тангенс угла падения плоскости. Уклон плоскости равен уклону линии наибольшего ската. Уклон плоскости есть, величина, обратная интервалу плоскости.

Для решения инженерных задач на земной поверхности необходимо ориентировать заданную плоскость относительно меридиана Земли. Для этого вводят понятия:

Направление простирания плоскости – правое направление горизонталей, если смотреть на плоскость в сторону возрастания отметок;

Угол простирания плоскости – угол $\varphi$ между меридианом земли и направлением простирания. Угол простирания измеряют от северного конца меридиана против часовой стрелки до направления простирания плоскости.

Плоскость задана горизонталью $5$, уклоном $i = 1{:}\,3$ и направлением спуска, которое обозначено штрихом в сторону спуска. Такой штрих называется берг-штрихом (рисунок 13.13, а).

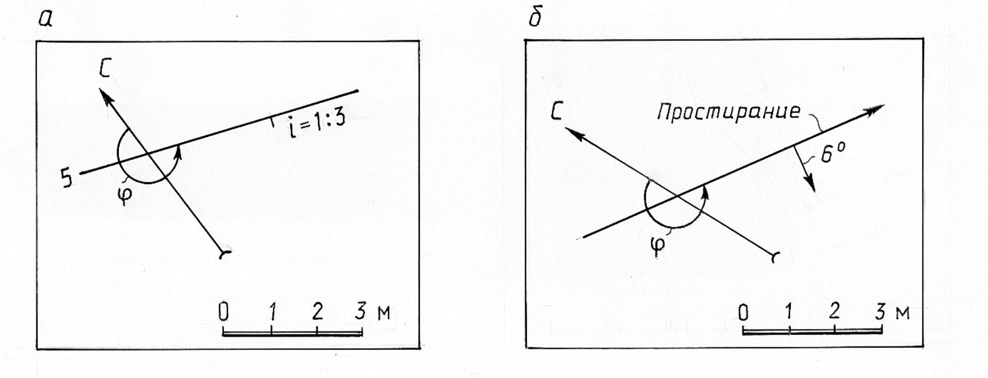



Рисунок 13.13

Плоскость может быть задана углом падения и направлением простирания (рисунок 13.13, б). Этот метод задания плоскости применяется в топографии, геологии и т.д.

Для решения большинства метрических и позиционных задач удобно, когда плоскость задана горизонталями.

Проведение на плоскости горизонталей называется градуированием плоскости.

Пример. Определить углы падения $\alpha$ и простирания $\varphi$ плоскости Г, заданной треугольником $ABC$ (рисунок 13.14).

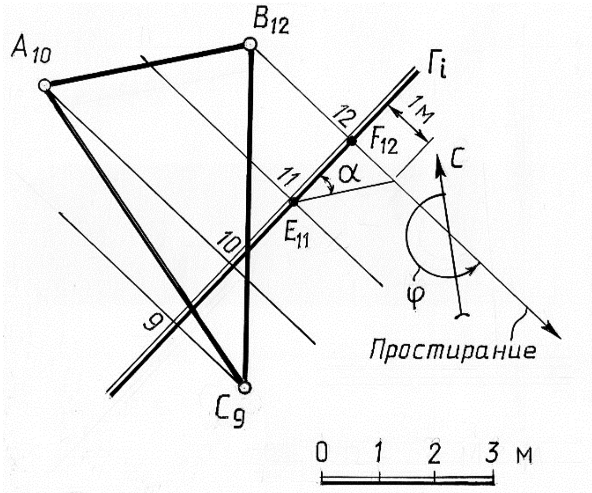



Рисунок 13.14

Решение.

Проградуировав отрезки $AB$ и $CD$, соединяем прямыми точки с одинаковыми отметками. Это будут горизонтали заданной плоскости. Масштаб падения плоскости проводится перпендикулярно горизонталям. С помощью прямоугольного треугольника, одним катетом которого является отрезок $E_{11}F_{12}$, а другим – отрезок, равный единице высоты, определяем угол наклона линии наибольшего ската плоскости Г к $\Pi_0$. Затем установив направление простирания, строим угол простирания $\varphi$.

Задачи на взаимную принадлежность точки и прямой линии плоскости в проекциях с числовыми отметками решаются обычными методами.

Прямая в плоскости строится по двум точкам, отметки которых определяются в местах пересечения проекции прямой с горизонталями плоскости (рисунок 13.15).

Точка в плоскости строится с помощью произвольной прямой плоскости. Для определения отметки точки вспомогательная прямая градуируется.

При проектировании инженерных сооружений в проекциях с числовыми отметками очень часто встречается необходимость решения двух типов задач:

– проведение в плоскости прямой с заданным уклоном $i$;

– проведение через прямую плоскости с заданным уклоном $i$.

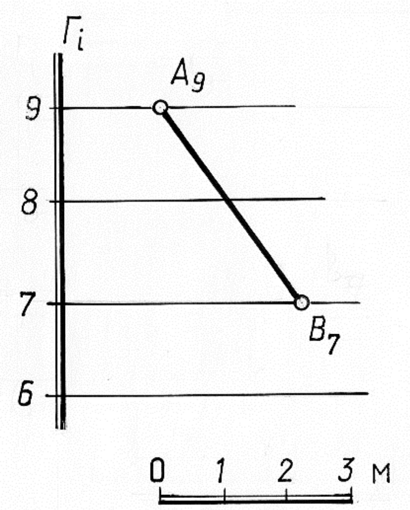



Рисунок 13.15

Пример. В плоскости заданной масштабом уклона $\Gamma_i$, через точку $A_8$ провести прямую с уклоном $i = 1:3$ (рисунок 13.16).

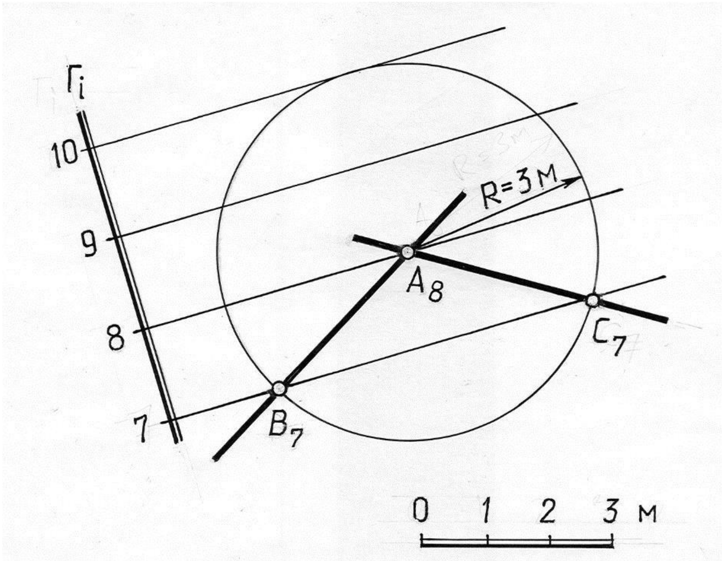



Рисунок 13.16

Решение.

Интервал прямой, которую требуется построить, равен $l = 1/i = 3$ единицам масштаба. Следовательно, точка искомой прямой, имеющая отметку *7*, должна лежать на горизонтали плоскости с отметкой *7* и удалена от точки $A_8$ на величину интервала прямой $l = 3$ единицам. Через точку $A_8$ проведем окружность радиусом $R = 3$ и найдем точки пересечения ее с 7-й горизонталью плоскости Г. Точка $A_8$ и полученные точки $B_7$ и $C_7$ определят две прямые, удовлетворяющие условию задачи.

Пример. Через наклонную прямую $AB(A_2B_5)$ провести плоскость $\Gamma(\Gamma_i)$, уклон которой равен $i = 1:2$ (рисунок 13.17).

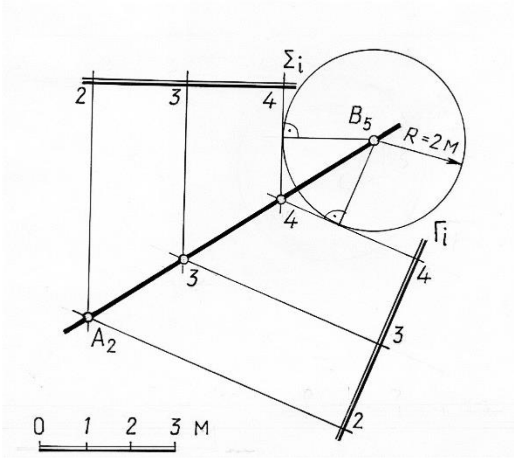



Рисунок 13.17

Решение.

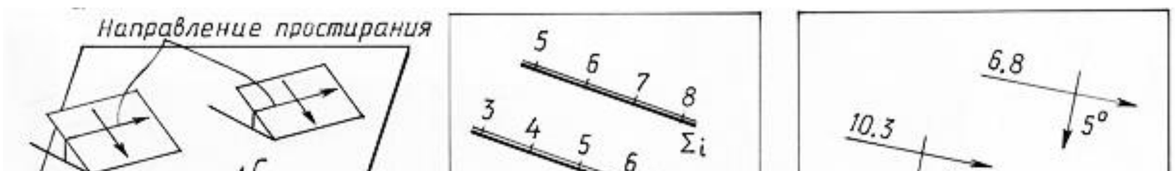
Искомая плоскость Г является касательной к поверхности прямого кругового конуса, образующие которого имеют уклон, равный уклону плоскости. Горизонтали конуса – окружности, радиусы которых отличаются на величину интервала плоскости. Построения на чертеже выполняются в следующем порядке:

– из произвольной точки прямой с целой отметкой проводится окружность радиусом, равным величине интервала плоскости $R = 2$ (горизонталь конуса, высота которого равна единице);

– из ближайшей точки деления прямой $C(C_4)$ проводится касательная к построенной окружности. Эта касательная является горизонталью с отметкой $4$ искомой плоскости.

Параллельные плоскости. Необходимым и достаточным условием параллельности двух плоскостей является параллельность их линий наибольшего ската.

На чертеже в проекциях с числовыми отметками (рисунок 13.18, а, б, в) масштабы уклонов параллельных плоскостей должны быть параллельны, иметь равные интервалы, а отметки должны возрастать в одном и том же направлении. Признаком параллельности плоскостей является также равенство их углов простирания и уклонов (углов падения).




а) б) в)

Рисунок 13.18

### 13.6 Проекции поверхностей

В проекциях с числовыми отметками форма любых поверхностей достаточно полно характеризуется их горизонталями. Горизонталями поверхности называются линии пересечения этой поверхности горизонтальными плоскостями. Таким образом, в проекциях с числовыми отметками поверхности задаются линейным каркасом. Линиями каркаса являются горизонтали поверхности с целыми и дробными числовыми отметками.

Многогранники в проекциях с числовыми отметками изображаются проекциями вершин с указанием их отметок или проекцией и отметкой одной из граней и уклонами других граней (рисунок 13.19, а, б).

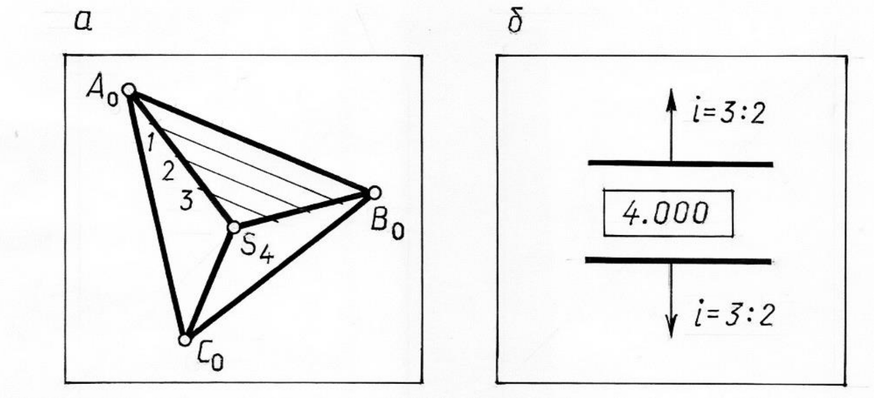



Рисунок 13.19

Коническая поверхность. Прямой конус, как поверхность равного уклона, изображается проекцией его вершины $S$ с указанием отметки и горизонталями (окружностями) (рисунок 13.20, а). Градуированная проекция любой образующей такого конуса является масштабом уклона поверхности и ее линией наибольшего ската. На рисунок 13.20, б показано задание горизонталями наклонного эллиптического конуса с круговыми горизонтальными сечениями.

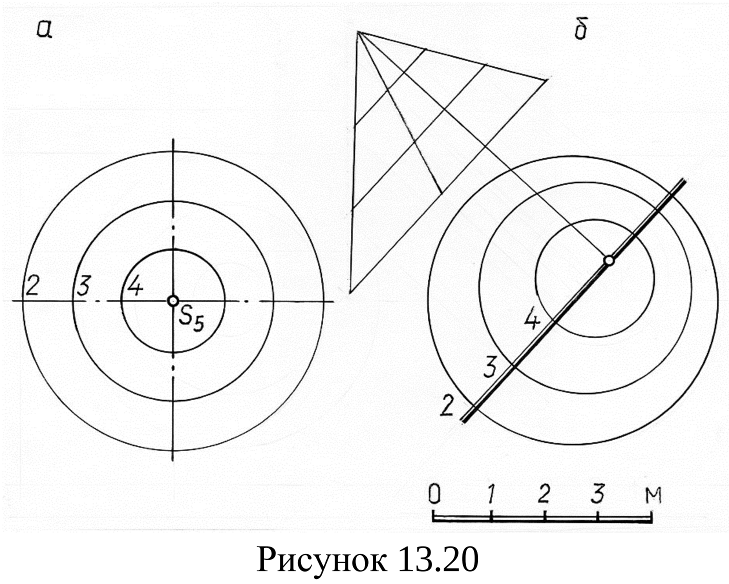



Рисунок 13.20

Поверхность равного уклона (рисунки 13.21, 13.22) является линейчатой поверхностью, все образующие которой составляют с горизонтальной плоскостью постоянный угол. Такая поверхность может быть образована, если прямой круговой конус с вертикальной осью и образующими заданного уклона перемещать вдоль некоторой направляющей, оставляя ось конуса вертикальной. Поверхности откосов насыпей и выемок на криволинейных участках дорог являются поверхностями одинакового наклона.

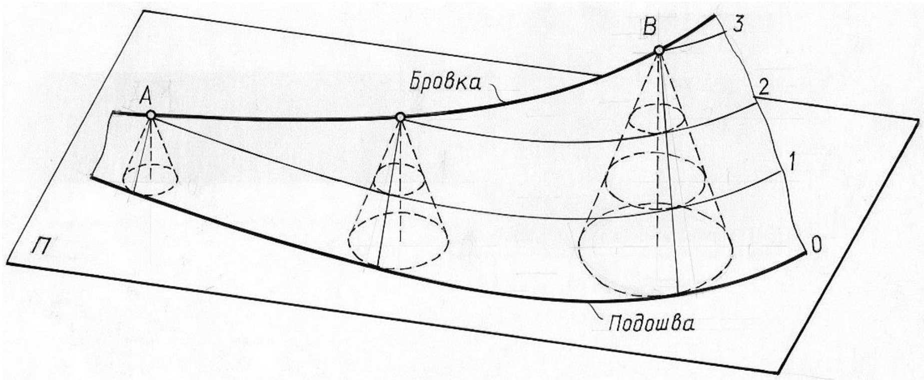



Рисунок 13.21

На рисунке 13.22 показано построение горизонталей поверхности равного уклона. Здесь каждая горизонталь поверхности является огибающей семейства горизонталей конусов. Причём все горизонтали данного семейства имеют одинаковую отметку. Так, на рисунке 13.22 горизонталь поверхности с отметкой *1* огибает семейство горизонталей конуса с той же отметкой.

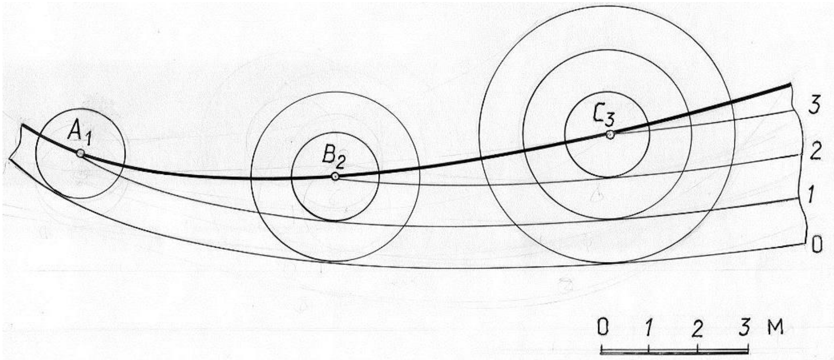



Рисунок 13.22

Поверхность некоторого участка земли служит примером, так называемой, топографической поверхности, образование которой не подчинено какому-либо геометрическому закону. Топографическая поверхность задаётся на плане горизонталями, которые получаются в результате пересечения поверхности горизонтальными плоскостями (рисунок 13.23). Расстояния между секущими горизонтальными плоскостями выбираются в зависимости от рельефа местности и от масштаба чертежа. Обычно они кратны одному или пяти метрам. При слабо выраженном рельефе местности, когда горизонтали недостаточно характеризуют неровности земной поверхности, проводятся промежуточные горизонтали. На планах их проводят штриховой линией. Направление спуска указывается берг-штрихом – короткой чёрточкой, которую проводят перпендикулярно горизонтали и направляют от неё в сторону спуска.

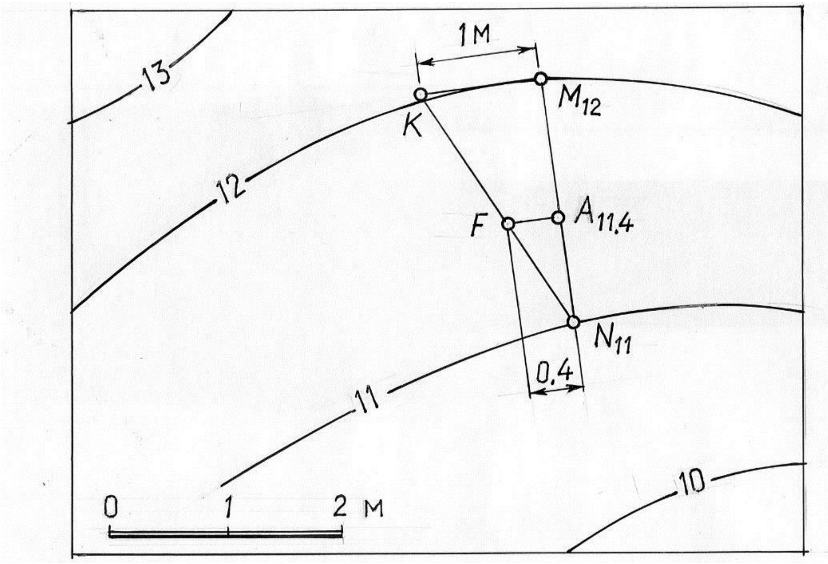



Рисунок 13.23

При решении задач на топографической поверхности допускают, что прямая линия, соединяющая две точки смежных горизонталей, принадлежит поверхности.

Построение точки на топографической поверхности сводится к нахождению её отметки. На рисунок 13.23 отметка точки $A$, принадлежащей топографической поверхности и расположенной между горизонталями $11$ и $12$, определена следующим образом: через точку $A$ проведен отрезок $MN$, соединяющий точки двух соседних горизонталей, затем построен прямоугольный треугольник $NMK$, катет $KM$ которого равен 1 м в масштабе чертежа. Точка $A$ делит отрезок $MN$ на две части, пропорциональные превышениям.

## 13.7 Построение пересечения геометрических фигур в проекциях с числовыми отметками. Проектирование инженерных сооружений в проекциях с числовыми отметками

Так как каждая из поверхностей (в том числе и плоскость) изображается при помощи семейства горизонталей, то линия пересечения поверхностей (плоскостей) может быть построена как множество точек пересечения с одинаковыми отметками.

Рассмотрим примеры построения линий пересечения различных геометрических фигур в проекциях с числовыми отметками.

Пример. Построить линию пересечения плоскостей $\Gamma$ и $\Delta$, заданных масштабами уклонов (рисунок 13.24).

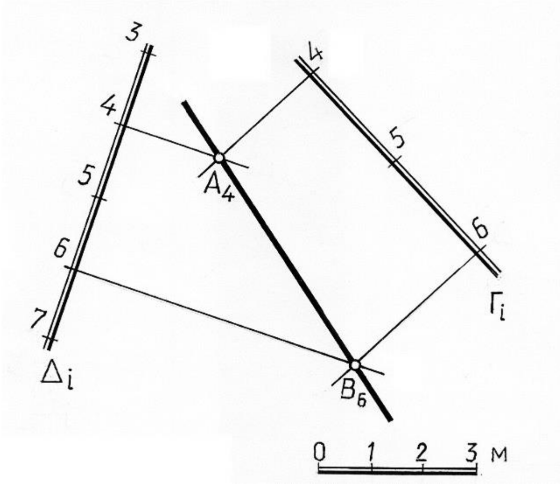



Рисунок 13.24

Решение. Так как линия пересечения плоскостей – прямая, то для её построения достаточно найти точки пересечения двух пар одинаковых по высоте горизонталей, например, горизонталей $5$ и $7$. Точки $A_5$ и $B_7$ определяют прямую $AB$, которая является линией пересечения заданных плоскостей.

Пример. Построить линию пересечения плоскостей $\Gamma$ и $\Delta$, заданных масштабами уклонов, при условии, что горизонтали этих плоскостей параллельны (рисунок 13.25).

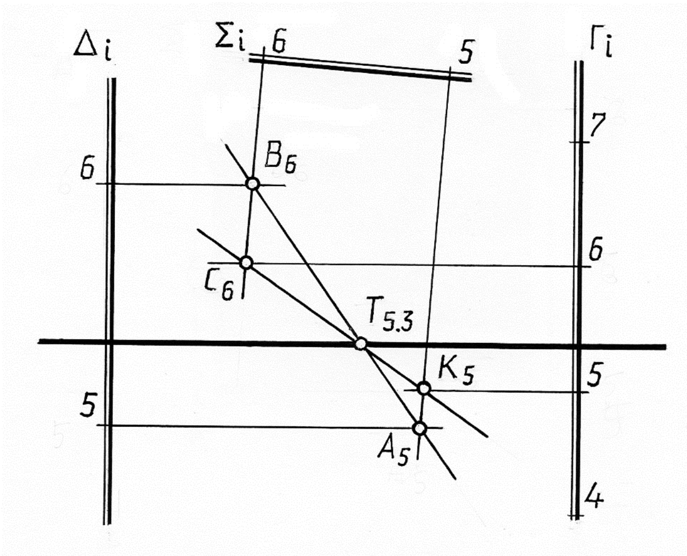



Рисунок 13.25

Решение. Горизонтали заданных плоскостей параллельны, но сами плоскости не параллельны, так как не равны интервалы и, следовательно, углы наклона к плоскости проекций.

Горизонтали заданных плоскостей параллельны, следовательно, параллельны их горизонтальные следы, которые являются нулевыми горизонталями. Если две плоскости пересекают третью ($\Pi_0$) по параллельным прямым, то и линия пересечения этих плоскостей будет параллельна этой плоскости.

Следовательно, линия пересечения заданных плоскостей параллельна плоскости $\Pi_0$, т.е. является их горизонталью.

Для определения точки, через которую пройдёт искомая линия пересечения заданных плоскостей, проведена вспомогательная плоскость $\Sigma$. Эта плоскость задана произвольным масштабом уклонов $\Sigma_i$. Затем построены линии пересечения заданных плоскостей со вспомогательной плоскостью $\Sigma$. Горизонтали этих плоскостей пересекаются, поэтому нетрудно построить их линии пересечения:

$A_5B_6$– линии пересечения плоскостей $\Delta$ и $\Sigma$;

$C_6K_5$ – линия пересечения плоскостей Г и $\Sigma$.

Точка $T_{5,3}$ пересечения линий $A_5B_6$ и $C_6K_5$ принадлежит всем трём плоскостям, а следовательно, линии пересечения заданных плоскостей.

Аналогично решается задача, если горизонтали заданных плоскостей не параллельны, но пересекаются за пределами чертежа. Так как в этом случае направление линии пересечения неизвестно, то вводятся две вспомогательные плоскости и определяются две точки, принадлежащие искомой линии пересечения плоскостей.

Пример. Построить линию пересечения топографической поверхности горизонтально проецирующей (вертикальной) плоскостью $A$ (рисунок 13.26).

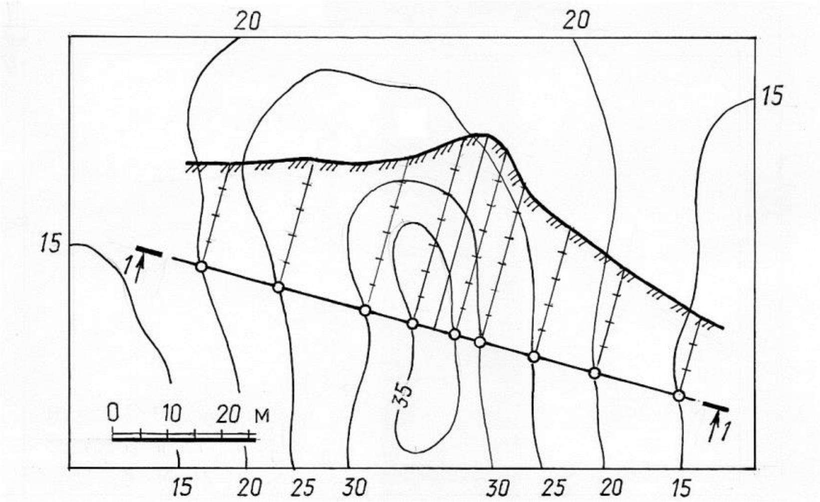



Рисунок 13.26

Сечение топографической поверхности вертикальной плоскостью называется профилем поверхности. Профиль может изображаться на свободном месте чертежа (вынесенный профиль) или совмещаться с чертежом топографической поверхности (наложенный профиль).

Решение. Для построения наложенного профиля (рисунок 13.26) определяются точки пересечения проекции заданной плоскости (линии 1-1) с горизонталями топографической поверхности, затем из этих точек проводятся перпендикуляры к линии 1-, на которых в масштабе чертежа откладываются превышения точек пересечения над выбранной линией уровня – базы профиля. Плавная линия, соединяющая построенные точки, и есть профиль топографической поверхности.

На рисунке 13.27 показано построение вынесенного профиля той же топографической поверхности. Для построения вынесенного профиля вычерчивается линия – база профиля и вертикальная линия, задающая вертикальный масштаб. На базу профиля с плана переносятся заложения, определяющие точки пересечения горизонталей топографической поверхности с заданной плоскостью. Из полученных точек восстанавливаются перпендикуляры к базе профиля до пересечения с горизонтальными линиями, имеющими такие же числовые отметки. Полученные таким образом точки соединяются плавной линией, которая образует профиль сечения.

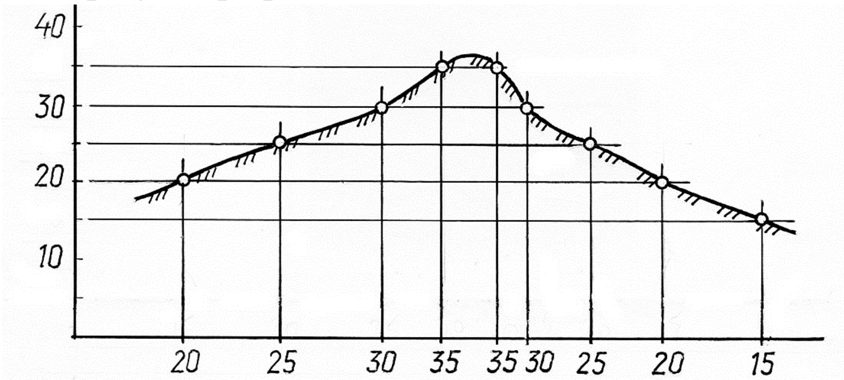



Рисунок 13.27

Пример. Построить линию пересечения топографической поверхности наклонной плоскостью (рисунок 13.28).

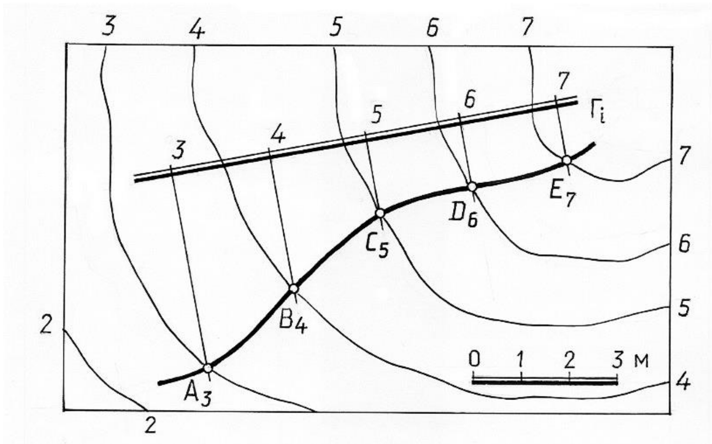



Рисунок 13.28

Решение. Линия пересечения топографической поверхности плоскостью проходит через точки пересечения их горизонталей с одинаковыми отметками.

