

УДК 685.659.1+536.48

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ
ФОРМИРОВАНИЯ ЛЕДОВОГО ПОЛЯ**

Асп. ЛИВАНСКИЙ Д. Г.

Белорусский национальный технический университет

Сформировать ледовое поле с заданными свойствами возможно при:

- соблюдении технологии заливки, обеспечивающей высокое качество льда;
- оптимальной конструкции ледового основания (рис. 1);
- наличии управляемой системы холодоснабжения.

На основании приведенных сведений и данных [1, 2] решается задача распространения теплоты в основании ледового поля крытых искусствен-

ных катков. Если пренебречь эффектами на краях ледового поля (рис. 1), то во всех поперечных сечениях системы по отношению к охлаждающим трубам распределения температур подобны. С учетом малости линейного изменения температуры хладоносителя с высокой степенью приближения может быть признано моделируемое поле плоскопараллельным (двумерным, рис. 1, разрез А–А). В силу этого при исследовании рассматриваемых процессов решается дифференциальное уравнение теплопроводности для двумерного случая и периода окончания намораживания льда

$$\rho(x, y, T)c(x, y, T)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x, y, T)\frac{\partial T}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(x, y, T)\frac{\partial T}{\partial y}\right] + q_v, \quad (1)$$

где $\lambda(x, y, T)$ – коэффициент теплопроводности материала, Вт/(м·К); $\rho(x, y, T)$ – плотность материала, кг/м³; $c(x, y, T)$ – удельная теплоемкость материала, Дж/(кг·К); τ – время, с; x, y – координаты, м; T – температура, К.

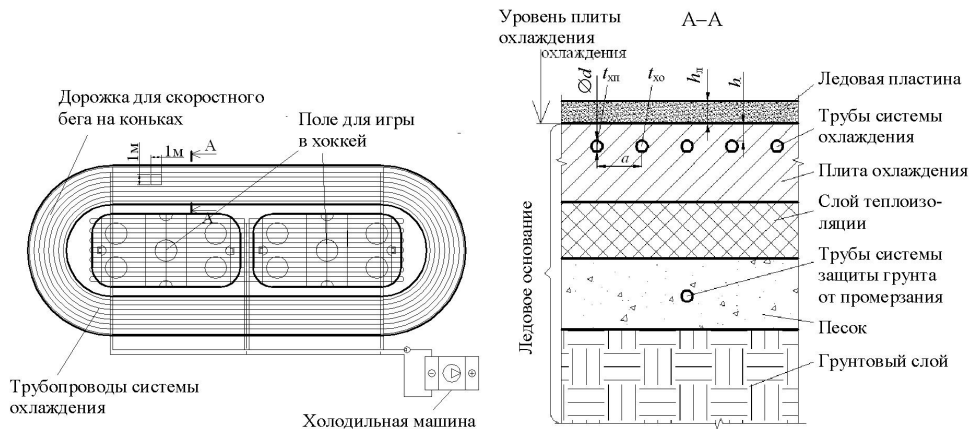


Рис. 1. Система охлаждения ледового поля, разрез А–А основания ледового поля: d – диаметр труб системы охлаждения, мм; a – шаг укладки трубопроводов, мм; $h_б$ – толщина слоя бетона над трубами системы охлаждения, мм; $h_л$ – толщина ледовой пластины, мм; $t_{хл}$ – температура хладоносителя в подающем трубопроводе, °С; $t_{хo}$ – температура хладоносителя в обратном трубопроводе, °С

Размеры поля для игры в хоккей – 60×30 м, а длина дорожки для скоростного бега на коньках – 400×16 м. В качестве расчетной области принято поперечное сечение по отношению к охлаждающим трубам шириной 1 м (определяется шагом раскладки труб системы обогрева грунта, рис. 1, разрез А–А).

Теплофизические характеристики материалов ($\lambda(x, y, T)$, $\rho(x, y, T)$, $c(x, y, T)$) принимаются при следующих допущениях:

- если при строительстве крытых катков используются строительные материалы, соответствующие действующим нормативным документам;
- когда не учитывается конвективный перенос в слое воды;
- если увлажнение материалов извне и от внутренних источников отсутствует и не изменяется с течением времени.

