УДК 532.59+627.8

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ПОТОКА ПРИ ПРОРЫВЕ ПЛОТИНЫ В УСЛОВИЯХ ВЫСОКОГОРЬЯ

Стриганова М.Ю.[1], Дмитриченко А.С.[2], Шаталов И.М.[3], Щербакова М.К.[3], Кособуцкий А.А.[3]

1). ГУО «Университет гражданской защиты МЧС Беларуси», Минск, Республика Беларусь

2). УО «Белорусский государственный технологический университет», Минск, Республика Беларусь

3). Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь

В реальных условиях высокогорья при прорыве плотины происходит относительно постепенное опорожнение водохранилища, при котором наблюдается падение уровня воды в водохранилище, уменьшение расхода воды в начальном створе и увеличение расхода в конечном сечении прямой отрицательной волны перемещения (рисунок 1).

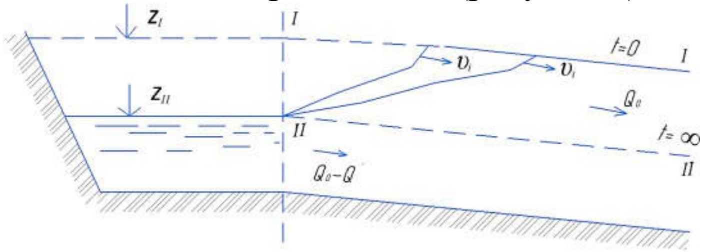


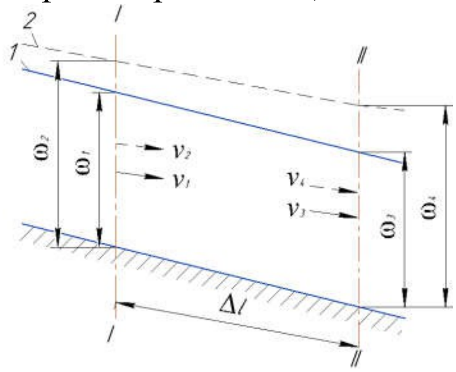
Рисунок 1 – Прямая отрицательная волна, или волна отлива

Движение воды в теле такой волны перемещения хорошо описывается двумя дифференциальными уравнениями баланса расхода и уравнением динамического равновесия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial t} + \omega\dfrac{\partial v}{\partial l} + v\dfrac{\partial\omega}{\partial l} = 0, \\ \left(i - AQ^2\right) g = \dfrac{g}{B}\dfrac{\partial\omega}{\partial l} + \alpha_0\dfrac{\partial v}{\partial t} + \alpha v\dfrac{\partial v}{\partial l}. \end{cases} \quad (1)$$

Для решения системы уравнений (1) в практических задачах и при компьютерном моделировании неустановившегося постепенно или плавно изменяющегося движения воды в условиях высокогорья в виде волны перемещения прямой или обратной, положительной или отрицательной наиболее применим метод конечных приращений. Подобный метод был использован Томпсоном для расчета прямоугольных русел, который с некоторыми дополнениями и изменениями можно распространить на русла произвольной формы поперечного сечения.

Рассмотрим русло произвольной формы поперечного сечения (см. рисунок 2). Разделим это русло на элементарные участки Δl, в пределах которых площадь живого сечения $\Delta\omega$ будет изменяться постепенно (или плавно). Рассмотрим конкретный элементарный участок, в начальном сечении которого, как и в последующих сечениях, параметры неустановившегося потока (глубины *h*, скорости *v*, площади живых сечений ω и т. д.) известны в данный момент времени *t* и в последующие отрезки времени Δ*t*. Предположим, что на рисунке 2 линия *1* соответствует положению свободной поверхности волны перемещения в начальный момент времени *t*; а линия *2* – это положение свободной поверхности той же волны по истечении отрезка времени Δ*t*, т. е. в момент времени *t*+Δ*t*.



1 – начальное положение поверхности волны перемещения в момент времени *t*; *2* – конечное положение поверхности волны перемещения в момент времени *t* + Δ*t*

Рисунок 2 – Отрезок некоторой кривой линии тока

Определим средние значения параметров неустановившегося потока в любом его сечении для отрезка времени Δ*t*:

$$\begin{cases} \overline{\omega} = (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)/4, \\ \overline{B} = (B_1 + B_2 + B_3 + B_4)/4, \\ \overline{R} = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)/4, \\ \overline{v} = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4)/4, \\ \overline{C} = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4)/4, \end{cases} \qquad (2)$$

где ω – площадь живого сечения, м^2; *v* – средняя скорость, м/с; *B* – ширина русла по поверхности потока, м; *R* – гидравлический радиус, м; *C* – коэффициент Шези, м^{0,5}/с.

