

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А.Е.Крушевский

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ МЕХАНИКУ
УПРУГИХ ТЕЛ

Минск 2004

УДК 539.3:531.011

ББК 22.251:22.21

К 84

Рецензенты:

зав. кафедрой теоретической и прикладной механики БГУ,

д-р физ.-мат. наук, профессор М.А.Журавков,

зав. кафедрой сопротивления материалов БНТУ,

д-р физ.-мат. наук, профессор Ю.В.Василевич

Крушевский А.Е.

К 84 Введение в аналитическую механику упругих тел / А.Е.Крушевский. – Мн.: БНТУ, 2004. – 335 с.

ISBN 985-479-045-2.

Настоящая монография предназначена для специалистов в области механики, в частности, для студентов, аспирантов и инженеров, занимающихся расчетом как реальных конструкций, так и решением краевых задач математической и прикладной теории упругости для тел конечных размеров.

В основу монографии положен принцип Даламбера-Лагранжа с учетом модифицированных уравнений связей, составляемых из условий равновесия и закрепления упругого тела.

Библиогр. 206, 12 табл., 33 ил.

УДК 539.3:531.011

ББК 22.251:22.21

ISBN 985-479-045-2

© А.Е.Крушевский, 2004

Оглавление

Предисловие.....	7
Введение.....	8
Глава 1. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ УПРУГОЙ СРЕДЫ.....	9
1.1. Обзор методов решения краевых задач теории упругости.....	9
1.2. Два основных способа варьирования в теории упругости.....	15
1.3. Составление уравнений движения (равновесия) различных элементов упругой среды на основе принципа Лагранжа.....	17
1.3.1. Элементарный параллелепипед.....	18
1.3.2. Элементарный столбик.....	20
1.3.3. Элементарный слой.....	23
1.3.4. Полный объем.....	25
1.4. Некоторые вопросы обоснования вариационных уравнений равновесия элементарного столбика и слоя.....	27
1.4.1. Вариационное уравнение равновесия элементарного столбика.....	27
1.4.2. Вариационное уравнение равновесия элементарного слоя.....	30
1.4.3. Вариационное уравнение равновесия полного (конечного) объема.....	34
1.5. Требования, предъявляемые к выбору аппроксимирующих функций и возможных перемещений.....	36
1.5.1. Требования для обеспечения сходимости к точному решению.....	37
1.5.2. Требования для обеспечения сходимости по энергетической норме.....	39
Глава 2. ПРИВЕДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ К СИСТЕМЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО СТОЛБИКА.....	40
2.1. Разложение упругих перемещений в ряд Фурье, неполнота которого на концах отрезка устранена полиномами.....	41
2.2. Применение вариационного уравнения равновесия элементарного столбика к выводу уравнений равновесия цилиндрического тела.....	42

2.3. Составление уравнений связей из условий на торцах цилиндрического тела.	46
2.4. Вывод разрешающих уравнений для решения задачи о равновесии упругого цилиндрического тела при различных краевых условиях на торцах.	47
2.4.1. Первая основная задача (на торцах заданы напряжения)	47
2.4.2. Вторая основная задача (на торцах заданы перемещения)	51
2.4.3. Смешанная задача (на торцах заданы касательные усилия и нормальные перемещения).	56
2.5. Применение вариационного уравнения равновесия элементарного столбика к построению приближенной теории пластин.	66
2.5.1. Построение уточненной теории трансверсально-изотропных пластин на основе выполнения краевых условий на торцах пластинки.	66
2.5.2. Равновесие круглой изотропной пластинки с защемленными краями и нагруженной по верхнему торцу постоянной нагрузкой.	74
Глава 3. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ О РАВНОВЕСИИ УПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ В НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДАХ.	78
3.1. Функциональные ряды в задачах теории упругости. Упругий параллелепипед и цилиндр. Статические задачи.	79
3.2. Операторные методы разложения функции в неортогональные (ортогональные) ряды.	96
3.2.1. Операторный метод разложения функции в ряд Фурье.	99
3.2.2. Операторный метод разложения функции в ортогональный ряд по функциям Бесселя.	102
3.2.3. Операторный метод разложения функции в неортогональный ряд по функциям Бесселя.	103
3.2.4. Операторный метод разложения функции в ряд, члены которого зависят от комплексно-сопряженных корней трансцендентного уравнения.	105
3.2.5. Операторный метод разложения функций в ряд по гиперболическим функциям, зависящим от порядкового номера.	108

3.3. Применение операторного метода разложения функции в неортогональный ряд к решению задач теории упругости. . .	109
3.3.1. Сжатие упругого квадрата параболической нагрузкой. . .	109
3.3.2. Обоснование функциональных уравнений для решения задачи о растяжении (сжатии) упругого квадрата.	120
3.3.3. Другие примеры применения однократного оператора к решению краевых задач теории упругости.	124
3.3.4. Операторный метод решения задачи о равновесии упругого прямоугольного параллелепипеда.	134
Глава 4. ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО СЛОЯ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.	155
4.1. Применение рядов Фурье для изучения напряженно-деформированного состояния цилиндрического тела на основе вариационного уравнения равновесия элементарного слоя.	155
4.2. Применение степенных рядов для решения задач о равновесии тел при помощи вариационного уравнения элементарного слоя.	168
4.2.1. Задача растяжения (сжатия) упругого параллелепипеда.	169
4.2.2. Определение частот продольных колебаний упругого стержня прямоугольного сечения.	173
4.2.3. Сжатие свободно опертого при $z = 0$ упругого параллелепипеда, нагруженного при $z = h$ нормальной нагрузкой $\sigma_z = p + p_1 x^2 + p_2 y^2$	180
4.2.4. Задача изгиба (в плоскости YOZ) упругого параллелепипеда	183
4.3. Равновесие конструкций с круговой осью.	194
4.4. Построение дифференциальной структуры решения задачи о равновесии упругого конечного цилиндра.	199
4.5. Построение дифференциальной структуры решения краевых задач теории упругости в криволинейных координатах.	206
4.6. Решение задачи о внезапном приложении крутящего момента к торцу цилиндрической оболочки.	213
Глава 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ПРИ ПОЛНОЙ АППРОКСИМАЦИИ УПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПО ТРЕМ КООРДИНАТАМ. . .	215

5.1. Представление искомым упругих перемещений в виде стандартных степенных рядов.	215
5.2. Составление уравнений связей из условий равновесия внутри и на поверхности упругого тела.	216
5.3. Классификация расчетных уравнений и их структура.	219
5.4. Некоторые элементарные примеры.	223
5.4.1. Растяжение (сжатие) плоской фигуры, имеющей две оси симметрии и нагруженной вдоль оси двумя сосредоточенными силами.	223
5.4.2. Сжатие (растяжение) шара.	227
5.5. Программная реализация аналитического вариационного метода решения задач теории упругости.	230
5.6. Применение множителей Лагранжа.	235
5.7. Численное исследование точечного выполнения граничных условий.	241
5.8. Численное исследование различных способов задания поверхностных связей.	245
5.9. Примеры расчета корпусных деталей прессов.	250
5.9.1. Стол прессы K2535A.	250
5.9.2. Станина прессы K8544.	254
5.10. Равновесие периодонта как оболочки, ограниченной двумя составными эллиптическими гиперboloидами.	257
5.11. Применение вариационного уравнения равновесия полного объема к решению динамических задач теории упругости.	266
5.11.1. Примеры определения собственных частот и форм колебаний упругих стержней различной длины с квадратным поперечным сечением.	268
5.11.2. Распространение упругих волн в кубическом образце при импульсивном нагружении.	273
5.12. Применение ортогональных рядов к решению задач теории упругости.	279
5.12.1. Сжатие (растяжение) упругого прямоугольника при заданных на контуре напряжениях.	280
5.12.2. Сжатие (растяжение) упругого конечного цилиндра.	293
5.12.3. Равновесие цилиндра под действием боковой опоясывающей нагрузки.	298
5.12.4. Исследование напряженно-деформированного состояния упругого конечного цилиндра, вращающегося вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью.	304
Список использованных источников.	318

Предисловие

Монография посвящена разработке различных методов решения краевых задач упругости на основе вариационного принципа Лагранжа. При этом широко используются стандартные ряды функций, на основе которых составляются модифицированные уравнения связей из условий равновесия и закрепления упругого тела.

Монография состоит из пяти глав. Первая глава посвящена обзору методов решения краевых задач теории упругости и выводу вариационных уравнений для различных элементов деформируемого тела и их обоснованию.

Во второй главе осуществляется однократное понижение мерности задачи на основе рядов Фурье с дополнительными членами в виде полиномов Лежандра, в результате чего выводятся системы дифференциальных уравнений бесконечно высокого порядка при различных краевых условиях на торцах упругого цилиндрического тела.

Третья глава посвящена операторному решению полученных систем дифференциальных уравнений на основе нового метода разложения функции в неортогональный (ортогональный) ряд.

В четвертой главе понижается мерность задачи на две единицы как на основе двумерных рядов Фурье с дополнительными членами в виде полиномов Лежандра, так и на основе степенных рядов.

Пятая глава посвящена аппроксимации искомым упругим перемещений по всем координатам. Применение степенных рядов позволило полностью автоматизировать вывод как вариационных уравнений, так и различного вида уравнений поверхностных и внутренних связей на ЭВМ, а применение ортогональных рядов Фурье-Бесселя дало возможность построить функциональные уравнения, решение которых осуществлено достаточно эффективно методом последовательных приближений.

В монографии приводятся многочисленные примеры решения конкретных краевых задач теории упругости, а также дан расчет некоторых реальных инженерных конструкций. В ней также использованы отдельные результаты, полученные учениками под руководством автора (В.Ф.Кондратюк, В.Я.Беланов, В.Н.Апанович, В.А.Акимов, Н.Я.Бойко, А.А.Федута, О.Н.Скляр, Н.Я.Луцко, А.З.Семенов).

В подготовке рукописи к изданию принимали участие А.Ф.Евлевская, М.В.Тульева, за что автор приносит им благодарность.

Некоторые разделы монографии были прочитаны на мехмате БГУ для студентов специальности «Механика», а также использованы при изложении некоторых специальных разделов для студентов машиностроительного факультета БНТУ.

Введение

Краевые задачи теории упругости, несмотря на многочисленные исследования, продолжают оставаться мало изученными для тел конечных размеров и являются актуальной проблемой механики деформируемого тела. К настоящему времени имеется ограниченное число замкнутых решений, особенно для конечных упругих тел. Обобщенная задача Ламе о равновесии упругого параллелепипеда до настоящего времени не получала замкнутого решения. Поэтому важность разработки новых методов и подходов к решению этой проблемы очевидна и неоспорима. Новым подходом в поставленной задаче является широкое привлечение методов аналитической механики, успешно применяемых в механике систем с конечным числом степеней свободы. Методы аналитической механики (метод обобщенных координат, система уравнений связей, общее уравнение динамики, уравнения Лагранжа 1 и 2 рода, вариационные принципы) встречают в механике сплошной среды значительные трудности, главным образом, вследствие того, что сплошная среда представляет собой механическую систему с бесконечным числом степеней свободы. При решении конкретных задач приходится заменять данное упругое тело механической системой с конечным числом степеней свободы. При этом возникает целый ряд вопросов:

1. Как наилучшим образом выбрать обобщенные координаты и вариации?

2. Каким должно быть число обобщенных координат для обеспечения требуемой точности?

3. Какую информацию должны нести аппроксимирующие функции для обеспечения сходимости в той или иной метрике?

4. Какой характер сходимости при том ином выборе аппроксимаций?

5. Какова погрешность того или иного приближения?

6. Какие должны быть выбраны обобщенные координаты для получения точного решения?

На все эти вопросы исчерпывающего ответа в настоящее время в литературе не имеется. На некоторые из указанных вопросов имеются ответы в монографиях Л. С. Лейбензона, Я. А. Пратусевича, В. З. Власова, И. Е. Милейковского, И. Ф. Образцова, В. Н. Ионова, П. М. Огибалова, Л. В. Канторовича, С. Г. Михлина и др. Большинство указанных работ посвящено применению вариационного принципа Лагранжа к расчету различных инженерных конструкций без исследования вопросов обоснования и сходимости. Лишь в работах Л. В. Канторовича, С. Г. Михлина рассматриваются вопросы обоснования и сходимости вариационного процесса и даются некоторые оценки погрешности. Из перечисленных работ лишь монография В. Н. Ионова, П. М. Огибалова посвящена варьированию напряжений на основе вариационного принципа Кастильяно и притяжения косинус-биномов М. М. Филоненко-Бородича. Остальные посвящены варьированию перемещений, причем аппроксимирующие функции подчиняются лишь кинематическим условиям. Анализ работ указанных авторов показывает, что отсутствуют примеры, в которых бы вариационный процесс был доведен до конца, то есть число вариаций устремлено к бесконечности. Нет полной ясности в вопросе выбора аппроксимирующих функций и вариаций, указывается лишь, что нужно подчинять каждую аппроксимирующую функцию кинематическим и по возможности статическим (естественным для принципа Лагранжа) краевым условиям, что осуществить практически в общем случае не представляется возможным.

Глава 1. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ УПРУГОЙ СРЕДЫ

1.1. Обзор методов решения краевых задач теории упругости

Краевые задачи математической теории упругости для конечных тел чрезвычайно сложны и, как правило, не получили замкнутого решения. Замкнутые решения в виде рядов с известными коэффициентами получили задачи с так называемыми согласованными краевыми условиями.