Теплофизические характеристики воды (льда) с учетом их изменения при фазовом переходе

$$\lambda = \lambda_{\text{л}} + (\lambda_{\text{в}} - \lambda_{\text{л}})H, \quad (2)$$

где $\lambda_{\text{л}}$ – коэффициент теплопроводности льда, Вт/(м·К); $\lambda_{\text{в}}$ – коэффициент теплопроводности воды, Вт/(м·К); H – сглаженный шаг функции Хевисайда,

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < (t_3 - 0,1) \\ 5(t - t_3 - 0,1), & (t_3 - 0,1) < t < (t_3 + 0,1), \\ 1 & t > (t_3 + 0,1) \end{cases} \quad (3)$$

(t_3 – температура замерзания воды 0 °С; величина 0,1 – ширина сглаженного шага функции).

В свою очередь

$$\rho = \rho_{\text{л}} + (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})H, \quad (4)$$

где $\rho_{\text{л}}$ и $\rho_{\text{в}}$ – соответственно плотности льда и воды, кг/м³.

Для удельной теплоемкости c , входящей в (1), имеем

$$c = c_{\text{л}} + (c_{\text{в}} - c_{\text{л}})H, \quad (5)$$

где $c_{\text{л}}$ и $c_{\text{в}}$ – соответственно удельные теплоемкости льда и воды, Дж/(кг·К).

Также q_v определяем по следующей формуле:

$$q_v = l\gamma \frac{\partial i}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (6)$$

где q_v – теплота, выделившаяся при замерзании воды в единице объема, Вт/м³; l – скрытая теплота фазового перехода (вода – лед), Дж/кг; ρ – плотность влаги в единице объема, кг/м³; i – льдистость – это отношение содержания замерзшей влаги к общему влагосодержанию грунта или слоя воды (для случая намораживания слоя льда).

Назначить параметры начального распределения температуры $T_0 = T(x, y, 0)$ в расчетной области для каждого конкретного случая является достаточно сложной задачей, поэтому искомое температурное поле может быть найдено путем решения (1).

При решении дифференциального уравнения теплопроводности граничные условия задаются исходя из конкретных условий переноса теплоты на границах расчетной области.

Граничные условия устанавливаются:

- для границы сопряжения ледового поля с окружающей средой

$$\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_s = \Sigma q, \quad (7)$$

где

$$\Sigma q = q_k + q_{\phi} + q_p \quad [3]; \quad (8)$$

q_k – конвективный тепловой поток, Вт/м²; q_{ϕ} – тепловой поток за счет скрытой теплоты фазового перехода водяных паров в твердую фазу, Вт/м²; q_p – то же за счет переноса тепловой энергии излучением с окружающей средой, Вт/м²; s – граница;

$$q_k = \alpha_k (t_b - t_l), \quad (9)$$

α_k – коэффициент теплообмена поверхности льда с воздухом, Вт/(м²·К);
 t_b, t_l – температуры окружающей среды и поверхности льда, °С;

$$q_\phi = mr = \alpha_D (C_{пв} - C_{пл}) r, \quad (10)$$

m – удельный поток массы водяных паров к поверхности льда, кг/(м²·К);
 r – теплота фазового перехода, Дж/кг; $C_{пв}$ и $C_{пл}$ – концентрации водяных паров в воздухе и надо льдом, кг/м³; α_D – коэффициент массообмена, м/ч;

$$\alpha_k = k \left(\frac{t_b - t_l}{b} \right)^{1/4}; \quad \alpha_D = k_D \left(\frac{t_b - t_l}{b} \right)^{1/4}; \quad (11)$$

k , Вт/(м^{7/4}·К^{5/4}) и k_D , м^{5/4}/(ч·К^{1/4}) – коэффициенты, зависящие от температуры окружающей среды t_b ; b – ширина ледового поля, м;

$$q_p = \varepsilon \sigma_o (T_{п}^4 - T_{л}^4), \quad (12)$$

где $T_{п}$ – среднеинтегральная температура окружающих поверхностей, К.