В системе уравнений (1) неустановившегося постепенно или плавно изменяющегося движения уклон трения $i_{тр} = AQ^2$ на элементарном участке потока Δ*l* можно выразить из уравнения Шези $i_{тр} = \dfrac{\overline{v}^2}{\overline{C}^2\overline{R}}$. С учетом того что для призматического русла $\dfrac{\partial\omega}{\partial l} = 0$ и $i = i_0 - \dfrac{\partial h}{\partial l}$, где i_0 – уклон дна водотока, уравнение движения системы (1) представимо в виде:

$$i_0 = \frac{\overline{v}^2}{\overline{C}^2\overline{R}} + \frac{\partial h}{\partial l} + \frac{\alpha_0}{g}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\alpha v}{g}\frac{\partial v}{\partial l}, \qquad (3)$$

$$i_0 = \frac{\overline{v}^2}{\overline{C}^2\overline{R}} + \frac{\partial h}{\partial l} + \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial l}. \qquad (4)$$

Частные производные в конечных приращениях представим в виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial l}=\frac{1}{2}\left(\frac{h_3-h_1}{\Delta l}+\frac{h_4-h_2}{\Delta l}\right)=-\frac{h_1+h_2-h_3-h_4}{2\Delta l},\\
&\frac{\partial v}{\partial l}=\frac{1}{2}\left(\frac{v_3-v_1}{\Delta l}+\frac{v_4-v_2}{\Delta l}\right)=-\frac{v_1+v_2-v_3-v_4}{2\Delta l},\\
&\frac{\partial Q}{\partial l}=\frac{\partial(\omega v)}{\partial l}=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_3 v_3-\omega_1 v_1}{\Delta l}+\frac{\omega_4 v_4-\omega_2 v_2}{\Delta l}\right)=-\frac{\omega_1 v_1+\omega_2 v_2-\omega_3 v_3-\omega_4 v_4}{2\Delta l},\\
&\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{h_2-h_1}{\Delta t}+\frac{h_4-h_3}{\Delta t}\right)=-\frac{h_1-h_2+h_3-h_4}{2\Delta t},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{v_2-v_1}{\Delta t}+\frac{v_4-v_3}{\Delta t}\right)=-\frac{v_1-v_2+v_3-v_4}{2\Delta t},\\
&\frac{\partial \omega}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{\Delta t}+\frac{\omega_4-\omega_3}{\Delta t}\right)=-\frac{\omega_1-\omega_2+\omega_3-\omega_4}{2\Delta t}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где h_1, h_2, h_3, h_4 – глубина потока в рассматриваемых сечениях за отрезок времени Δt; v_1, v_2, v_3, v_4 – средние скорости за отрезок времени Δt;
ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 – площади живых сечений за отрезок времени Δt.

Согласно уравнениям (5) уравнения (3) и (4) в конечных разностях примут вид:

$$
i_0=\frac{\bar{v}^2}{\bar{C}^2\bar{R}}-\frac{h_1+h_2-h_3-h_4}{2\Delta l}-\alpha_0\frac{v_1-v_2+v_3-v_4}{2g\Delta t}-\alpha\bar{v}\frac{v_1+v_2-v_3-v_4}{2g\Delta l}, \tag{6}
$$

$$
i_0=\frac{\bar{v}^2}{\bar{C}^2\bar{R}}-\frac{h_1+h_2-h_3-h_4}{2\Delta l}-\frac{v_1-v_2+v_3-v_4}{2g\Delta t}-\bar{v}\frac{v_1+v_2-v_3-v_4}{2g\Delta l}. \tag{7}
$$

Уравнение баланса расхода (или уравнение неразрывности) постепенно или плавно изменяющегося неустановившегося движения потока жидкости в открытом русле системы (1) в конечных приращениях согласно (5) принимает вид

$$
-\frac{\omega_1 v_1+\omega_2 v_2-\omega_3 v_3-\omega_4 v_4}{2\Delta l}-\frac{\omega_1-\omega_2+\omega_3-\omega_4}{2\Delta t}=0. \tag{8}
$$

Уравнения (6), (7) и (8) позволяют найти параметры h и v неустановившегося потока в любой отрезок времени Δt и в любых сечениях этого потока, а также построить кривую свободной поверхности волны перемещения (прямой и обратной) в условиях высокогорья при прорыве плотины.

Представленный конечно-разностный метод интегрирования дифференциальных уравнений неустановившегося постепенно или плавно изменяющегося движения для определенных отрезков времени t = const (метод мгновенных режимов или фрагментов) является достаточно приближенным. Однако этот метод наиболее полно отвечает требованиям реальной инженерной практики и позволяет осуществить компьютерное моделирование процесса распространения волны перемещения (как прямой, так и обратной) в условиях высокогорья при прорыве плотины.