В чем причины? Дело в том, что уравнения теории упругости приводят задачу, например, в случае статики, к бигармонической

проблеме. А это означает, что классические методы ортогонализации, рассматриваемые в курсе уравнений математической физики для уравнений второго порядка, не позволяют получить решение в замкнутой форме. Собственные бигармонические функции являются неортогональными, и метод ортогонализации приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений. Еще в 19-м столетии Ламе при решении задачи о равновесии упругого параллелепипеда получил такую бесконечную систему алгебраических уравнений, проанализировать и решить которую и теперь представляется непреодолимой задачей. Эта обобщенная задача Ламе, несмотря на огромное число работ, посвященных ей [185], продолжает оставаться актуальной. Даже такие, казалось бы, простые задачи, как задачи о равновесии упругого прямоугольника, осесимметричное равновесие упругого конечного цилиндра при несогласованных краевых условиях не получили замкнутого решения [145]. Таким образом, решение и исследование краевых задач теории упругости в настоящее время является актуальной проблемой.

Какие методы решения краевых задач теории упругости получили широкое применение в настоящее время?

В первом ряду находятся методы приведения краевых задач теории упругости к интегральным уравнениям на основе теории потенциала [19], теории функций комплексного переменного в результате перехода от плоской задачи к пространственной [8], на основе интегральных преобразований [189] и др. При этом был получен ряд замкнутых решений в виде квадратур для полубесконечных областей (упругого слоя, клина, бесконечного цилиндра). Для конечных областей, ограниченных различными поверхностями, интегральные уравнения решались численными методами [9], [150].

Развитие этого метода связано с именем Фредгольма [196], который свел первую краевую задачу к решению линейных интегральных уравнений. Лауричелла [198], как и Фредгольм, отметил аналогию между первой основной задачей теории упругости и задачей Дирихле для гармонических функций. В работах А. Я. Александрова, Ю. И. Соловьева [8], В. Д. Купрадзе [187], Н. И. Мухелишвили [155], Д. И. Шермана [193] показаны способы приведения основных задач теории упругости к системам интегральных или функциональных граничных уравнений. В монографии В. З. Партон, П. И. Перлина [161] приведены теоремы о разрешимости регулярных и син-

гулярных интегральных уравнений основных пространственных задач теории упругости, которые решают проблему математического обоснования метода интегральных уравнений. Дальнейшей разработке теории потенциала и ее применения к решению практических задач посвящены работы Н. И. Гюнтера [67], В. Д. Купрадзе [187], М. Д. Мартыненко [150], Т. Круз, Ф. Риццо [151], С. Ф. Ступака [184] и др. Систематическое изложение методов, связанных с интегральными преобразованиями различных видов применительно к краевым задачам математической физики, дано в работах Я. С. Уфлянда [189] и Н. Н. Лебедева [141]. Авторами этого направления предпринята попытка, исходя из единых позиций, охватить широкий класс задач упругого равновесия для полубесконечных тел, начиная со сравнительно простых интегральных преобразований типа Фурье и кончая специальными интегральными преобразованиями для решения задач со смешанными краевыми условиями.

Выбор того или иного интегрального преобразования диктуется геометрией области и структурой уравнения. Классические интегральные преобразования Фурье, Меллина, Ханкеля позволили решить ряд важных практических задач теории упругости. Для смешанных задач удобными оказались преобразования Меллера-Фока, Конторовича-Лебедева. Недостатком интегральных преобразований является громоздкость структуры решения, в результате которой требуется сначала найти трансформанту, а затем оригинал. При этом задача обращения фактически представляет собой задачу решения интегрального уравнения первого рода.

Нельзя не охарактеризовать также и исторически первый метод решения краевых задач теории упругости – метод разделения переменных (метод Фурье). Метод разделения переменных заключается в построении частных решений, каждое из которых разыскивается в виде произведения функций меньшего числа переменных. В ряде случаев оказывается, что такое представление не вступает в противоречие с исходным дифференциальным уравнением и приводит, в зависимости от размерности задачи, к нескольким обыкновенным дифференциальным уравнениям, содержащим один и тот же числовой параметр. В зависимости от вида области, в которой решается краевая задача, а также от формы граничных и начальных условий, представляется возможным определить дискретные значения (иногда сплошной спектр) этих параметров, что приводит к совокупно-

сти частных решений, суммируя которые, находим общее решение задачи. Неизвестные коэффициенты (дискретные значения или функции) определяются на заключительном этапе при удовлетворении краевых условий. Метод оказывается эффективным, когда граничные условия необходимо выполнить на одном семействе координатных поверхностей [2–4, 23–25, 39–41]. Применение метода Фурье к задачам с произвольными краевыми условиями на двух или трех семействах поверхностей приводит к бесконечным системам алгебраических уравнений.

Многие важные результаты построения решений методом Фурье для входящих в интеграл уравнений равновесия гармонических и бигармонических функций изложены в монографиях Э. Н. Байды [25], В. Т. Гринченко [63], Ю. Н. Подильчука [163]. Кроме того, в этих работах содержится обширный материал по различным формам общих решений. В. Т. Гринченко и Э. Н. Байда представляют общее решение задачи в виде суперпозиции нескольких частных решений (метод суперпозиции Ламе).

Понижение мерности задачи осуществляет символический метод, разработанный А. И. Лурье. Сущность этого метода заключается в том, что при интегрировании уравнений равновесия в перемещениях производные по двум переменным считаются фиксированными параметрами. Проинтегрировав по третьей координате, мы, таким образом, получаем двумерный аналог исходной задачи. Дальнейшее развитие этот метод получил в работах В. К. Прокопова [168], П. А. Шиффа [201], Г. Н. Бухаринова [38]. Решение задач этими авторами осуществляется с помощью однородных решений, которые являются интегралами уравнений теории упругости и удовлетворяют нулевым граничным условиям на части поверхности тела, совпадающей с одной из координатных поверхностей. Использование однородных решений связано с проблемой разложения функции в ряд по неортогональным функциям, зависящим от комплексных корней трансцендентного уравнения [38]. Неортогональные функции образуют неортогональную систему, которая для некоторых частных случаев обладает обобщенной ортогональностью [157]. Попытки найти обобщенную ортогональность для задач с несогласованными краевыми условиями, какими являются первая и вторая основные задачи теории упругости, пока не увенчались успехом [25, 37, 63, 192].

Обоснованию метода однородных решений для некоторых задач теории упругости посвящены работы И. И. Воровича [56, 58], В. Е. Ковальчука [58], Ю. А. Устинова [188] и др.

Вариант асимптотической теории, опирающейся на однородные решения А. И. Лурье, разработан И. И. Воровичем и его учениками [58]. А. С. Космодамианским, В. Н. Ложкиным, Ю. В. Мысовским и В. А. Шалдырваном асимптотический метод И. И. Воровича распространены на многосвязные пластины [90].

Плодотворными методами решения задач теории упругости являются вариационные методы.

Пионером в области применения вариационных методов в механике деформируемого тела является немецкий ученый В. Ритц [200], который в 1908 г. опубликовал статью, посвященную решению задачи об изгибе заделанной по контуру пластинки прямым вариационным методом на основе минимума потенциальной энергии пластинки. Примерно в это время русский ученый Галеркин предложил более простой вариационный метод, основанный на принципе возможных перемещений [59]. Другой русский ученый Бубнов в 1912 г., используя метод В. Г. Галеркина, предложил новый вариационный метод, не связанный с экстремальными принципами механики. Метод Бубнова-Галеркина основан на ортогонализации дифференциальных уравнений. Как метод Ритца, так и метод Бубнова-Галеркина приводят задачу к системе алгебраических уравнений. Если метод Ритца требует от координатных функций лишь выполнения главных (кинематических) условий, то методы Галеркина и Бубнова-Галеркина требуют выполнения всех краевых условий, обеспечивая быструю сходимость процесса.

Вариационный метод позволил успешно решить целый ряд важных задач прикладной теории упругости применительно к запросам строительства, судостроения, авиастроения и др. отраслей техники.

Дальнейшее развитие вариационных методов связано с именами В. З. Власова (1931 г.) [51] и Л. В. Канторовича (1933 г.) [79], которые независимо друг от друга предложили новый вариационный метод решения двумерных задач теории упругости, основанный на замене уравнений в частных производных по двум переменным системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Используя такой подход, на основе принципа возможных перемещений в сочетании с рабочими гипотезами в отношении выбора координатных

функций, В. З. Власов построил строительную механику тонкостенных пространственных систем типа строительных складок [52]. Идеи В. З. Власова успешно развивались его последователями и учениками. Так, И. Е. Милейковский на основе метода Власова предложил метод приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и одномерным в декартовой и цилиндрической системе координат (1958) [152]. На основе идеи Канторовича–Власова автором данной работы в 1967 г. построены новые формы вариационного уравнения Лагранжа для элементов упругого тела в виде элементарного столбика и элементарного слоя в произвольных ортогональных координатах [91]. И.Ф.Образцов создал на основе метода Власова строительную механику авиационных конструкций [158]. Метод Канторовича-Власова применил в своих работах Б. В. Курманбаев [139] при решении задач в форме упругого параллелепипеда. Перечисленные выше вариационные методы Ритца, Галеркина, Бубнова, Власова, Канторовича варьируют перемещения.

В сороковых годах XX столетия П. Ф. Папковичем был предложен новый вариационный метод в напряжениях, то есть по этому методу заранее строятся ряды аппроксимирующих функций для компонентов тензора напряжений [160]. Проф. МГУ М. М. Филоненко-Бородич построил решение обобщенной задачи Ламе на основе метода Папковича [191]. Им была введена новая система периодических функций, обращающихся в нуль на концах отрезка определения вместе со своими первыми производными, названная косинус-бино-мами, которая была классифицирована как "почти ортогональная". М. М. Филоненко-Бородич доказал замкнутость этой системы неортогональных функций. При использовании вариационного принципа Кастильяна в методе Папковича необходимо заранее подчинить аппроксимирующую систему для компонентов тензора напряжений уравнениям равновесия внутри и на поверхности. В работах Л. Е. Мальцева [148] была доказана сходимость метода Филоненко-Бородича в энергетическом пространстве. Развивая метод Филоненко-Бородича проф. МГУ П. М. Огибалов и его ученик В. Н. Ионов распространили его на решение ряда задач упругопластической теории для параллелепипеда, цилиндра, конуса и др. [73–75]. Используя метод Канторовича-Власова и вариационный принцип Кастильяно, Б. Ф. Власов при решении обобщенной задачи Ламе получил суперпозицию 30-ти частных задач, из которых оказались существенно различными только 10 [54].

Применяя теорему о взаимности Бетти, Б. М. Лисицын разработал проекционный метод, при котором искомые ряды по полиномам Лежандра заранее не удовлетворяют никаким граничным условиям и уравнениям равновесия внутри тела [144].

В вариационных методах наиболее трудными вопросами являются вопросы сходимости и обоснования. Впервые обоснование вариационных методов Ритца, Галеркина, Бубнова было выполнено С. Г. Михлиным [154]. Им была доказана сходимость метода Ритца при определенных условиях в энергетическом пространстве.

Весьма важным и трудным вопросом в вариационных методах является выбор аппроксимирующих функций. В этой связи следует отметить работы Харьковской школы во главе с В. Л. Рвачевым, в которых разработан аппарат R-функций с использованием булевой алгебры для точного выполнения краевых условий на сложных контурах двумерных и трехмерных областей [176].

В последнее время в решении этой проблемы автором и его учениками разработано направление, которое сближает методы аналитической механики и вариационные методы [15–18, 33–35, 84–88, 91–133, 180]. При этом решение строится в виде стандартных рядов, на которые накладываются связи из условий закрепления и нагружения тела. Ученик автора В. Н. Апанович привлек в качестве уравнений связей интегральные условия на границе разбиения данной области на конечные элементы, тем самым построил модифицированный метод конечных элементов [18] в отличие от классического, в котором непрерывность искомых функций обеспечивается в точках (узлах) [42] [183]. Цель настоящей работы: создание аналитической механики упругих систем на основе вариационного принципа Лагранжа.

1.2. Два основных способа варьирования в теории упругости

Вариационные уравнения следует различать по способу выбора объекта и переменных варьирования, способу выбора области интегрирования (объекта равновесия) и способу выбора аппроксимаций и вариаций. Объектом варьирования в теории упругости обычно является потенциальная энергия упругого тела, хотя в качестве объекта варьирования могут служить и другие функционалы, например, предложенные Треффцем интегралы от квадратичной

ошибки при выполнении граничных условий на поверхности или при условии выполнения уравнений равновесия внутри объема тела [142]. Переменными варьирования в задачах теории упругости могут служить как перемещения, так и напряжения.

Если варьировать энергию только при переменных перемещениях, то приходим к вариационному уравнению Лагранжа, т.е. к условию минимума потенциальной (полной) энергии упругого тела при условии изменения компонентов упругих перемещений. Вариационное уравнение Лагранжа, как известно, можно получить на основе применения принципа возможных перемещений к упругому телу. Так как в вариационном уравнении Лагранжа варьируются только перемещения, то все условия, накладываемые на упругие перемещения, должны быть выполнены заранее. Эти условия, получившие название кинематических, не следуют из вариационного уравнения Лагранжа, которое представляет собой интегральные условия равновесия (движения) тела.