Принимаем: $T_{хп} = \text{const}$; $T_{хо} = \text{const}$; $T_{оп} = \text{const}$; $T_{оо} = \text{const}$ – для поверхности труб систем охлаждения и обогрева грунта;

- для нижней границы ледового основания

$$\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_s = q_{зем}, \quad (13)$$

где $q_{зем}$ – геотермальный тепловой поток, Вт/м²;

- для боковых границ элемента ледового основания

$$\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_s = 0; \quad (14)$$

- для внутренних границ в местах сопряжения различных материалов основания ледового поля

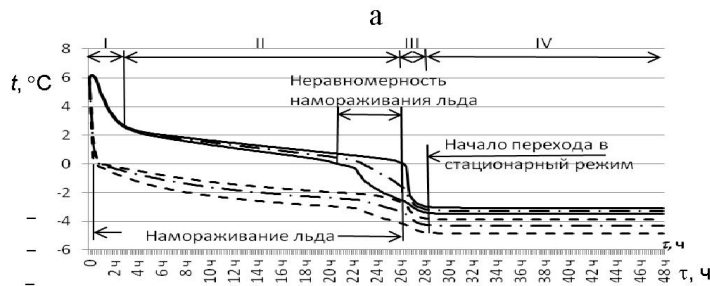
$$\lambda_1 \frac{\partial t}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (15)$$

Задача о теплопроводности решалась автором с помощью метода конечных элементов.

Далее приведены результаты расчета температурного поля при следующих конструктивных характеристиках расчетной области: $\delta_l = 40$ мм – толщина слоя льда; $\delta_b = 160$ мм – толщина бетонной плиты; $h_b = 30$ мм – толщина слоя бетона над трубами охлаждения; $\delta_T = 200$ мм – то же теплоизоляции; $\delta_{гр} = 500$ мм – то же грунта с системой обогрева; $a_{хп} = 100$ мм – шаг укладки труб охлаждения; $a_{орп} = 1000$ мм – то же труб обогрева грунта; $d_{хп} = 25$ мм – внутренний диаметр труб охлаждения; $d_{орп} = 25$ мм – то же обогрева грунта; $t_{хп}, t_{хп} = 0$ –(–16) °С – диапазон изменения температур

хладоносителя в подающем и обратном трубопроводах; укладка трубопроводов принята U-образно с чередованием подающего и обратного трубопроводов.

В процессе намораживания ледового поля автор выделил четыре этапа формирования температурного поля (рис. 2). I этап обусловлен достаточно быстрым охлаждением воды. На поверхности бетонной плиты охлаждения это происходит быстрее, чем на поверхности воды. II этап обусловлен кристаллизацией воды на нижних слоях и замедлением охлаждения выше лежащих слоев. Данный этап наиболее продолжительный, так как системе охлаждения необходимо отвести значительные тепловыделения (рис. 3), сопровождающиеся при кристаллизации воды. III этап – это дальнейшее охлаждение уже льда до равновесной температуры при данных расчетных условиях. IV этап – это поддержание неизменной температуры льда (стационарный режим).



б



Рис. 2. а – изменение температуры на поверхности воды и плиты охлаждения при намораживании ледового поля: — — — — минимальная (снизу) и максимальная (сверху) температуры на поверхности воды (льда); — — — — минимальная (снизу) и максимальная (сверху) температуры воды (льда) на поверхности плиты охлаждения; — · — — — среднее значение температуры воды (льда) ($t_0 = 6 \text{ } ^\circ\text{C}$; $t_{\text{хп}} = -7 \text{ } ^\circ\text{C}$; $t_{\text{хо}} = -4 \text{ } ^\circ\text{C}$; $t_{\text{в}} = 8 \text{ } ^\circ\text{C}$; $\delta_{\text{л}} = 40 \text{ мм}$); б – фрагмент бетонной плиты охлаждения при намораживании льда