Соединяя плавной линией построенные точки, получим искомую линию пересечения.

Выполненные построения ясны из чертежа.

Если горизонтали топографической поверхности и плоскости в пределах чертежа не пересекаются (или не пересекаются вообще), можно применить известный метод вспомогательных секущих плоскостей (рисунок 13.28). На рисунке 13.29 показано построение линий пересечения топографической поверхности с плоскостью Г, горизонтали которых не пересекаются. Для этого проведены две вспомогательные плоскости $\Sigma$ и Δ.

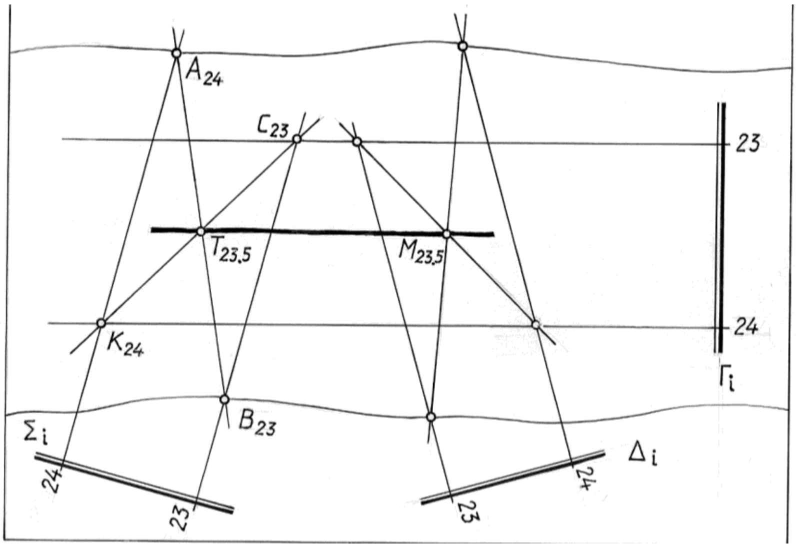



Рисунок 13.29

Плоскость $\Sigma$ пересекает топографическую поверхность по линии $A_{24}B_{23}$ (дуга линии пересечения заменена отрезком прямой для упрощения). Эта же плоскость пересекает заданную плоскость по прямой $C_{23}$ $K_{24.}$ Точка $T_{23,5}$ пересечение прямых $A_{24}B_{23}$ и $C_{23}K_{24}$ – принадлежит линии пересечения топографической поверхности и плоскости Г. Аналогично строится точка искомой линии пересечения – точка $M_{23,4}$. В зависимости от требуемой точности можно построить любое количество точек, принадлежащих линии пересечения.

На рисунке 13.30 показано решение этой же задачи с использованием вспомогательных секущих вертикальных плоскостей (метод профилей). Заданная топографическая поверхность и плоскость Г пересечены двумя вспомогательными горизонтально проецирующими плоскостями $\Sigma$ и Δ, и построены профили сечения этими плоскостями.

При построении профиля вертикальные масштабы выбраны произвольно и для упрощения дуги линий, по которым вспомогательные плоскости пересекают топографическую поверхность, заменены отрезками прямых. Все построения ясны из чертежа.

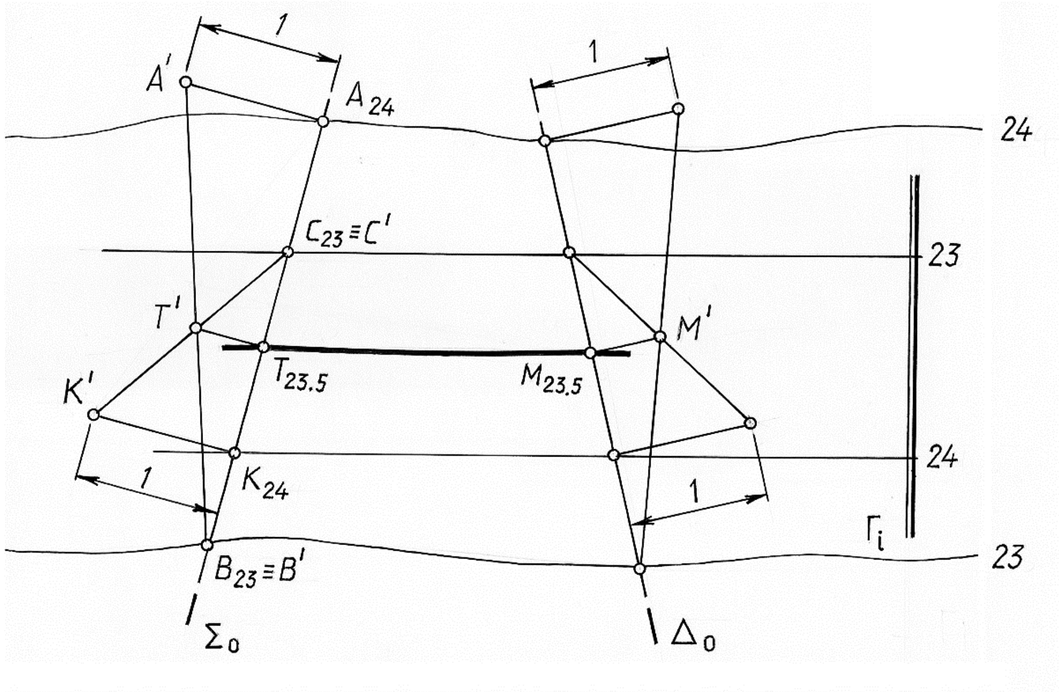



Рисунок 13.30

Пример. Построить линию пересечения топографической и конической поверхностей (рисунок 13.31).

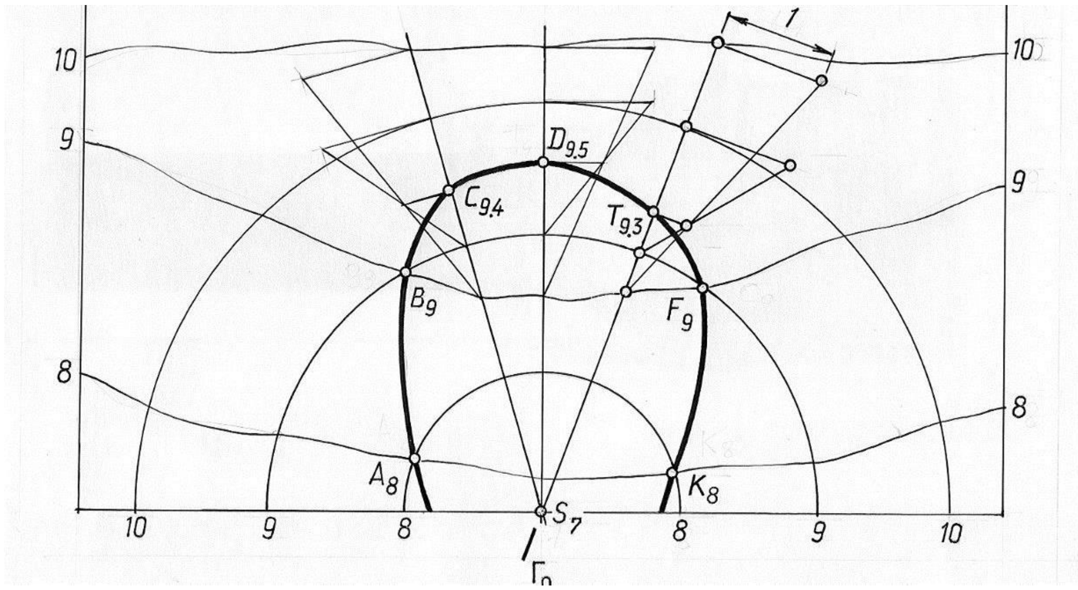



Рисунок 13.31

Решение. Построение линии пересечения поверхностей сводится к нахождению точек пересечения их горизонталей, имеющих одинаковые отметки.

Для определения точки *T*, принадлежащей линии пересечения и находящейся между горизонталями *9* и *10*, использована вспомогательная вертикальная плоскость Г. Построены профили сечения топографической иконической поверхностей плоскостью Г (условно кривые заменены отрезками прямых).

### 13.8 Пересечение прямой линии с плоскостью или поверхностью

Построение точек пересечения прямой линии с плоскостью или поверхностью в проекциях с числовыми отметками аналогично по решению такой же задачи в других методах проецирования, а именно:

– прямая заключается во вспомогательную секущую плоскость – посредник;

– строится линия пересечения плоскости посредника с заданной плоскостью (поверхностью);

– отмечается точка (точки) пересечения построенной линии с заданной прямой.

Рассмотрим решение задач на примерах. Отметим, что в качестве посредника можно использовать вертикальную плоскость (метод профилей) или плоскость общего положения (метод горизонталей).

Пример. Определить точку пересечения прямой $AB$ с плоскостью Г (рисунок 13.32).

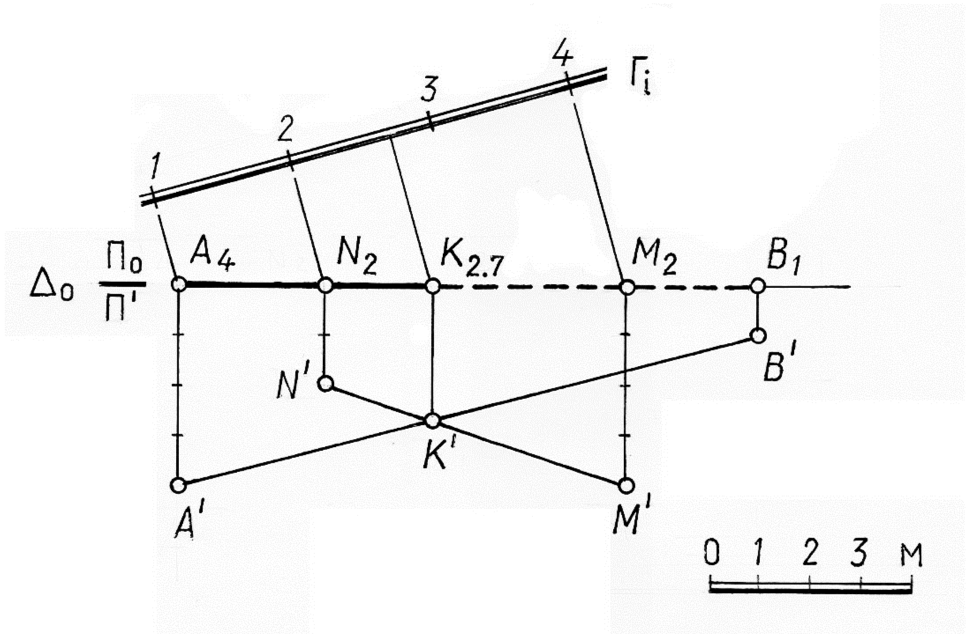



Рисунок 13.32

Решение. Для решения задачи через заданную прямую проведена горизонтально проецирующая плоскость Δ, пересекающая заданную плоскость по прямой $MN$. С помощью замены плоскостей проекций построены дополнительная проекция прямой $AB$ и линии пересечения двух плоскостей. Вначале определена дополнительная проекция $K'$ искомой точки пересечения, а затем и горизонтальная проекция.

Решение этой задачи можно выполнить с помощью плоскости общего положения.

Пример. Определить точку пересечения прямой А$B$ с плоскостью Г (рисунок 13.33).

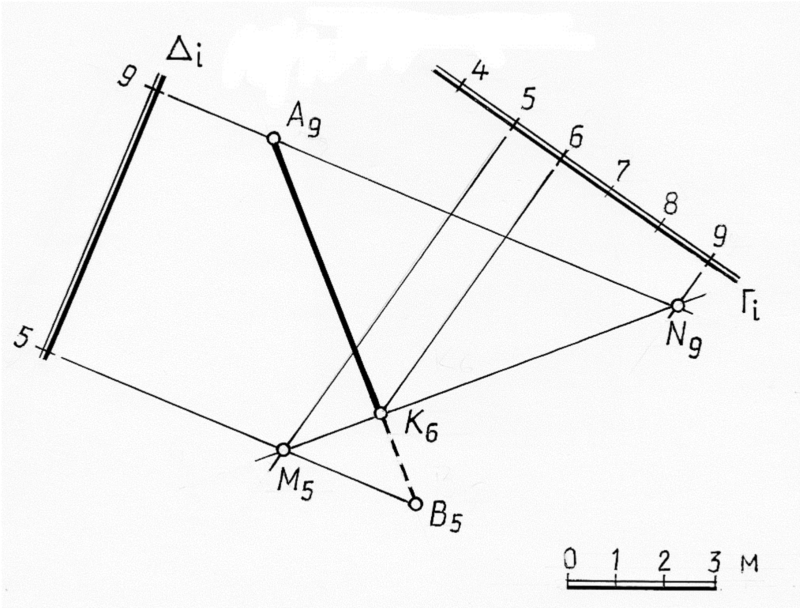



Рисунок 13.33

Решение. Через прямую $AB$ проводится произвольная вспомогательная плоскость общего положения $\Delta_i$, заданная горизонталями ($h_9$, $h_5$).

Горизонтали вспомогательной плоскости проводятся через точки $A$ и $B$ так, чтобы они в пределах чертежа пересекали горизонтали, имеющие те же отметки заданной плоскости $\Gamma_i$.

Затем строится линия пересечения вспомогательной плоскости $\Delta_i$ с плоскостью Г – прямая $MN$. Точка $K$ – точка пересечения прямой $AB$ и линии $MN$ – есть искомая точка пересечения прямой с плоскостью Г. Отметка точки $K$ определяется по масштабу уклона плоскости Г.

Пример. Измерить расстояние от точки $A$ до плоскости $\Gamma$ (рисунок 13.34).

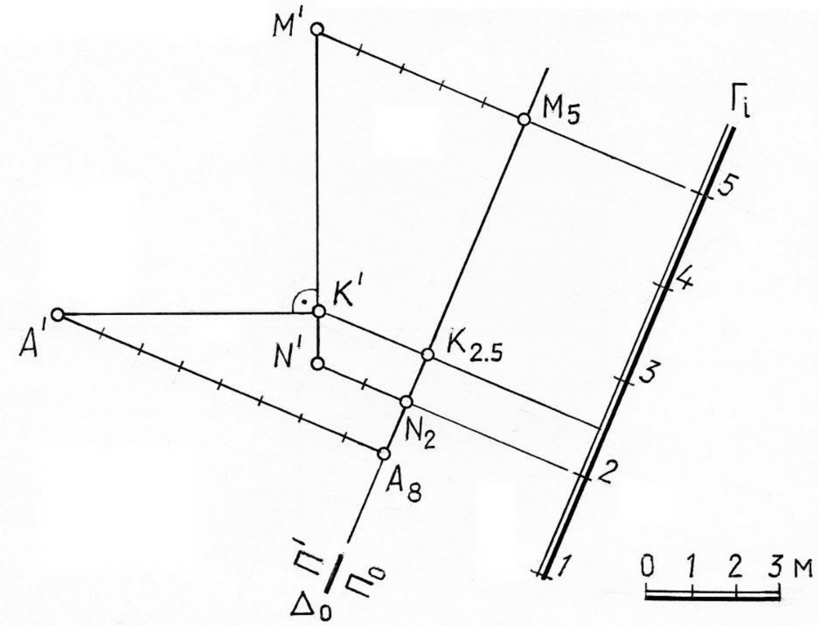



Рисунок 13.34

Решение. Из точки $A$ опускаем перпендикуляр на плоскость Г, находим точку $K$ – точку пересечения этого перпендикуляра с плоскостью Г, а затем – натуральную величину отрезка прямой $AK$.

Ранее известно, что горизонтальная проекция перпендикуляра к плоскости составляет прямой угол с одноименными горизонталями этой плоскости. Что это же, проекция прямой, перпендикулярной плоскости, параллельна масштабу падения этой плоскости. Следовательно, для решения задачи через точку $A_8$ проведена прямая параллельная масштабу падения плоскости $\Gamma_i$. Чтобы найти точку пересечения построенного перпендикуляра с плоскостью, через него проведена вспомогательная горизонтально проецирующая плоскость $\Delta$, пересекающая заданную плоскость по прямой $MN$. С помощью замены плоскостей проекций построена дополнительная проекция линии пересечения двух плоскостей $MN$, которая является линией наибольшего ската плоскости Г и перпендикуляра к плоскости $AK$, который перпендикулярен к любой прямой этой плоскости, в том числе и к линии наибольшего ската. $A'K'$ – является натуральной величиной перпендикуляра $AK$, а точка $K$ – основанием перпендикуляра.

Пример. Построить точки пересечения прямой с топографической поверхностью (рисунки 13.35, 13.36).

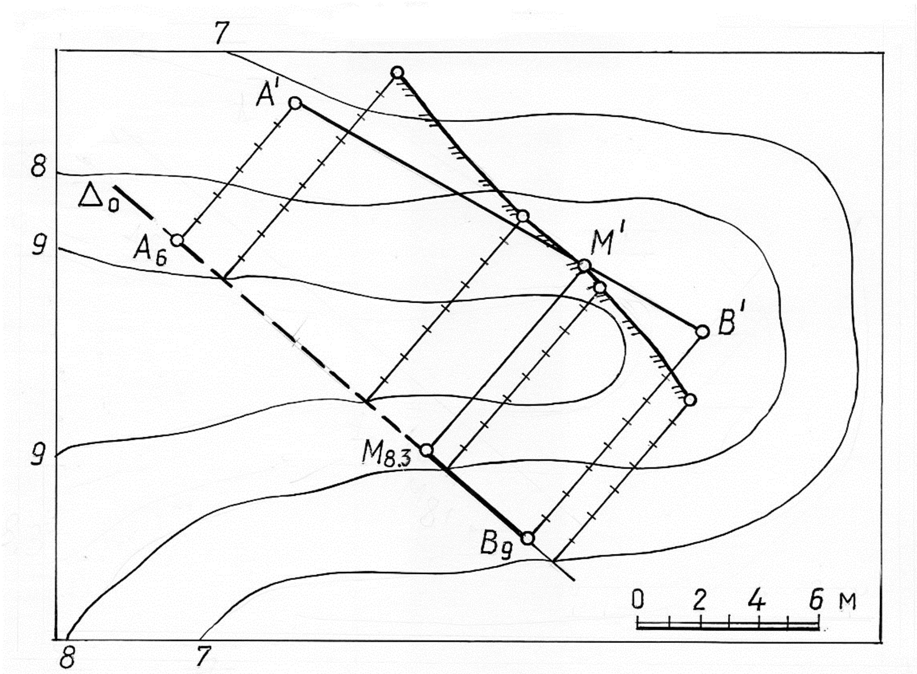



Рисунок 13.35

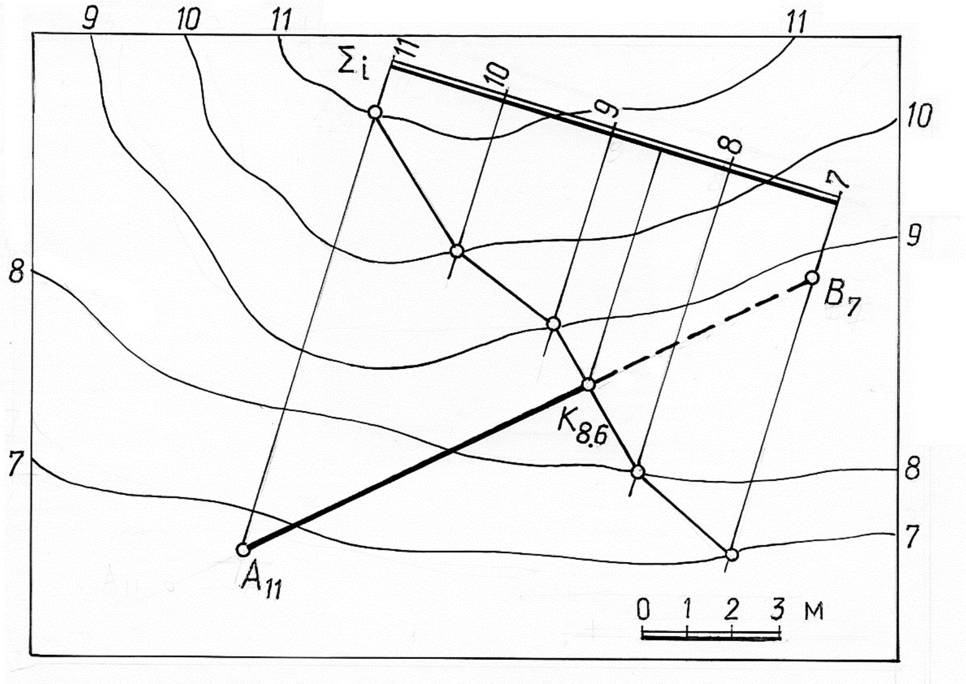



Рисунок 13.36

Решение. Через прямую $AB$ (рисунок 13.35) проводится горизонтально проецирующая плоскость $\Delta$ и строится профиль этого сечения топографической поверхности. $A'B'$ – проекция прямой в сечении. Точка пересечения проекции $A'B'$ с профилем топографической поверхности определяет проекцию $M'$ – точки пересечения заданной прямой с топографической поверхностью. Проведя линию проекционной связи, определяем горизонтальную проекцию этой точки.

Если на чертеже задана проградуированная проекция прямой, то для решения задачи рационально использовать плоскость-посредник общего положения, как показано на рисунке 13.36. Для определения точки пересечения прямой $AB$ с топографической поверхностью через прямую $AB$ проведена плоскость общего положения $\Sigma$. Вспомогательная плоскость задана на чертеже с помощью горизонталей, которые проведены так, чтобы они в пределах чертежа не пересекали горизонтали с одинаковыми отметками топографической поверхности. Затем построено сечение топографической поверхности плоскостью-посредником и отмечена точка пересечения построенной линии и заданной прямой $AB$, точка $K$ – есть искомая точка пересечения прямой с топографической поверхностью. Отметка точки $K$ определяется по масштабу уклона вспомогательной плоскости $\Sigma$.

## 13.9 Проектирование инженерных сооружений в проекциях с числовыми отметками

Метод проекций с числовыми отметками имеет широкое применение в проектировании инженерных земляных сооружений. И примером таких сооружений являются различные горизонтальные строительные площадки.

Распространённой задачей является определение границ земляных работ при организации строительной площадки, что выражается в определении линий срезки и подсыпки, организации откосов согласно полученному заданию. Если уровень площадки выше уровня поверхности местности, то строительная площадка выполняется в виде насыпи, если ниже, то в виде выемки. Плоскости и поверхности, ограничивающие строительную площадку со всех сторон и соединяющие её с поверхностью местности, называются откосами. Уклоны откосов выбираются в зависимости от типа грунта и задаются при проектировании строительных площадок.

При проектировании строительных площадок решаются следующие рассмотренные ранее геометрические задачи:

1) проведение плоскостей с заданным уклоном через отрезки прямых, ограничивающих площадку в плане;

2) проведение поверхностей с заданным уклоном через дуги кривых, ограничивающих площадку;

3) построение линий пересечения соседних откосов (двух плоскостей, двух поверхностей или плоскости с поверхностью);

4) построение пересечения поверхностей или плоскостей откосов с топографической поверхностью – определение границ земляных работ.

Проиллюстрируем сказанное конкретным примером.

<u>Пример.</u> На плоском склоне запроектировать откосы и определить границы земляных работ горизонтальной строительной площадки с отметкой 50 м и аппарели («аппарель» – пологий въезд или спуск на горизонтальную площадку) (рисунок 13.37). Уклоны откосов насыпи $i_H = 2:3$, уклоныоткосов выемки $i_B = 1:1$, уклон аппарели $i_a = 1:2$.

<u>Решение.</u>

Предварительно вычерчиваем график масштаба уклонов и графически определяем величины интервалов для откосов выемки и насыпи.

Определяем точки нулевых работ (точка нулевых работ – точка, в которой профиль площадки пересекается с профилем местности и, следовательно, в этом месте никаких земляных работ производить не требуется). Горизонталь $50$ склона пересекает контур площадки с отметкой $50$ в точках $A_{50}$ и $B_{50}$ по линии нулевых работ. Выше неё будет выемка, ниже – насыпь.

Строим масштабы уклонов для откосов насыпей и выемок горизонтальной площадки, проведя их перпендикулярно к сторонам строительной площадки. Строим горизонтали откосов.

Строим горизонтали откосов аппарели. С геометрической точки зрения эта задача сводится к построению плоскости заданного уклона через наклонную прямую. Аппарель пересекает плоскость склона по линии $K_{47}M_{45}$, которая помогает определить точки нулевых работ на аппарели (точки $N$ и $L$).

Строим линии пересечения соседних откосов, построив точки пересечения горизонталей откосов с одинаковыми отметками.

Строим границы земляных работ, определив точки пересечения горизонталей откосов и склона с одинаковыми отметками.

Для более наглядного выражения направления ската у верха кромок откосов наносятся штрихи перпендикулярно горизонталям (ГОСТ 21.108-78). Расстояние между длинными штрихами – 3….4 мм; между короткими и длинными – 1.5…2 мм. Штрихи проводят одинаковой толщины, равной 0,1…0,15мм.

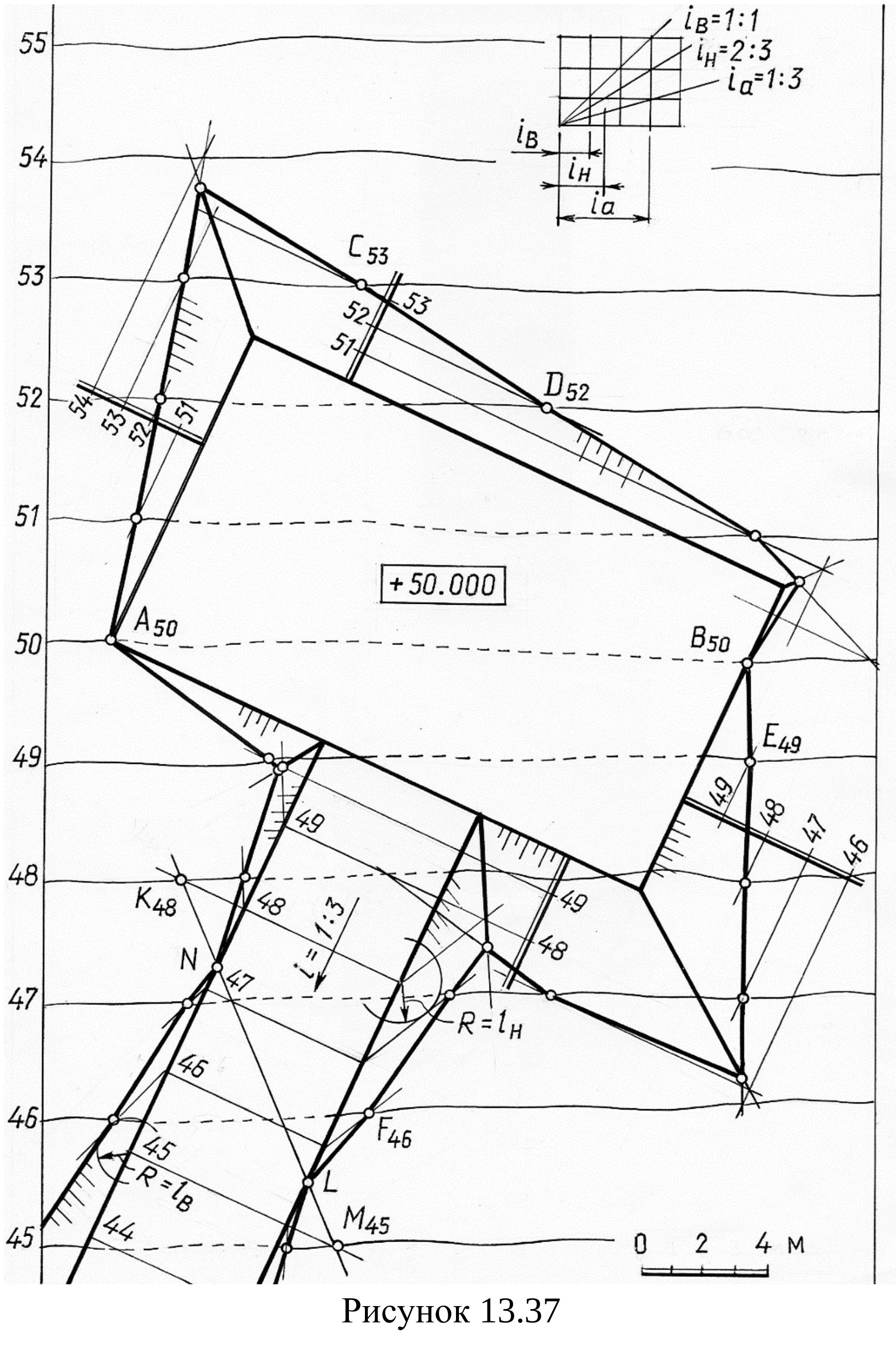



Рисунок 13.37

# Тема 14 Перспектива

## 14.1 Центральное проектирование

Чтобы получить центральную проекцию геометрической фигуры на плоскости проекций $K$ (рисунок 14.1), необходимо:

– через точки фигуры провести проецирующие лучи так, чтобы они проходили через центр проекции – точку $S$;

– определить точки пересечения проецирующих лучей с плоскостью проекций $K$.