Если варьировать энергию при переменных компонентах тензора напряжений, то получим вариационное уравнение Кастильяно, то есть условие минимума энергии при изменении напряжений. Вариационное уравнение Кастильяно требует, чтобы компоненты тензора напряжений заранее были подчинены условиям равновесия внутри тела и на поверхности его. Вариационное уравнение Кастильяно представляет собой интегральные условия совместности деформации упругого тела [73].

Следует отметить, что существует смешанный подход, когда в вариационном уравнении могут служить переменными варьирования некоторые компоненты как перемещений, так и напряжений [1, 45, 178]. При смешанном подходе должны заранее выполнять условия равновесия и закрепления те компоненты вектора упругих перемещений и тензора напряжений, которые варьируются в вариационном уравнении.

Какой из указанных способов варьирования следует признать наиболее эффективным? Все зависит как от геометрии тела и условий его закрепления и нагружения, так и от развития того или иного метода. Однако можно заметить следующее. Для обеспечения сходимости процесса хотя бы по обобщенной норме (энергии) способ варьирования напряженного состояния требует выполнения равновесия внутри и на поверхности тела заранее, в то время как способ

варьирования перемещений требует лишь кинематических условий. А так как большинство реальных инженерных конструкций имеет свободную от нагрузки или нагруженную поверхность, то применить метод варьирования напряжений к расчету таких конструкций весьма затруднительно. Вот почему способ варьирования напряжений успешно удалось применить пока только для тел со сравнительно простой геометрией (параллелепипеды, цилиндры, цилиндрические, конические оболочки и др.) [73–75]. В то же время способ варьирования перемещений удалось применить к расчету достаточно сложных инженерных конструкций [52, 91, 158, 173, 205]. Это объясняется еще и тем, что для способа варьирования перемещений при выполнении только кинематических условий всегда обеспечиваются интегральные условия равновесия тела или его элемента. Варьирование напряжений при выполнении только кинематических условий не обеспечивает равновесия тела ни в какой форме. Кроме того, применение численных методов решения вариационных уравнений в перемещениях (метод конечных элементов) позволяет выполнить точно все краевые условия на поверхности тела.

В методе напряжений, хотя и выполняются условия в напряжениях, сходимость доказана по обобщенной норме (энергии) [148].

Сказанное не следует понимать в том смысле, что вариационный метод перемещений лучше метода напряжений. Автор лишь констатирует достижения одного и второго на данном этапе. Вариационный метод напряжений сравнительно недавно стал успешно развиваться после появления замечательных работ М. М. Филоненко-Бородича [191], в то время как вариационный метод перемещений имеет более давнюю историю, начиная с работ Ритца [200].

1.3. Составление уравнений движения (равновесия) различных элементов упругой среды на основе принципа Лагранжа

Ограничиваясь принципом возможных перемещений, получим различные формы вариационного уравнения Лагранжа в зависимости от выбора объекта равновесия. Задачу будем решать в криволинейных ортогональных координатах q_1, q_2, q_3 . Коэффициенты Ламе равны соответственно H_1, H_2, H_3 .

1.3.1. Элементарный параллелепипед

Выберем в качестве объекта равновесия элементарный параллелепипед, ребра которого равны $H_1\Delta q_1$, $H_2\Delta q_2$, $H_3\Delta q_3$ (рис. 1.1), а объем $\Delta V = H_1H_2H_3\Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3$.

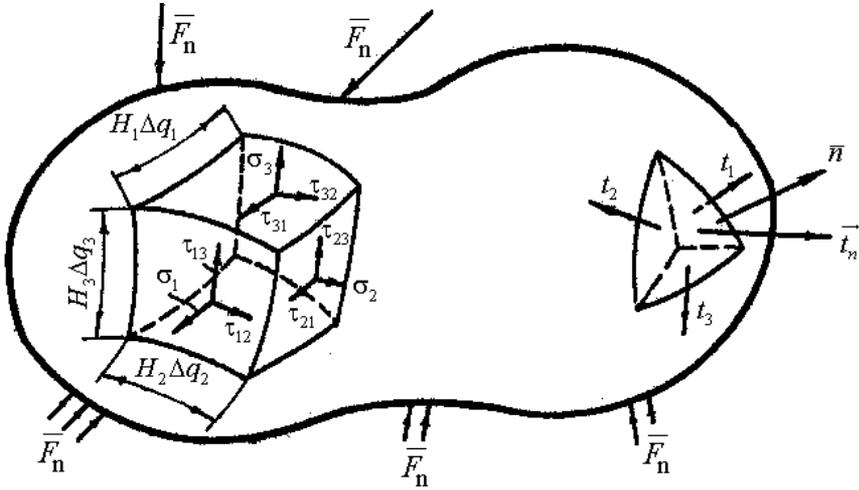


Рис. 1.1. Элементарный параллелепипед

Тогда уравнение Лагранжа для элемента, находящегося внутри объема, записывается в одном виде:

$$\Delta[(\vec{e}_1 \cdot T) \cdot \delta \bar{u} H_2 H_3 \Delta q_2 \Delta q_3] + \Delta[(\vec{e}_2 \cdot T) \cdot \delta \bar{u} H_1 H_3 \Delta q_1 \Delta q_3] + \Delta[(\vec{e}_3 \cdot T) \cdot \delta \bar{u} H_1 H_2 \Delta q_1 \Delta q_2] + \left[\left(\bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \bar{u} - T \cdot \delta E \right] \Delta V = 0, \quad (1.1)$$

а для элемента вблизи поверхности тела – в другом:

$$(\vec{n} \cdot T) \cdot \delta \bar{u} \Delta S - \vec{F}_n \cdot \delta \bar{u} \Delta S = 0, \quad (1.2)$$

где $\vec{n} = \vec{e}_1 n_1 + \vec{e}_2 n_2 + \vec{e}_3 n_3$ – вектор внешней нормали;

\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 – орты криволинейной ортогональной системы координат;

$T \cdot \delta E$ – бискалярное произведение тензора напряжений на тензор возможной деформации;

\bar{K} – вектор объемной силы;

\bar{F}_n – вектор поверхностной силы;

ρ – плотность материала;

$\delta \bar{u}$ – вектор возможных перемещений.

Каждое из уравнений (1.1) и (1.2) выражает равенство нулю работы всех внутренних, внешних и инерционных сил на любом возможном перемещении соответственно внутри и на поверхности тела. После элементарных преобразований получим

$$\operatorname{div} T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0; \quad (1.3)$$

$$\bar{n} \cdot T - \bar{F}_n = 0. \quad (1.4)$$

Первое из них (1.3) представляет собой условие равновесия выбранного элемента внутри объема, а второе (1.4) – условие равновесия того же элемента на поверхности тела. Вместо тензора напряжений T в уравнение (1.3) подставим тензор деформации E на основании обобщенного закона Гука с учетом температурных членов на основе гипотезы Дюгамеля-Неймана.

$$T = 2G \left[E + \frac{\nu}{1-2\nu} I \cdot \operatorname{div} \bar{u} \right] - BI \cdot \tau, \quad B = 2G\alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu}, \quad (1.5)$$

где G – модуль упругости второго рода;

ν – коэффициент Пуассона;

I – единичный тензор;

$\operatorname{div} \bar{u}$ – объемная деформация;

τ – закон распределения температуры тела;

α – коэффициент линейного расширения.

В результате получим известное дифференциальное векторное уравнение Ламе теории упругости в перемещениях:

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} G \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} - G \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{u} + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - B \operatorname{div} (I \cdot \tau) = 0 \quad (1.6)$$

с граничными условиями на части поверхности S_1 , где заданы перемещения $\bar{u} = \bar{u}(q_1, q_2, q_3, t)$, и на другой части поверхности S_2 , где заданы поверхностные усилия \bar{F}_n .

$$\bar{n} \cdot T = 2G \left(\bar{n} \cdot E + \frac{\bar{n} \cdot \nu}{1-2\nu} \text{Idiv} \bar{u} \right) - B \bar{n} \cdot I \cdot \tau = \bar{F}_n. \quad (1.7)$$

Полученное уравнение (1.6) равносильно системе трех дифференциальных уравнений в частных производных по четырем переменным.

1.3.2. Элементарный столбик

Возьмем в качестве элемента равновесия элементарный столбик с площадью основания $H_1 H_2 \Delta q_1 \Delta q_2$ (рис. 1.2). Тогда, применив принцип возможных перемещений для выделенного столбика, получим следующее вариационное уравнение:

$$\begin{aligned} & \Delta \int_h (\bar{e}_1 \cdot T) \delta \bar{u} H_2 H_3 \Delta q_2 dq_3 + \Delta \int_h (\bar{e}_2 \cdot T) \delta \bar{u} H_1 H_3 \Delta q_1 dq_3 - \\ & - \int_h T \cdot \delta E \Delta V + \int_h \left(\bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \bar{u} \Delta V + \left| \bar{F}_n \cdot \delta \bar{u} \frac{H_1 H_2}{n_3} \Delta q_1 \Delta q_2 \right|_s = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Разделив уравнение (1.8) на произведение $\Delta q_1 \Delta q_2$ и устремив затем каждое приращение к нулю, получим вариационное уравнение равновесия элементарного столбика в окончательном виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial q_1} \int_h (\bar{e}_1 \cdot T) \delta \bar{u} H_2 H_3 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_2} \int_h (\bar{e}_2 \cdot T) \delta \bar{u} H_1 H_3 dq_3 - \\ & - \int_h T \cdot \delta E H_1 H_2 H_3 dq_3 + \int_h \left(\bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \bar{u} H_1 H_2 H_3 dq_3 + \\ & + \left| \bar{F}_n \cdot \frac{\delta \bar{u} H_1 H_2}{n_3} \right|_s = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

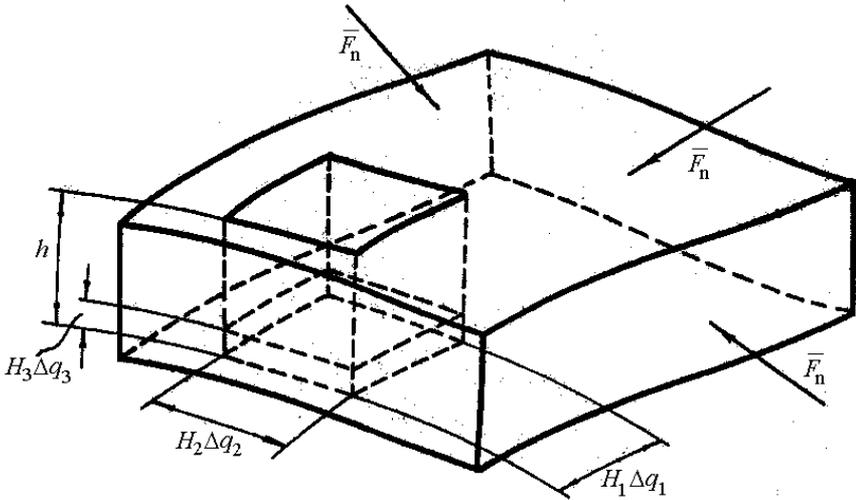


Рис. 1.2. Элементарный столбик

Уравнение (1.9) выражает собой равенство нулю работы на возможных перемещениях всех внешних, внутренних и инерционных сил, действующих на выделенный в теле элементарный столбик. Преобразуем уравнение (1.9). Для этого на основании формул теории поля запишем:

$$\int_h T \cdot \delta E H_1 H_2 H_3 dq_3 = \int_h \operatorname{div}(T \cdot \delta \bar{u}) H_1 H_2 H_3 dq_3 - \int_h \operatorname{div} T \cdot \delta \bar{u} H_1 H_2 H_3 dq_3; \quad (1.10)$$

$$\int_h \operatorname{div}(T \cdot \delta \bar{u}) H_1 H_2 H_3 dq_3 = \frac{\partial}{\partial q_1} \int_h (\bar{e}_1 \cdot T) \delta \bar{u} H_2 H_3 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_2} \int_h (\bar{e}_2 \cdot T) \delta \bar{u} H_1 H_3 dq_3 + \left| \bar{n} \cdot T \cdot \delta \bar{u} \frac{H_1 H_2}{n_3} \right|_s. \quad (1.11)$$

Последнюю из формул (1.11) следует рассматривать как преобразование формулы Остроградского-Гаусса для случая, когда в качестве области интегрирования берется элементарный столбик тела.

Подставив выражения (1.10) и (1.11) в уравнение (1.9), получим вариационное уравнение Лагранжа для элементарного столбика в другом виде:

$$\int_h \left(\operatorname{div} T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \delta \bar{u} H_1 H_2 H_3 dq_3 - \left| (\bar{n} \cdot T - \bar{F}_n) \cdot \delta \bar{u} \frac{H_1 H_2}{n_3} \right|_s = 0. \quad (1.12)$$

Для решения уравнения (1.9) или (1.12) представим перемещение в виде следующих разложений:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^m U_i(q_1, q_2, t) \cdot \Phi_i(q_1, q_2, q_3); \\ v &= \sum_{k=1}^n V_k(q_1, q_2, t) \cdot \Psi_k(q_1, q_2, q_3); \\ w &= \sum_{h=1}^l W_h(q_1, q_2, t) \cdot f_h(q_1, q_2, q_3), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где U_i, V_k, W_h – искомые функции, зависящие только от трех переменных q_1, q_2 и t и определяющиеся из уравнений (1.9); Φ_i, Ψ_k, f_h – известные аппроксимирующие функции, зависящие в общем случае от трех координат q_1, q_2 и q_3 ; $\delta \bar{u} = \bar{e}_1 \Phi_j + \bar{e}_2 \Psi_g + \bar{e}_3 f_d$ – вектор возможных перемещений.