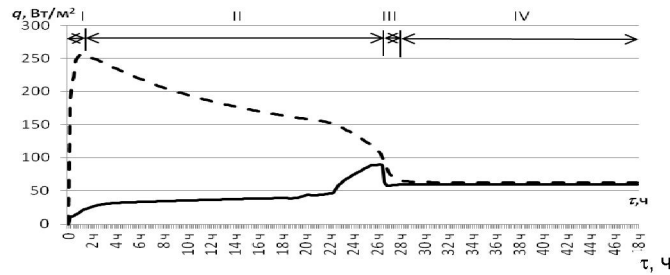


Рис. 3. Изменение теплового потока на поверхности воды и плиты охлаждения при намораживании ледового поля: — — — среднее значение теплового потока на поверхности воды (льда); - - - - то же на поверхности плиты охлаждения

На рис. 2 значения минимальной и максимальной температур на поверхности льда или плиты охлаждения соответствуют расположению подающего и обратного трубопроводов системы охлаждения (рис. 1).

I, II, III и IV этапы намораживания ледового поля, хоть и не имеют четко выраженных границ, но с достаточной точностью их можно проследить в любой точке – как на поверхности, так и в толще льда.

Более детально этапы намораживания ледового поля можно увидеть на рис. 4–7.

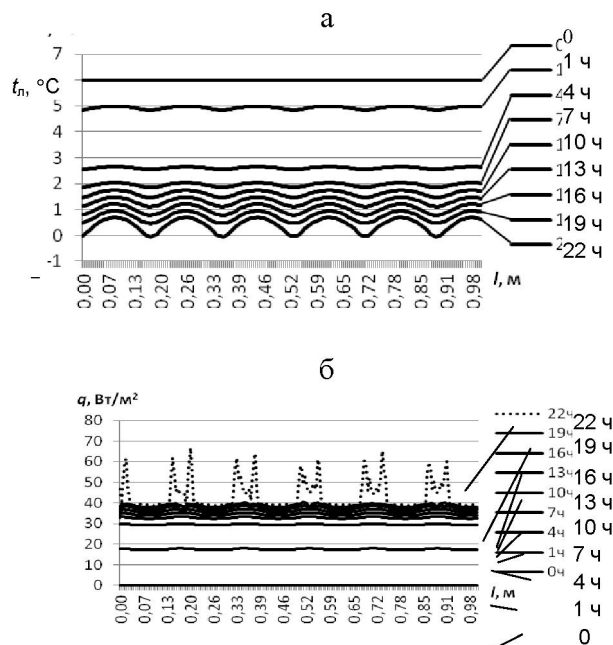


Рис. 4. Температурное поле (а) и тепловой поток (б) на поверхности охлаждаемой воды в разные моменты времени от начала намораживания ледового поля (I и II этапы)

На рис. 4а изображено изменение температуры на внешней поверхности воды в течение 22 ч. В течение первых четырех–семи часов наблюдается достаточно быстрое понижение температуры, что соответствует I этапу намораживания ледового поля. В промежутке с 7 до 22 ч наблюдается замедление охлаждения, вызванное выделениями скрытой теплоты при фа-

зовом переходе воды в лед (процесс кристаллизации) на нижележащих слоях воды, что соответствует II этапу намораживания ледового поля. Через 22 ч фронт кристаллизации достигает поверхности воды, о чем свидетельствуют участки с температурой, равной 0 °С. В это же время наблюдаются скачки теплового потока, соответствующие началу процесса кристаллизации на поверхности воды.