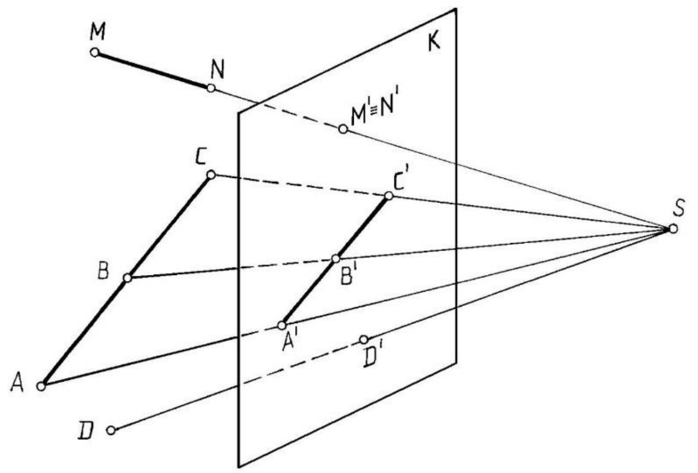



Рисунок 14.1

Свойства центрального проецирования (рисунок 14.1):

1) Проекция точки есть точка.

2) Проекция прямой есть прямая или точка.

3) Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции прямой.

4) Перспективой называется изображение, построенное способом центрального проецирования при определенным образом заданном центре проекций $S$ и плоскости проекций $K$ (картине), отвечающее условиям зрительного восприятия. Достоинство перспективы – наглядность; недостатки – проецирование на одну плоскость проекций (получение обратимого чертежа).

5) Перспектива, построенная на плоскости, называется линейной, на цилиндрической поверхности – панорамной, на сферической поверхности – купольной.

## 14.2 Аппарат линейной перспективы

В архитектуре и строительстве находит применение линейная перспектива.

Аппарат линейной перспективы изображен на рисунке 14.2.

$\Pi_1$ – горизонтальная плоскость, на которой располагается объект проецирования, называется предметной плоскостью;

$K$ – плоскость, перпендикулярная предметной плоскости, на которую осуществляется перспективное изображение, называется картинной плоскостью или картиной, $K \perp \Pi_1$;

$S$ – центр проецирования, т.е. точка, в которой располагается глаз наблюдателя, называется точкой зрения;

$N$ – плоскость, проходящая через точку зрения параллельно картине, называется нейтральной плоскостью, $N \parallel K$.

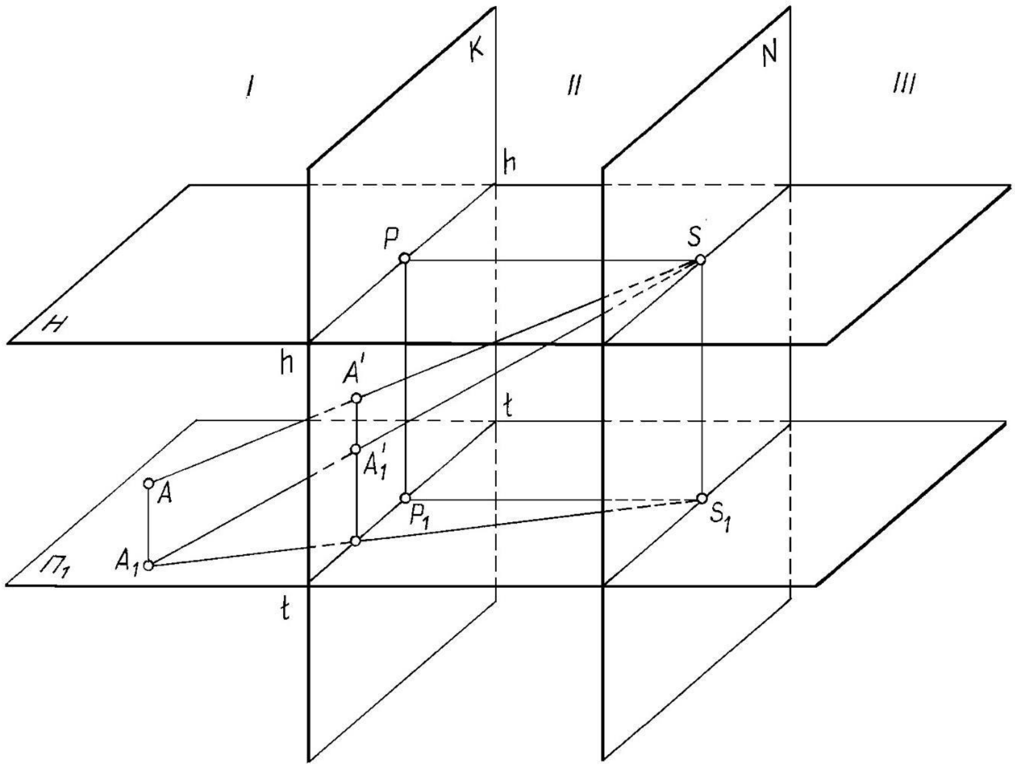



Рисунок 14.2

Картинная и нейтральная плоскости делят всё пространство на три части:

– предметное пространство I (которое от наблюдателя находится за картиной и в котором располагается проецируемый объект (предмет));

– промежуточное пространство II (заключённое между картиной и нейтральной плоскостью);

– мнимое пространство III (расположенное по другую сторону от нейтральной плоскости).

$H$ – горизонтальная плоскость, проходящая через точку зрения, называется плоскостью горизонта, $H \parallel \Pi_1$;

$hh = H \cap K$ – линия горизонта;

$tt = \Pi_1 \cap K$ – основание картины (линия Земли);

$SP$ – перпендикуляр, опущенный из точки зрения $S$ на картинную плоскость $K$, называется главным лучом ($SP \perp K$);

$P = SP \cap K$ – главная точка картины;

$PP_1$ – главная линия картины, $PP_1 \perp tt$ и $PP_1 \perp hh$;

Ортогональные проекции точек на предметную плоскость $\Pi_1$, называется основаниями этих точек:

$A_1$ – основание точки $A$, расположенной в предметном пространстве;

$P_1$ – основание главной точки картины;

$S_1$ – основание точки зрения или точка стояния;

$SS_1$ – расстояние от точки зрения до предметной плоскости, называется высотой точки зрения (высотой горизонта) $|SS_1| = |PP_1|$;

$PS$ – расстояние от точки зрения до картины, называется главным расстоянием или дистанционным расстоянием;

$A' = AS \cap K$ – перспектива точки $A$.

Одним из требований, предъявляемых к чертежу, является его обратимость. Для получения обратимого чертежа при проецировании на одну плоскость проекций необходима вторичная проекция. Таким образом, перспектива точки и её вторичная проекция однозначно определяют положение точки в пространстве. $A'A'$ –линия связи между перспективой точки и её вторичной проекцией, $A'A' \perp hh$; $A'A' \parallel PP$.

Построение перспективного изображения (рисунок 14.3) начинают с задания основных элементов перспективного аппарата, принадлежащих картине. Вначале задают горизонтально расположенные линии земли $tt$, и горизонта $hh$ расстояние между которыми равно высоте точки зрения $SS_1$. В произвольном месте (обычно по центру) задают главную линию картины, проводя $PP_1$ перпендикулярно линии горизонта.

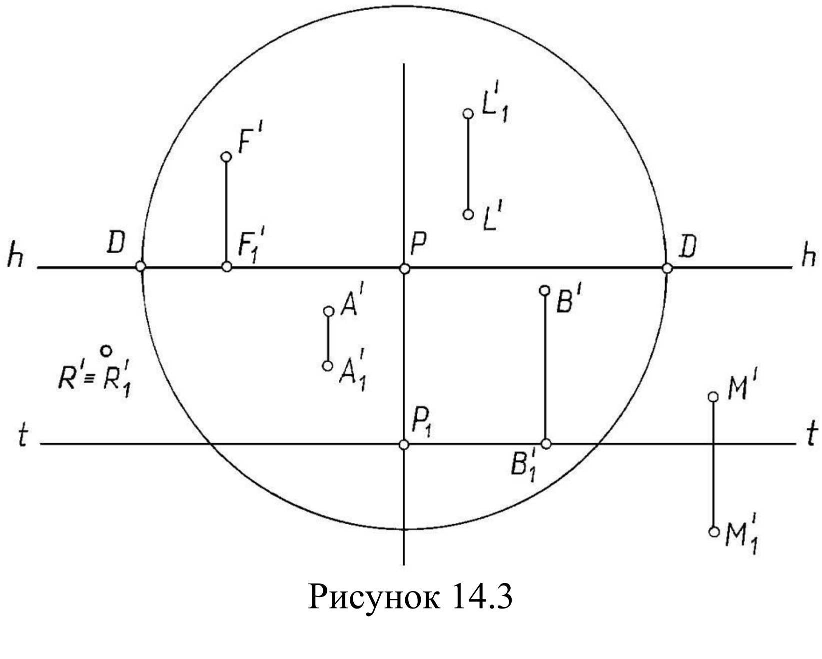



Рисунок 14.3

Иногда на перспективном изображении показывают дистанционную окружность. Это окружность с центром в точке $P$ радиусом $PD = PS$. Точка $D$ называется дистанционной.

По положению вторичной проекции точки (перспективы основания точки) относительно линий $hh$ и $tt$ можно судить о положении точки в пространстве, что видно из схемы перспективного аппарата, изображённой на рисунках 14.2, 14.3, 14.4.

Если $A'$ находится между линиями $hh$ и $tt$, то точка $A$ находится в предметном пространстве.

Если $M'$ ниже $tt$, то точка $M$ находится в промежуточном пространстве.

Если $L'$ расположена выше линии $hh$, то точка $L$ находится в мнимом пространстве.

Если $B'$ расположена на линии $tt$, то точка $B$ принадлежит картине. Если $R' \equiv R'$, то точка $R$ лежит на плоскости П.

Если $F'$ расположена на линии $hh$, то точка $F$ находится в бесконечности, однако показать на чертеже это невозможно.

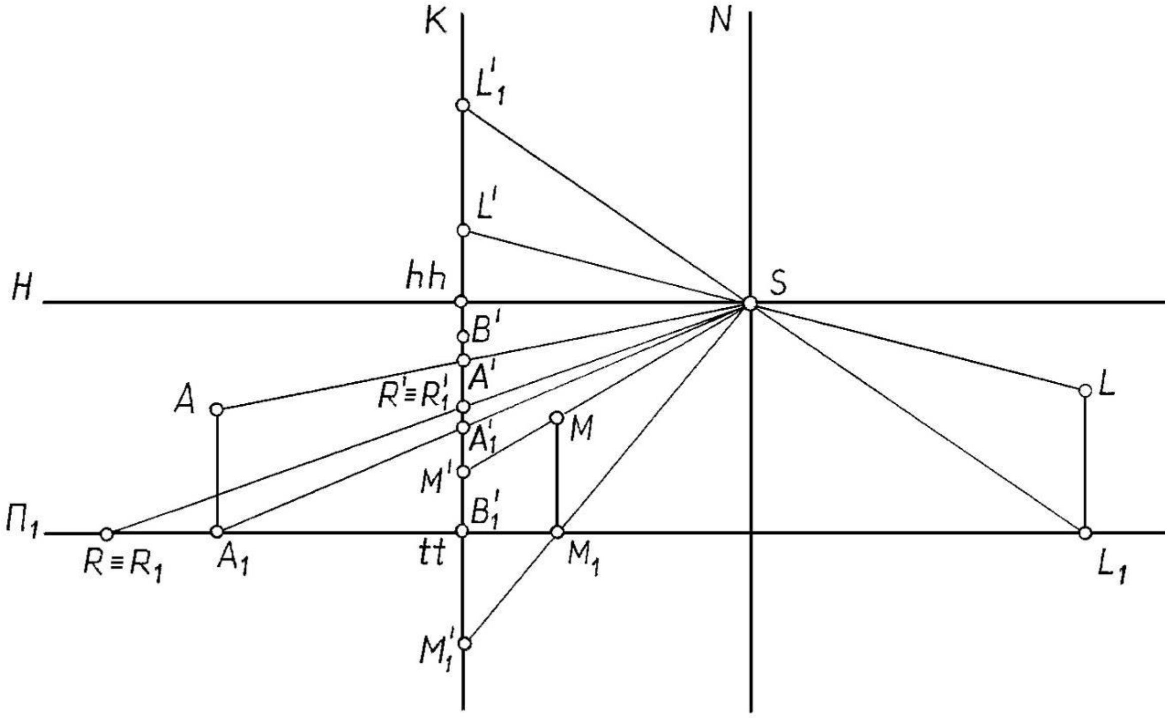



Рисунок 14.4

**14.3 Перспектива прямой**

Две точки определяют прямую в пространстве. Чтобы построить перспективу прямой, обычно строят перспективу двух ее точек – картинный след и точку схода прямой (рисунок 14.5).

Картинный след – это точка пересечения прямой с картиной.

На рисунке 14.4:

$1'$ – картинный след прямой $n$;

$2'$ – картинный след прямой $m$.

Точка схода – это перспектива несобственной (бесконечно удаленной) точки прямой. Чтобы построить точку схода прямой, необходимо через точку зрения провести луч, параллельный прямой и найти точку пересечения этого луча с картиной. Обозначают точку схода буквой $F$.

Если прямые параллельны в пространстве и не параллельны картине, то в перспективе они пересекаются в общей точке схода $F$ (рисунок 14.5).

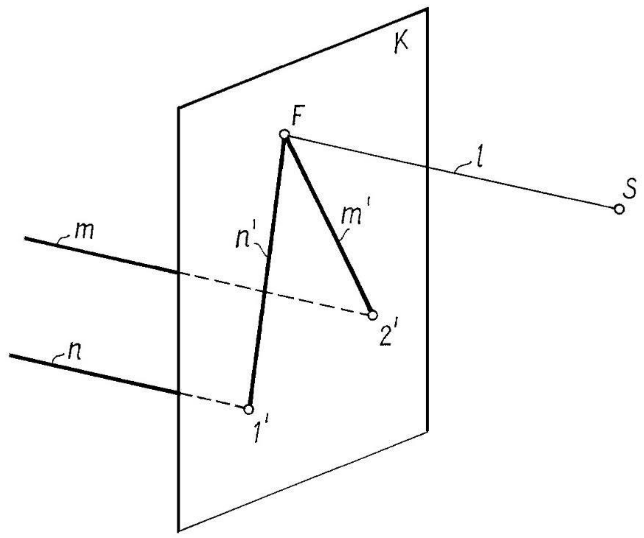



Рисунок 14.5

**14.4 Построение перспективы прямой принадлежащей предметной плоскости**

Чтобы построить перспективу прямой по ее ортогональным проекциям, надо найти точку схода и картинный след на ортогональном чертеже, а затем перенести их на перспективное изображение. При необходимости задается дистанционная точка $D$.

<u>Пример.</u> Построить перспективу прямой $l$, принадлежащей предметной плоскости (рисунок 14.6).

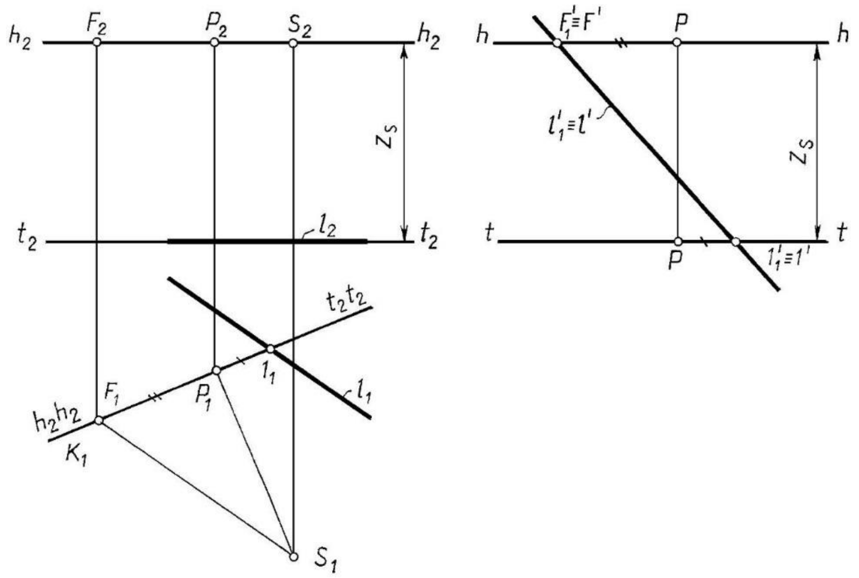



Рисунок 14.6

Решение:

1. На перспективном изображении задаем горизонтальные прямые $tt$ и $hh$, расстояние между которыми равно высоте точки зрения $Z_s$. В произвольном месте (обычно по центру) задаем главную линию $PP_1$.

Определяем на ортогональном чертеже картинный след (точку *1*) и строим ее в перспективе на $tt$, отложив $P_1 1' = P_1 1_1$.

Определяем точку схода $F$ на ортогональном чертеже: $S_1 F_1 \parallel 1_1$; $F_1 = F_1 S_1 \cap K_1$.

Строим перспективу точки схода прямой, отложив на $hh$ $PF' = P_1 F_1$.

Строим перспективу прямой $l'$, соединяя точки $1'$ и $F'$. В данном случае вторичная проекция прямой и ее перспектива совпадают $l' \equiv l'$.

Пример. Построить перспективу прямой $n$, принадлежащей предметной плоскости и проходящей через точку стояния $S_1$ (рисунок 14.7)

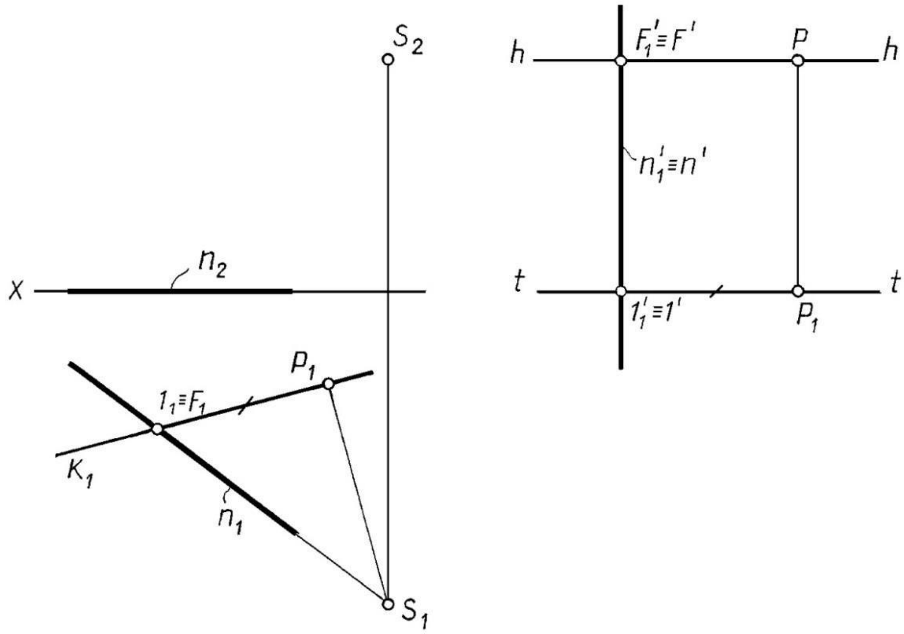



Рисунок 14.7

Если прямая принадлежит предметной плоскости и проходит через точку стояния $S_1$, то перспектива ее параллельна главной линии картины $PP_1$.

Пример.Построить перспективу прямой $m$, принадлежащей предметной плоскости и перпендикулярна картине (рисунок 14.8)

Если прямая перпендикулярна картине $m \perp$ К, то точка схода ее совпадает с главной точкой картины $P$.

Пример. Построить перспективу прямой $b$, принадлежащей предметной плоскости и составляет с картиной угол *45°*(рисунок 14.9).

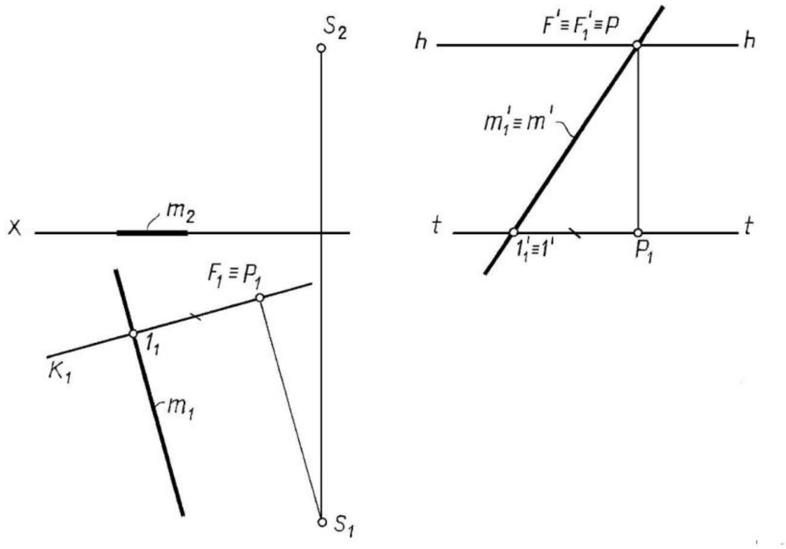



Рисунок 14.8

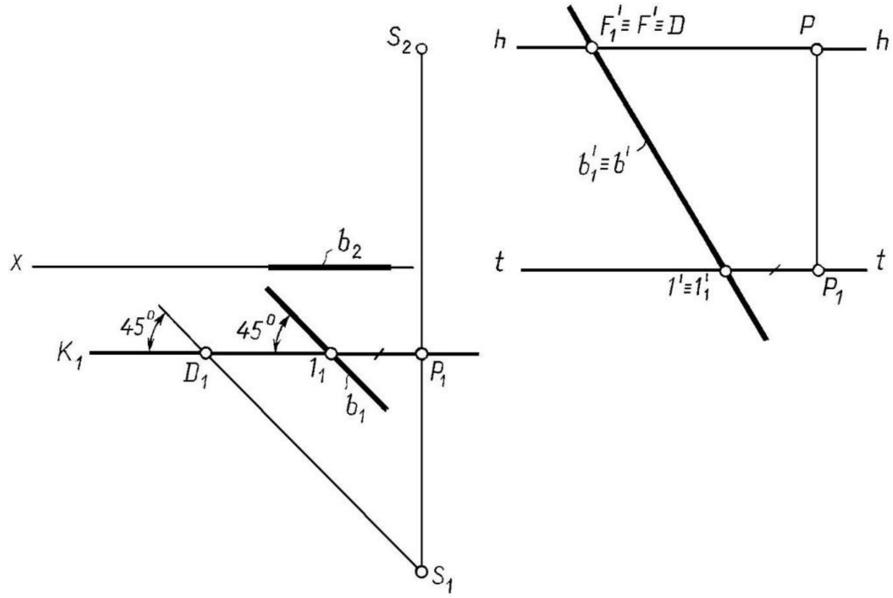



Рисунок 14.9

Если прямая принадлежит предметной плоскости или параллельна предметной плоскости и составляет с картиной угол $45^{o}$, то точка схода ее совпадает с дистанционной точкой $D$. На рисунке 14.9 треугольник $D_1P_1S_1$ – равнобедренный, $|S_1P_1| = |D_1P_1||$, поэтому $F \equiv D$.

Перспективу вертикального отрезка нельзя построить по картинному следу и точке схода. Для построения вертикальных отрезков можно воспользоваться способом выноса в картину или боковой стенкой, они будут описаны ниже.

### 14.5 Построение перспективы точки принадлежащей предметной плоскости

Пример. Построить перспективу точки $A$, принадлежащей предметной плоскости (рисунок 14.10).

Решение:

Заметим, что перспектива точкистроится как точка пересечения перспектив двух прямых, проходящих через эту точку.

На ортогональном чертеже через точку $A$ проводим прямую $n \perp$ К и прямую $l$, проходящую через точку стояния.

Строим перспективу этих прямых $n'$, $l'$.

Отмечаем перспективу точки $A'$ в пересечении перспектив построенных прямых $n'$и $l'$.

В данном случае вторичная проекция точки и перспектива точки совпадают $A' \equiv A'$.

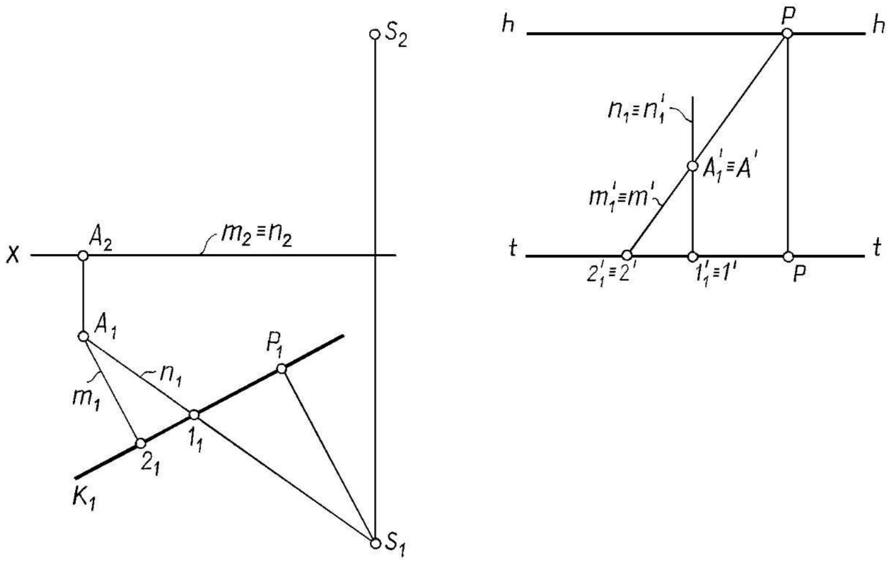



Рисунок 14.10

## 14.6 Построение перспективы отрезка прямой принадлежащей предметной плоскости

Пример. Построить перспективу отрезка $AB$ (рисунок 14.11).

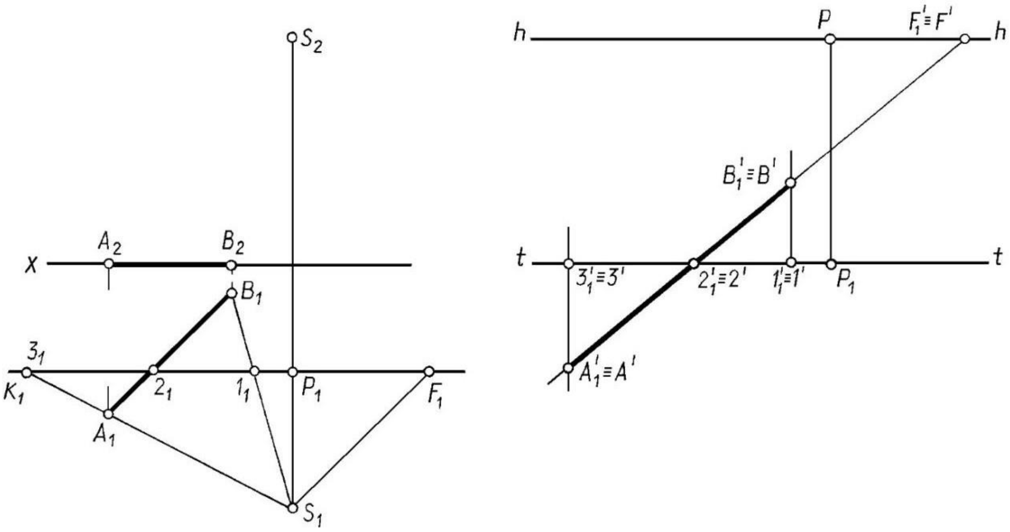



Рисунок 14.11

Решение.

Строим перспективу прямой, которой принадлежит отрезок $AB$ (по точкам $2$ и $F$).