Подставляя вместо тензора напряжений тензор деформации по формуле (1.5) и учитывая независимость друг от друга вариаций Φ_j, Ψ_g, f_d , получим три приближенные системы $(m + n + l)$ уравнений в частных производных по трем переменным относительно $(m + n + l)$ искомым функций U_i, V_k, W_h .

Приближенность упомянутых уравнений состоит в том, что равновесие внутри объема и на поверхности тела выполнено по координате q_3 в интегральной форме (в среднем). Однако при обеспечении полноты аппроксимирующих функций и вариаций и увеличения их числа до бесконечности, как увидим в дальнейшем (гл. 2), можно получить точное решение задачи.

1.3.3. Элементарный слой

Если в качестве объекта равновесия выделить элементарный слой тела толщиной $H_1\Delta q_1$ (рис. 1.3), то уравнение, выражающее собой равенство нулю суммы работ всех сил, действующих на элемент, запишется в следующем виде:

$$\Delta \iint_F (\bar{e}_1 \cdot T) \cdot \delta \bar{u} H_2 H_3 dq_2 dq_3 - \iint_F T \cdot \delta E H_1 H_2 H_3 \Delta q_1 dq_2 dq_3 +$$

$$+ \iint_F \left(\bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \bar{u} H_1 H_2 H_3 \Delta q_1 dq_2 dq_3 + \oint \bar{F}_n \cdot \delta \bar{u} \frac{H_1 \Delta q_1 dS_1}{\sqrt{1 - n_1^2}} = 0, \quad (1.14)$$

где F – площадь сечения тела;

S_1 – контурная координата сечения.

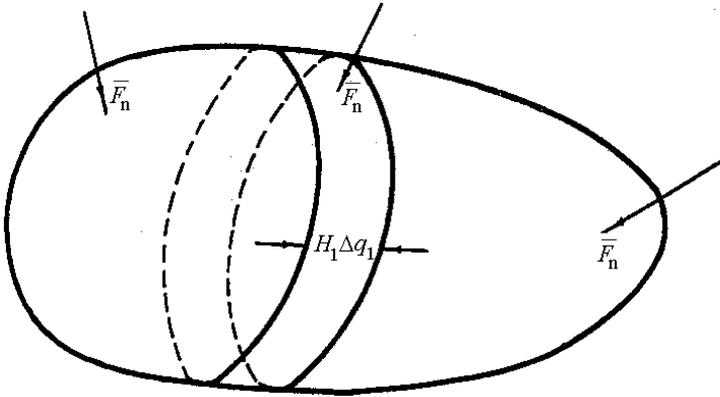


Рис. 1.3. Элементарный слой

Разделим уравнение (1.14) на независимое приращение Δq_1 и перейдем к пределу $\Delta q_1 \rightarrow 0$. В результате получим вариационное уравнение равновесия элементарного слоя тела

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \iint_F (\bar{e}_1 \cdot T) \cdot \delta \bar{u} dF - \iint_F T \cdot \delta E H_1 dF +$$

$$+ \iint_F \left(\bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \bar{u} H_1 dF + \oint \bar{F}_n \cdot \delta \bar{u} \frac{H_1}{\sqrt{1 - n_1^2}} dS_1 = 0. \quad (1.15)$$

Уравнение (1.15) выражает собой равенство нулю работы на возможных перемещениях всех внешних, внутренних и инерционных сил, действующих на выделенный в теле элементарный слой.

Для преобразования уравнения (1.15) запишем

$$\begin{aligned}
 & \iint_F T \cdot \delta E H_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3 = \iint_F T \cdot \text{grad} \delta \bar{u} H_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3 = \\
 & = \iint_F \text{div}(T \cdot \delta \bar{u}) H_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3 - \iint_F \text{div} T \delta \bar{u} H_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3; \\
 & \iint_F \text{div}(T \cdot \delta \bar{u}) H_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3 = \frac{\partial}{\partial q_1} \iint_F (\bar{e}_1 \cdot T) \cdot \delta \bar{u} H_2 H_3 dq_2 dq_3 + \\
 & + \oint \vec{n} \cdot T \cdot \delta \bar{u} \frac{H_1}{\sqrt{1-n_1^2}} dS_1. \tag{1.16}
 \end{aligned}$$

Последнюю из формул (1.16) следует рассматривать как преобразование формулы Остроградского-Гаусса на случай, когда в качестве области интегрирования берется элементарный слой тела. Формулы (1.16) после некоторых выкладок позволяют привести уравнение (1.15) к виду

$$\begin{aligned}
 & \iint_F \left(\text{div} T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \bar{u} H_1 dF - \oint (\vec{n} \cdot T - F_n) \cdot \delta \bar{u} \frac{H_1}{\sqrt{1-n_1^2}} dS_1 = 0, \tag{1.17} \\
 & dF = H_2 H_3 dq_2 dq_3.
 \end{aligned}$$

Для решения уравнения (1.15) или (1.17) искомые перемещения представим в виде разложений:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^m U_i(q_i, t) \varphi_i(q_1, q_2, q_3); \\
 v &= \sum_{k=1}^n V_k(q_i, t) \psi_k(q_1, q_2, q_3); \\
 w &= \sum_{h=1}^l W_h(q_i, t) f_h(q_1, q_2, q_3). \tag{1.18}
 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в результате применения разложений (1.18) к решению уравнений (1.15) или (1.17) получим три приближенные системы $m+n+l$ уравнений в частных производных по двум переменным относительно $m+n+l$ искомым функций U_i, V_k, W_h . Уравнения будут содержать неизвестные функции, зависящие от двух переменных (одной из координат q_l и времени t , что значительно упрощает задачу по сравнению с рассмотренной в пп. 1.3.2).

Приближенность упомянутых уравнений состоит в том, что равновесие внутри объема выполнено в среднем по двум координатам q_2 и q_3 . Однако, при определенных условиях, наложенных на ряды искомым перемещений, можно обеспечить сходимость приближенного решения к точному, о чем свидетельствуют примеры в гл. 4.

1.3.4. Полный объем

Если в качестве объекта равновесия взять весь объем тела, то получим известное вариационное уравнение Лагранжа, представляющее собой условие равенства нулю работы всех внешних, внутренних и инерционных сил, действующих на тело:

$$\iiint_V \left(\bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \bar{u} dV + \iint_S F_n \cdot \delta \bar{u} dS - \iiint_V T \cdot \delta E dV = 0. \quad (1.19)$$

Воспользовавшись формулой Остроградского–Гаусса

$$\iiint_V \operatorname{div} T \cdot \delta \bar{u} dV = \iint_S (\bar{n} \cdot T) dS - \iiint_V T \cdot \delta E dV, \quad (1.20)$$

приведем уравнение (1.19) к другой форме:

$$\iiint_V \left(\operatorname{div} T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \bar{u} dV - \iint_S (\bar{n} \cdot T - \bar{F}_n) \cdot \delta \bar{u} dS = 0. \quad (1.21)$$

Применяя разложения перемещений

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^m U_i(t) \varphi_i(q_1, q_2, q_3); \\
v &= \sum_{k=1}^n V_k(t) \psi_k(q_1, q_2, q_3); \\
w &= \sum_{h=1}^l W_h(t) f_h(q_1, q_2, q_3)
\end{aligned}
\tag{1.22}$$

к уравнению (1.19) или (1.21), получим три системы $m + n + l$ приближенных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $m + n + l$ искомым функций U_i, V_k, W_h . Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений значительно проще систем, рассмотренных в 1.3.2 и 1.3.3. Приближенность уравнений, получаемых на основе уравнений (1.19) или (1.20) состоит в том, что равновесие внутри и на поверхности тела выполнено в среднем по трем координатам. Однако при соответствующих условиях, наложенных на ряды (1.22), можно получить решение, которое точно выполняет равновесие внутри и в определенных наперед задаваемых точках на поверхности тела (см. гл. 5).

Таким образом, в зависимости от выбора элемента равновесия можно привести четырехмерную (динамическую) задачу теории упругости к трехмерной, двумерной и одномерной задаче. Какой же способ приведения на основе рассмотренных вариационных уравнений следует признать наиболее эффективным? Однозначным ответ быть не может. Все зависит от геометрии тела, требований к точности расчета, от разработки исследования решения указанных систем уравнений, от вычислительных возможностей, и, наконец, от поставленной цели. При этом следует иметь в виду следующее. Вариационное уравнение равновесия элементарного столбика и слоя приводит задачу теории упругости к достаточно сложным системам дифференциальных уравнений, для решения которых требуются специальные разработки. Вариационное уравнение равновесия конечного объема приводит задачу статической теории упругости к системам алгебраических уравнений. Следовательно, для численного анализа наиболее удобным является вариационное уравнение равновесия конечного объема. Наоборот, для построения теории

расчета специальных конструкций и сооружений являются эффективными вариационные уравнения равновесия элементарного столбика и слоя. Так, для построения теории пластин и оболочек успешно применяют вариационные методы приведения пространственной задачи теории упругости к плоской задаче [47, 51, 100]. К построению расчета конструкций, у которых размеры в двух направлениях значительно меньше, чем в третьем, успешно привлекают вариационное уравнение равновесия элементарного слоя (элементарные полоски) [28, 52, 130].

1.4. Некоторые вопросы обоснования вариационных уравнений равновесия элементарного столбика и слоя

Рассмотрим теперь различие вариационных методов в зависимости от выбора аппроксимирующих функций и вариаций. Характер приближенности решений, получаемых при помощи вариационных уравнений (1.9), (1.15) и (1.19), очень сильно зависит от той информации, которую заранее несут аппроксимирующие функции и вариации. При этом следует подробно отметить то различие, которое обнаруживается при применении интегро-дифференциальных уравнений равновесия элементарного столбика (1.9) и слоя (1.15) по сравнению с вариационным уравнением равновесия полного объема (1.19).

1.4.1. Вариационное уравнение равновесия элементарного столбика

Как видно из (1.12), это уравнение описывает состояние равновесия внутри и на поверхности тела в интегральной форме (в среднем по координате q_3). Если заранее выполнить все условия на концах элементарного столбика, то можно обеспечить сходимость к точному решению. Это утверждение следует из основной леммы вариационного исчисления, если применить ее к интегралу

$$\int_h \left(\operatorname{div} T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \bar{u} H_1 H_2 H_3 dq_3 = 0. \quad (1.23)$$

При этом вариации $\delta\bar{u}$ должны быть полны лишь внутри столбика. Полнота вариаций на концах столбика может не выполняться, так как всю информацию о краевых условиях несут ряды аппроксимирующих функций.

Если заранее ряды аппроксимирующих функций выполняют не все краевые условия на концах столбика, а лишь кинематические (главные), то, вообще говоря, сходимость обеспечивается по некоторой обобщенной (энергетической) норме, да и то при условии равенства нулю работы заданных (внешних) поверхностных сил:

$$\left. \frac{\bar{F}_n \cdot \delta\bar{u} H_1 H_2}{n_3} \right|_S = 0. \quad (1.24)$$

При этом условии вариационное уравнение равновесия элементарного столбика представляет собой условие Эйлера-Остроградского минимума функционала J :

$$J = \iint_F A H_1 H_2 dq_1 dq_2, \quad (1.25)$$

где $A = \int_h \left(T \cdot \cdot E - \bar{K} \cdot \bar{u} + \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \bar{u} \right) H_1 H_2 H_3 dq_3$ – сумма потенциальной энергии упругого элемента в виде столбика и потенциала объемных K и инерционных сил $\left(-\rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right)$ внутри столбика.

Следовательно, на основе теоремы о сходимости квадратичного функционала [153], A – является энергетической нормой сходимости вариационного процесса при решении задачи с помощью уравнения (1.9) или (1.12). Это означает, что при условии (1.24) и выполнении лишь главных краевых условий на концах столбика функционал $-A$ при увеличении числа аппроксимирующих функций возрастает (не убывает) и стремится к точному значению.

Возникает вопрос, в какой форме при такой сходимости удовлетворяются уравнения Коши внутри тела и на поверхности. Из формул (1.10) – (1.11) следует, что

$$\begin{aligned}
& \int_h \left(\operatorname{div} T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \bar{u} H_1 H_2 H_3 dq_3 = \frac{\partial}{\partial q_{1h}} \int (\bar{e}_1 \cdot T) \cdot \bar{u} H_2 H_3 dq_3 + \\
& + \frac{\partial}{\partial q_{2h}} \int (\bar{e}_2 \cdot T) \cdot \bar{u} H_1 H_3 dq_3 - \int_h \left(T \cdot \cdot E - \bar{K} \cdot \bar{u} + \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \bar{u} \right) H_1 H_2 H_3 dq_3 + \\
& + \left| \bar{n} \cdot T \cdot \bar{u} \frac{H_1 H_2}{n_3} \right|_S,
\end{aligned}$$

причем правая часть этого тождества стремится к минимуму на основе уравнения (1.9) или (1.12). Поэтому при увеличении числа вариаций интеграл

$$\int_h \left(\operatorname{div} T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \bar{u} H_1 H_2 H_3 dq_3$$

стремится к минимуму. Следовательно, уравнения Коши внутри выполняются в интегральном смысле, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_h \left(\operatorname{div} T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \bar{u} H_1 H_2 H_3 dq_3 \rightarrow \min.$$

Если при этом и работа упругих поверхностных сил равна нулю, то есть

$$\left| \bar{n} \cdot T \cdot \bar{u} \frac{H_1 H_2}{n_3} \right|_S = 0,$$

то минимум указанного интеграла равен нулю, а уравнение Коши

$$\operatorname{div} T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0$$

выполняется точно, что следует из основной леммы вариационного исчисления.