На рис. 5а изображено изменение температуры при замерзании воды на поверхности. Замерзание воды происходит неравномерно, поэтому можно одновременно наблюдать I, II и III этапы процесса намораживания. Вода начинает замерзать на участках, расположенных над подающим трубопроводом системы охлаждения раньше, чем на участках над обратным трубопроводом. Данная неравномерность формирует волнообразную поверхность льда в процессе намораживания, что приводит к температурной неравномерности до нескольких градусов. Если учесть при этом свойство воды вытеснять при кристаллизации химические примеси в сторону жидкой фазы, то в области над обратным трубопроводом системы охлаждения (с максимальной температурой) будут скапливаться все примеси. Если для заливки льда использовать воду с большим содержанием химических веществ, то в результате намораживания получится неоднородный по скользящим свойствам, т. е. «полосатый лед». С течением времени данная «волна» выравнивается и формируется плоская поверхность льда. Время, за которое «волна» выровняется в плоскость, равно неравномерности намораживания льда и зависит от разности температур в подающем и обратном трубопроводах системы охлаждения ($\Delta t_{\text{хн}}$, °С).

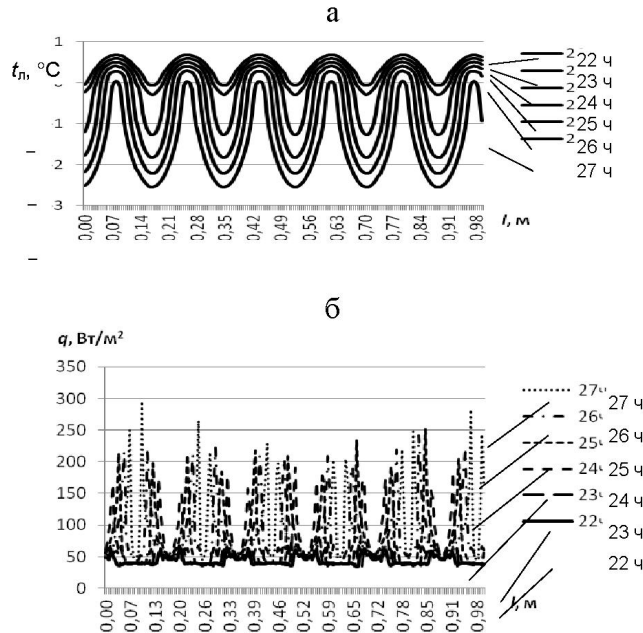


Рис. 5. Температурное поле (а) и тепловой поток (б) на поверхности охлаждаемой воды в разные моменты времени от начала намораживания ледового поля (I, II и III этапы)

При замерзании воды значительно увеличивается тепловой поток (рис. 5б) и достигает значений порядка $200\text{--}300 \text{ Вт/м}^2$. Значительное количество пиков теплового потока показывает локальные участки замерзания воды и релаксацию выделившегося теплового потока. Намораживание льда – II этап – самый энергоемкий процесс, поэтому требуется значительная мощность холодильной машины для его осуществления (рис. 3).

III этап намораживания льда (рис. 6а, б) можно характеризовать уменьшением температурной неоднородности и снижением теплового потока, что свидетельствует об окончании процесса кристаллизации воды и дальнейшем охлаждении льда до равновесной температуры при данных условиях.

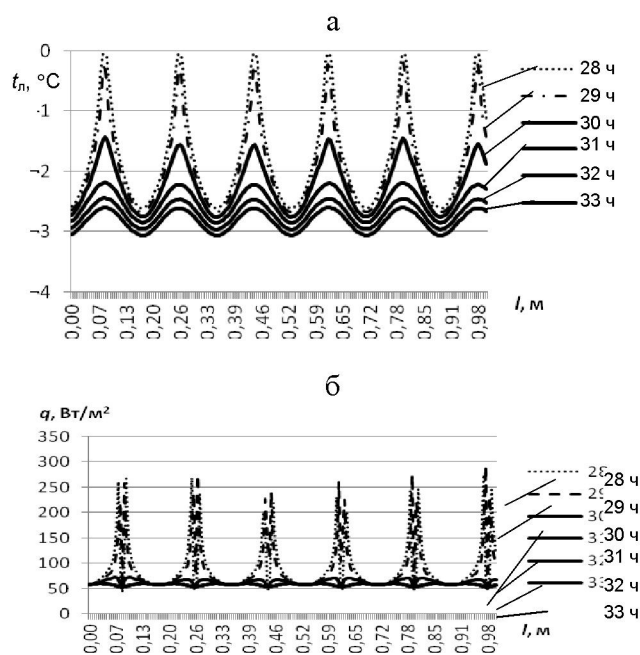
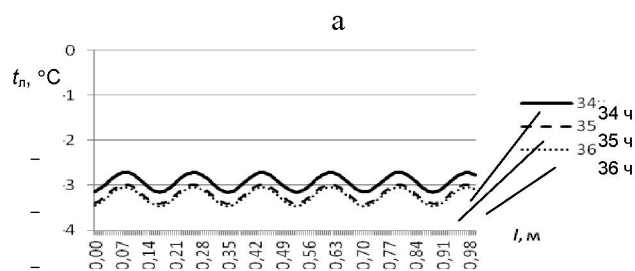