Определяем на этой прямой точки $A$ и $B$ с помощью вспомогательных прямых ($SA$ и $SB$), проходящих через точку стояния.

Построение перспективы плоской фигуры принадлежащей предметной плоскости. Построение перспективы вертикального отрезка, используя вынос в картину, боковую стенку, радиальный способ. Построение перспективы прямой общего положения. Способы построения перспективы. Выбор точки зрения.

## 14.7 Построение перспективы плоской фигуры принадлежащей предметной плоскости

Пример. Построить перспективу плоской фигуры, принадлежащей предметной плоскости (рисунок 14.12).

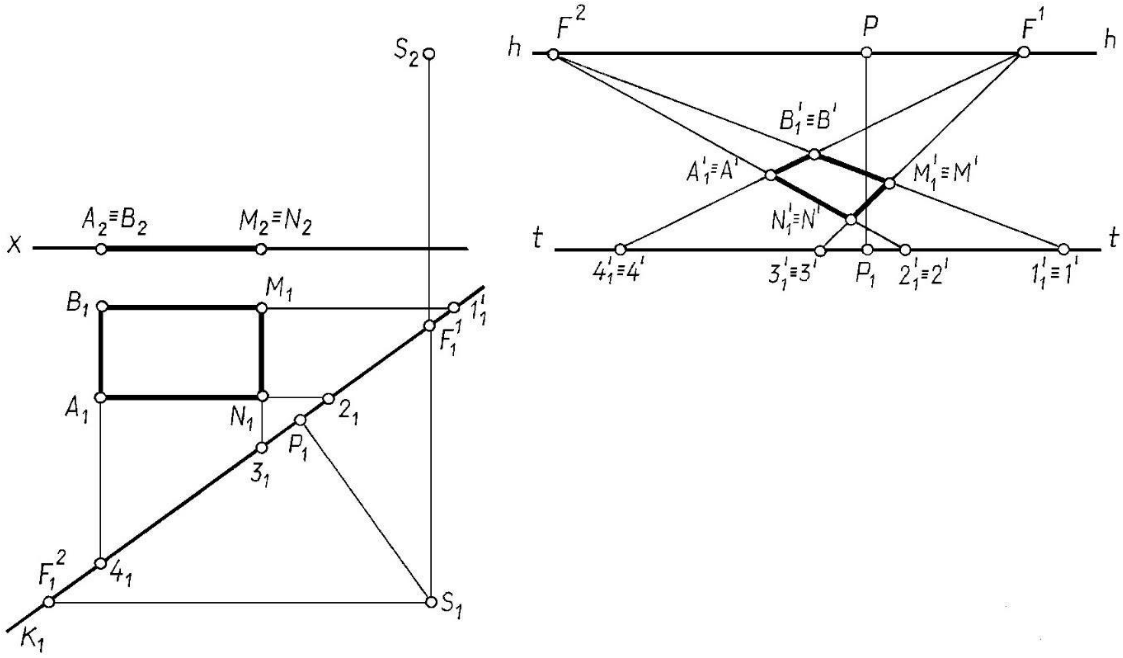



Рисунок 14.12

Решение.

Строим перспективу прямых, ограничивающих плоскую фигуру: $AB, NM$ и $NA, MB$ (попарно параллельными с точками схода $F(I)$ и $F(II)$).

Точки пересечения перспектив этих прямых определяют вершины плоской фигуры $A', B', M', N'$. Вторичная проекция и перспектива плоской фигуры совпадают $A'B'M'N' \equiv A'B'M'N'$.

Такой способ построения перспективы, используя две точки схода, называется способом архитекторов.

## 14.8 Построение перспективы вертикального отрезка, используя вынос в картину, боковую стенку, радиальный способ

Так как для вертикального отрезка прямой нельзя построить картинный след прямой и точу схода, то в этом случае необходимо воспользоваться другими приемами построения перспективы, а именно: выносом в картину или боковой стенкой.

<u>Пример.</u> Построить перспективу вертикального отрезка $AB$ (рисунок 14.13).

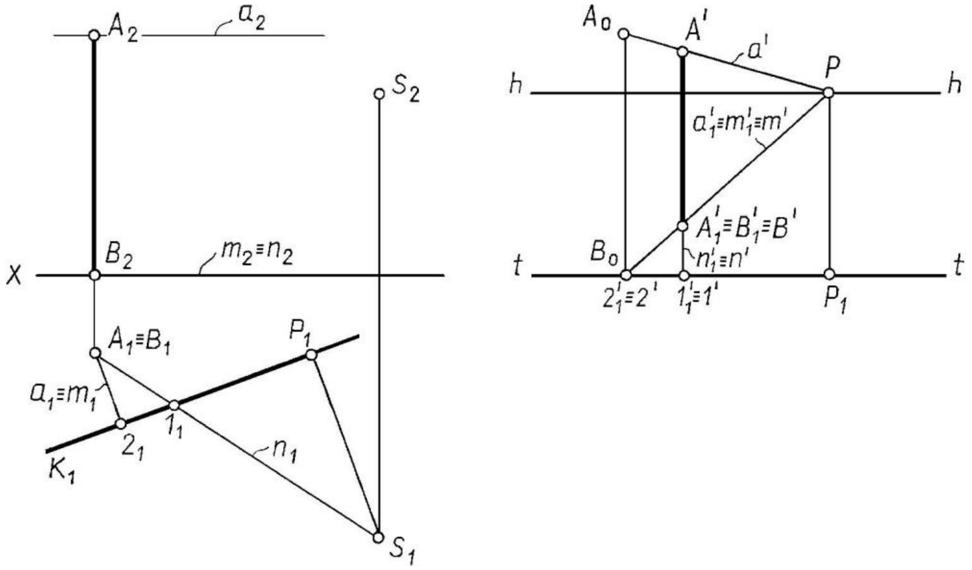



Рисунок 14.13

<u>Решение</u>

Построение перспективы вертикального отрезка основано на том, что натуральную величину такого отрезка можно отложить только в картине ($A_2B_2 = A_0B_0$), а затем, зная закон изменения величины проекции изображаемого отрезка построить его перспективу $A'B'$. При этом по мере удаления вертикального отрезка от картины в предметном пространстве изображение отрезка уменьшается (а в промежуточном пространстве – увеличивается).

Строим перспективу основания отрезка $AB$ точки $B$. С ней совпадает вторичная проекция отрезка $B' \equiv B' \equiv A'B'$.

Строим перспективу точки $A$. Для этого можно воспользоваться выносом на картину (рисунок 14.13) или боковой вертикальной плоскостью (боковой стенкой), как показано на рисунке 14.14.

Ту же задачу можно решить с помощью боковой стенки (рисунок 14.14).

В этом случае картинным и предметным следом задается удобная для выполнения построений вертикальная плоскость – боковая стенка (рисунок 14.14).

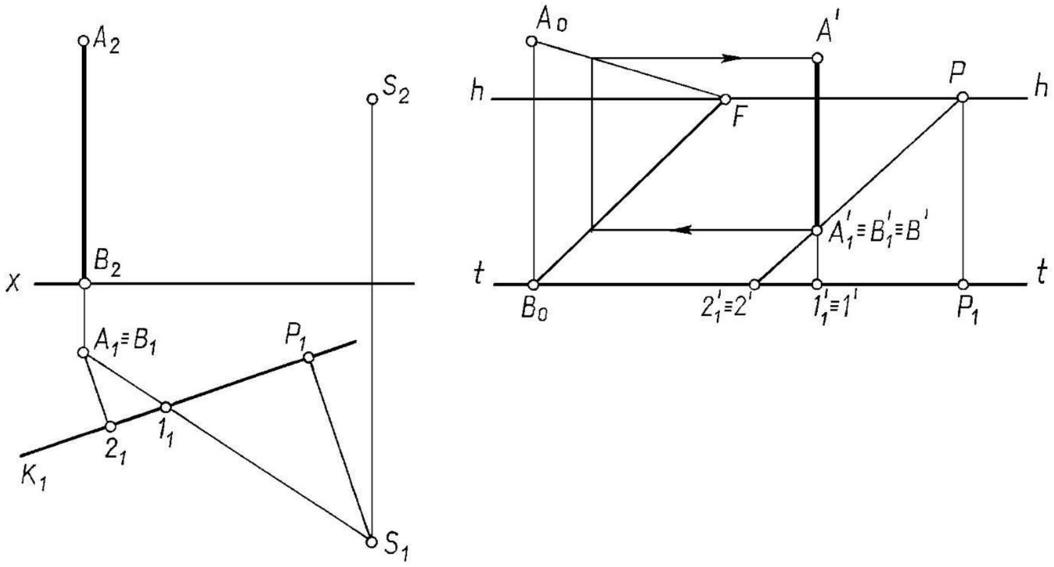



Рисунок 14.14

Также эту задачу можно решить радиальным способом (рисунок 14.15), т.е. найти точки пересечения проецирующих лучей $SA$ и $SB$ с картиной $K$

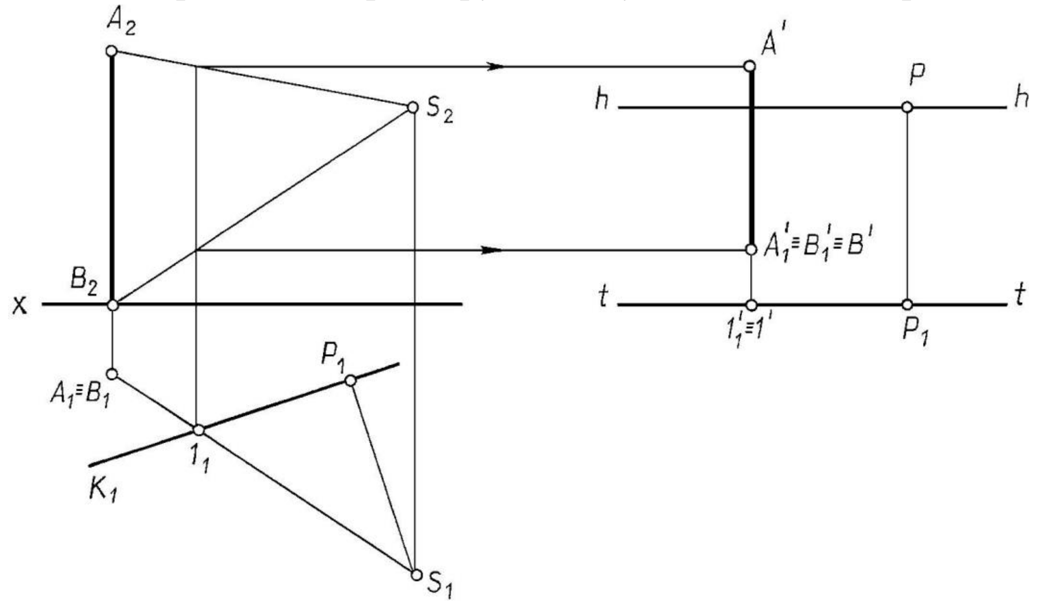



Рисунок 14.15

### 14.9 Построение перспективы прямой общего положения

Пример. Построить перспективу отрезка $AB$ прямой общего положения (рисунок 14.16).

Решение

Определяем картинный след прямой, которой принадлежит отрезок $AB$, точку $R$ на ортогональном чертеже – и строим ее в перспективе.

Находим точку схода прямой – точку $F$ на ортогональном чертеже – и строим её в перспективе.

$F'R'$ – перспектива прямой, которой принадлежит отрезок $AB$;

$F'R'$ – *в*торичная проекция.

Строим перспективу точки $A$ и точки $B$ с помощью вспомогательных прямых $SA$ и $SB$, идущих в точку стояния $S_1$. Отредактировать чертеж.

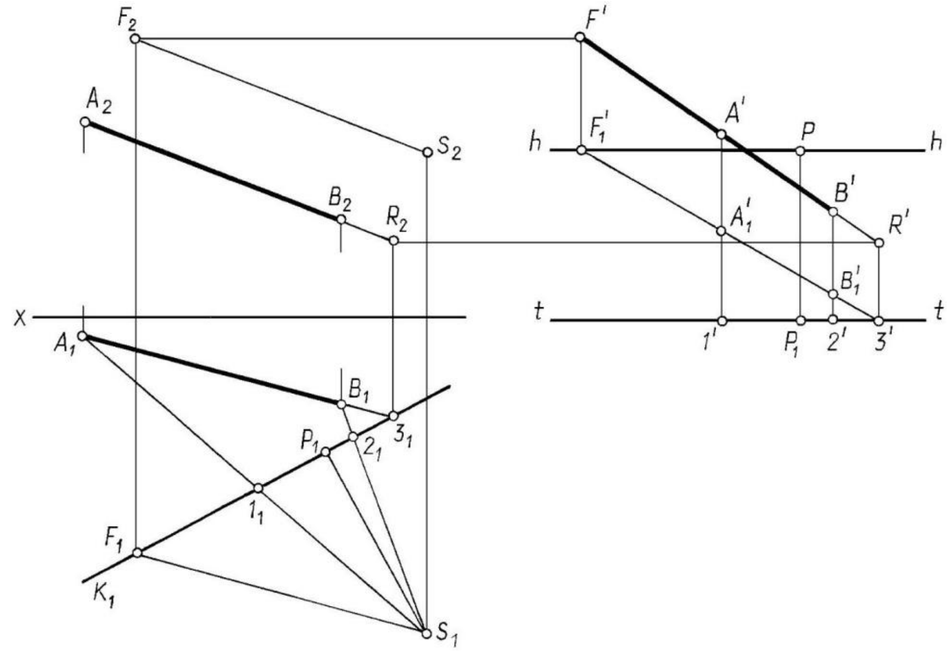



Рисунок 14.16

**14.10 Способы построения перспективы**

При построении перспективы используют следующие способы:

– радиальный или способ следа луча, который сводится к определению точек пересечения лучей с картинной плоскостью (рисунок 14.15);

– архитекторов, основанный на использовании точек схода параллельных прямых двух и более семейств (рисунок 14.17);

– масштабов, основанный на закономерностях искажения отрезков в направлении осей $X, Y, Z$ (масштабы широт, глубин, высот) (рисунок 14.18).

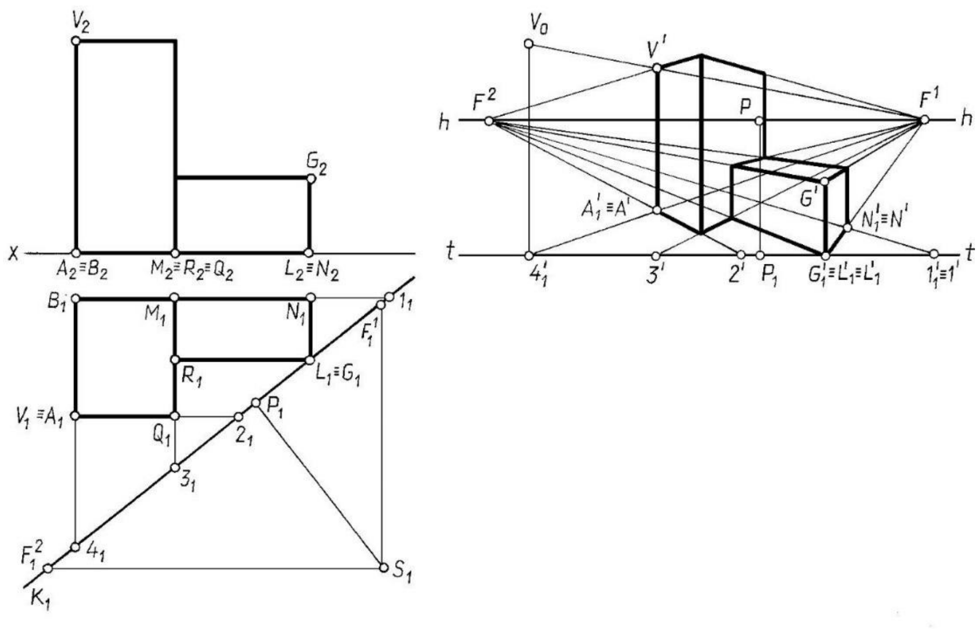



Рисунок 14.17

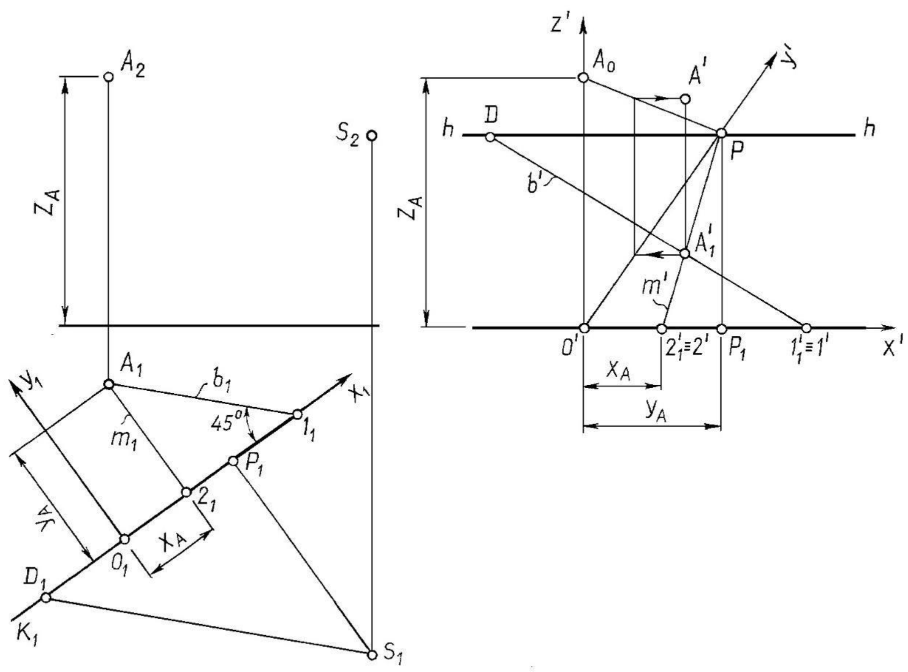



Рисунок 14.18

### 14.11 Выбор точки зрения

Выбор точки зрения включает три основных элемента, тесно связанных между собой и устанавливаемых совместно:

а) величина угла зрения $\varphi$;

б) расстояние точки зрения от объекта как положение главного луча $S$;

в) положение линии горизонта $hh$.

Выберем точку зрения на конкретном примере (рисунок 14.19), учитывая следующие рекомендации/

Картина задаётся так, чтобы она проходила хотя бы через одно вертикальное ребро.

Угол наклона картины к тому фасаду $\alpha$, который должен быть больше отражён в перспективе, равен 20°…30%.

Желательно, чтобы главный луч совпадал с биссектрисой угла зрения – угла, заключённого между крайними точками объекта.

Угол зрения $\varphi$ допускается в пределах 18°…53°. Оптимальная величина $\varphi = 28^0$.

Вид перспективного изображения зависит и от высоты точки зрения, т.е. высоты горизонта.

Перспектива, полученная с точки зрения, расположенной на высоте человеческого роста (около двух метров), называется перспективой с нормального горизонта.

Иногда точку зрения располагают выше изображаемого объекта, на высоте 100м и выше, тогда перспективу называют перспективой с птичьего полёта.

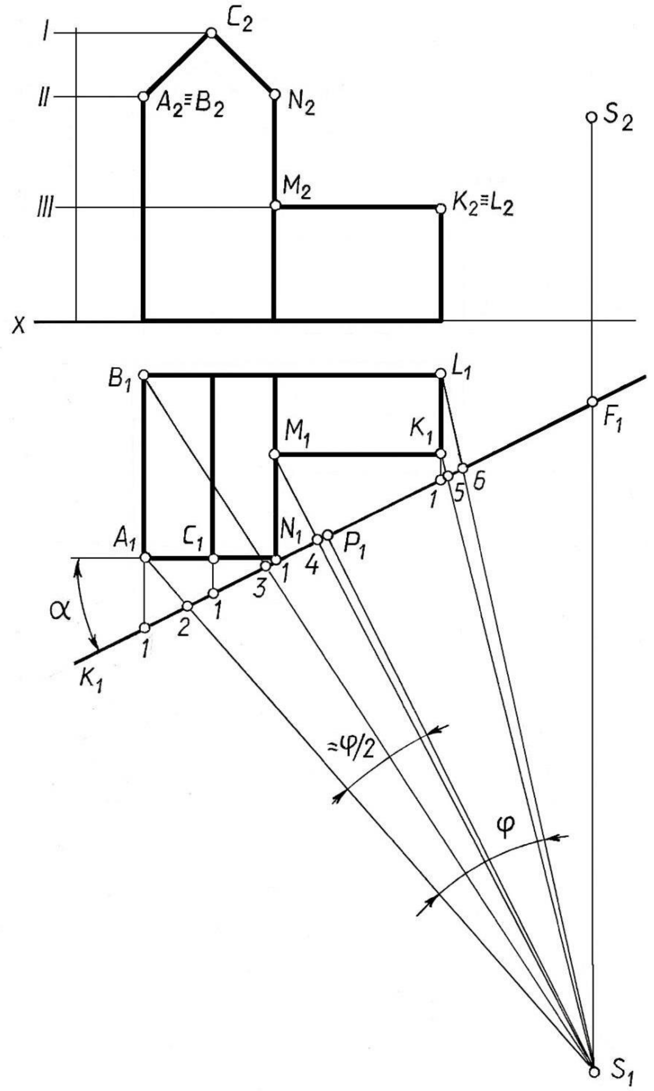



Рисунок 14.19

Перспективой с нулевого горизонта называется перспектива при расположении точки зрения на предметной плоскости.

Если высота горизонта мала или равна нулю (рисунок 14.20) для построения перспективы применяют так называемый «опущенный план».

При этом вторичная проекция объекта (план) строится не на предметной плоскости, а на некоторой горизонтальной плоскости $t_0t_0$, смещённой от предметной плоскости на произвольное расстояние. В связи с этим на перспективном изображении появляется новая линия $t_0t_0$ – линия опущенного плана.

Переход от опущенного плана к построению перспективы объёма выполняется с помощью боковой стенки (натуральные величины высоты I, II и III уровней откладывают в картине, а затем перемещают в исходное положение (на рисунке 14.20 построения показаны стрелками).

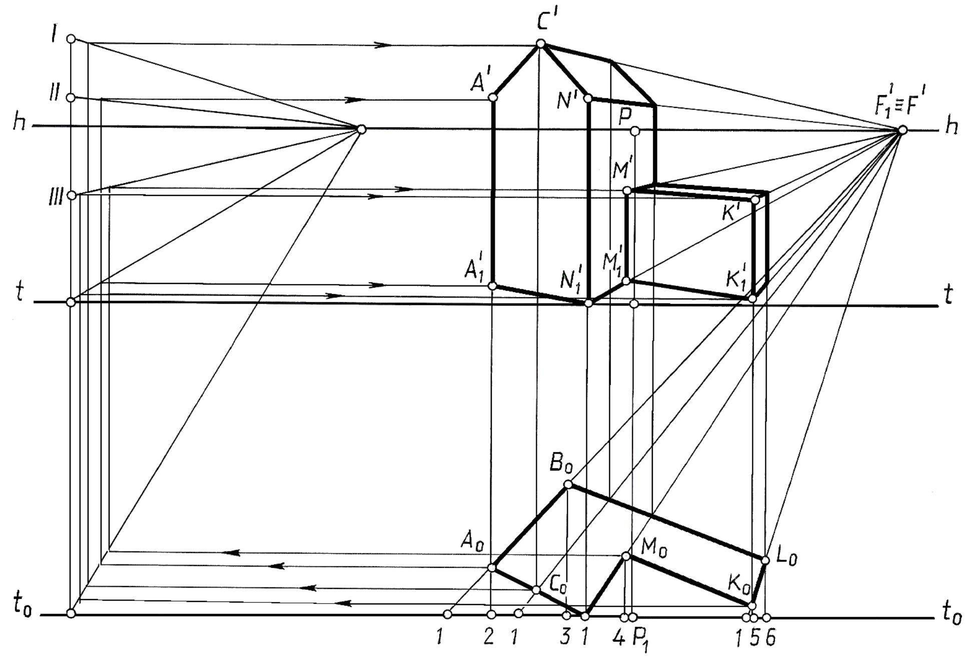


Рисунок 14.20

**14.12 Построение следов и точки схода прямой по перспективе и вторичной проекции прямой**

Пример. Построить картинный след $M$, предметный след $B$ и точку схода $F$ заданной прямой $l$ (рисунок 14.21).

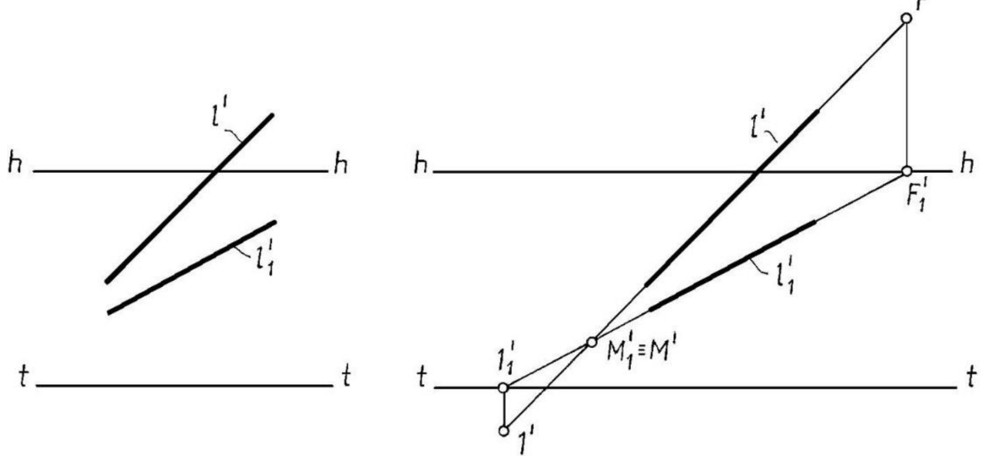


Рисунок 14.21

Решение.

Строим картинный след – точку пересечения прямой с картиной. Это точка $M,$ у которой вторичная проекция $M' = l' \cap tt,$ а перспектива $M'$ принадлежит перспективе прямой $l'$.

Отмечаем предметный след прямой – точку пересечения прямой с предметной плоскостью $B' \equiv B' = l' \cap l'$.

Строим точку схода – перспективу бесконечно удалённой точки прямой. Это точка $F,$ у которой вторичная проекция находится на линии горизонта и принадлежит вторичной проекции прямой $F' = l' \cap hh$, а перспектива точки $F'$ принадлежит перспективе прямой $l'$.

### 14.13 Деление отрезков на равные и пропорциональные части

Деление отрезков, параллельных картине, выполняется так же, как в ортогональных проекциях, т.к. сохраняется пропорциональность частей этих отрезков.

Пример. Разделить заданные отрезки в отношении 1:2 (рисунок 14.22).

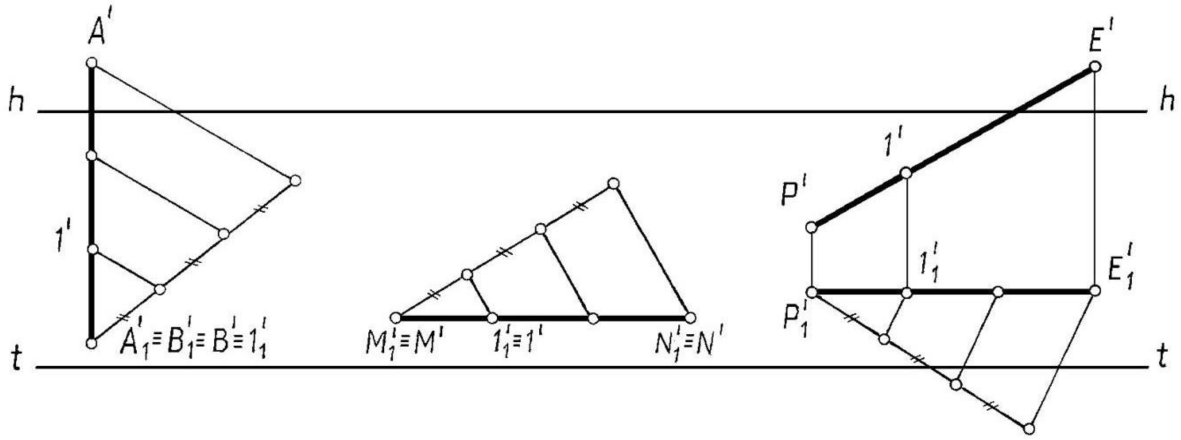



Рисунок 14.22

Решение.

Для решения используем теорему Фалеса. Луч, на котором откладываем заданное отношение, проводим под произвольным углом (однако этот вспомогательный луч параллелен картине). Выполненные построения ясны из чертежа.

Деление отрезков не параллельных картине, выполняется с использованием прямых, принадлежащих предметной плоскости и параллельных между собой, и, следовательно, имеющих общую точку схода.