Краевые условия на гранях $q_1 = \text{const}$ и $q_2 = \text{const}$ выполняются точно за счет решения системы дифференциальных уравнений (1.9) и (1.12), а на гранях $q_3 = \text{const}$ в смысле

$$\left| \bar{n} \cdot T \cdot \bar{u} \frac{H_1 H_2}{n_3} \right|_S \rightarrow \min .$$

Если обеспечить заранее выполнение уравнения Коши внутри

$$\left(\text{div}T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) = 0, \quad \text{то} \quad \left| \bar{n} \cdot T \cdot \bar{u} \frac{H_1 H_2}{n_3} \right|_S \rightarrow 0 .$$

Все изложенные выводы справедливы, если ряды аппроксимирующих функций вариаций построены в полном классе функций, о чем более подробно будет изложено в следующем параграфе.

Таким образом, энергетическая норма сходимости, вообще говоря, не обеспечивает сходимости к точному решению, то есть к одновременному выполнению условий равновесий внутри и на поверхности тела.

1.4.2. Вариационное уравнение равновесия элементарного слоя

Это уравнение выполняет равновесие внутри и на поверхности тела в интегральной форме по двум координатам q_2, q_3 . Если заранее выполнить все краевые условия на контуре элементарного слоя, то можно обеспечить сходимости к точному решению, благодаря построению решения на основе условия ортогонализации уравнения

$$\iint_F \left(\text{div}T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \bar{u} H_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3 = 0 .$$

При этом возможные состояния должны быть полны лишь внутри слоя, а предел

$$\operatorname{div} T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \rightarrow 0$$

следует из основной леммы вариационного исчисления.

По энергетической норме обеспечивается сходимость, если ряды аппроксимирующих функций (1.18) выполняют не все краевые условия, а лишь кинематические (главные) условия. Чтобы установить эту норму, достаточно заметить, что при условии равенства нулю работы заданных (внешних) поверхностных сил вариационное уравнение равновесия элементарного слоя представляет собой условие минимума функционала в форме Эйлера:

$$J = \int A H_1 dq_1, \quad (1.26)$$

где $A = \iint_F \left(T \cdot E - \bar{K} \cdot \bar{u} + \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \bar{u} \right) H_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3$ – сумма потен-

циальной энергии и потенциала объемных сил $\bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$ внутри элементарного слоя.

Следовательно, на основе теоремы о сходимости квадратичного функционала (1.26) следует, что при условии

$$\oint \bar{F}_n \cdot \bar{u} \cdot \frac{H_1}{\sqrt{1 - n_1^2}} dS_1 = 0$$

и выполнении на контуре слоя лишь кинематических условий функционал A при увеличении числа аппроксимирующих функций возрастает (не убывает) и стремится к точному значению. Это означает, что функционал A является энергетической нормой сходимости вариационного процесса, осуществляемого на основе уравнения (1.15) или (1.17).

Следует отметить, что энергетическая норма сходимости для вариационного уравнения равновесия элементарного слоя менее точная, чем энергетическая норма сходимости для вариационного урав-

нения равновесия элементарного столбика, где интегрирование производится лишь по одной координате.

Для выяснения характера выполнения условий равновесия внутри и на поверхности тела запишем:

$$\iint_F \left(\operatorname{div} T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \bar{u} H_1 dF = \frac{\partial}{\partial q_1} \iint_F (\bar{e}_1 \cdot T) \cdot \bar{u} dF -$$

$$- \iint_F \left(T \cdot \cdot E - \bar{K} \cdot \bar{u} + \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \bar{u} \right) H_1 dF + \oint \bar{n} \cdot T \cdot \bar{u} \cdot \frac{H_1}{\sqrt{1-n_1^2}} dS_1.$$

Если работа заданных поверхностных сил равна нулю:

$$\oint \bar{F}_n \cdot \bar{u} \cdot \frac{H_1}{\sqrt{1-n_1^2}} dS_1 = 0,$$

то правая часть уравнения стремится к минимуму на основе уравнения (1.15) или (1.17). Поэтому при увеличении числа вариаций интеграл

$$\iint_F \left(\operatorname{div} T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \bar{u} H_1 dF$$

стремится к минимуму. Если при этом и работа поверхностных упругих сил равна нулю:

$$\oint \bar{n} \cdot T \cdot \bar{u} \cdot \frac{H_1}{\sqrt{1-n_1^2}} dS_1 = 0,$$

то этот минимум равен нулю и подынтегральное выражение

$\operatorname{div} T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \rightarrow 0$ стремится к нулю на основании основной

леммы вариационного исчисления.

Краевые условия на граничных поверхностях $q_1 = \text{const}$ выполняются точно за счет решения дифференциальных уравнений (1.15) или (1.17). Краевые условия на граничных поверхностях $q_2 = \text{const}$ и $q_3 = \text{const}$ выполняются интегрально в том смысле, что интеграл

$$\oint \vec{n} \cdot T \cdot \vec{u} \cdot \frac{H_1}{\sqrt{1-n_1^2}} dS_1 \text{ стремится к минимуму.}$$

Если заранее выполнить уравнения равновесия внутри

$$\text{div}T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0,$$

то и здесь следует различать два случая:

1). Уравнения строятся из условия

$$\oint (\vec{n} \cdot T - \bar{F}_n) \cdot \delta \vec{u} \cdot \frac{H_1}{\sqrt{1-n_1^2}} dS_1 = 0.$$

Тогда сходимость к точному решению выполняется при достаточно гладкой нагрузке и гладком контуре, то есть при условии непрерывности и дифференцируемости вектора внешней нормали \vec{n} и нагрузки \bar{F}_n .

2). Уравнения строятся из условия минимума функционала энергии при равенстве

$$\oint \bar{F}_n \cdot \delta \vec{u} \cdot \frac{H_1}{\sqrt{1-n_1^2}} dS_1 = 0.$$

Тогда независимо от гладкости контура сходимость обеспечивается по энергетической норме, а краевые условия по координатам q_2 и q_3 выполняются в смысле

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \oint \vec{n} \cdot T_m \cdot \vec{u} \cdot \frac{H_1}{\sqrt{1-n_1^2}} dS_1 = 0.$$

Таким образом, сходимость по энергии в общем случае не обеспечивает сходимость к точному решению. Сходимость к точному решению возможно либо при выполнении всех краевых условий на контуре сечения и построении расчетных уравнений из условия

$$\iint_F \left(\operatorname{div} T + \vec{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \bar{u} H_1 dF = 0,$$

либо при выполнении условий равновесия внутри тела $\operatorname{div} T + \vec{K} - \rho \bar{u} = 0$ при наличии гладкости контура и построения расчетных уравнений из условия

$$\oint (\vec{n} \cdot T - \vec{F}_n) \cdot \delta \bar{u} \frac{H_1}{\sqrt{1 - n_1^2}} dS_1 = 0.$$

Заметим, что во всех случаях кинематические условия выполняются заранее в обязательном порядке, так как они не следуют из вариационного уравнения Лагранжа.

Кроме того, все вышеизложенные выводы справедливы, вообще говоря, при бесконечном числе аппроксимирующих функций при условии обеспечения их полноты.

1.4.3. Вариационное уравнение полного (конечного) объема

Если обоснование вариационных уравнений равновесия элементарного столбика и слоя в современной литературе почти отсутствует, то обоснование вариационного уравнения равновесия полного объема наиболее полно изучено С. Г. Михлиным в работах [153, 154]. С. Г. Михлиным доказано, что оператор уравнений теории упругости при условии равенства нулю работы поверхностных внешних сил для случая конечной области, принадлежит к классу положительно-определенных операторов.

Следовательно, при указанных условиях обеспечивается сходимость энергии:

$$\iiint_V T \cdot \cdot E dV \rightarrow \min.$$

При этом от координатных функций лишь требуется выполнение главных (кинематических) условий.

Что касается вопроса сходимости к точному решению, то следует отметить следующее.

Сходимость к точному решению обеспечивается, если:

1) выполняются все краевые условия, а расчетные уравнения строятся из условия ортогональности каждой вариации к уравнению Коши, то есть

$$\iiint_V \left(\operatorname{div} T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \bar{u} dV = 0;$$

2) выполняются заранее условия равновесия Коши

$$\operatorname{div} T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0,$$

а расчетные уравнения строятся из условия

$$\iint_S (\bar{n} \cdot T - \bar{F}_n) \cdot \delta \bar{u} dS = 0,$$

причем требуется непрерывность и дифференцируемость вектора \vec{n} внешней единичной нормали вдоль поверхности тела, т.е. требуются условия гладкости поверхности.

Если какое-нибудь из указанных условий не выполнено, то можно говорить лишь о сходимости по энергии. При этом энергетическая норма представляет собой интеграл по всем трем координатам, что дает основание говорить о меньшей точности энергетического метода для полного объема, чем для слоя и столбика.

При сходимости по энергии внутри объема тела уравнения равновесия внутри и на поверхности тела выполняются по обобщенной норме, то есть

$$\iiint_V \left(\operatorname{div} T + \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \bar{u} dV \rightarrow \min .$$

Если заранее равна нулю и работа упругих поверхностных сил, то этот минимум равен нулю, а уравнения Коши выполняются точно, как это следует из основной леммы вариационного исчисления.

Условия на поверхности также выполняются в форме

$$\iint_S (\bar{n} \cdot T - \bar{F}_n) \cdot \delta \bar{u} dS \rightarrow \min .$$

1.5. Требования, предъявляемые к выбору аппроксимирующих функций и возможных перемещений

Аппарат вариационного уравнения Лагранжа, изложенный в предыдущих параграфах, можно считать разработанным достаточно подробно как для всего объема, так и в виде элементарного столбика и элементарного слоя, рассмотренных впервые в несколько другом виде И. Е. Милейковским [152] и получивших развитие в работе автора [91]. Вопрос о рациональном выборе аппроксимирующих функций и возможных перемещений в этих работах не получил своего исчерпывающего решения. Среди основных работ, посвященных вопросу о выборе координатных функций, прежде всего следует отметить работы Л. В. Канторовича [79] и С. Г. Михлина [153, 154].

В работе Л. В. Канторовича при решении некоторых двумерных краевых задач рассмотрены основные требования к координатным функциям для обеспечения сходимости вариационного процесса к точному решению. Важную роль для получения решения при обеспечении сходимости вариационного процесса к точному решению выполняет аппарат R -функций, разработанных В. Л. Рвачевым и его учениками [176]. Достоинство этого аппарата состоит в том, что заранее строится такая структура координатных функций, которые выполняют все краевые условия, в том числе и смешанные на поверхности с изломами. Правда, в смешанных задачах для получения правильного решения требуется заранее выделить особенности в точках разрыва краевых условий.

В работах С. Г. Михлина выяснены требования, предъявляемые к координатным функциям, для обеспечения сходимости по энергии внутри полного объема тела.

Эти работы показали, что при выборе координатных функций следует придерживаться определенных твердых правил, а не руководствоваться интуитивными соображениями, как об этом говорится во многих распространенных курсах прикладной теории упругости, например [164].

К сожалению, воспитанные на этих книгах инженеры-расчетчики иногда проявляют скептическое отношение к вариационным методам и используют различные другие методы, основанные на целом ряде гипотез и дающие приближенные решения, оценить точность которых можно лишь экспериментальным путем.

Правильный выбор координатных функций позволяет, как мы увидим в дальнейшем, получить не только достаточно точные математически обоснованные приближенные решения, но и точные решения в строгом смысле.

Итак, каким же образом следует выбирать аппроксимирующие функции и возможные перемещения? Этот вопрос решается по-разному в зависимости от выбора объекта равновесия и требования к характеру сходимости процесса.

1.5.1. Требования для обеспечения сходимости к точному решению

Так, если требуется обеспечить сходимость процесса к точному решению, то аппроксимирующие функции должны быть дифференцируемыми, линейно независимыми и обладать полнотой внутри и на границе области интегрирования. Полнота аппроксимирующих функций на границе необходима для выполнения краевых условий на поверхности тела. Полнота в каждой точке области, включая и границу, выполнена, если справедливо неравенство

$$|\bar{u} - \bar{u}_m| < \varepsilon,$$

где \bar{u} – вектор действительных перемещений;

$\bar{u}_m = \sum U_i \cdot \bar{\varphi}_i$ – вектор перемещений, построенных на аппроксимирующих функциях;

ε – сколь угодно малая наперед заданная величина.

Таковыми полными системами являются, например, степенные ряды или ряды, построенные из полиномов (полиномы Лежандра и др.).

Тригонометрический ряд Фурье, а также некоторые ряды по специальным функциям (функциям Бесселя и др.) обладают полнотой в каждой точке внутри выбранной области интегрирования, за исключением границы. При использовании таких рядов следует их дополнить некоторыми другими функциями.

Построенные ряды аппроксимирующих функций позволяют методами аналитической механики найти число и характер возможных перемещений для данного приближения по формуле

$$\bar{\varphi}_j = \frac{\delta \bar{u}}{\delta U_j} + \sum_{i=1}^k \frac{\delta \bar{u}_i}{\delta U_j} \bar{\varphi}_i,$$

где j – порядковый номер возможных перемещений;

k – число краевых условий на поверхности;

$\bar{\varphi}_j, \bar{\varphi}_i$ – соответственно возможные перемещения и аппроксимирующие функции.