Рис. 6. Температурное поле (а) и тепловой поток (б) на поверхности охлаждаемой воды в разные моменты времени от начала намораживания ледового поля (II, III и IV этапы)

IV этап (рис. 7а, б) наступает через 34 ч после начала процесса намораживания льда. Это стационарный процесс, при котором температура и тепловой поток на поверхности льда при данных расчетных параметрах ($t_o = 6 \text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_{\text{хп}} = -7 \text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_{\text{хo}} = -4 \text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_b = 8 \text{ }^{\circ}\text{C}$; $\delta_{\text{л}} = 40 \text{ мм}$) остаются постоянными.



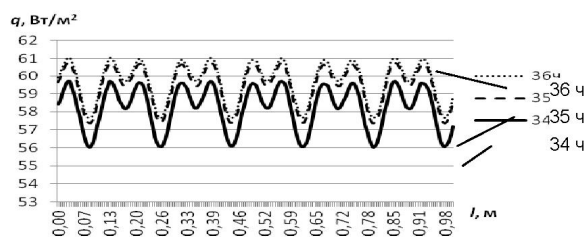


Рис. 7. Температурное поле (а) и тепловой поток (б) на поверхности охлаждаемой воды в разные моменты времени от начала намораживания ледового поля (III и IV этапы)

Технология заливки и намораживания ледового поля подразумевает определенную последовательность формирования различных слоев льда. В приведенном выше примере производилось намораживание одного слоя толщиной 40 мм для демонстрации процессов при формировании ледового поля. При многослойном намораживании льда все описанные выше этапы повторяются на каждом новом слое.

Как видно из табл. 1, продолжительность намораживания ледового поля можно уменьшить за счет изменения режима работы холодильной машины, т. е. понижения средней температуры хладоносителя $t_{срхн}$, при этом возрастает скорость намораживания $v_{срл}$. Повышение скорости намораживания более 3 мм/ч приведет к образованию в теле льда большего количества дефектов. Растворенные в воде воздух и примеси не будут успевать вытесняться кристаллической структурой и останутся в теле льда, это приведет к снижению скользящих свойств льда.

Анализируя данные табл. 1, видим, что средняя температура поверхности льда пропорциональна средней температуре хладоносителя и не зависит от значения разности температур в подающем и обратном трубопроводах системы охлаждения. Следовательно, требуемую температуру поверхности льда можно получить при различном сочетании температур хладоносителя. Средняя скорость намораживания ледового поля в большей степени зависит от соотношения температур хладоносителя в подающем и обратном трубопроводах системы охлаждения. Это связано с тем, что кристаллизация воды на участках, расположенных над подающим и обратным трубопроводами системы охлаждения, происходит с различной скоростью.