Пример. Разделить заданные отрезки на три равные части (рисунок 14.23).

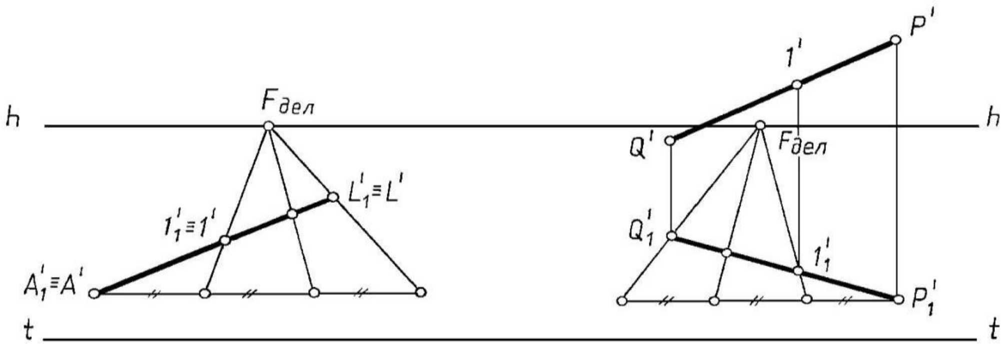



Рисунок 14.23

Решение.

Луч, на котором откладываем три равных отрезка, проводим параллельно

$tt$ (луч параллелен картине и принадлежит предметной плоскости). Затем, соединив конец заданного отрезка с последней засечкой на вспомогательном луче, находим точку пересечения полученной линии с линией горизонта (или точку схода вспомогательных прямых деления) – определяем $F_{\text{дел}}$. Проводим через $F_{\text{дел}}$ и засечки на вспомогательном луче линии.

# II ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Для успешной работы на практических занятиях обучающийся должен подготовиться по заданной теме: изучить материал по конспекту лекций и учебнику, отвечать на вопросы по изучаемой теме, знать алгоритмы решения типовых задач.

## 2.1 Методические указания для студентов по выполнению расчетно-графической работы

Настоящие методические указания и условия к расчетно-графическим работам содержат задачи для самостоятельной работы студентов.

Каждая задача имеет 30 вариантов. Номер варианта для каждого студента постоянный в течение семестра и совпадает с его порядковым номером в журнале группы. Количество и темы задач в семестре зависят от учебной программы по начертательной геометрии для каждого факультета и специальности.

Задачи охватывают весь материал курса. К каждой даны методические указания, за которыми следуют условие и образец выполнения.

Задачи выполняют в масштабе 1:1 на чертежной бумаге формата А3(297×420) с помощью инструментов, с соблюдением всех требований, предъявляемых к оформлению чертежей по ГОСТам ЕСКД.

На формате А3 наносят рамку поля чертежа на расстоянии 20 мм слева и по 5 мм справа, сверху и снизу.

На одном листе формата А3 может быть размещено от одной до четырех задач одного задания (см. образцы выполнения и компоновки задач). Задания выполняютсякарандашомс помощьючертежных инструментов, вначале тонкими линиями, которые, после окончательной проверки решения задачи преподавателем, обводятся.

Толщина линий должна соответствовать ГОСТу 2.303-68. При оформлении чертежа нужно стремиться к тому, чтобы все линии и надписи на чертеже были одной яркости.

Рекомендуется использовать следующие типы линий:

– линии видимого контура – **основной сплошной** линией толщиной $S$;

– линии невидимого контура – **штриховой** – $S/2$;

– осевые, центровые – **штрихпунктирной** – $S/3$;

– линии вспомогательных построений и линии связи – **сплошными тонкими** линиями толщиной $S/3$.

Все построения на чертеже следует сохранить.

Все надписи, буквенные обозначения и цифры должны быть выполнены стандартным шрифтом 3,5; 5 и 7 мм в соответствии с ГОСТом 2.304-81.

Расчетно-графические задания, подписанные преподавателем, необходимо в конце семестра оформить в альбом формата А3(420×297) с титульным листом, который после получения допуска представляется студентом на экзамене.

Образец титульного листа контрольной работы (ПРИЛОЖЕНИЕ А).

## 2.2 Расчетно-графические индивидуальные задания

**Задача 1.** Построить линию пересечения треугольников АВС и EDK и показать видимость их в проекциях. Определить натуральную величину треугольника АВС. Данные для своего варианта взять из таблицы Б1 (ПРИЛОЖЕНИЕ Б). Пример выполнения листа 1 приведен на рисунке 2.2.1.

**Указания к решению задачи 1.** В левой половине листа формата А3 (297×420 мм) намечаются оси координат и из таблицы Б1 согласно своему варианту берутся координаты точек А, B, C, D, E, К вершин треугольника (рисунок 2.2.1). Стороны треугольников и другие вспомогательные прямые проводятся вначале тонкими сплошными линиями. Линии пересечения треугольников строятся по точкам пересечения сторон одного треугольника с другим или по точкам пересечения каждой из сторон одного треугольника с другим порознь. Такую линию можно построить, используя и вспомогательные секущие проецирующие плоскости. Видимость сторон треугольника определяется способом конкурирующих точек. Видимые отрезки сторон треугольников выделяют сплошными жирными линиями, невидимые следует показать штриховыми линиями. Определяется натуральная величина треугольника АВС.

Плоскопараллельным перемещением треугольник $ABC$ приводится в положение проецирующей плоскости и далее вращением вокруг проецирующей прямой в положение, когда он будет параллелен плоскости проекций. В треугольнике $ABC$ следует показать и линию $MN$ пересечения его с треугольником $EDK$.

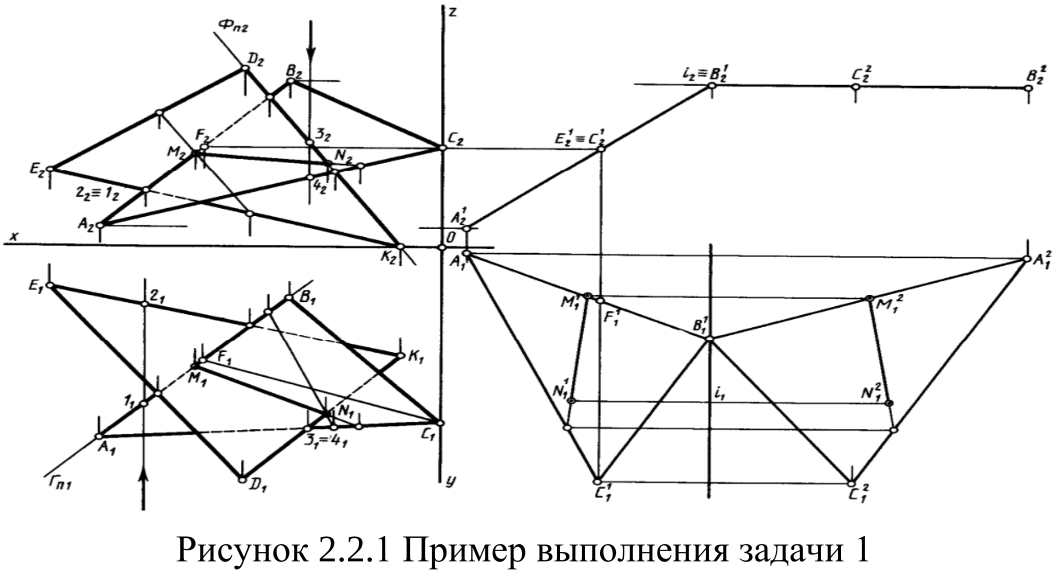


Рисунок 2.2.1 Пример выполнения задачи 1

**Задача 2.** Построить проекции пирамиды, основанием которой является треугольник $ABC$, а ребро $S$А определяет высоту $h$ пирамиды. Данные для своего варианта взять из таблицы Б2 (ПРИЛОЖЕНИЕ Б). Пример выполнения листа 2 приведен на рисунке 2.2.2.

**Указания к решению задачи 2.** В левой половине листа формата $A3$ намечаются оси координат и из таблицы Б2 согласно своему варианту берутся координаты точек $A, B$ и $C$ вершин треугольника $ABC$.

По координатам строится треугольник в проекциях. В точке $A$ восставляется перпендикуляр к плоскости треугольника и на нем выше этой плоскости откладывается отрезок $AS$, равный заданной величине $h$. Строятся ребра пирамиды. Способом конкурирующих точек определяется их видимость. Видимые ребра пирамиды следует показать сплошными жирными линиями, невидимые — штриховыми линиями. Стороны треугольника $ABC$ (основание пирамиды) следует обвести черной пастой; ребра $SA, SB,$ и $SC$ пирамиды обвести красной пастой. Все вспомогательные построения необходимо сохранить на эпюре и показать их тонкими сплошными линиями зеленой (синей) пастой.

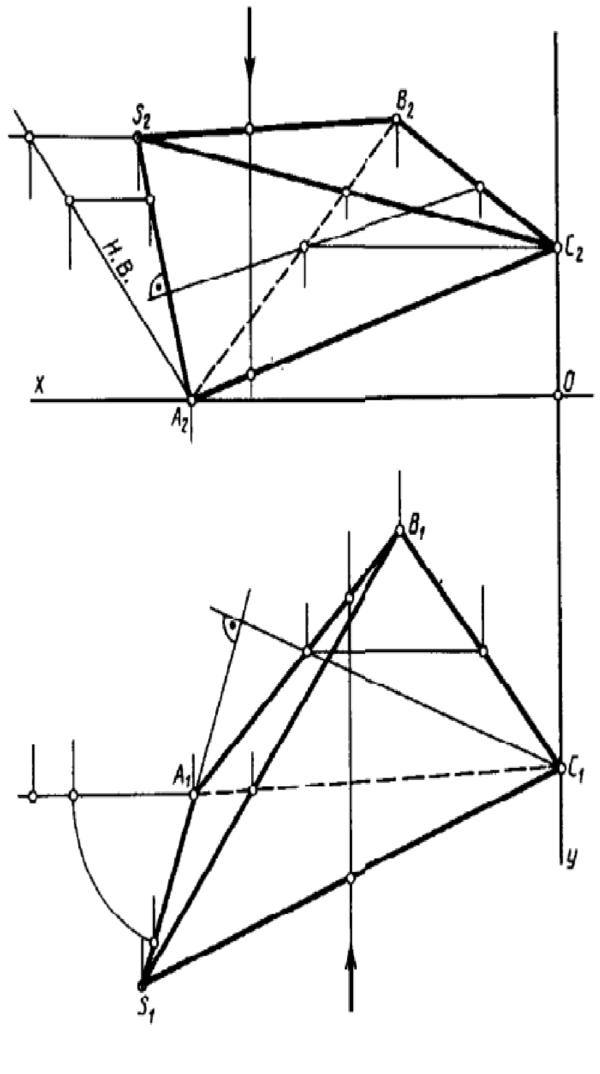



Рисунок 2.2.2 – Пример выполнения задачи 2

**Задача 3.** Построить линию пересечения пирамиды с прямой призмой. Данные для своего варианта взять из таблицы БЗ (ПРИЛОЖЕНИЕ Б). Пример выполнения листа 3 приведен на рисунке 2.2.3.

**Указания к решению задачи 3.** Намечаются оси координат и из таблицы БЗ согласно своему варианту берутся координаты точек $A, B, C$ и $D$ вершин пирамиды и координаты точек $E, K, G$ и $U$ вершин многоугольника нижнего основания призмы, а также высота $h$ призмы. По этим данным строятся проекции многогранников (пирамида и призма). Призма своим основанием стоит на плоскости уровня, горизонтальные проекции ее вертикальных ребер преобразуются в точки. Грани боковой поверхности призмы представляют собой отсеки горизонтально проецирующих плоскостей. Линии пересечения многогранников определяются по точкам пересечения ребер каждого из них с гранями другого многогранника или построением линии пересечения граней многогранника.

Соединяя каждые пары таких точек одних и тех же граней отрезками прямых, получаем линию пересечения многогранников. Видимыми являются только те стороны многоугольника пересечения, которые принадлежат видимым граням многогранников. Примечание. Задаче 3 уделить особое внимание. Все построения на чертеже тщательно проверить. Допущенные ошибки приводят к неправильному решению следующей задачи — задачи 4 (построение развертки многогранников).

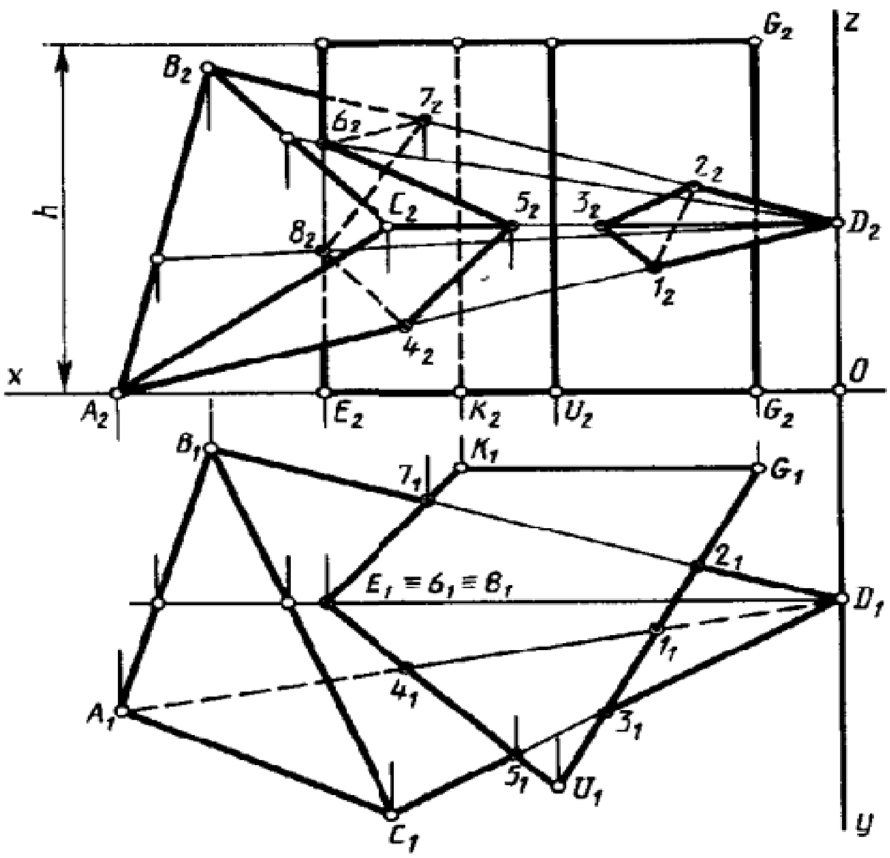


Рисунок 2.2.3 – Пример выполнения задачи 3

**Задача 4.** Построить развертки пересекающихся многогранников — прямой призмы с пирамидой. Показать на развертках линию их пересечения. Пример выполнения листа 4 приведен на рисунке 2.2.4. Чтобы решить данную задачу, чертеж-задание для листа 4 получить, переведя на кальку формата 297×420 мм чертеж пересекающихся многогранников (задача 3).

**Указания к решению задачи 4.** Заданные элементы многогранников на кальке показать черной пастой; линии их пересечения обвести красной пастой. Здесь выполняются вспомогательные построения (их обвести синей или зеленой пастой) для определения натуральных величин ребер многогранников.

На листе бумаги ватман формата А3 (297×420 мм) строятся развертки многогранников.

Развертка прямой призмы. Для построения развертки прямой призмы поступают следующим образом:

а) проводят горизонтальную прямую;

б) от произвольной точки $G$ этой прямой откладывают отрезки $GU, HE, EK, KG$, равные длинам сторон основаниям призмы;

в) из точек $G$ и $G_1$ восставляют перпендикуляры и на них откладывают величины, равные высоте призмы. Полученные точки соединяют прямой.

Прямоугольник $G\,G_1\,G_1G$ является разверткой боковой поверхности призмы. Для указания на развертке граней призмы из точек $U$, Е, $K$ восставляют перпендикуляры;

г) для получения полной развертки поверхности призмы к развертке поверхности пристраивают многоугольники ее оснований. Для построения на развертке линии пересечения призмы с пирамидой замкнутых ломаных линий 1 2 3 и 4 5 6 7 8 пользуемся вертикальными прямыми. Например, для определения положения точки 1 на развертке поступаем так: на отрезке $GU$ от точки $G$ вправо откладываем отрезок $G_{10}$, равный отрезку $g_1$ (рисунок 2.2.3). Из точки $1_0$ восставляем перпендикуляр к отрезку $GU$ и на нем откладываем аппликату $z$ точки 1. Аналогично строят и находят остальные точки.

**Развертка пирамиды.** Определяют натуральную величину каждого из ребер пирамиды. Зная натуральные величины ребер пирамиды, строят ее развертку. Определяют последовательно натуральные величины граней пирамиды. На ребрах и на гранях пирамиды (на развертке) определяют вершины пространственной ломаной пересечения пирамиды с призмой.

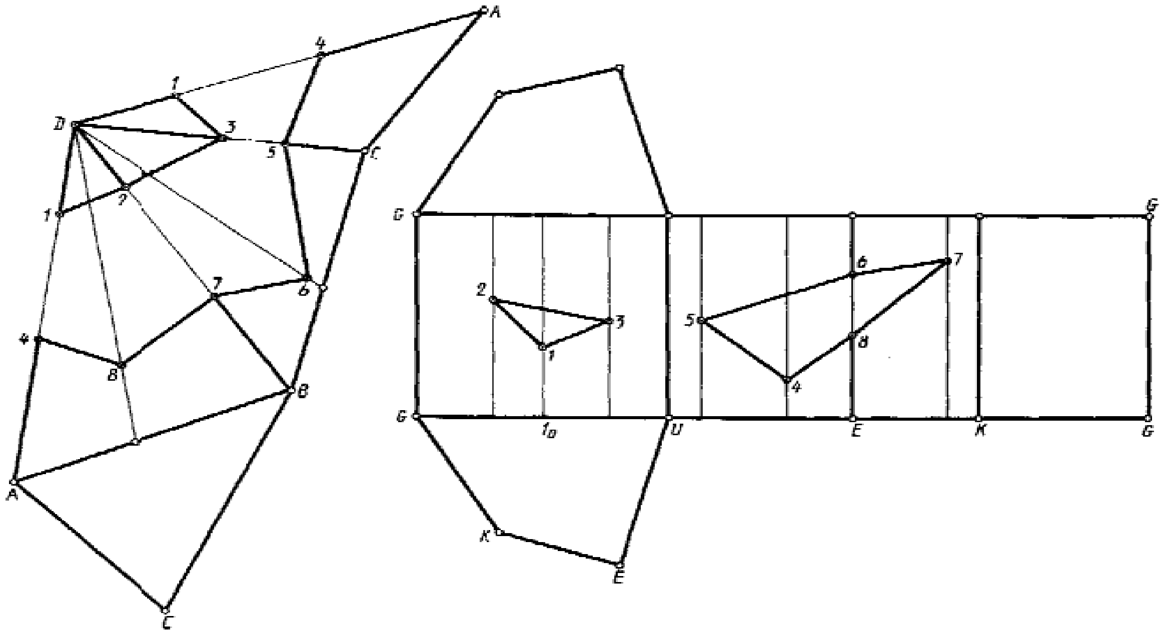


Рисунок 2.2.4 – Пример выполнения задачи 4

**Задача 5.** Построить в плоскости $ABC$ проекции окружности заданного радиуса $R$ с центром в точке $A$. Данные для своего варианта взять из таблицы Б4 (ПРИЛОЖЕНИЕ Б). Пример выполнения листа приведен на рисунке 2.2.5.

**Указания к решению задачи 5.** В левой трети листа формата А3 (297×420 мм) намечают оси координат и из таблицы Б4 согласно своему варианту берутся координаты точек $A, B$ и $C$, определяющие плоскость окружности с центром в точке $A$ и заданного радиуса $R$ (рисунок 2.2.5). На основные плоскости проекций П1 и П2 окружность проецируется в виде эллипсов.

В горизонтальной плоскости проекций П1 большая ось 12 эллипса совпадает с проекцией направления горизонтали плоскости и равна $2R$ – диаметру окружности; малая ось равна ортогональной проекции того диаметра окружности, который определяет наибольший угол наклона плоскости окружности к плоскости проекций П1.

Построение малой оси может быть выполнено следующим образом. Отметим в горизонтальной плоскости проекций соответственно полухорды 35 и 56 эллипса и окружности. Полухорду 56 вращением вокруг точки 5 совместим с большой осью.

В совмещенном положении она равна отрезку 57. Точки 3 и 7 соединяем прямой линией. Из точки 2 проведем прямую, параллельную прямой 37, до пересечения в точке 8 с направлением малой оси эллипса. Отрезок а8 определяет величину малой полуоси эллипса – горизонтальной проекции окружности.

Во фронтальной плоскости проекции П2 большая ось эллипса совпадает с направлением фронтали плоскости и равна 2R – диаметру окружности; малая ось равна ортогональной проекции того диаметра окружности, который определяет наибольший угол наклона плоскости окружности к плоскости проекций П2.

Малая ось эллипса на фронтальной плоскости проекций определяется построением, аналогичным выполненному в горизонтальной плоскости проекций.

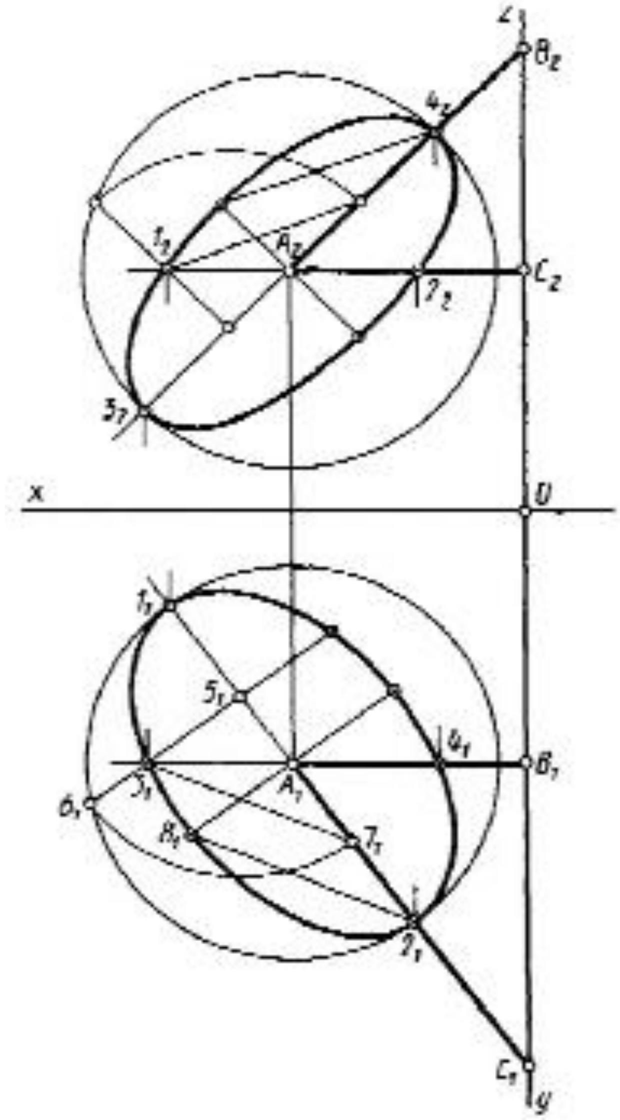


Рисунок 2.2.5 – Пример выполнения задачи 5

**Задача 6.** На трехпроекционном чертеже построить недостающие проекции сквозного отверстия в сфере заданного радиуса $R$. Вырожденная (фронтальная) проекция сквозного отверстия представлена четырехугольником: координаты проекций точек $A, B, C$ и $D$ вершин четырехугольника – сквозного отверстия на сфере – известны (таблица Б5) (ПРИЛОЖЕНИЕ Б). Пример выполнения листа приведен на рисунке 2.2.6.

**Указания к решению задачи 6.** Намечаются оси координат с началом координат в центре незаполненной части листа формата А3. Строятся проекции сферы заданного радиуса $R$ с центром в точке $O$. Определяются по заданным координатам (таблица Б5) проекции точек $A, B, C$ и $D$ (вершин четырехугольника) сквозного отверстия на сфере и строится многоугольник – вырожденная проекция линии сквозного отверстия. Далее задача сводится к определению недостающих проекций точек поверхности сферы.

Вначале определяются характерные точки линии сквозного отверстия: точки на экваторе, главном меридиане, наиболее удаленные и ближайшие точки.

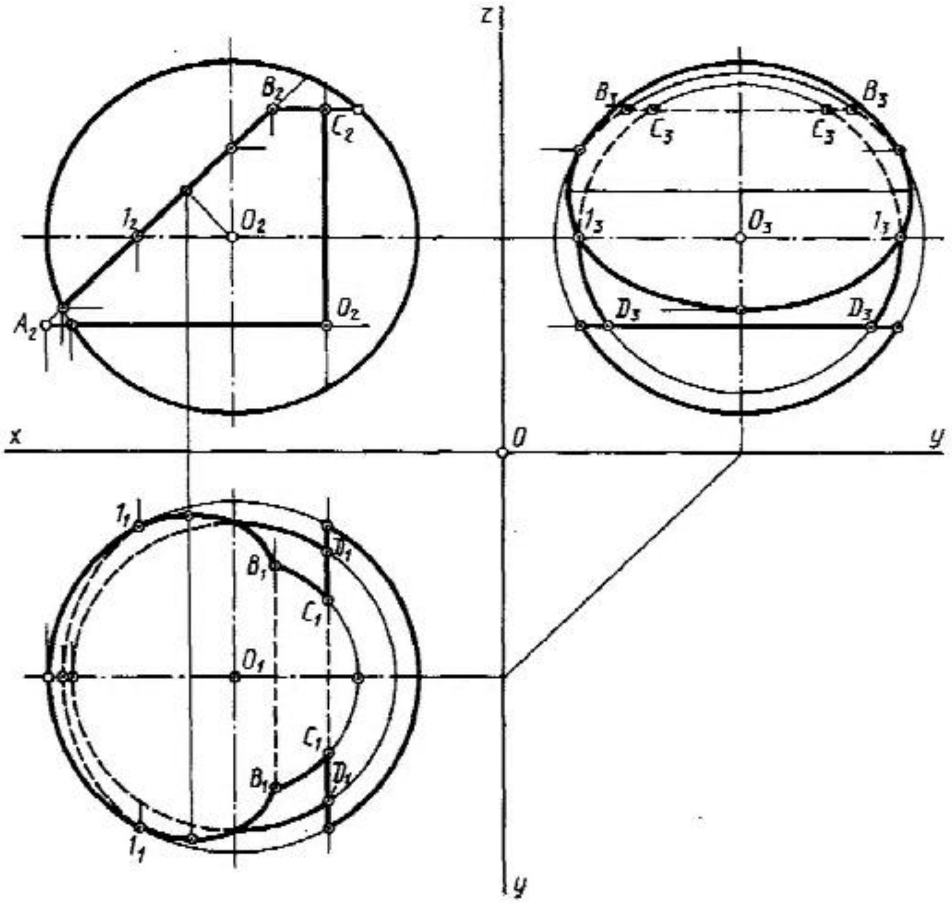



Рисунок 2.2.6 – Пример выполнения задачи 6

**Задача 7.** Построить линию пересечения конуса вращения плоскостью $ABC$ общего положения. Данные для своего варианта взять из таблицы Б6 (ПРИЛОЖЕНИЕ Б). Пример выполнения приведен на рисунке 2.2.7.

**Указания к решению задачи 7.** В левой половине листа формата А3 намечаются оси координат и из таблицы Б6 согласно своему варианту берутся величины, которыми задаются поверхность конуса вращения и плоскость $ABC$. Определяется центр (точка $K$) окружности радиусом $R$ основания конуса вращения в плоскости уровня. На вертикальной оси, на расстоянии $h$ от плоскости уровня и выше ее, определяется вершина конуса вращения. По координатам точек $A, B, C$ определяется секущая плоскость.

В целях облегчения построения линии сечения строится дополнительный чертеж заданных геометрических образов. Выбирается дополнительная система П3П1 плоскостей проекций с таким расчетом, чтобы секущая плоскость была представлена как проецирующая. Дополнительная плоскость проекций П3 перпендикулярна данной плоскости $ABC$. Линия сечения (эллипс)проецируется на плоскость проекций П3 в виде отрезка прямой на следе этой плоскости. Имея проекцию эллипса сечения на дополнительной плоскости П3, строят основные ее проекции.

Все основные и вспомогательные построения на основном и дополнительных эпюрах сохранить и показать тонкими сплошными линиями.