При таком подходе нам незначит подчинять каждую аппроксимирующую функцию краевым условиям. Краевым условиям следует подчинять построенные ряды. С точки зрения методов аналитической механики условия, наложенные на ряды аппроксимирующих функций, можно рассматривать как уравнения связей. Число независимых возможных перемещений оказывается меньше числа аппроксимирующих функций на число связей. При этом если аппроксимирующие функции полны внутри и на границе области, то и возможные перемещения как линейные комбинации их также полны.

Однако в целях удобства можно строить возможные перемещения в других полных классах функций, отличных от класса аппроксимирующих функций. Это утверждение следует из условий основной леммы вариационного исчисления. Следует отметить, что условие полноты на границе области для возможных перемещений не является необходимым. Требования полноты для возможных перемещений следует выполнить внутри области.

Наиболее рациональным способом выбора аппроксимирующих функций и возможных перемещений является выбор полных ортонормированных систем, какими, например, являются собственные элементы некоторых операторов. Применение ортогональных систем позволяет иногда довести решение задачи до конца. Это удастся сде-

лать, когда система уравнений не содержит бесконечных сумм, что, к сожалению, не всякая ортогональная система способна осуществить.

Описанный способ выбора координатных функций позволяет достаточно просто заранее выполнить краевые условия без особых трудностей, если мерность задачи понижается на единицу, то есть в случае приведения трехмерной задачи к двумерной, двумерной к одномерной и т.д.

1.5.2. Требования для обеспечения сходимости по энергетической норме

Если в задаче требуется обеспечить сходимость в среднем (по энергии) внутри выбранной области интегрирования, то аппроксимирующие функции должны быть дифференцируемыми в обобщенном смысле, линейно-независимыми и полными по энергии, а к оператору уравнений предъявляются условия положительной определенности. В этом случае требования, предъявляемые к аппроксимирующим функциям, заметно снижаются. Так, аппроксимирующие функции могут быть и не дифференцируемыми в обычном смысле (кусочно-непрерывные), условие полноты по модулю заменяется условием полноты по энергии, то есть

$$\left\| \bar{u} - \sum_{i=1}^m U_i \bar{\varphi}_i \right\| < \varepsilon,$$

где $\| \|$ – норма по энергии, предъявляемая для задач теории упругости по формуле

$$\| \bar{u} \|^2 = \frac{1}{2} \int_V T \cdot E dV,$$

где T и E – соответственно тензор напряжений и деформации;

V – область интегрирования.

Из краевых условий для обеспечения сходимости по энергии требуется выполнить заранее только главные (кинематические) условия. Эти условия следует накладывать на ряды аппроксимирующих функций, а не на каждую аппроксимирующую функцию в отдельности.

Возможные перемещения можно брать столько и такими же, как аппроксимирующие функции, а замкнутость системы выполнить за счет множителей Лагранжа. Таким образом, для сходимости по энергии можно не делать различия между аппроксимирующими функциями и возможными перемещениями. В этом случае их называют просто координатными функциями. От координатных функций требуется выполнение полноты на границе области, хотя и в не такой мере, как это имеет место при подчинении их всем краевым условиям.

Следует еще отметить, что полнота по модулю означает также и выполнение полноты по энергии. Обратное утверждение неверно.

Наиболее обстоятельно исследован вопрос о рациональном выборе координатных функций для обеспечения сходимости по энергии при использовании вариационного уравнения равновесия полного объема в работе С. Г. Михлина [153, 154]. В качестве рациональных систем предлагается:

- а) почти ортонормированные системы данного оператора A ;
- б) ортонормированная система оператора B , сходного с рассматриваемым оператором A для данной задачи;
- в) система координатных функций, сильно минимальных в данном энергетическом пространстве.

Глава 2. ПРИВЕДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ К СИСТЕМЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО СТОЛБИКА

В настоящее время существует много приближенных методов приведения трехмерной задачи теории упругости к двумерной. Это прежде всего метод разложения искомым перемещений в степенной (полиномиальный) ряд по одной из координат [47, 51, 55], асимптотическая теория пластин и оболочек [57], методы, основанные на гипотезах Кирхгофа-Лява [61, 143]. Во всех перечисленных работах трехмерные задачи заменяются приближенными двумерными моделями. Лишь символический метод А. И. Лурье [90, 143] и метод начальных функций [50] позволяют осуществить приведение трехмерной задачи к двумерной в точной постановке.

В данной главе осуществлен переход от трехмерной задачи к двумерной модели в точной постановке с помощью вариационного

уравнения равновесия элементарного столбика с учетом динамических слагаемых [92]. В случае статики, когда на ограничивающих плоскостях заданы только напряжения или только перемещения, операторы разрешающих уравнений совпадают с операторами, полученными на основе символического метода [145].

2.1. Разложение упругих перемещений в ряд Фурье, неполнота которого на концах отрезка устранена полиномами

Решение задачи будем строить в декартовой системе координат в виде ряда:

$$u = \sum_{i=1}^m U_i(x, y, t) \cdot \varphi_i(z);$$

$$v = \sum_{k=1}^n V_k(x, y, t) \cdot \psi_k(z);$$

$$w = \sum_{h=1}^l W_h(x, y, t) \cdot f_h(z).$$

В соответствии с вышеизложенным в качестве аппроксимаций $\varphi_i(z)$, $\psi_k(z)$, $f_h(z)$ можно взять члены какого-либо стандартного ряда, который заранее не удовлетворяет никаким краевым условиям.

В качестве стандартного ряда можно брать любой известный ряд: степенной, ряд по специальным полиномам или функциям, тригонометрический ряд Фурье и др. Однако из перечисленных рядов ряд Фурье является единственным ортогональным рядом со всеми своими производными. Поэтому применение ряда Фурье в качестве ряда аппроксимирующих функций на отрезке $(-h/2, h/2)$ позволяет исключить из вариационного уравнения равновесия элементарного столбика бесконечные суммы и привести задачу к конечной системе дифференциальных уравнений. Но, кроме отмеченного достоинства, имеется и недостаток ряда Фурье, который заключается в том, что на концах отрезка ряд Фурье на основании теоремы Дирихле сходится к полусумме крайних значений функции. Эта неполнота ряда Фурье на концах отрезка не позволяет выполнить краевые условия на торцах тела.

Чтобы устранить отмеченную неполноту ряда Фурье на концах отрезка, дополним ряд Фурье некоторыми полиномами, например, полиномами Лежандра. Так как на концах отрезка $(-h/2, h/2)$ крайние условия обычно задают значение функции и ее первых производных, то дополним ряды Фурье для искомым перемещений двумя полиномами Лежандра.

Итак, ряды искомым упругих перемещений запишем в виде

$$\begin{aligned}
 u &= U_0(x, y, t) + \frac{2z}{h}U_1(x, y, t) + \frac{1}{2}\left(\frac{12z^2}{h^2} - 1\right)U_2(x, y, t) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[U_{is}(x, y, t) \sin \frac{2\pi iz}{h} + U_{ic}(x, y, t) \cos \frac{2\pi iz}{h} \right]; \\
 v &= V_0(x, y, t) + \frac{2z}{h}V_1(x, y, t) + \frac{1}{2}\left(\frac{12z^2}{h^2} - 1\right)V_2(x, y, t) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[V_{is}(x, y, t) \sin \frac{2\pi iz}{h} + V_{ic}(x, y, t) \cos \frac{2\pi iz}{h} \right]; \\
 w &= W_0(x, y, t) + \frac{2z}{h}W_1(x, y, t) + \frac{1}{2}\left(\frac{12z^2}{h^2} - 1\right)W_2(x, y, t) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[W_{is}(x, y, t) \sin \frac{2\pi iz}{h} + W_{ic}(x, y, t) \cos \frac{2\pi iz}{h} \right].
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Отметим, что устранить неполноту ряда Фурье на концах отрезка можно не только полиномами, но и какими-нибудь другими функциями.

2.2. Применение вариационного уравнения равновесия элементарного столбика к выводу уравнений равновесия цилиндрического тела

Будем исходить из вариационного уравнения равновесия элементарного столбика (1.9), записанного в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_h} \int (i \cdot T) \cdot \delta \bar{u} dz + \frac{\partial}{\partial y_h} \int (j \cdot T) \cdot \delta \bar{u} dz - \int_h T \cdot \delta E dz + \\ & + \int_h \left(\bar{K} - \rho \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \bar{u} dz + \left| \frac{\bar{F}_n \cdot \delta \bar{u}}{n_z} \right|_s = 0, \end{aligned}$$

где i, j – орты прямоугольной системы координат, а остальные величины указаны в уравнении (1.9).

Связь между тензором напряжений и тензором деформации устанавливаем на основе обобщенного закона Гука с учетом температурных членов согласно гипотезе Дюгамеля-Неймана [143]:

$$T = 2G \left(E + \frac{\nu}{1-2\nu} I \cdot \text{div} \bar{u} \right) - B I \tau;$$

$$B = 2G\alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu}.$$

Так как ряды аппроксимирующих функций со своими первыми производными полны на концах отрезка $(-h/2, h/2)$, то в качестве возможных перемещений возьмем члены ряда Фурье без дополнительных функций, то есть

$$\begin{aligned} \varphi_0 = \psi_0 = f_0 = 1, \quad \varphi_{js} = \sin \frac{2\pi jz}{h}, \quad \varphi_{jc} = \cos \frac{2\pi jz}{h}, \\ \psi_{gs} = \sin \frac{2\pi jz}{h}, \quad \psi_{gc} = \cos \frac{2\pi jz}{h}, \quad f_{ds} = \sin \frac{2\pi jz}{h}, \\ f_{dc} = \cos \frac{2\pi jz}{h}, \quad j = 1, 2, \dots \infty. \end{aligned}$$

Раскрывая вариационное уравнение (1.9) для данных разложений (2.1) и возможных перемещений и с учетом закона Гука (1.5), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
& [\gamma\Delta_2 - (\gamma-1)\partial_2^2]U_0 + (\gamma-1)\partial_1\partial_2V_0 + \frac{2\gamma_2}{h}\partial_1W_1 = \\
& = -\frac{X^+ + X^-}{Gh} - \frac{1}{Gh} \int_{-h/2}^{h/2} (K_1 - B\partial_1\tau) dz; \\
& [\gamma\Delta_2 - (\gamma-1)\partial_1^2]V_0 + (\gamma-1)\partial_1\partial_2U_0 + \frac{2\gamma_2}{h}\partial_2W_1 = \\
& = -\frac{Y^+ + Y^-}{Gh} - \frac{1}{Gh} \int_{-h/2}^{h/2} (K_2 - B\partial_2\tau) dz; \\
& \left[\gamma\Delta_2 - (\gamma-1)\partial_2^2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right] U_{ic} + (\gamma-1)\partial_1\partial_2V_{ic} + \frac{2(\gamma-1)\pi i}{h}\partial_1W_{is} + \\
& + \frac{6\cos\pi i}{\pi^2 i^2} \left[\gamma\Delta_2 - (\gamma-1)\partial_2^2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right] U_2 + \frac{6\cos\pi i}{\pi^2 i^2} (\gamma-1)\partial_1\partial_2V_2 - \quad (2.2) \\
& - \frac{4\cos\pi i}{h}\partial_1W_1 = -\frac{2(X^+ + X^-)}{G}\cos\pi i - \frac{2}{Gh} \int_{-h/2}^{h/2} (K_1 - B\partial_1\tau)\cos\frac{2\pi iz}{h} dz; \\
& (\gamma-1)\partial_1\partial_2U_{ic} + \left[\gamma\Delta_2 - (\gamma-1)\partial_1^2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right] V_{ic} + \frac{2(\gamma-1)\pi i}{h}\partial_2W_{is} + \\
& + \frac{6\cos\pi i}{\pi^2 i^2} (\gamma-1)\partial_1\partial_2U_2 + \frac{6\cos\pi i}{\pi^2 i^2} \left[\gamma\Delta_2 - (\gamma-1)\partial_1^2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right] V_2 - \\
& - \frac{4\cos\pi i}{h}\partial_2W_1 = -\frac{2(Y^+ + Y^-)}{G}\cos\pi i - \frac{2}{Gh} \int_{-h/2}^{h/2} (K_2 - B\partial_2\tau)\cos\frac{2\pi iz}{h} dz; \\
& - \frac{2(\gamma-1)\pi i}{h} (\partial_1U_{ic} + \partial_2V_{ic}) + \left(\Delta_1 - \frac{4\gamma\pi^2 i^2}{h^2} \right) W_{is} - \\
& - \frac{12(\gamma-1)\cos\pi i}{\pi i h} (\partial_1U_2 + \partial_2V_2) - \frac{2\cos\pi i}{\pi i} \Delta_1 W_1 = \\
& = -\frac{2}{Gh} \int_{-h/2}^{h/2} K_3 \sin\frac{2\pi iz}{h} dz - \frac{4B\pi i}{Gh^2} \int_{-h/2}^{h/2} \tau \cos\frac{2\pi iz}{h} dz;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\gamma \Delta_2 - (\gamma - 1) \partial_2^2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right] U_{is} + (\gamma - 1) \partial_1 \partial_2 V_{is} - \frac{2(\gamma - 1)\pi i}{h} \partial_1 W_{ic} - \\
& - \frac{2 \cos \pi i}{\pi i} \left[\gamma \Delta_2 - (\gamma - 1) \partial_2^2 \right] \cdot U_1 - \frac{2(\gamma - 1) \cos \pi i}{\pi i} \partial_1 \partial_2 V_1 - \\
& - \frac{12(\gamma - 1) \cos \pi i}{\pi i h} \partial_1 W_2 = - \frac{2}{Gh} \int_{-h/2}^{h/2} (K_1 - B \partial_1 \tau) \sin \frac{2\pi i z}{h} dz; \\
& (\gamma - 1) \partial_1 \partial_2 U_{is} + \left[\gamma \Delta_2 - (\gamma - 1) \partial_1^2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right] V_{is} - \frac{2(\gamma - 1)\pi i}{h} \partial_2 W_{ic} - \\
& - \frac{2(\gamma - 1) \cos \pi i}{\pi i} \partial_1 \partial_2 U_1 - \frac{2 \cos \pi i}{\pi i} \left[\gamma \Delta_2 - (\gamma - 1) \partial_1^2 \right] V_1 - \\
& - \frac{12(\gamma - 1) \cos \pi i}{\pi i h} \partial_2 W_2 = - \frac{2}{Gh} \int_{-h/2}^{h/2} (K_2 - B \partial_2 \tau) \sin \frac{2\pi i z}{h} dz; \\
& \partial_1 U_1 + \partial_2 V_1 + \frac{h}{2} \Delta_1 W_0 = - \frac{z^+ + z^-}{2G} - \frac{1}{G} \int_{-h/2}^{h/2} K_3 dz;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pi i (\gamma - 1) (\partial_1 U_{is} + \partial_2 V_{is}) + \frac{h}{2} \left(\Delta_1 - \frac{4\gamma \pi^2 i^2}{h^2} \right) W_{ic} - \\
& - 2\gamma_2 \cos \pi i (\partial_1 U_1 + \partial_2 V_1) + \frac{3h \cos \pi i}{\pi^2 i^2} \left(\Delta_1 - \frac{4\gamma \pi^2 i^2}{h^2} \right) W_2 = \\
& = \frac{Z^+ + Z^-}{2G} \cos \pi i - \frac{1}{G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(K_3 \cos \frac{2\pi i z}{h} - \frac{2B\pi i}{h} \tau \sin \frac{2\pi i z}{h} \right) dz,
\end{aligned}$$