Таблица 1

Температуры хладоносителя в подающем и обратном трубопроводах системы охлаждения $t_{хн}/t_{хо}, ^\circ\text{C}$	Средняя температура хладоносителя $t_{срхн}, ^\circ\text{C}$	Продолжительность намораживания ледового поля $\tau, \text{ч (мин)}$	Величина неравномерности намораживания льда $\Delta\tau, \text{ч (мин)}$	Средняя температура поверхности льда $t_{срл}, ^\circ\text{C}$	Средняя скорость намораживания ледового поля $v_{срл}, \text{мм/ч}$
-4 / -1	-2,5	>>48 ч	-	-0,77	<<0,83
-5 / -2	-3,5	48 ч 50 мин	15 ч 50 мин	-1,6	0,82
-6 / -3	-4,5	33 ч 50 мин	8 ч 40 мин	-2,43	1,18

-7 / -4	-5,5	25 ч 50 мин	5 ч 30 мин	-3,26	1,55
-8 / -4	-6,0	24 ч 20 мин	6 ч	-3,68	1,64
-8 / -3	-5,5	27 ч	7 ч 30 мин	-3,26	1,48
-12 / -9	-10,5	12 ч 10 мин	2 ч 40 мин	-7,49	3,28
-12 / -8	-10,0	13 ч	3 ч	-7,07	3,07
-13 / -8	-10,5	12 ч 30 мин	2 ч 30 мин	-7,49	3,2

Во время заливки льда на конькобежном стадионе «Многопрофильного культурно-спортивного комплекса “Минск-Арена”» было проведено экспериментальное измерение скорости намораживания ледового поля. В результате исследования установлено, что средняя скорость намораживания льда $v_{\text{срл}} = 3$ мм/ч. При численном моделировании процесса намораживания льда при аналогичной конструкции основания ледового поля и условиях окружающей среды, которые фиксировались с помощью измерительных приборов (температура, влажность и подвижность воздуха, температура окружающих поверхностей, тепловой поток к поверхности льда, температуры хладонносителя в подающем и обратном трубопроводах системы охлаждения), получена скорость намораживания льда $v_{\text{срл}} = 2,9$ мм/ч. Подобные результаты также получены в ходе лабораторного исследования. Скорость намораживания льда в данном случае составляла $3,25 \pm 0,16$ мм/ч при относительной погрешности 4,9 % и достоверности результатов 95 %. Полученные экспериментальные и расчетные результаты хорошо согласуются между собой и подтверждают адекватность математической модели реальным процессам переноса теплоты в основании ледового поля и намораживания льда.

Требуемые свойства льда достигаются за счет поддержания оптимальной температуры для каждого вида соревнований: так, для скоростного бега на коньках -7 °С, для хоккея -5 °С, для фигурного катания -4 °С, во время тренировки -3 °С [4]. В табл. 2 приведены средние температуры поверхности ледового поля при различных температурах окружающей среды и хладонносителя. Для получения более низкой температуры поверхности льда и при повышении температуры окружающей среды необходимо понижать температуры хладонносителя, что в свою очередь ведет к увеличению требуемой мощности холодильной машины. Также, например, чтобы подготовить лед к хоккейному матчу, необходимо понизить температуру льда с -3 до -5 °С, осуществляется это понижением температур хладонносителя.

Таблица 2

Средняя температура поверхности льда в зависимости от температур хладонносителя ($t_{\text{хо}}, t_{\text{хп}},$ °С) и окружающей среды ($t_{\text{в}},$ °С)

Температуры хладонносителя $t_{\text{хп}} / t_{\text{хо}},$ °С	Температура окружающей среды $t_{\text{в}},$ °С								
	-8	-4	0	4	8	12	16	20	24
-3 / 0	-2,45								
-4 / -1	-3,29	-2,68							
-5 / -2	-4,12	-3,53	-2,87	-2,25					
-6 / -3	-4,97	-4,36	-3,74	-3,09	-2,43				
-7 / -4	-5,82	-5,21	-4,61	-3,93	-3,26	-2,54			

-8 / -5	-6,67	-6,06	-5,45	-4,77	-4,09	-3,41	-2,68		
-9 / -6	-7,52	-6,91	-6,29	-5,61	-4,94	-4,28	-3,54	-2,8	
-10 / -7		-7,76	-7,13	-6,45	-5,79	-5,12	-4,4	-3,64	-2,88
-11 / -8				-7,32	-6,64	-5,96	-5,24	-4,48	-3,72
-12 / -9					-7,49	-6,8	-6,08	-5,32	-4,56
-13 / -10						-7,64	-6,92	-6,16	-5,4
-14 / -11							-7,77	-7,03	-6,24
-15 / -12									-7,11

На рис. 8 отоброжено изменение температуры поверхности льда при различных температурах хладоносителя. Основное снижение температуры льда происходит в первые два часа, дальнейшее изменение температуры – менее 0,1–0,3 °С. Это показывает, что можно в течение нескольких часов привести температурный режим льда к требуемым параметрам.