Полная развертка цилиндра вращения представляется разверткой его боковой поверхности и основаниями — окружностями радиуса $r$. Развертка конуса вращения. Разверткой поверхности конуса вращения является круговой сектор с углом $a = r/L \times 360$, где $r$ – радиус окружности основания конуса вращения; $L$ – длина образующей.

На развертке конуса вращения строят прямолинейные образующие или параллели, проходящие через характерные точки линий пересечения конуса вращения с цилиндром вращения. Через такие точки проходят линии пересечения поверхностей в преобразовании (на развертке).

Кальку и листы писчей бумаги с планом решения задачи 9 наклеить с левого края листа 6.

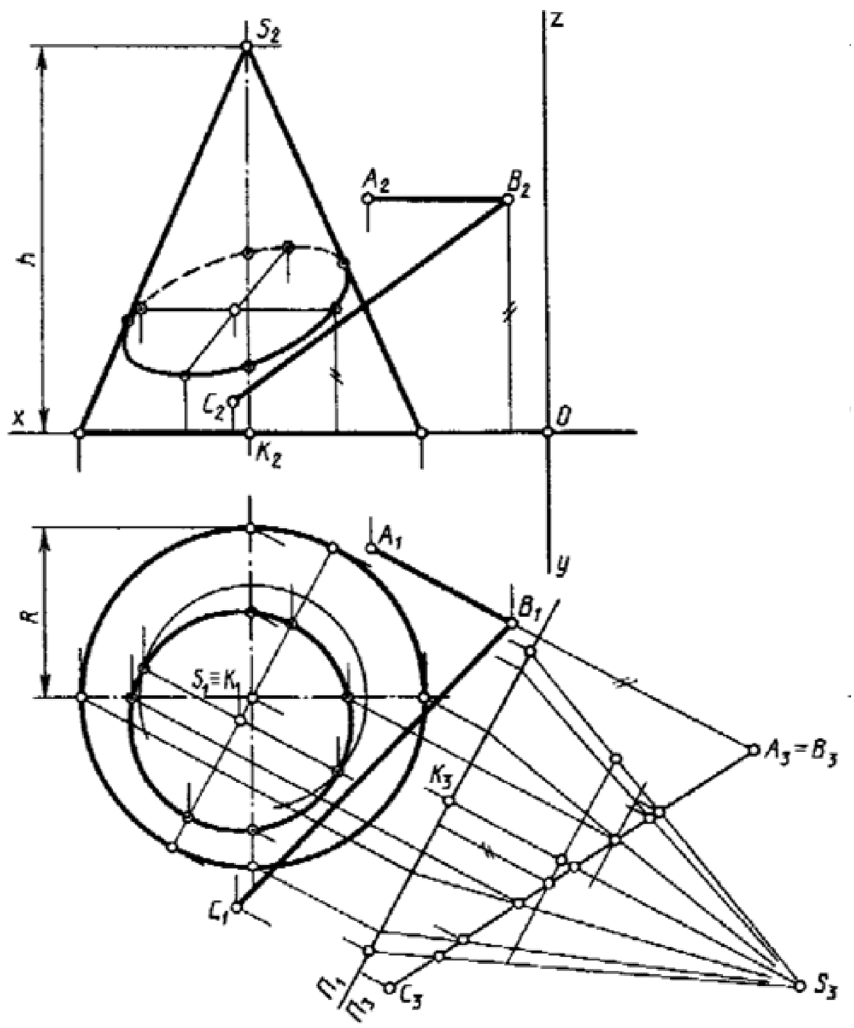



Рисунок 2.2.7 – Пример выполнения задачи 7

**Задача 8.** Построить линию пересечения конуса вращения с цилиндром вращения. Оси поверхностей вращения – взаимно перпендикулярные проецирующие скрещивающиеся прямые. Данные для своего варианта взять из таблицы Б7 (ПРИЛОЖЕНИЕ Б). Пример выполнения приведен на рисунке 2.2.8.

**Указания к решению задачи 8.** В правой половине листа намечают оси координат и из таблицы Б7 берут согласно своему варианту величины, которыми задаются поверхности конуса вращения и цилиндра вращения. Определяют центр (точка $K$) окружности радиуса $R$ основания конуса вращения в горизонтальной координатной плоскости. На вертикальной оси на расстоянии $h$ от плоскости уровня и выше ее определяют вершину конуса вращения. Осью цилиндра вращения является фронтально-проецирующая прямая точки $E$, основаниями цилиндра являются окружности радиуса $r$. Образующие цилиндра имеют длину, равную $3r$ и делятся пополам фронтальной меридиональной плоскостью конуса вращения.

С помощью вспомогательных секущих плоскостей определяют точки пересечения очерковых образующих одной поверхности с другой и промежуточные точки линии пересечения поверхностей. Проводя вспомогательную секущую фронтальную меридиональную плоскость конуса вращения, определяют точки пересечения главного меридиана (очерковых образующих) конуса вращения с параллелью (окружностью) проецирующего цилиндра. Выбирая горизонтальную секущую плоскость, проходящую через ось цилиндра вращения, определяют две точки пересечения очерковых образующих цилиндра с поверхностью конуса.

Высшую и низшую, а также промежуточные точки линии пересечения поверхности находят с помощью вспомогательных горизонтальных плоскостей – плоскостей уровня. По точкам строят линию пересечения поверхности конуса вращения с цилиндром вращения и устанавливают ее видимость в проекциях.

Все основные вспомогательные построения на эпюре сохранить и показать тонкими сплошными линиями.

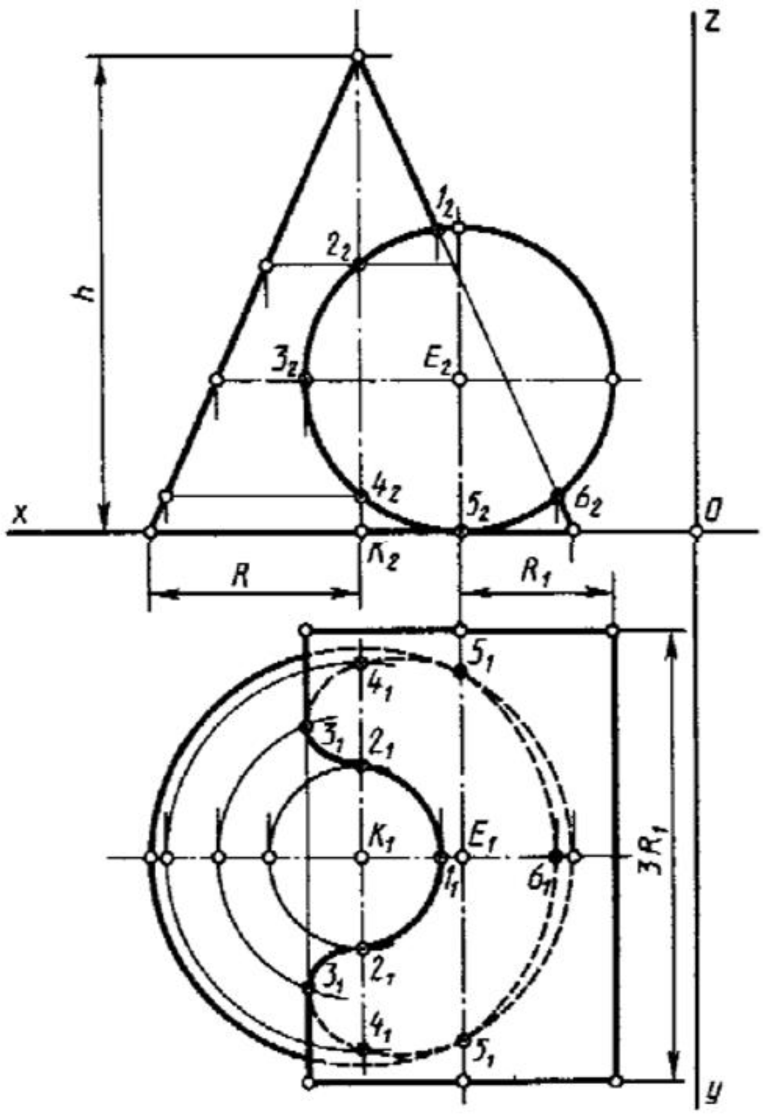



Рисунок 2.2.8 – Пример выполнения задачи 8

**Задача 9.** Построить развертки пересекающихся цилиндра вращения с конусом вращения. Показать на развертках линии их пересечения. Чертеж задание для листа 9 получить, переведя на кальку формата А3 (297×420 мм) чертеж пересекающихся поверхностей с листа задачи 8 (рисунок 2.2.8). Пример выполнения листа 9 приведен на рисунке 2.2.9.

**Указания к решению задачи 9.** Все вспомогательные построения для определения натуральных величин образующих поверхностей и точек их пересечения сохранить.

На листе бумаги ватмана формата А2 (297×420 мм) строят развертки поверхностей.

Развертка цилиндра вращения. Выбирают горизонтальную прямую линию и на ней спрямляют линию нормального сечения цилиндра вращения – окружность радиуса $r$. Строят развертку боковой поверхности цилиндра. На развертке помечают прямолинейные образующие, проходящие через характерные точки пересечения цилиндра с конусом. Эти точки отмечают на соответствующих образующих. Они определяют линию пересечения поверхностей развертки, поверхности сферы к плоскостям проекций. Все вспомогательные построения на чертеже сохранить и обвести тонкими линиями.

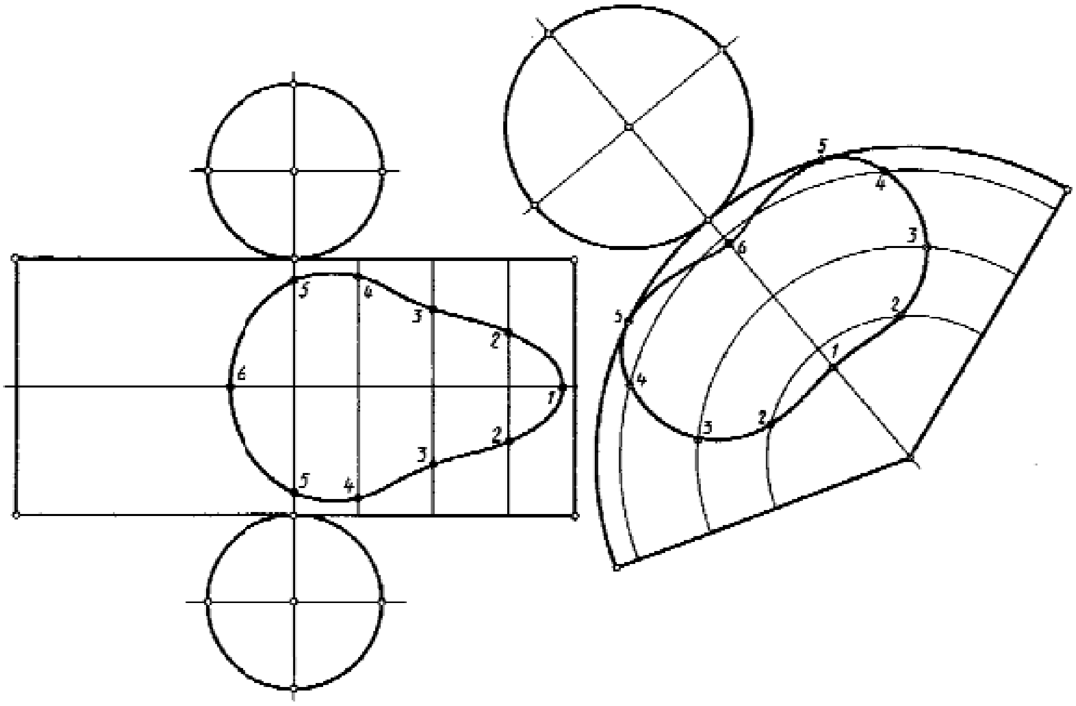


Рисунок 2.2.9 – Пример выполнения задачи 9

**Задача 10.** Построить линию пересечения фронтально-проецирующего цилиндра вращения с поверхностью открытого тора (кольцо). Данные для своего варианта взять из таблицы Б8 (ПРИЛОЖЕНИЕ Б). Пример выполнения листа 10 приведен на рисунке 2.2.10.

**Указания к решению задачи 10**. В левой половине листа намечают оси координат и из таблицы Б8 берут согласно своему варианту величины, которыми задаются поверхности цилиндра и тора (кольца). Осью тора является координатная ось $y$, радиус (расстояние от центра производящей окружности до оси вращения) осевой линии тора $R -$ 60 мм, а радиус производящей окружности $R1$. Тор ограничен двумя координатными плоскостями $xOy$ и $yOz$, точка К – центр производящей окружности радиусом $R1$ в плоскости $xOy$.

Осью цилиндра вращения радиусом $r$ является фронтально-проецирующая прямая, проходящая через точку $E$. Образующие цилиндра имеют длину, равную $3r$, и делятся пополам фронтальной плоскостью осевой линии тора (окружности радиуса $R$). Тор имеет три системы круговых сечений. Одна система таких сечений находится в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, другая – в проецирующих плоскостях, вращающихся вокруг этой оси.

При построении линии пересечения поверхностей прежде всего необходимо определить ее опорные точки пересечения очерковых образующих одной поверхности с другой поверхностью. В нашем случае вырожденная фронтальная проекция (окружность) цилиндра является фронтальной проекцией искомой линии пересечения, поскольку одна из пересекающихся поверхностей (цилиндр вращения) – проецирующая. Задача сводится к определению недостающих (горизонтальных) проекций точек линии пересечения заданных поверхностей. Такие точки определяют с помощью секущих фронтальных плоскостей. Среди них должны быть и точки, в которых линия пересечения переходит от видимой части к ее невидимой.

Построив линию пересечения поверхностей и установив ее видимость, а также установив видимость других линий поверхностей, все основные вспомогательные построения на эпюре сохранить и показать тонкими сплошными линиями.

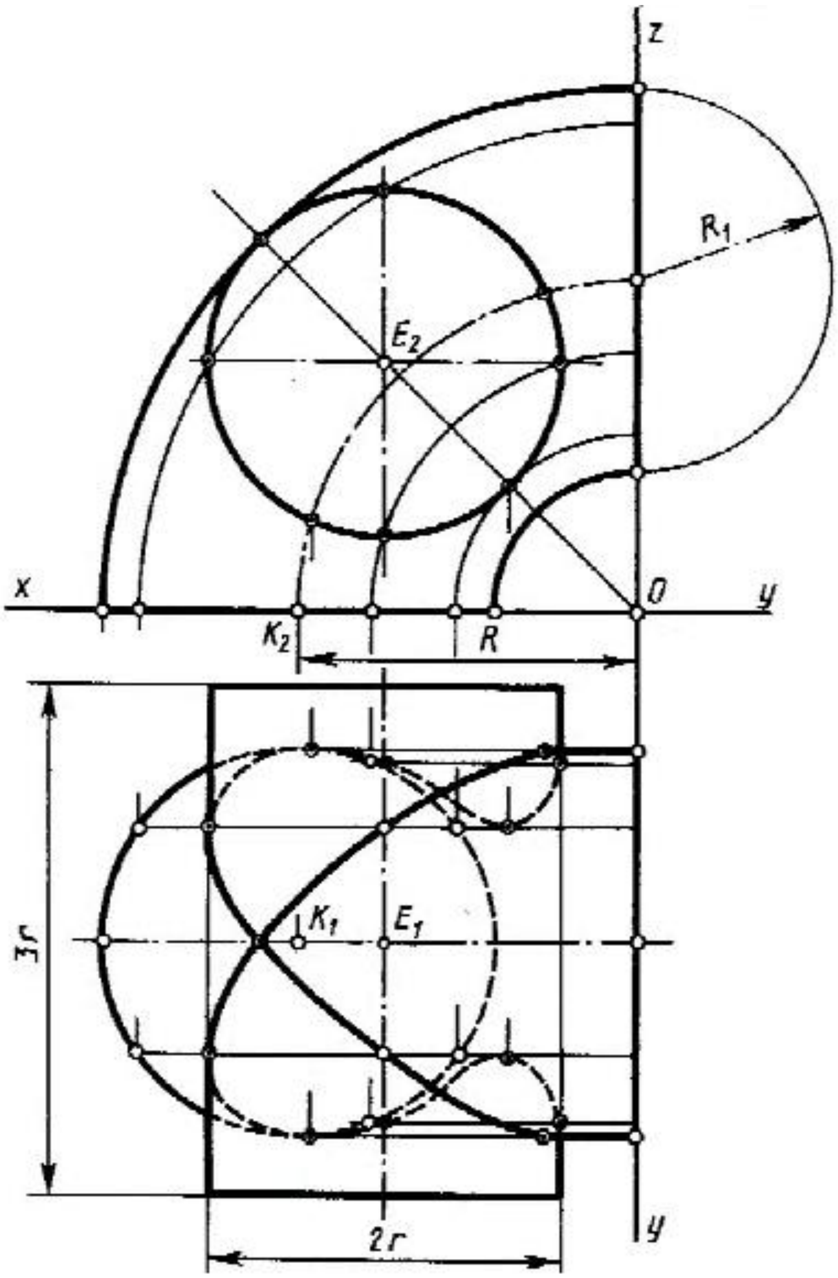



Рисунок 2.2.10 – Пример выполнения задачи 10

**Задача 11.** Построить линию пересечения фронтально-проецирующего цилиндра вращения с поверхностью наклонного конуса с круговым основанием. Данные для своего варианта взять из таблицы Б9 (ПРИЛОЖЕНИЕ Б). Пример выполнения листа 11 приведен на рисунке 2.2.11.

**Указания к решению задачи 11**. В правой половине листа намечают оси координат и из таблицы Б9 берут необходимые данные (согласно своему варианту) для построения поверхностей. Цилиндр вращения является проецирующей поверхностью. Линия пересечения проецирующего цилиндра с конусом уже представлена на чертеже одной (фронтальной) проекцией в границах фронтального очерка конуса. Задача сводится к построению недостающей (горизонтальной) проекции такой линии. Характерные и другие (дополнительные) точки линии пересечения поверхностей определяют с помощью секущих плоскостей-посредников. Построив линию пересечения поверхностей и определив ее видимость, а также определив видимость других линий поверхностей, все основные вспомогательные построения на эпюре сохранить и показать тонкими сплошными линиями.

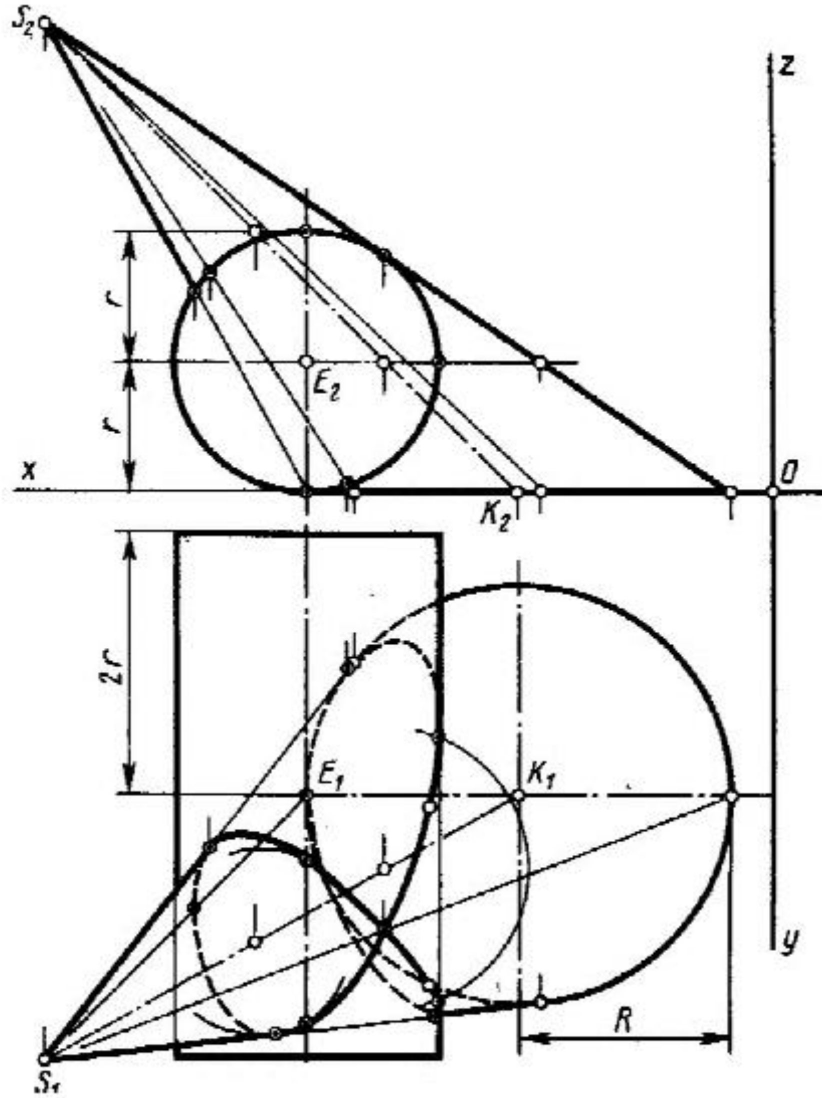



Рисунок 2.2.11 – Пример выполнения задачи 11

**Задача 12.** Построить линию пересечения закрытого тора с поверхностью наклонного цилиндра вращения. Заданные поверхности имеют общую фронтальную плоскость симметрии. Данные для своего варианта взять из таблицы Б10 (ПРИЛОЖЕНИЕ Б). Пример выполнения листа приведен на рисунке 2.2.12.

**Указания к решению задачи 12.** В левой половине листа формата А3 намечают оси координат и из таблицы Б10 согласно своему варианту берут заданные величины, которыми определяются поверхности тора и цилиндра вращения. Определяют по координатам положение точки $E$, т.е. точки пересечения вертикальной оси тора с наклонной осью цилиндра вращения радиуса $r = 2R/3$.

Главным меридианом поверхности тора является замкнутая линия, состоящая из двух пересекающихся на оси вращения дуг окружностей радиуса $2R$ и отрезка прямой – проекции экваториальной параллели, представляющей собой окружность с центром в точке $K$ и радиусом $R$ в плоскости уровня $xOy$.

Ось цилиндра вращения пересекается с осью поверхности тора в точке $E$ под углом β. Основание цилиндра вращения касается профильной координатной плоскости $yOz$.

Точки пересечения фронтальных меридианов заданных поверхностей вращения принадлежат искомой линии их пересечения. Они определяются на чертеже без каких-либо дополнительных построений. Другие точки линии пересечения можно построить, используя (как вспомогательные секущие) концентрические сферические посредники.

Из точки пересечения осей как из центра проводится сфера произвольного радиуса. Она пересекает обе поверхности по окружностям. Фронтальные поверхности окружностей изображаются отрезками прямых линий, которые пересекаются в точках, являющихся фронтальными проекциями точек искомой линии пересечения поверхностей. Изменяя радиус вспомогательной секущей сферы, можно получить последовательный ряд точек линии пересечения.

Определив достаточное число точек для построения линии пересечения поверхностей и определив ее видимость в проекциях, все основные вспомогательные построения на эпюре сохранить и показать тонкими сплошными линиями.

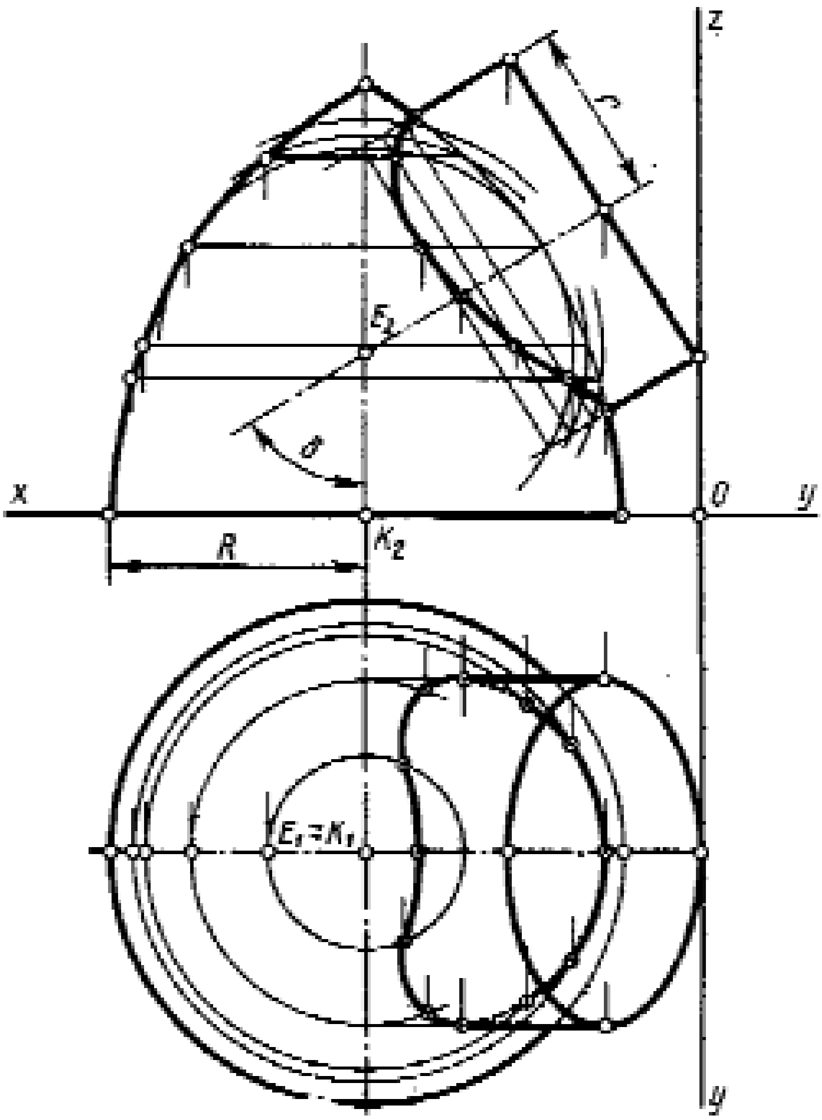



Рисунок 2.2.12 – Пример выполнения задачи 12

**Задача 13.** Построить линию пересечения конуса с поверхностью открытого тора (кольца). Данные для своего варианта взять из таблицы Б11 (ПРИЛОЖЕНИЕ Б). Пример выполнения листа приведен на рисунке 2.2.13.

**Указания к решению задачи 13.** В правой половине листа намечают оси координат и из таблицы Б11 согласно своему варианту берут величины, которыми задаются поверхности конуса вращения и тора.

Определяют по координатам точку $K$ в плоскости уровня $xOy$ как вершину конуса вращения; она же является и центром производящей окружности радиуса $r$ поверхности открытого тора. Ось конуса вращения – вертикальная прямая, проходящая через точку $K$, высота конуса вращения $h$, а радиус основания $R$. Ось поверхности открытого тора совпадает с осью координат $y$. Тор ограничен координатными плоскостями $xOy$ и $yOz$. Заданные поверхности имеют общую фронтальную плоскость симметрии. На каждой из заданных поверхностей имеются круговые сечения.

Кольцо имеет три системы круговых сечений. Одна система таких сечений находится в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, другая – в проецирующих плоскостях, вращающихся вокруг этой оси. При построении линии пересечения поверхностей прежде всего необходимо определить ее опорные точки, т.е. точки пересечения очерковых образующих поверхностей. Затем через ось вращения поверхности кольца провести проецирующую плоскость. Она пересекает кольцо по окружности. Центр сферы, пересекающей кольцо по окружности, находится на перпендикуляре, восставленном из центра такой окружности к секущей проецирующей плоскости.

Чтобы конус вращения пересекался вспомогательной секущей сферой по окружности, необходимо, чтобы центр такой сферы находился на оси конуса вращения. Точка пересечения перпендикуляра с осью конуса вращения является центром вспомогательной секущей сферы соответствующего радиуса. Такая вспомогательная секущая сфера пересекает кольцо и конус вращения по окружностям, фронтальные проекции которых – отрезки прямых. Точки пересечения окружностей принадлежат искомой линии пересечения поверхностей. Вспомогательные сферы имеют различные центры на оси конуса вращения.

Так могут быть построены фронтальные проекции точек линии пересечения поверхностей; горизонтальные проекции строят, пользуясь параллелями заданных поверхностей вращения.

Определив видимость линий поверхностей в проекциях, все основные вспомогательные построения на эпюре сохранить и показать тонкими сплошными линиями.