где $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\Delta_1 = \Delta - \gamma a$, $\Delta_2 = \Delta - a$, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$,

$$a = \frac{\rho \partial^2}{\gamma G \partial t^2}, \quad \gamma = \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu}, \quad \gamma_2 = \gamma - 2;$$

X^+, Y^+, Z^+ – нагрузка, заданная на торце $z = h/2$;

X^-, Y^-, Z^- – нагрузка, заданная на торце $z = -h/2$.

Полученные девять уравнений содержат 15 неизвестных функций (обобщенных перемещений $U_0, V_0, W_0, U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2, U_{is}, V_{is}, W_{is}, U_{ic}, V_{ic}, W_{ic}$). Для замкнутости системы следует привлечь шесть краевых условий на торцах тела.

2.3. Составление уравнений связей из условий на торцах цилиндрического тела

Краевые условия на торцах могут быть записаны как в перемещениях, так и в напряжениях, т.е. при $z = \pm h/2$

$$U_0 \pm U_1 + U_2 + \sum_{i=1}^{\infty} U_{ic} \cos \pi i = u^{\pm}, \quad V_0 \pm V_1 + V_2 + \sum_{i=1}^{\infty} V_{ic} \cos \pi i = v^{\pm},$$

$$W_0 \pm W_1 + W_2 + \sum_{i=1}^{\infty} W_{ic} \cos \pi i = w^{\pm},$$

$$\frac{2}{h}(U_1 \pm 3U_2) + \partial_1(W_0 \pm W_1 + W_2) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi i}{h} U_{is} + \partial_1 W_{ic} \right) \cos \pi i = \frac{\pm X^{\pm}}{G},$$

$$\frac{2}{h}(V_1 \pm 3V_2) + \partial_2(W_0 \pm W_1 + W_2) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi i}{h} V_{is} + \partial_2 W_{ic} \right) \cos \pi i = \frac{\pm Y^{\pm}}{G}, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\gamma}{h}(W_1 \pm 3W_2) + \gamma_2 [\partial_1(U_0 \pm U_1 + U_2) + \partial_2(V_0 \pm V_1 + V_2)] + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2\gamma\pi i}{h} W_{is} + \gamma_2 (\partial_1 U_{ic} + \partial_2 V_{ic}) \right) \right] \cos \pi i = \pm \frac{1}{G} (Z^{\pm} + B\tau^{\pm}). \end{aligned}$$

Уравнения (2.3) (условия на торцах) следует рассматривать как уравнения связей по отношению к уравнениям (2.2), полученным на основе принципа возможных перемещений.

Исследование полученных уравнений (2.2) показывает, что система вариационных уравнений распалась на две независимые друг от друга группы уравнений. Первая группа (задача А) содержит неиз-

вестные функции $U_0, V_0, W_1, U_2, V_2, U_{ic}, V_{ic}, W_{is}$, вторая (задача Б) – $U_1, V_1, W_0, W_2, U_{is}, V_{is}, W_{ic}$. Если уравнения связей симметричны на торцах тела, то указанные группы уравнений решаются независимо. При несимметричных краевых условиях на торцах тела две группы уравнений решаются совместно. Так как уравнения связей содержат бесконечные суммы, то разрешающие дифференциальные уравнения будут, вообще говоря, бесконечно высокого порядка.

2.4. Вывод разрешающих уравнений для решения задачи о равновесии упругого цилиндрического тела при различных краевых условиях на торцах

Для получения разрешающих уравнений из системы (2.2) найдем все обобщенные перемещения, зависящие от индекса суммирования i , и затем подставим их в уравнения связей.

После выполнения выкладок, связанных с вычислением бесконечных сумм, получим следующие разрешающие уравнения относительно функций $U_0, V_0, W_0, U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2$, не зависящих от индекса суммирования.

2.4.1. Первая основная задача (на торцах заданы напряжения)

Уравнения динамики

Задача А

$$\begin{aligned} & \left[4\Delta\sqrt{\Delta_2} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \cos \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} - \frac{(\Delta + \Delta_1)^2}{\sqrt{\Delta_1}} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} \cos \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \right] W_1 = \\ & = \frac{1}{2G} \left[2\sqrt{\Delta_2} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \cos \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} - \frac{(\Delta + \Delta_1)}{\sqrt{\Delta_1}} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} \cos \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \right] \times \\ & \times \left[\partial_1 (X^+ + X^-) + \partial_2 (Y^+ + Y^-) \right] + \frac{\gamma a}{2(\gamma - 1)G} \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \times \\ & \times \left[Z^+ - Z^- + B(\tau^+ - \tau^-) \right] + \int_{-h/2}^{h/2} \left(2\sqrt{\Delta_2} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \cos z \sqrt{\Delta_1} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(\Delta+\Delta_1)}{\sqrt{\Delta_1}} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} \cos z \sqrt{\Delta_2} \Big) \cdot (\partial_1 K_1 + \partial_2 K_2) \frac{dz}{2G} + \\
& + \int_{-h/2}^{h/2} \left(2\Delta_1 \sin z \sqrt{\Delta_1} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} - (\Delta + \Delta_1) \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} \sin z \sqrt{\Delta_2} \right) \times \\
& \times \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}} K_3 \frac{dz}{2G} + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(\Delta + \Delta_1)}{\sqrt{\Delta_1}} B a \tau \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} \cos z \sqrt{\Delta_2} \frac{dz}{2G}; \\
U_2 = & \frac{h}{12} \left(\frac{X^+ + X^-}{G} - 2\partial_1 W_1 \right), \quad V_2 = \frac{h}{12} \left(\frac{Y^+ + Y^-}{G} - 2\partial_2 W_1 \right), \quad (2.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_0 = & -\frac{2(\gamma-1)\partial_1 W_1}{\gamma h \Delta_2} - \frac{12}{\gamma h^2 \Delta_1 \Delta_2} \left\{ \left[\gamma \Delta_2 - (\gamma-1)\partial_1^2 \right] U_2 - (\gamma-1)\partial_1 \partial_2 V_2 \right\} - \\
& - \frac{1}{\gamma G h \Delta_1 \Delta_2} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \left[\gamma \Delta_2 - (\gamma-1)\partial_1^2 \right] K_1 - (\gamma-1)\partial_1 \partial_2 K_2 - B \Delta_1 \partial_1 \frac{\tau}{h} \right\} dz,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_0 = & -\frac{2(\gamma-1)\partial_2 W_1}{\gamma h \Delta_2} + \frac{12}{\gamma h^2 \Delta_1 \Delta_2} \left\{ (\gamma-1)\partial_1 \partial_2 U_2 - \left[\gamma \Delta_2 - (\gamma-1)\partial_2^2 \right] V_2 \right\} + \\
& + \frac{1}{\gamma G h \Delta_1 \Delta_2} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ (\gamma-1)\partial_1 \partial_2 K_1 - \left[\gamma \Delta_2 - (\gamma-1)\partial_1^2 \right] K_2 + B \Delta_2 \partial_2 \frac{\tau}{h} \right\} dz.
\end{aligned}$$

Задача Б

$$\begin{aligned}
& \left[4(\Delta - \partial_2^2) \sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} - \frac{(\Delta + \Delta_1)^2 - \partial_2^2 (\Delta + 3\Delta_1)}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} \right] U_1 + \\
& + \left[4\sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} - \frac{\Delta + 3\Delta_1}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} \right] \partial_1 \partial_2 V_1 = \frac{\gamma a}{2G} (X^+ - X^-) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{G} \left(\sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} - \frac{(\Delta + \Delta_1)}{2\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} \right) (\partial_1 Z^+ + \partial_1 Z^-) + \\
& + \frac{1}{G} \int_{-h/2}^{-h/2} \left(Ba \partial_1 \tau \frac{\sin z \sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} \right) dz - \frac{1}{2G} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ 2\Delta \frac{\sin z \sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} - \right. \\
& \left. \frac{(\Delta + \Delta_1) \sin z \sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1}} \right\} K_1 + \left[\frac{(\Delta + \Delta_1) \cos z \sqrt{\Delta_1}}{\sqrt{\Delta_1} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1}} - 2\sqrt{\Delta_2} \frac{\cos z \sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} \right] \partial_1 K_3 \Big) dz, \\
& \left[4\sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} - \frac{\Delta + 3\Delta_1}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} \right] \partial_1 \partial_2 U_1 + \\
& + \left[4(\Delta - \partial_1^2) \sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} - \frac{(\Delta + \Delta_1)^2 - \partial_1^2 (\Delta + 3\Delta_1)}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} \right] V_1 = \\
& = \frac{\gamma a}{2G} (Y^+ - Y^-) - \frac{1}{2G} \left(2\sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} - \frac{(\Delta + \Delta_1)}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} \right) (\partial_2 Z^+ + \partial_2 Z^-) - \\
& - \frac{1}{2G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\left[2\Delta \frac{\sin z \sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} - \frac{(\Delta + \Delta_1) \sin z \sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1}} \right] K_2 - 2Ba \partial_2 \tau \frac{\sin z \sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} \right) dz - \\
& - \frac{1}{2G} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{(\Delta + \Delta_1) \cos z \sqrt{\Delta_1}}{\sqrt{\Delta_1} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1}} - 2\sqrt{\Delta_2} \frac{\sin z \sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} \right] \partial_2 K_3 dz, \quad (2.5)
\end{aligned}$$

$$W_0 = -\frac{2(\gamma - 1)}{h\Delta_1} (\partial_1 U_1 + \partial_2 V_1) - \frac{12\gamma}{h^2 \Delta_1} W_2 + \frac{B(\tau^+ + \tau^-)}{Gh\Delta_1} - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{K_3 dz}{Gh\Delta_1},$$

$$W_2 = \frac{h}{12\gamma} \left[\frac{Z^+ + Z^- + B(\tau^+ + \tau^-)}{G} - 2\gamma_2(\partial_1 U_1 + \partial_2 V_1) \right].$$

Уравнения статики

Задача А

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\sinh \sqrt{\Delta}}{h\sqrt{\Delta}} \right) \Delta W_1 = \frac{1}{4G} \left[1 - \frac{\sinh z\sqrt{\Delta}}{(\gamma-1)h\sqrt{\Delta}} \right] \times \\ & \times \left[\partial_1 (X^+ + X^-) + \partial_2 (Y^+ + Y^-) + \gamma \frac{(1 - \cosh \sqrt{\Delta})}{4(\gamma-1)Gh} (Z^+ - Z^- + B(\tau^+ + \tau^-)) \right] + \\ & + \frac{1}{4G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\cos \frac{h}{2} \sqrt{\Delta} \cos z\sqrt{\Delta} + \frac{2z}{h} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta} \sin z\sqrt{\Delta} - \frac{2 \cos z\sqrt{\Delta}}{(\gamma-1)h\sqrt{\Delta}} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta} \right) \times \\ & \times (\partial_1 K_1 + \partial_2 K_2) dz + \frac{1}{4G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\left(\cos \frac{h}{2} \sqrt{\Delta} \sin z\sqrt{\Delta} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2z}{h} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta} \cos z\sqrt{\Delta} \right) \sqrt{\Delta} K_3 + 4B\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta} \frac{\cos z\sqrt{\Delta}}{(\gamma-1)h} \tau \right) dz. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Задача Б