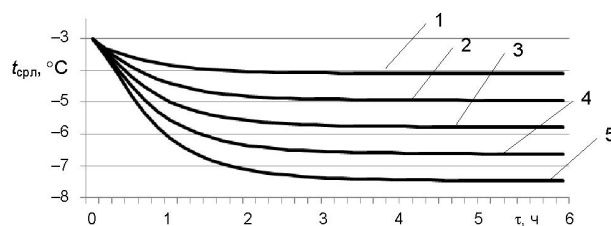


Рис. 8. Изменение средней температуры поверхности льда ($t_{\text{срл}}$, °С) с течением времени (τ , ч) при понижении температур хладоносителя ($t_{\text{хп}}/t_{\text{хо}}$, °С): 1 – $t_{\text{хп}}/t_{\text{хо}} = (-8/-5)$ °С; 2 – $(-9/-6)$ °С; 3 – $(-10/-7)$ °С; 4 – $(-11/-8)$ °С; 5 – $t_{\text{хп}}/t_{\text{хо}} = (-12/-9)$ °С

На рис. 9 представлен температурный режим ледового поля в случае, когда отключена холодильная машина и температура окружающей среды выше 0 °С ($t_{\text{в}} = 8$ °С). Это процесс самостоятельного размораживания ледового поля. Как видно (рис. 9, верхний график), в течение 24 ч температура поверхности льда повышается до 0 °С. Полностью растает ледовое поле толщиной 40 мм через 80 ч (более трех суток) после отключения холодильной машины.

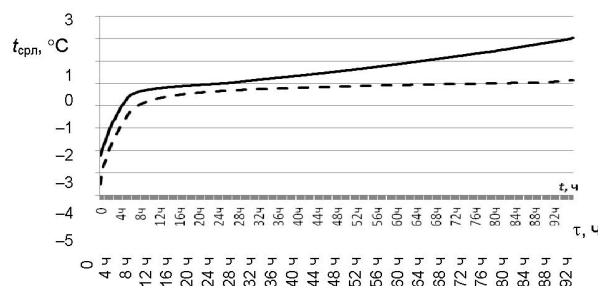


Рис. 9. Температурный режим льда при отключении холодильной машины: — — средняя температура на поверхности льда (воды); - - - - среднее значение температуры льда (воды) на поверхности бетонной плиты охлаждения

ВЫВОД

Для создания ледового поля с требуемыми параметрами определяющую роль играет время, т. е. продолжительность процессов охлаждения и намораживания льда. Оптимизация данного параметра позволит достичь выдающихся результатов в хоккее, фигурном катании и конькобежном спорте.

ЛИТЕРАТУРА

1. П р о е к т и р о в а н и е спортивных и физкультурно-оздоровительных зданий, сооружений и помещений: П2–2000 к СНиП 2.08.02–89. – Минск: РУП «Стройтехнорм», 2001. – 94 с.
2. Ф и з к у л ь т у р н о-с п о р т и в н ы е залы: СП 31–112–2007. – Ч. 3: Крытые ледовые арены. – М., 2008. – 139 с.
3. I c e r i n k s. ASHRAE Handbook 2002 Refrigeration, 2002. – 11 с.
4. П р а в и л а ИИХФ по строительству и эксплуатации катков. Международная федерация хоккея на льду (ИИХФ).
5. Н а п а л к о в, Г. Н. Тепломассоперенос в условиях образования инея / Г. Н. Напалков. – М.: Машиностроение, 1983. – 189 с.

Представлена кафедрой
теплогазоснабжения и вентиляции

Поступила 21.06.2010