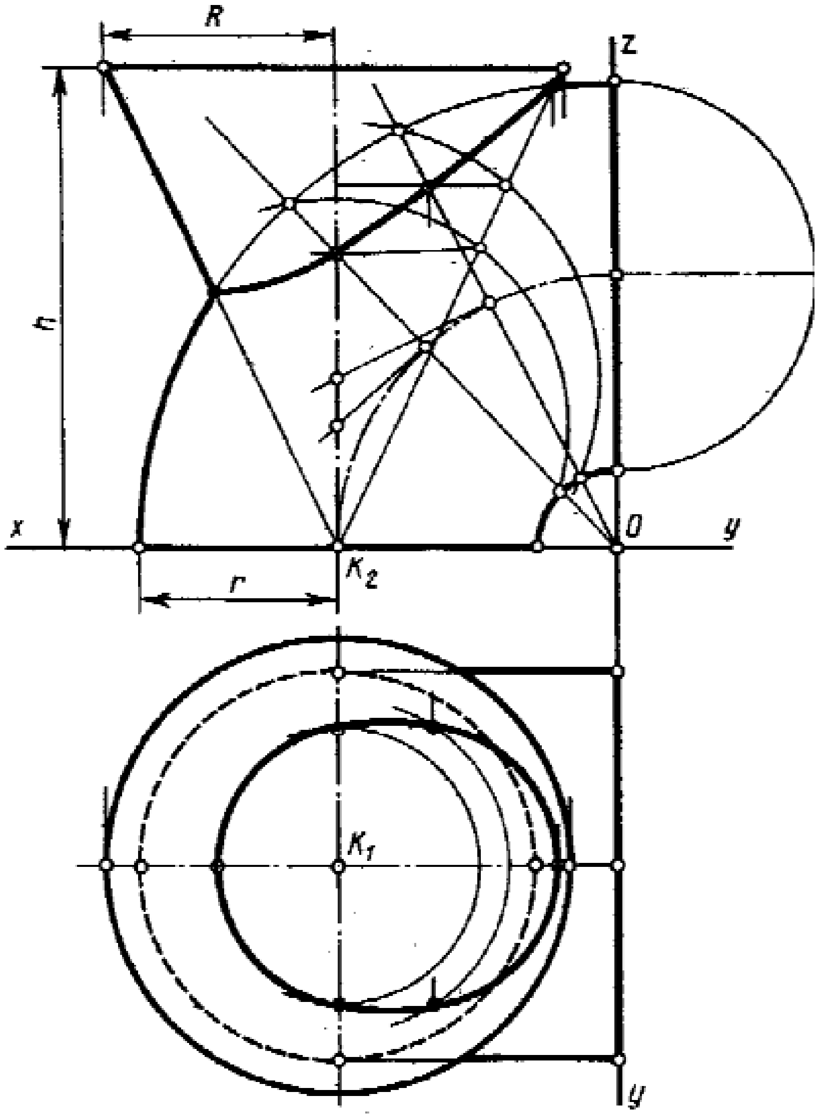



Рисунок 2.2.13 – Пример выполнения задачи 13

# III РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

## 3.1 Средства диагностики результатов учебной деятельности

Оценка уровня знаний обучающихся производится по десятибалльной шкале в соответствии с критериями, утвержденными Министерством образования Республики Беларусь.

Для оценки достижений обучающегося рекомендуется использовать следующий диагностический инструментарий:

– защита расчетно-графических работ;
– сдача зачета;
– сдача экзамена.

## 3.2 Примерный перечень контрольных вопросов для самостоятельной работы обучающихся

1. Общие правила оформления чертежей. Обзор стандартов ГОСТ 2.301-68 «Форматы», ГОСТ 2.302-68 «Масштабы», ГОСТ 2.303-68 «Линии», ГОСТ 2.304-81 «Шрифты чертежные», ГОСТ 2.104-68 «Основные надписи».
2. Метод проецирования: центральное проецирование.
3. Метод проецирования: параллельное проецирование.
4. Свойства параллельных проекций. Метод Г. Монжа.
5. Четверти и октанты пространства.
6. Проекции точки на три взаимно-перпендикулярные плоскости проекций.
7. Положение прямой относительно плоскостей проекций (прямая общего и частного положения).
8. Линии уровня.
9. Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона к плоскости проекций по правилу прямоугольного треугольника.
10. Следы прямой.
11. Взаимное положение двух прямых: изображение на чертеже параллельных, пересекающихся и скрещивающихся прямых.
12. Конкурирующие точки на скрещивающихся прямых (правило конкурирующих точек при определении видимости геометрических образов).
13. Теорема о проецировании прямого угла.
14. Задание плоскости на чертеже (6 способов).
15. Положение плоскости относительно плоскостей проекций (плоскости частного и общего положения).
16. Точка и прямая в плоскости: принадлежности точки и прямой плоскости.
17. Характерные линии плоскости: линии уровня и линии наибольшего

наклона.

18. Образование, каркас поверхности.
19. Виды поверхностей.
20. Задание поверхности на чертеже.
21. Определитель поверхности.
22. Гранные, цилиндрические, конические поверхности.
23. Частные случаи поверхности.
24. Многогранники: правильные прямые (призма и пирамида).
25. Метод замены плоскостей проекцией (замена одной и двух плоскостей проекций).
26. Метод вращения (вращение вокруг проецирующих прямых и прямых уровня – ось вращения, радиус вращения и плоскость вращения).
27. Многогранники (наклонные и прямые – призма и пирамида). Способы задания многогранников и построение их проекций.
28. Характерные линии на поверхности вращения: параллели, экватор, горло, линии меридиальных сечений. Ось, образующая очерк поверхности вращения.
29. Прямые круговые: цилиндр и конус.
30. Точки и линии на поверхности цилиндра и конуса.
31. Изображение цилиндра и конуса со срезами, выполненными проецирующими плоскостями.
32. Сферическая и торовая поверхности.
33. Эллипсоид вращения (вытянутый, сжатый).
34. Парабалоид и гипербалоид вращения (одно и двухполостной).
35. Точки и линии на поверхностях вращения (сфера, тор, парабалоид, гипербалоид).
36. Сечения поверхностей вращения проецирующими плоскостями.
37. Параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей.
38. Пересечение прямой и плоскости, двух плоскостей в частных случаях, когда один из пересекающихся элементов (плоскость и прямая) занимает проецирующее положение.
39. Пересечение линии с поверхностью (общий случай).
40. Пересечение двух плоскостей.
41. Касательные плоскости.
42. Построение касательной плоскости к цилиндру, конусу, шару, тору.
43. Понятие линии пересечения.
44. Четыре общих случая пересечения поверхностей.
45. Построение линий пересечения поверхностей способом вспомогательных секущих плоскостей.
46. Соосные поверхности.

47. Построение линий пересечения поверхностей способом вспомогательных концентрических сфер.

48. Построение линий пересечения поверхностей способом эксцентрических сфер.

49. Теорема о проекциях линий пересечения второго порядка.

50. Теорема о двойном соприкосновении.

51. Теорема Г. Монжа.

52. Характер изменения линии пересечения поверхностей 2-ух цилиндров в зависимости от соотношения их диаметров.

53. Классификация и виды аксонометрических проекций по ГОСТ 2.217-2011.

54. Показатели искажения прямоугольной изометрии.

55. Показатели искажения прямоугольной диметрии.

56. Обратимость аксонометрической проекции (вторичные проекции).

57. Теорема Польке-Шварца.

58. Треугольник следов и его свойства.

59. Торсовые поверхности.

60. Поверхности с тремя направляющими линиями.

61. Поверхности с плоскостью параллелизма.

62. Поверхности параллельного переноса.

63. Винтовые поверхности.

64. Каркасные и другие поверхности.

65. Приближенная классификация поверхностей.

# IV ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

1. Анурьев, В.И. Справочник конструктора-машиностроителя / В.И. Анурьев. Т. 1, 2, 3. – Минск : Машиностроение, 1980. – 730 с.

2. Бабулин, Н.А. Построение и чтение машиностроительных чертежей / Н.А. Бабулин. – 10-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1988. – 317 с.

3. Белякова, Е.И. Начертательная геометрия. Краткий курс по темам графических работ : учебное пособие / Е.И. Белякова, П.В. Зелёный; под ред. П.В. Зелёного. – Минск : БИТУ, 2010. – 229 с.

4. Белякова, Е.И. Начертательная геометрия. Рабочая тетрадь / Е.И. Белякова, П.В. Зеленый. – Минск : Новое знание, 2013. – 51 с.

5. Бубенников, А.В. Начертательная геометрия / А.В. Бубенников, М.Я. Громов. – Минск : Высшая школа, 1985. – 288 с.

6. Гордон, В.О. Курс начертательной геометрии / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский. – М. : Машиностроение, 1989. – 272 с.

7. Зелёный, П.В. Проекционное черчение: учебно-методическое пособие к практическим занятиям по дисциплине «Начертательная геометрия. Инженерная графика» / П.В. Зелёный, Е.И. Белякова, С.В. Гиль. – Минск : БГПА, 2002. – 61 с.

8. Зеленый, П.В. Инженерная графика. Практикум по проекционному черчению : учебное пособие для студентов вузов по техническим специальностям / П.В. Зеленый, Е.И. Белякова; под ред. П. В. Зеленый; Белорусский национальный технический университет, кафедра «Инженерная графика машиностроительного профиля». – Минск : БИТУ, 2014. – 199 с.

9. Зеленый, П.В. Инженерная графика. Практикум по чертежам сборочных единиц: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по техническим специальностям / П.В. Зеленый, Е.И. Белякова, О.Н. Кучура; под ред. П. В. Зеленого. – Минск : БИТУ, 2013. – 100 с.

10. Зеленый, П.В. Инженерная графика. Практикум : учебное пособие для технических специальностей вузов / И.В. Зеленый, Е.И. Белякова; под ред. П.В. Зеленый; кол. авт. Белорусский национальный технический университет. – Минск : БИТУ, 2011. – 257 с.

11. Зелёный, П.В. Инженерная графика: учебно-методическое пособие по машиностроительному черчению: в 2 ч. / П.В. Зелёный, С.В. Солонко; под ред. П.В. Зелёного. – Минск : БИТУ, 2015. – Ч.1: Чертежи валов. – 2015. – 81 с.

12. Зеленый, П.В. Начертательная геометрия. Индивидуальные графические работы : учебно-методическое пособие для заочной формы обучения втузов / П.В. Зеленый, Е.И. Белякова; под ред. П.В. Зеленый; кол. авт. Белорусский национальный технический университет, кафедра «Инженерная графика машиностроительного профиля». – Минск : БИТУ, 2008. – 109 с.

13. Зеленый, П.В. Начертательная геометрия : учебное пособие для

студентов вузов по техническим специальностям / П.В. Зеленый, Е.И. Белякова; под ред. П.В. Зеленый; кол. авт. Белорусский национальный технический университет, кафедра «Инженерная графика машиностроительного профиля». – Минск : БИТУ, 2015. – 222 с.

14. Иванов, В.П. Трехмерная компьютерная графика / В.П. Иванов, А.С. Батраков. – М. : Радио и связь, 1995. – 224 с.

15. Леонова, В.А. Альбом сборочных чертежей для деталирования и чтения / В.А. Леонова, О.П. Галанина. – Минск : Машиностроение, 1975. – 52 с.

16. Новичихина, Л.И. Справочник по техническому черчению / Л.И. Новичихина. – Минск : Книжный Дом, 2004. – 320 с.

17. Осипов, В.А. Альбом чертежей сборочных единиц для чтения и деталирования / В.А. Осипов, В.И. Козел. – Минск : Машиностроение, 1980. – 59 с.

18. Фролов, С.А. Курс начертательной геометрии / С.А. Фролов. – М. : Машиностроение, 1983. – 240 с.

19. Фролов, С.Л. Машиностроительное черчение / С.Л. Фролов, А.В. Воинов, Е.Д. Феоктистов. – Минск : Машиностроение, 1981. – 304 с.

20. Шабека, Л.С. Начертательная геометрия / Л.С. Шабека. – Минск: БПИ, 1991. – 102 с.

# ПРИЛОЖЕНИЕ А
## Образец титульного листа

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЛИАЛ БЕЛОРУССКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА,
г. СОЛИГОРСК

Кафедра «Технологии и оборудование разработки месторождений полезных ископаемых»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
по дисциплине «Инженерная и горная графика»

Выполнил: студент 1 курса
специальность 7-07-0724-01
шифр 31803123
И.В.Петров

Проверил: А.А.Иванов

г. Солигорск
202__

# ПРИЛОЖЕНИЕ Б

## Исходные данные к задачам

Таблица Б1 – Данные к задаче 1 (размеры и координаты, мм)

| № вар. | xA | yA | zA | xB | yB | zB | xC | yC | zC | xD | yD | zD | xE | yE | zE | xK | yK | zK |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 118 | 90 | 9 | 52 | 25 | 79 | 0 | 83 | 48 | 68 | 110 | 85 | 135 | 19 | 36 | 14 | 52 | 0 |
| 2 | 119 | 90 | 10 | 50 | 25 | 80 | 0 | 85 | 50 | 70 | 110 | 85 | 135 | 20 | 35 | 15 | 50 | 0 |
| 3 | 18 | 9 | 40 | 83 | 79 | 111 | 135 | 48 | 47 | 57 | 85 | 20 | 0 | 36 | 111 | 121 | 0 | 78 |
| 4 | 18 | 40 | 9 | 83 | 111 | 79 | 135 | 47 | 48 | 67 | 20 | 85 | 0 | 111 | 36 | 36 | 79 | 0 |
| 5 | 117 | 9 | 90 | 52 | 79 | 25 | 0 | 48 | 83 | 68 | 85 | 110 | 135 | 36 | 19 | 14 | 0 | 52 |
| 6 | 18 | 90 | 10 | 83 | 25 | 79 | 135 | 83 | 48 | 67 | 110 | 85 | 0 | 19 | 36 | 121 | 52 | 0 |
| 7 | 115 | 90 | 10 | 52 | 25 | 80 | 0 | 80 | 45 | 65 | 105 | 80 | 130 | 18 | 35 | 12 | 50 | 0 |
| 8 | 118 | 92 | 10 | 50 | 20 | 75 | 0 | 80 | 46 | 70 | 115 | 85 | 135 | 20 | 32 | 10 | 50 | 0 |
| 9 | 22 | 12 | 92 | 85 | 80 | 25 | 135 | 50 | 85 | 70 | 85 | 110 | 0 | 35 | 20 | 120 | 0 | 52 |
| 10 | 16 | 12 | 88 | 85 | 80 | 25 | 130 | 50 | 80 | 75 | 85 | 110 | 0 | 30 | 15 | 120 | 0 | 50 |
| 11 | 116 | 7 | 85 | 50 | 80 | 25 | 0 | 50 | 85 | 70 | 85 | 110 | 135 | 40 | 20 | 15 | 0 | 50 |
| 12 | 115 | 10 | 92 | 50 | 80 | 25 | 0 | 50 | 85 | 70 | 85 | 110 | 135 | 35 | 20 | 15 | 0 | 50 |
| 13 | 20 | 10 | 90 | 83 | 79 | 25 | 135 | 48 | 83 | 67 | 85 | 110 | 0 | 36 | 19 | 121 | 0 | 52 |
| 14 | 22 | 79 | 40 | 83 | 6 | 107 | 135 | 38 | 47 | 67 | 0 | 20 | 0 | 48 | 111 | 121 | 86 | 78 |
| 15 | 120 | 40 | 9 | 52 | 111 | 79 | 0 | 47 | 48 | 68 | 20 | 85 | 135 | 111 | 36 | 14 | 78 | 0 |
| 16 | 18 | 40 | 75 | 83 | 117 | 6 | 135 | 47 | 38 | 67 | 20 | 0 | 0 | 111 | 48 | 121 | 78 | 86 |
| 17 | 119 | 40 | 9 | 52 | 111 | 79 | 0 | 47 | 48 | 68 | 20 | 85 | 135 | 111 | 36 | 14 | 78 | 0 |
| 18 | 125 | 40 | 75 | 50 | 110 | 8 | 0 | 50 | 40 | 140 | 20 | 0 | 70 | 110 | 50 | 20 | 80 | 85 |
| 19 | 116 | 10 | 90 | 48 | 82 | 20 | 0 | 52 | 82 | 65 | 80 | 110 | 130 | 38 | 20 | 15 | 0 | 52 |
| 20 | 121 | 75 | 40 | 52 | 6 | 107 | 0 | 38 | 47 | 135 | 0 | 20 | 68 | 48 | 111 | 15 | 86 | 78 |
| 21 | 115 | 9 | 40 | 52 | 79 | 111 | 0 | 48 | 47 | 68 | 85 | 20 | 135 | 36 | 111 | 14 | 0 | 78 |
| 22 | 120 | 40 | 75 | 52 | 107 | 6 | 0 | 47 | 38 | 135 | 20 | 0 | 68 | 111 | 48 | 15 | 78 | 86 |
| 23 | 25 | 40 | 10 | 85 | 110 | 80 | 135 | 48 | 48 | 70 | 20 | 85 | 0 | 110 | 35 | 120 | 80 | 0 |
| 24 | 122 | 10 | 90 | 48 | 82 | 20 | 0 | 52 | 82 | 65 | 80 | 110 | 130 | 38 | 20 | 15 | 0 | 52 |
| 25 | 114 | 8 | 88 | 50 | 78 | 25 | 0 | 46 | 80 | 70 | 85 | 108 | 135 | 36 | 20 | 15 | 0 | 52 |
| 26 | 15 | 10 | 85 | 80 | 80 | 20 | 130 | 50 | 80 | 70 | 80 | 108 | 0 | 35 | 20 | 120 | 0 | 50 |
| 27 | 20 | 12 | 85 | 85 | 80 | 25 | 135 | 50 | 80 | 70 | 85 | 110 | 0 | 35 | 20 | 120 | 0 | 50 |
| 28 | 125 | 38 | 75 | 50 | 108 | 5 | 0 | 45 | 40 | 135 | 20 | 0 | 70 | 110 | 50 | 15 | 80 | 85 |
| 29 | 116 | 92 | 10 | 50 | 20 | 75 | 0 | 80 | 46 | 70 | 115 | 85 | 135 | 20 | 32 | 10 | 50 | 0 |
| 30 | 26 | 79 | 40 | 83 | 6 | 107 | 135 | 38 | 47 | 67 | 0 | 20 | 0 | 48 | 111 | 121 | 86 | 78 |

Таблица Б2 – Данные к задаче 2 (размеры и координаты, мм)

| № варианта | xA | yA | zA | xB | yB | zB | xC | yC | zC | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 122 | 90 | 9 | 52 | 25 | 79 | 0 | 83 | 48 | 90 |
| 2 | 125 | 90 | 10 | 50 | 25 | 80 | 0 | 85 | 50 | 78 |
| 3 | 118 | 93 | 12 | 52 | 25 | 80 | 0 | 80 | 45 | 83 |
| 4 | 123 | 94 | 10 | 50 | 20 | 75 | 0 | 80 | 45 | 85 |
| 5 | 99 | 9 | 90 | 52 | 79 | 25 | 0 | 48 | 83 | 85 |
| 6 | 124 | 7 | 85 | 50 | 80 | 25 | 0 | 50 | 85 | 85 |
| 7 | 119 | 10 | 90 | 48 | 82 | 20 | 0 | 52 | 82 | 90 |
| 8 | 118 | 8 | 89 | 50 | 78 | 25 | 0 | 47 | 81 | 91 |
| 9 | 117 | 11 | 93 | 52 | 80 | 25 | 0 | 50 | 85 | 85 |
| 10 | 19 | 11 | 92 | 85 | 79 | 26 | 130 | 49 | 84 | 92 |
| 11 | 23 | 17 | 95 | 85 | 80 | 25 | 135 | 50 | 86 | 93 |
| 12 | 16 | 11 | 86 | 83 | 80 | 22 | 130 | 50 | 80 | 92 |
| 13 | 17 | 12 | 88 | 85 | 80 | 25 | 130 | 52 | 80 | 90 |
| 14 | 20 | 12 | 85 | 85 | 80 | 25 | 135 | 50 | 80 | 95 |
| 15 | 21 | 90 | 12 | 83 | 25 | 79 | 135 | 83 | 49 | 85 |
| 16 | 15 | 40 | 75 | 83 | 115 | 10 | 136 | 47 | 40 | 92 |
| 17 | 17 | 76 | 42 | 83 | 7 | 110 | 140 | 40 | 50 | 69 |
| 18 | 120 | 78 | 45 | 52 | 10 | 110 | 0 | 40 | 50 | 94 |
| 19 | 123 | 43 | 80 | 52 | 107 | 6 | 0 | 47 | 38 | 82 |
| 20 | 122 | 39 | 75 | 52 | 109 | 6 | 1 | 46 | 42 | 95 |
| 21 | 126 | 42 | 76 | 50 | 112 | 8 | 0 | 52 | 42 | 90 |
| 22 | 22 | 42 | 12 | 83 | 110 | 82 | 137 | 50 | 50 | 83 |
| 23 | 20 | 10 | 40 | 85 | 80 | 119 | 135 | 48 | 48 | 90 |
| 24 | 117 | 40 | 10 | 55 | 112 | 79 | 0 | 48 | 49 | 85 |
| 25 | 122 | 9 | 43 | 55 | 80 | 110 | 0 | 50 | 46 | 90 |
| 26 | 20 | 42 | 10 | 85 | 110 | 80 | 140 | 50 | 48 | 85 |
| 27 | 21 | 10 | 43 | 85 | 80 | 118 | 140 | 50 | 45 | 90 |
| 28 | 20 | 17 | 95 | 85 | 80 | 25 | 135 | 50 | 86 | 93 |
| 29 | 14 | 11 | 86 | 83 | 80 | 22 | 130 | 50 | 80 | 92 |
| 30 | 20 | 12 | 85 | 85 | 80 | 25 | 135 | 50 | 80 | 95 |

Таблица Б3 – Данные к задаче 3 (размеры и координаты, мм)

| №в | xA | yA | zA | xB | yB | zB | xC | yC | zC | xD | yD | zD | xE | yE | zE | xK | yK | zK | xG | yG | zG | xU | yU | zU | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 140 | 75 | 0 | 122 | 14 | 77 | 87 | 100 | 40 | 0 | 50 | 40 | 100 | 50 | 0 | 74 | 20 | 0 | 16 | 20 | 0 | 55 | 95 | 0 | 90 |
| 2 | 0 | 70 | 0 | 20 | 9 | 77 | 53 | 95 | 40 | 141 | 45 | 40 | 40 | 50 | 0 | 67 | 20 | 0 | 125 | 20 | 0 | 86 | 95 | 0 | 90 |
| 3 | 136 | 60 | 0 | 115 | 20 | 80 | 85 | 90 | 40 | 0 | 50 | 40 | 100 | 43 | 0 | 70 | 20 | 0 | 20 | 20 | 0 | 60 | 90 | 0 | 90 |
| 4 | 134 | 65 | 0 | 120 | 20 | 75 | 80 | 90 | 40 | 0 | 55 | 45 | 100 | 48 | 0 | 70 | 15 | 0 | 20 | 27 | 0 | 65 | 95 | 0 | 90 |
| 5 | 140 | 65 | 0 | 115 | 20 | 75 | 80 | 90 | 40 | 0 | 50 | 40 | 100 | 45 | 0 | 75 | 17 | 0 | 22 | 25 | 0 | 60 | 95 | 0 | 90 |
| 6 | 0 | 80 | 0 | 20 | 19 | 77 | 53 | 110 | 40 | 141 | 55 | 40 | 40 | 50 | 0 | 67 | 20 | 0 | 125 | 20 | 0 | 86 | 95 | 0 | 90 |
| 7 | 0 | 68 | 0 | 20 | 7 | 77 | 53 | 93 | 40 | 141 | 143 | 40 | 40 | 50 | 0 | 67 | 20 | 0 | 125 | 20 | 0 | 86 | 95 | 0 | 90 |
| 8 | 0 | 75 | 0 | 20 | 14 | 77 | 53 | 100 | 40 | 141 | 50 | 40 | 40 | 50 | 0 | 67 | 20 | 0 | 125 | 20 | 0 | 86 | 95 | 0 | 90 |
| 9 | 0 | 82 | 0 | 20 | 21 | 77 | 53 | 112 | 40 | 141 | 57 | 40 | 40 | 50 | 0 | 67 | 20 | 0 | 125 | 20 | 0 | 86 | 95 | 0 | 90 |
| 10 | 0 | 85 | 0 | 20 | 24 | 77 | 53 | 115 | 40 | 141 | 60 | 40 | 40 | 50 | 0 | 67 | 20 | 0 | 125 | 20 | 0 | 86 | 95 | 0 | 90 |
| 11 | 0 | 90 | 0 | 20 | 29 | 77 | 53 | 120 | 40 | 141 | 65 | 40 | 40 | 50 | 0 | 67 | 20 | 0 | 125 | 20 | 0 | 86 | 95 | 0 | 90 |
| 12 | 0 | 85 | 0 | 15 | 30 | 80 | 55 | 120 | 40 | 141 | 60 | 40 | 40 | 50 | 0 | 67 | 20 | 0 | 125 | 20 | 0 | 86 | 95 | 0 | 90 |
| 13 | 141 | 70 | 0 | 122 | 9 | 77 | 87 | 95 | 40 | 0 | 45 | 40 | 100 | 50 | 0 | 74 | 20 | 0 | 16 | 20 | 0 | 55 | 95 | 0 | 90 |
| 14 | 141 | 80 | 0 | 122 | 19 | 77 | 87 | 110 | 40 | 0 | 55 | 40 | 100 | 50 | 0 | 74 | 20 | 0 | 16 | 20 | 0 | 55 | 95 | 0 | 90 |
| 15 | 141 | 68 | 0 | 122 | 7 | 77 | 87 | 93 | 40 | 0 | 43 | 40 | 100 | 50 | 0 | 74 | 20 | 0 | 16 | 20 | 0 | 55 | 95 | 0 | 90 |
| 16 | 139 | 85 | 0 | 122 | 24 | 77 | 87 | 115 | 40 | 0 | 60 | 40 | 100 | 50 | 0 | 74 | 20 | 0 | 16 | 20 | 0 | 55 | 95 | 0 | 90 |
| 17 | 140 | 85 | 0 | 122 | 24 | 77 | 87 | 115 | 40 | 0 | 60 | 40 | 100 | 50 | 0 | 74 | 20 | 0 | 16 | 20 | 0 | 55 | 95 | 0 | 90 |
| 18 | 141 | 90 | 0 | 122 | 29 | 77 | 87 | 120 | 40 | 0 | 65 | 40 | 100 | 50 | 0 | 74 | 20 | 0 | 16 | 20 | 0 | 55 | 95 | 0 | 90 |
| 19 | 135 | 75 | 0 | 116 | 144 | 77 | 81 | 100 | 40 | 0 | 50 | 40 | 100 | 50 | 0 | 74 | 20 | 0 | 16 | 20 | 0 | 55 | 95 | 0 | 90 |
| 20 | 146 | 75 | 0 | 126 | 144 | 77 | 91 | 100 | 40 | 0 | 50 | 40 | 100 | 50 | 0 | 74 | 20 | 0 | 16 | 20 | 0 | 55 | 95 | 0 | 90 |
| 21 | 145 | 95 | 0 | 120 | 34 | 77 | 87 | 120 | 40 | 0 | 70 | 60 | 100 | 50 | 0 | 74 | 20 | 0 | 16 | 20 | 0 | 55 | 95 | 0 | 90 |
| 22 | 150 | 70 | 0 | 122 | 10 | 80 | 90 | 95 | 40 | 0 | 70 | 45 | 100 | 50 | 0 | 74 | 20 | 0 | 16 | 20 | 0 | 55 | 95 | 0 | 90 |
| 23 | 148 | 65 | 0 | 122 | 20 | 70 | 85 | 100 | 40 | 0 | 68 | 47 | 100 | 50 | 0 | 74 | 20 | 0 | 16 | 20 | 0 | 55 | 95 | 0 | 90 |
| 24 | 122 | 14 | 77 | 141 | 75 | 0 | 87 | 100 | 40 | 0 | 50 | 40 | 105 | 55 | 0 | 80 | 15 | 0 | 20 | 20 | 0 | 50 | 95 | 0 | 90 |
| 25 | 120 | 15 | 80 | 140 | 75 | 0 | 85 | 100 | 45 | 0 | 50 | 45 | 105 | 55 | 0 | 80 | 15 | 0 | 20 | 20 | 0 | 50 | 95 | 0 | 90 |
| 26 | 125 | 20 | 80 | 140 | 75 | 0 | 85 | 100 | 45 | 0 | 55 | 45 | 98 | 52 | 0 | 76 | 20 | 0 | 18 | 22 | 0 | 57 | 95 | 0 | 90 |
| 27 | 140 | 70 | 0 | 120 | 15 | 80 | 85 | 95 | 50 | 0 | 50 | 45 | 100 | 50 | 0 | 75 | 22 | 0 | 20 | 20 | 0 | 60 | 90 | 0 | 90 |
| 28 | 145 | 65 | 0 | 115 | 20 | 75 | 80 | 90 | 40 | 0 | 50 | 40 | 100 | 45 | 0 | 75 | 17 | 0 | 22 | 25 | 0 | 60 | 95 | 0 | 90 |
| 29 | 136 | 65 | 0 | 120 | 20 | 75 | 80 | 90 | 40 | 0 | 55 | 45 | 100 | 48 | 0 | 70 | 15 | 0 | 20 | 27 | 0 | 65 | 95 | 0 | 90 |
| 30 | 135 | 60 | 0 | 115 | 20 | 80 | 85 | 90 | 40 | 0 | 50 | 40 | 100 | 43 | 0 | 70 | 20 | 0 | 20 | 20 | 0 | 60 | 90 | 0 | 90 |

Таблица Б4 – Данные к задаче 5 (размеры и координаты, мм)

| № варианта | xA | yA | zA | xB | yB | zB | xC | yC | zC | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 50 | 58 | 60 | 10 | 58 | 115 | 0 | 120 | 60 | 46 |
| 2 | 50 | 58 | 60 | 10 | 58 | 115 | 0 | 122 | 60 | 46 |
| 3 | 50 | 56 | 58 | 10 | 56 | 115 | 0 | 124 | 58 | 48 |
| 4 | 52 | 56 | 58 | 10 | 56 | 113 | 0 | 120 | 58 | 48 |
| 5 | 52 | 58 | 60 | 10 | 56 | 113 | 0 | 124 | 60 | 47 |
| 6 | 52 | 58 | 58 | 5 | 58 | 112 | 10 | 120 | 58 | 47 |
| 7 | 52 | 56 | 60 | 5 | 56 | 112 | 10 | 122 | 60 | 48 |
| 8 | 52 | 56 | 60 | 5 | 56 | 112 | 10 | 120 | 60 | 45 |
| 9 | 50 | 60 | 60 | 5 | 60 | 110 | 10 | 122 | 60 | 45 |
| 10 | 52 | 60 | 58 | 0 | 113 | 58 | 0 | 113 | 124 | 47 |
| 11 | 50 | 60 | 58 | 0 | 60 | 110 | 10 | 120 | 58 | 47 |
| 12 | 50 | 62 | 58 | 0 | 62 | 108 | 10 | 120 | 58 | 48 |
| 13 | 50 | 62 | 56 | 0 | 62 | 108 | 10 | 124 | 56 | 48 |
| 14 | 52 | 62 | 56 | 0 | 62 | 106 | 10 | 124 | 56 | 48 |
| 15 | 52 | 60 | 56 | 8 | 60 | 106 | 0 | 126 | 56 | 50 |
| 16 | 54 | 60 | 58 | 8 | 60 | 106 | 0 | 126 | 58 | 50 |
| 17 | 54 | 62 | 58 | 8 | 62 | 104 | 0 | 124 | 58 | 50 |
| 18 | 54 | 62 | 58 | 0 | 62 | 104 | 12 | 122 | 58 | 50 |
| 19 | 55 | 62 | 60 | 0 | 62 | 102 | 12 | 120 | 60 | 50 |
| 20 | 55 | 64 | 60 | 0 | 64 | 102 | 12 | 122 | 58 | 52 |
| 21 | 55 | 65 | 60 | 0 | 65 | 110 | 12 | 118 | 60 | 52 |
| 22 | 55 | 65 | 60 | 8 | 65 | 110 | 0 | 118 | 60 | 50 |
| 23 | 56 | 64 | 58 | 6 | 64 | 100 | 0 | 115 | 58 | 50 |
| 24 | 56 | 66 | 58 | 10 | 66 | 114 | 0 | 115 | 58 | 52 |
| 25 | 56 | 66 | 58 | 0 | 66 | 114 | 0 | 120 | 58 | 52 |
| 26 | 55 | 65 | 58 | 0 | 65 | 112 | 0 | 115 | 58 | 52 |
| 27 | 55 | 65 | 60 | 0 | 65 | 112 | 0 | 120 | 60 | 50 |
| 28 | 54 | 56 | 60 | 5 | 56 | 112 | 10 | 122 | 60 | 48 |
| 29 | 53 | 62 | 58 | 0 | 62 | 108 | 10 | 120 | 58 | 48 |
| 30 | 50 | 64 | 60 | 0 | 64 | 102 | 12 | 122 | 58 | 52 |

Таблица Б5 – Данные к задаче 6 (размеры и координаты, мм)

| № вар. | xO | yO | zO | xA | yA | zA | xB | yB | zB | xC | yC | zC | xD | yD | zD | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 70 | 58 | 62 | 118 | - | 35 | 56 | - | 95 | 45 | - | 95 | 45 | - | 35 | 46 |
| 2 | 70 | 60 | 60 | 118 | - | 35 | 56 | - | 95 | 44 | - | 95 | 44 | - | 35 | 46 |
| 3 | 70 | 60 | 58 | 120 | - | 35 | 58 | - | 95 | 44 | - | 95 | 44 | - | 35 | 48 |
| 4 | 70 | 60 | 58 | 120 | - | 36 | 56 | - | 94 | 42 | - | 94 | 42 | - | 36 | 48 |
| 5 | 69 | 58 | 60 | 116 | - | 36 | 58 | - | 94 | 45 | - | 94 | 45 | - | 36 | 47 |
| 6 | 72 | 60 | 58 | 116 | - | 36 | 60 | - | 92 | 42 | - | 92 | 42 | - | 3 | 47 |
| 7 | 72 | 58 | 60 | 120 | - | 34 | 60 | - | 92 | 42 | - | 92 | 42 | - | 34 | 48 |
| 8 | 72 | 58 | 58 | 122 | - | 34 | 60 | - | 90 | 40 | - | 90 | 40 | - | 34 | 45 |
| 9 | 74 | 62 | 60 | 122 | - | 34 | 55 | - | 90 | 40 | - | 90 | 40 | - | 34 | 45 |
| 10 | 69 | 58 | 60 | 20 | - | 36 | 81 | - | 94 | 94 | - | 94 | 94 | - | 36 | 47 |
| 11 | 74 | 62 | 58 | 20 | - | 36 | 80 | - | 92 | 94 | - | 92 | 94 | - | 36 | 47 |
| 12 | 72 | 62 | 62 | 20 | - | 35 | 80 | - | 92 | 92 | - | 92 | 92 | - | 35 | 48 |
| 13 | 72 | 60 | 62 | 22 | - | 35 | 82 | - | 90 | 92 | - | 90 | 92 | - | 35 | 48 |
| 14 | 70 | 60 | 60 | 18 | - | 35 | 82 | - | 90 | 90 | - | 90 | 90 | - | 35 | 48 |
| 15 | 76 | 60 | 18 | 18 | - | 34 | 82 | - | 94 | 92 | - | 94 | 92 | - | 34 | 50 |
| 16 | 72 | 62 | 58 | 20 | - | 34 | 84 | - | 94 | 96 | - | 94 | 96 | - | 34 | 50 |
| 17 | 70 | 62 | 60 | 18 | - | 32 | 84 | - | 90 | 96 | - | 90 | 96 | - | 32 | 50 |
| 18 | 68 | 60 | 60 | 20 | - | 32 | 86 | - | 92 | 95 | - | 92 | 95 | - | 32 | 50 |
| 19 | 70 | 58 | 62 | 20 | - | 32 | 86 | - | 92 | 95 | - | 92 | 95 | - | 32 | 52 |
| 20 | 69 | 58 | 60 | 20 | - | 36 | 81 | - | 94 | 94 | - | 94 | 94 | - | 36 | 56 |
| 21 | 70 | 60 | 58 | 120 | - | 35 | 58 | - | 95 | 44 | - | 95 | 44 | - | 35 | 54 |
| 22 | 68 | 60 | 60 | 20 | - | 32 | 86 | - | 92 | 95 | - | 92 | 95 | - | 32 | 56 |
| 23 | 70 | 58 | 62 | 18 | - | 32 | 86 | - | 94 | 90 | - | 94 | 90 | - | 32 | 50 |
| 24 | 70 | 60 | 58 | 118 | - | 35 | 60 | - | 95 | 45 | - | 95 | 45 | - | 35 | 52 |
| 25 | 70 | 62 | 62 | 120 | - | 36 | 60 | - | 92 | 42 | - | 92 | 42 | - | 36 | 52 |
| 26 | 68 | 62 | 60 | 120 | - | 34 | 62 | - | 92 | 42 | - | 92 | 42 | - | 34 | 5 |
| 27 | 68 | 60 | 58 | 122 | - | 35 | 62 | - | 90 | 40 | - | 90 | 40 | - | 35 | 50 |
| 28 | 68 | 60 | 58 | 120 | - | 36 | 60 | - | 90 | 42 | - | 90 | 42 | - | 36 | 52 |
| 29 | 70 | 60 | 60 | 120 | - | 35 | 60 | - | 92 | 44 | - | 92 | 44 | - | 35 | 52 |
| 30 | 70 | 58 | 60 | 120 | - | 32 | 62 | - | 92 | 45 | - | 92 | 45 | - | 32 | 50 |

Таблица Б6 – Данные к задаче 7 (размеры и координаты, мм)

| № вар. | xK | yK | zK | xA | yA | zA | xB | yB | zB | xC | yC | zC | r | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 78 | 72 | 0 | 10 | 50 | 62 | 46 | 30 | 62 | 82 | 125 | 10 | 45 | 100 |
| 2 | 78 | 72 | 0 | 82 | 125 | 10 | 10 | 50 | 62 | 46 | 30 | 62 | 45 | 100 |
| 3 | 80 | 72 | 0 | 46 | 30 | 62 | 82 | 125 | 10 | 10 | 50 | 62 | 45 | 100 |
| 4 | 80 | 70 | 0 | 10 | 50 | 62 | 82 | 125 | 10 | 46 | 30 | 62 | 45 | 100 |
| 5 | 80 | 70 | 0 | 40 | 25 | 60 | 12 | 50 | 60 | 85 | 125 | 0 | 45 | 102 |
| 6 | 80 | 70 | 0 | 40 | 25 | 62 | 14 | 48 | 62 | 86 | 125 | 8 | 45 | 100 |
| 7 | 80 | 68 | 0 | 46 | 28 | 60 | 10 | 48 | 60 | 80 | 126 | 0 | 45 | 98 |
| 8 | 82 | 68 | 0 | 47 | 28 | 65 | 10 | 50 | 65 | 82 | 126 | 6 | 45 | 98 |
| 9 | 82 | 68 | 0 | 48 | 28 | 65 | 10 | 52 | 65 | 84 | 128 | 6 | 43 | 98 |
| 10 | 82 | 78 | 0 | 49 | 30 | 66 | 12 | 48 | 66 | 84 | 130 | 5 | 44 | 102 |
| 11 | 80 | 66 | 0 | 50 | 30 | 64 | 12 | 46 | 64 | 85 | 128 | 4 | 43 | 102 |
| 12 | 80 | 66 | 0 | 44 | 32 | 60 | 12 | 52 | 60 | 85 | 132 | 5 | 43 | 102 |
| 13 | 80 | 66 | 0 | 44 | 30 | 60 | 15 | 50 | 60 | 86 | 132 | 5 | 42 | 102 |
| 14 | 82 | 65 | 0 | 45 | 30 | 62 | 15 | 48 | 62 | 86 | 130 | 5 | 42 | 102 |
| 15 | 82 | 65 | 0 | 45 | 32 | 62 | 15 | 48 | 62 | 84 | 135 | 0 | 42 | 102 |
| 16 | 84 | 65 | 0 | 45 | 28 | 66 | 10 | 50 | 66 | 84 | 135 | 0 | 43 | 100 |
| 17 | 84 | 64 | 0 | 45 | 30 | 66 | 10 | 52 | 60 | 85 | 136 | 5 | 44 | 100 |
| 18 | 86 | 64 | 0 | 44 | 30 | 65 | 14 | 52 | 65 | 88 | 136 | 4 | 44 | 100 |
| 19 | 86 | 64 | 0 | 44 | 28 | 65 | 14 | 50 | 65 | 88 | 140 | 4 | 44 | 98 |
| 20 | 86 | 64 | 0 | 46 | 26 | 70 | 14 | 50 | 70 | 90 | 140 | 6 | 42 | 98 |
| 21 | 85 | 70 | 0 | 48 | 26 | 68 | 16 | 48 | 68 | 90 | 142 | 8 | 42 | 95 |
| 22 | 85 | 70 | 0 | 45 | 26 | 70 | 16 | 48 | 70 | 88 | 142 | 8 | 46 | 95 |
| 23 | 85 | 70 | 0 | 44 | 28 | 68 | 15 | 46 | 68 | 86 | 138 | 10 | 46 | 96 |
| 24 | 85 | 68 | 0 | 44 | 28 | 66 | 15 | 46 | 66 | 85 | 133 | 10 | 46 | 96 |
| 25 | 83 | 68 | 0 | 40 | 30 | 64 | 16 | 45 | 64 | 85 | 140 | 8 | 46 | 97 |
| 26 | 80 | 70 | 0 | 40 | 25 | 62 | 14 | 48 | 62 | 86 | 125 | 8 | 45 | 97 |
| 27 | 80 | 70 | 0 | 40 | 25 | 60 | 12 | 50 | 60 | 85 | 125 | 0 | 45 | 102 |
| 28 | 80 | 70 | 0 | 40 | 25 | 60 | 12 | 50 | 60 | 85 | 125 | 0 | 45 | 102 |
| 29 | 80 | 70 | 0 | 10 | 50 | 62 | 82 | 125 | 10 | 46 | 30 | 62 | 45 | 100 |
| 30 | 80 | 70 | 0 | 40 | 25 | 62 | 14 | 48 | 62 | 86 | 125 | 8 | 45 | 100 |

Таблица Б7 – Данные к задаче 8 (размеры и координаты, мм)

| № варианта | xK | yK | zK | R | h | xE | yE | zE | r |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 80 | 70 | 0 | 45 | 103 | 50 | 70 | 32 | 35 |
| 2 | 80 | 70 | 0 | 45 | 100 | 50 | 70 | 32 | 30 |
| 3 | 80 | 72 | 0 | 45 | 103 | 55 | 72 | 32 | 32 |
| 4 | 80 | 72 | 0 | 45 | 100 | 60 | 72 | 35 | 35 |
| 5 | 70 | 70 | 0 | 44 | 102 | 50 | 70 | 32 | 32 |
| 6 | 75 | 70 | 0 | 45 | 98 | 65 | 70 | 35 | 35 |
| 7 | 75 | 70 | 0 | 45 | 98 | 70 | 70 | 35 | 35 |
| 8 | 75 | 72 | 0 | 45 | 98 | 75 | 72 | 35 | 35 |
| 9 | 75 | 72 | 0 | 43 | 98 | 80 | 72 | 35 | 35 |
| 10 | 75 | 75 | 0 | 44 | 102 | 50 | 75 | 35 | 35 |
| 11 | 80 | 70 | 0 | 45 | 102 | 60 | 70 | 34 | 34 |
| 12 | 80 | 70 | 0 | 45 | 97 | 62 | 70 | 38 | 34 |
| 13 | 80 | 70 | 0 | 46 | 97 | 62 | 70 | 38 | 32 |
| 14 | 80 | 70 | 0 | 42 | 103 | 80 | 70 | 40 | 32 |
| 15 | 80 | 70 | 0 | 42 | 100 | 75 | 70 | 40 | 32 |
| 16 | 70 | 72 | 0 | 43 | 100 | 75 | 72 | 42 | 32 |
| 17 | 70 | 72 | 0 | 44 | 100 | 70 | 72 | 40 | 32 |
| 18 | 70 | 74 | 0 | 44 | 100 | 70 | 74 | 36 | 32 |
| 19 | 70 | 74 | 0 | 44 | 98 | 80 | 74 | 32 | 34 |
| 20 | 75 | 70 | 0 | 42 | 98 | 68 | 70 | 32 | 36 |
| 21 | 75 | 72 | 0 | 42 | 95 | 66 | 72 | 35 | 35 |
| 22 | 75 | 75 | 0 | 46 | 95 | 66 | 75 | 38 | 3 |
| 23 | 80 | 75 | 0 | 46 | 96 | 64 | 75 | 36 | 32 |
| 24 | 70 | 74 | 0 | 44 | 98 | 80 | 74 | 32 | 34 |
| 25 | 80 | 75 | 0 | 46 | 96 | 64 | 75 | 34 | 34 |
| 26 | 80 | 70 | 0 | 46 | 97 | 63 | 70 | 38 | 32 |
| 27 | 80 | 70 | 0 | 45 | 97 | 62 | 70 | 38 | 34 |
| 28 | 80 | 70 | 0 | 46 | 97 | 62 | 70 | 38 | 32 |
| 29 | 80 | 70 | 0 | 45 | 97 | 62 | 70 | 38 | 34 |
| 30 | 80 | 70 | 0 | 45 | 102 | 60 | 70 | 34 | 34 |

Таблица Б8 – Данные к задаче 10 (размеры и координаты, мм)

| № варианта | xK | yK | zK | $R_1$ | xE | yE | zE | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 66 | 66 | 0 | 38 | 48 | 66 | 49 | 32 |
| 2 | 66 | 67 | 0 | 38 | 47 | 67 | 48 | 32 |
| 3 | 65 | 65 | 0 | 40 | 46 | 65 | 47 | 33 |
| 4 | 68 | 65 | 0 | 40 | 45 | 65 | 46 | 34 |
| 5 | 65 | 65 | 0 | 38 | 49 | 65 | 50 | 34 |
| 6 | 70 | 70 | 0 | 40 | 52 | 70 | 66 | 38 |
| 7 | 65 | 65 | 0 | 40 | 52 | 65 | 64 | 40 |
| 8 | 70 | 65 | 0 | 40 | 44 | 65 | 51 | 35 |
| 9 | 67 | 67 | 0 | 38 | 43 | 67 | 52 | 35 |
| 10 | 68 | 68 | 0 | 39 | 42 | 68 | 53 | 63 |
| 11 | 69 | 65 | 0 | 39 | 50 | 65 | 54 | 36 |
| 12 | 68 | 66 | 0 | 37 | 51 | 66 | 55 | 38 |
| 13 | 65 | 64 | 0 | 37 | 52 | 64 | 56 | 38 |
| 14 | 66 | 64 | 0 | 40 | 53 | 64 | 57 | 37 |
| 15 | 65 | 66 | 0 | 40 | 54 | 66 | 58 | 36 |
| 16 | 65 | 70 | 0 | 36 | 55 | 70 | 50 | 37 |
| 17 | 65 | 70 | 0 | 36 | 56 | 70 | 52 | 32 |
| 18 | 66 | 70 | 0 | 37 | 57 | 70 | 53 | 33 |
| 19 | 68 | 70 | 0 | 38 | 58 | 70 | 51 | 34 |
| 20 | 68 | 70 | 0 | 39 | 59 | 70 | 49 | 34 |
| 21 | 70 | 70 | 0 | 40 | 60 | 70 | 50 | 35 |
| 22 | 70 | 70 | 0 | 41 | 50 | 70 | 60 | 34 |
| 23 | 72 | 72 | 0 | 42 | 52 | 72 | 62 | 36 |
| 24 | 72 | 70 | 0 | 42 | 54 | 70 | 61 | 35 |
| 25 | 66 | 70 | 0 | 38 | 55 | 70 | 59 | 38 |
| 26 | 68 | 72 | 0 | 40 | 50 | 72 | 63 | 27 |
| 27 | 66 | 66 | 0 | 40 | 52 | 66 | 65 | 40 |
| 28 | 68 | 72 | 0 | 40 | 50 | 72 | 63 | 27 |
| 29 | 65 | 65 | 0 | 40 | 52 | 65 | 64 | 40 |
| 30 | 70 | 70 | 0 | 40 | 52 | 70 | 66 | 38 |

Таблица Б9 – Данные к задаче 11 (размеры и координаты, мм)

| № вар. | xK | yK | zK | xS | yS | zS | R | xE | yE | zE | r |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 55 | 65 | 0 | 155 | 122 | 100 | 44 | 100 | 65 | 35 | 30 |
| 2 | 56 | 65 | 0 | 160 | 12 | 100 | 45 | 100 | 65 | 34 | 32 |
| 3 | 56 | 64 | 0 | 160 | 120 | 95 | 46 | 98 | 64 | 35 | 35 |
| 4 | 58 | 64 | 0 | 156 | 118 | 100 | 45 | 96 | 64 | 32 | 32 |
| 5 | 55 | 65 | 0 | 155 | 123 | 102 | 45 | 95 | 65 | 30 | 30 |
| 6 | 58 | 66 | 0 | 157 | 120 | 98 | 46 | 100 | 66 | 32 | 30 |
| 7 | 60 | 66 | 0 | 158 | 115 | 102 | 44 | 95 | 66 | 36 | 32 |
| 8 | 60 | 65 | 0 | 156 | 115 | 98 | 45 | 90 | 65 | 38 | 32 |
| 9 | 60 | 66 | 0 | 155 | 110 | 100 | 47 | 66 | 66 | 30 | 30 |
| 10 | 100 | 65 | 0 | 0 | 122 | 100 | 45 | 92 | 66 | 40 | 32 |
| 11 | 98 | 65 | 0 | 0 | 120 | 100 | 45 | 55 | 65 | 32 | 30 |
| 12 | 100 | 65 | 0 | 0 | 118 | 98 | 45 | 56 | 65 | 34 | 32 |
| 13 | 96 | 66 | 0 | 0 | 120 | 100 | 44 | 57 | 66 | 35 | 30 |
| 14 | 98 | 64 | 0 | 0 | 116 | 96 | 45 | 58 | 64 | 35 | 35 |
| 15 | 98 | 65 | 0 | 0 | 115 | 99 | 45 | 59 | 65 | 36 | 20 |
| 16 | 100 | 65 | 0 | 0 | 114 | 98 | 44 | 60 | 63 | 38 | 34 |
| 17 | 102 | 65 | 0 | 0 | 112 | 100 | 45 | 62 | 65 | 40 | 35 |
| 18 | 100 | 65 | 0 | 0 | 110 | 102 | 45 | 63 | 65 | 42 | 34 |
| 19 | 55 | 64 | 0 | 150 | 122 | 100 | 44 | 100 | 64 | 32 | 32 |
| 20 | 56 | 64 | 0 | 155 | 120 | 100 | 45 | 102 | 64 | 34 | 30 |
| 21 | 54 | 65 | 0 | 154 | 118 | 98 | 45 | 102 | 65 | 35 | 30 |
| 22 | 57 | 64 | 0 | 152 | 120 | 100 | 45 | 100 | 65 | 36 | 32 |
| 23 | 58 | 64 | 0 | 152 | 115 | 100 | 46 | 98 | 64 | 38 | 30 |
| 24 | 60 | 65 | 0 | 155 | 116 | 96 | 44 | 96 | 65 | 40 | 32 |
| 25 | 62 | 66 | 0 | 150 | 114 | 95 | 45 | 95 | 66 | 36 | 30 |
| 26 | 60 | 66 | 0 | 148 | 115 | 98 | 45 | 94 | 66 | 24 | 30 |
| 27 | 62 | 65 | 0 | 148 | 120 | 98 | 45 | 92 | 65 | 32 | 30 |
| 28 | 58 | 64 | 0 | 156 | 118 | 100 | 45 | 96 | 64 | 32 | 32 |
| 29 | 60 | 66 | 0 | 155 | 110 | 100 | 47 | 66 | 66 | 30 | 30 |
| 30 | 55 | 64 | 0 | 150 | 122 | 100 | 44 | 100 | 64 | 32 | 32 |

Таблица Б10 – Данные к задаче 12 (размеры  и координаты, мм)

| № вар. | xK | yK | zK | xE | yE | zE | R | r | δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 70 | 70 | 0 | 70 | 70 | 40 | 50 | 30 | 60 |
| 2 | 70 | 70 | 0 | 70 | 70 | 40 | 55 | 35 | 60 |
| 3 | 70 | 70 | 0 | 70 | 70 | 38 | 56 | 38 | 65 |
| 4 | 70 | 70 | 0 | 70 | 70 | 38 | 55 | 32 | 70 |
| 5 | 65 | 70 | 0 | 65 | 70 | 35 | 51 | 35 | 75 |
| 6 | 65 | 72 | 0 | 65 | 72 | 35 | 50 | 30 | 60 |
| 7 | 66 | 72 | 0 | 66 | 72 | 35 | 52 | 33 | 80 |
| 8 | 68 | 74 | 0 | 68 | 74 | 34 | 51 | 34 | 75 |
| 9 | 68 | 74 | 0 | 68 | 74 | 34 | 52 | 32 | 60 |
| 10 | 70 | 75 | 0 | 70 | 75 | 36 | 53 | 31 | 65 |
| 11 | 72 | 75 | 0 | 72 | 75 | 35 | 54 | 38 | 75 |
| 12 | 64 | 76 | 0 | 64 | 76 | 36 | 55 | 30 | 60 |
| 13 | 68 | 76 | 0 | 68 | 76 | 35 | 55 | 33 | 45 |
| 14 | 70 | 70 | 0 | 70 | 70 | 35 | 55 | 38 | 60 |
| 15 | 70 | 72 | 0 | 70 | 72 | 35 | 55 | 35 | 60 |
| 16 | 72 | 70 | 0 | 72 | 70 | 35 | 52 | 36 | 50 |
| 17 | 75 | 74 | 0 | 75 | 74 | 36 | 52 | 32 | 60 |
| 18 | 74 | 76 | 0 | 74 | 76 | 36 | 53 | 33 | 55 |
| 19 | 74 | 70 | 0 | 74 | 70 | 35 | 52 | 36 | 60 |
| 20 | 75 | 78 | 0 | 75 | 78 | 35 | 54 | 34 | 60 |
| 21 | 75 | 78 | 0 | 75 | 78 | 36 | 52 | 32 | 45 |
| 22 | 70 | 78 | 0 | 70 | 78 | 35 | 54 | 38 | 65 |
| 23 | 70 | 80 | 0 | 70 | 80 | 35 | 54 | 33 | 70 |
| 24 | 70 | 80 | 0 | 70 | 80 | 35 | 54 | 36 | 60 |
| 25 | 70 | 80 | 0 | 70 | 80 | 35 | 55 | 32 | 45 |
| 26 | 75 | 78 | 0 | 75 | 78 | 35 | 55 | 35 | 60 |
| 27 | 75 | 80 | 0 | 75 | 80 | 35 | 55 | 30 | 60 |
| 28 | 65 | 70 | 0 | 65 | 70 | 35 | 51 | 30 | 75 |
| 29 | 72 | 75 | 0 | 72 | 75 | 35 | 54 | 35 | 75 |
| 30 | 70 | 70 | 0 | 70 | 70 | 35 | 55 | 30 | 60 |

Таблица Б11 – Данные к задаче 13 (размеры и координаты, мм)

| № варианта | xK | yK | zK | R | h | r |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 60 | 68 | 0 | 52 | 106 | 40 |
| 2 | 60 | 70 | 0 | 54 | 104 | 42 |
| 3 | 60 | 70 | 0 | 55 | 102 | 41 |
| 4 | 60 | 72 | 0 | 52 | 100 | 40 |
| 5 | 61 | 70 | 0 | 50 | 108 | 42 |
| 6 | 60 | 72 | 0 | 51 | 98 | 42 |
| 7 | 60 | 71 | 0 | 50 | 96 | 40 |
| 8 | 58 | 70 | 0 | 54 | 98 | 41 |
| 9 | 58 | 70 | 0 | 52 | 95 | 40 |
| 10 | 60 | 68 | 0 | 55 | 94 | 40 |
| 11 | 58 | 68 | 0 | 51 | 95 | 40 |
| 12 | 58 | 68 | 0 | 52 | 100 | 42 |
| 13 | 62 | 70 | 0 | 53 | 94 | 42 |
| 14 | 58 | 68 | 0 | 50 | 95 | 40 |
| 15 | 60 | 68 | 0 | 52 | 98 | 40 |
| 16 | 61 | 70 | 0 | 51 | 100 | 40 |
| 17 | 62 | 72 | 0 | 55 | 102 | 42 |
| 18 | 62 | 70 | 0 | 54 | 104 | 42 |
| 19 | 60 | 70 | 0 | 53 | 100 | 40 |
| 20 | 60 | 72 | 0 | 52 | 95 | 42 |
| 21 | 60 | 68 | 0 | 55 | 96 | 42 |
| 22 | 62 | 68 | 0 | 50 | 100 | 40 |
| 23 | 62 | 68 | 0 | 51 | 102 | 40 |
| 24 | 63 | 68 | 0 | 51 | 108 | 40 |
| 25 | 60 | 70 | 0 | 52 | 106 | 42 |
| 26 | 60 | 70 | 0 | 54 | 104 | 40 |
| 27 | 60 | 70 | 0 | 55 | 100 | 41 |
| 28 | 59 | 70 | 0 | 54 | 98 | 41 |
| 29 | 63 | 71 | 0 | 50 | 96 | 40 |
| 30 | 65 | 71 | 0 | 50 | 96 | 40 |