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2(\gamma-1)\Delta - \gamma_2 \partial_2^2}{2\sqrt{\Delta}} \sinh \sqrt{\Delta} - (\gamma-1)h(\Delta - \partial_2^2) \right] U_1 + \\ & + \left[\frac{\gamma_2}{2\sqrt{\Delta}} \sinh \sqrt{\Delta} - (\gamma-1)h \right] \partial_1 \partial_2 V_1 = \frac{\gamma(1 - \cosh \sqrt{\Delta})}{4G} (X^+ - X^-) + \\ & + \frac{1}{4G} \left[(\gamma-1)h + \frac{\sinh \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \right] \partial_1 (Z^+ + Z^-) - \frac{1}{2G} \int_{-h/2}^{h/2} ((\gamma-1)\sqrt{\Delta} \times \\ & \times \left(z \cos z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta} - \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2} \sqrt{\Delta} \sin z\sqrt{\Delta} \right) + \gamma \sin z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta}) K_1 dz - \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\cos z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} + (\gamma-1) \left(\frac{h}{2} \cos z\sqrt{\Delta} \cos \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + z \sin z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} \right) \partial_1 K_3 - 2B\partial_1 \tau \sin z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} \right) dz. \\
& \left[\frac{\gamma_2}{2\sqrt{\Delta}} \sinh \sqrt{\Delta} - (\gamma-1)h \right] \partial_1 \partial_2 U_1 + \left[\frac{2(\gamma-1)\Delta - \gamma_2 \partial_1^2}{2\sqrt{\Delta}} \sinh \sqrt{\Delta} - \right. \\
& \quad \left. - (\gamma-1)h(\Delta - \partial_1^2) \right] V_1 = \frac{\gamma(1 - \cosh \sqrt{\Delta})}{4G} (Y^+ - Y^-) + \frac{1}{4G} [(\gamma-1)h + \\
& \quad + \frac{\sinh \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}}] \partial_2 (Z^+ + Z^-) - \frac{1}{2G} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma-1)\sqrt{\Delta} \left[\left(z \cos z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} \sin z\sqrt{\Delta} \right) + \gamma \sin z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} \right] K_2 dz - \frac{1}{2G} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\cos z\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} + \\
& \quad + (\gamma-1) \left(\frac{h}{2} \cos z\sqrt{\Delta} \cos \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} + z \sin z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} \right) \partial_2 K_3 dz + \\
& \quad + \frac{1}{G} \int_{-h/2}^{h/2} B\partial_2 \tau \sin z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} dz.
\end{aligned}$$

2.4.2. Вторая основная задача (на торцах заданы перемещения)

Уравнения динамики

Задача А

$$\left[(\Delta_1 - \partial_2^2) \sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} - (\Delta - \partial_2^2) \sqrt{\Delta_1} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \right] U_2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_1} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \right] \partial_1 \partial_2 V_2 = \frac{\gamma h a}{12} \sqrt{\Delta_1 \Delta_2} (u^+ + u^-) + \\
& \quad + \left[\sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_1} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \right] \frac{h \Delta_1}{12} \partial_1 (w^+ - w^-) - \\
& - \frac{h}{12G} \int_{-h/2}^{h/2} \left((\Delta_1 - \partial_2^2) \sqrt{\Delta_2} \frac{\cos z \sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1}} - \partial_1^2 \sqrt{\Delta_1} \frac{\cos z \sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} \right) K_1 dz - \\
& - \frac{h}{12G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sqrt{\Delta_2} \frac{\cos z \sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1}} - \sqrt{\Delta_1} \frac{\cos z \sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} \right) \partial_1 \partial_2 K_2 dz - (2.8) \\
& - \frac{h}{12G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\left(\frac{\sin z \sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1}} - \frac{\sin z \sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} \right) \sqrt{\Delta_1 \Delta_2} \partial_1 K_3 + B a \frac{\cos z \sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} \sqrt{\Delta_1} \partial_1 \tau \right) dz, \\
& \quad \left[\sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_1} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \right] \partial_1 \partial_2 U_2 + \\
& \quad + \left[(\Delta_1 - \partial_1^2) \sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} - \partial_1^2 \sqrt{\Delta_1} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \right] V_2 = \\
& = \frac{\gamma h a}{12} \sqrt{\Delta_1 \Delta_2} (v^+ + v^-) + \frac{h \Delta_1}{12} \left(\sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_1} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \right) \partial_2 (w^+ - w^-) - \\
& - \frac{h}{12G} \int_{-h/2}^{h/2} \left((\Delta_1 - \partial_1^2) \sqrt{\Delta_2} \frac{\cos z \sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1}} - \partial_2^2 \sqrt{\Delta_1} \frac{\cos z \sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} \right) K_2 dz - \\
& - \frac{h}{12G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sqrt{\Delta_2} \frac{\cos z \sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1}} - \sqrt{\Delta_1} \frac{\cos z \sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} \right) \partial_1 \partial_2 K_1 dz -
\end{aligned}$$

$$-\frac{h}{12G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\left(\frac{\sin z\sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}} - \frac{\sin z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}} \right) \sqrt{\Delta_1\Delta_2} \partial_2 K_3 + Ba \frac{\cos z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}} \sqrt{\Delta_1} \partial_2 \tau \right) dz,$$

$$W_1 = \frac{w^+ - w^-}{2},$$

$$U_0 = -\frac{2(\gamma-1)}{\gamma h \Delta_2} \partial_1 W_1 - \frac{12}{\gamma h^2 \Delta_1 \Delta_2} \left([\gamma \Delta_2 - (\gamma-1) \partial_1^2] U_2 - (\gamma-1) \partial_1 \partial_2 V_2 \right) -$$

$$-\frac{1}{\gamma G h \Delta_1 \Delta_2} \int_{-h/2}^{h/2} \left([\gamma \Delta_2 - (\gamma-1) \partial_1^2] K_1 - (\gamma-1) \partial_1 \partial_2 K_2 - B \frac{\Delta_1 \partial_1 \tau}{h} \right) dz,$$

$$V_0 = -\frac{2(\gamma-1)}{\gamma h \Delta_2} \partial_2 W_1 + \frac{12}{\gamma h^2 \Delta_1 \Delta_2} \left((\gamma-1) \partial_1 \partial_2 U_2 - [\gamma \Delta_2 - (\gamma-1) \partial_2^2] V_2 \right) +$$

$$+\frac{1}{\gamma G h \Delta_1 \Delta_2} \int_{-h/2}^{h/2} \left((\gamma-1) \partial_1 \partial_2 K_1 - [\gamma \Delta_2 - (\gamma-1) \partial_1^2] K_2 - B \frac{\Delta_1 \partial_2 \tau}{h} \right) dz.$$

Задача Б

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \right] W_2 = -\frac{ah}{12} (w^+ + w^-) - \\ & -\frac{h\Delta_2}{6\sqrt{\Delta_1}} \left(\operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} - \frac{\sqrt{\Delta_1}}{\sqrt{\Delta_2}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \right) (\partial_1 U_1 + \partial_2 V_1) + \quad (2.9) \\ & + \left(\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \right) \frac{Bh}{12\gamma G} (\tau^+ + \tau^-) + \\ & + \frac{h}{12\gamma G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\sin z\sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}} - \frac{\sin z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}} \right) (\partial_1 K_1 + \partial_2 K_2) dz - \end{aligned}$$

$$-\frac{h}{12\gamma G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\left(\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta_1}} \frac{\cos z\sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}} - \sqrt{\Delta_2} \frac{\cos z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}} \right) K_3 - B\alpha\tau \frac{\sin z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}} \right) dz,$$

$$U_1 = \frac{1}{2}(u^+ - u^-), \quad V_1 = \frac{1}{2}(v^+ - v^-),$$

$$W_0 = -\frac{2(\gamma-1)}{h\Delta_1}(\partial_1 U_1 + \partial_2 V_1) - \frac{12\gamma}{h^2\Delta_1}W_2 + \frac{B(\tau^+ + \tau^-)}{Gh\Delta_1} - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{K_3}{Gh\Delta_1} dz.$$

Уравнения статики

Задача А

$$\begin{aligned} & \left(h\partial_1^2 - \frac{(\gamma+1)\Delta + (\gamma-1)\partial_2^2}{(\gamma-1)\sqrt{\Delta}} \sinh \sqrt{\Delta} \right) U_2 + h \left(1 + \frac{\sinh \sqrt{\Delta}}{h\sqrt{\Delta}} \right) \partial_1 \partial_2 V_2 = \\ & = \frac{h^2\Delta}{6} \left(1 + \frac{\sinh \sqrt{\Delta}}{h\sqrt{\Delta}} \right) \partial_1 W_1 + \frac{\gamma h\Delta}{\gamma-1} (1 - \cosh \sqrt{\Delta}) (u^+ + u^-) - \\ & - \frac{h}{6G} \int_{-h/2}^{h/2} \partial_1^2 \left(z \sin z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} + \frac{h}{2} \cos z\sqrt{\Delta} \cos \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} \right) K_1 dz + \\ & + \frac{h}{6G} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(\gamma+1)\Delta + (\gamma-1)\partial_2^2}{(\gamma-1)\sqrt{\Delta}} \cos z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} K_1 dz - \quad (2.10) \\ & - \frac{h}{6G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(z \sin z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} + \frac{h}{2} \cos z\sqrt{\Delta} \cos \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} + \right. \\ & \left. + \frac{\cos z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \right) \partial_1 \partial_2 K_2 dz - \int_{-h/2}^{h/2} \left(\left(\frac{h}{2} \sin z\sqrt{\Delta} \cos \frac{h\sqrt{\Delta}}{2} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -z \cos z \sqrt{\Delta} \sin \frac{h\sqrt{\Delta}}{2} \Big) \partial_1 K_3 + \frac{2B\partial_1 \tau}{\gamma-1} \sin \frac{h\sqrt{\Delta}}{2} \cos z \sqrt{\Delta} \Big) \frac{\sqrt{\Delta} h dz}{6G}, \\
& \left(h\partial_1^2 - \frac{(\gamma+1)\Delta + (\gamma-1)\partial_1^2}{(\gamma-1)\sqrt{\Delta}} \sinh \sqrt{\Delta} \right) V_2 + h \left(1 + \frac{\sinh \sqrt{\Delta}}{h\sqrt{\Delta}} \right) \partial_1 \partial_2 U_2 = \\
& = \frac{h\sqrt{\Delta}}{6} (h\sqrt{\Delta} + \sinh \sqrt{\Delta}) \partial_2 W_1 + \frac{\gamma h \Delta}{(\gamma-1)6} (1 - \cosh \sqrt{\Delta}) (v^+ + v^-) - \\
& \quad - \frac{h}{6G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(z \sin z \sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta} + \frac{h}{2} \cos z \sqrt{\Delta} \cos \frac{h}{2} \sqrt{\Delta} \right) \times \\
& \quad \times \partial_2 (\partial_1 K_1 + \partial_2 K_2) dz - \frac{h}{6G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial_1 \partial_2 K_1}{\sqrt{\Delta}} - \frac{(\gamma+1)\Delta + (\gamma-1)\partial_1^2}{(\gamma-1)\sqrt{\Delta}} \cdot K_2 \right) \times \\
& \quad \times \cos z \sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta} dz - \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sqrt{\Delta} \left(\frac{h}{2} \sin z \sqrt{\Delta} \cos \frac{h\sqrt{\Delta}}{2} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - z \cos z \sqrt{\Delta} \sin \frac{h\sqrt{\Delta}}{2} \right) \partial_2 K_3 + \frac{2B\partial_2 \tau \cos z \sqrt{\Delta} \sin \frac{h\sqrt{\Delta}}{2}}{(\gamma-1)} \right) \frac{h dz}{6G}.
\end{aligned}$$

Задача Б

$$\begin{aligned}
& \left[1 + \frac{(\gamma+1) \sinh \sqrt{\Delta}}{(\gamma-1) h \sqrt{\Delta}} \right] W_2 = - \frac{(1 - \cosh \sqrt{\Delta})}{6(\gamma-1)} (w^+ + w^-) - \\
& - \frac{h}{6} \left(1 + \frac{\sin h \sqrt{\Delta}}{h \sqrt{\Delta}} \right) (\partial_1 U_1 + \partial_2 V_1) + \left[1 + \frac{(\gamma+1) \sin h \sqrt{\Delta}}{(\gamma-1) h \sqrt{\Delta}} \right] \frac{Bh(\tau^+ + \tau^-)}{12\gamma G} + \\
& + \frac{h}{12\gamma G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{2z}{h} \cos z \sqrt{\Delta} \sin \frac{h\sqrt{\Delta}}{2} - \sin z \sqrt{\Delta} \cos \frac{h\sqrt{\Delta}}{2} \right) \times \quad (2.11)
\end{aligned}$$

$$\times \frac{(\partial_1 K_1 + \partial_2 K_2)}{\sqrt{\Delta}} dz - \frac{h}{12\gamma G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\cos z\sqrt{\Delta} \cos \frac{h\sqrt{\Delta}}{2} + \frac{2z}{h} \sin z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h\sqrt{\Delta}}{2} + \right. \\ \left. + \frac{2(\gamma+1)\cos z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h\sqrt{\Delta}}{2}}{(\gamma-1)h\sqrt{\Delta}} \right) K_3 dz + \frac{1}{3\gamma G} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{B\tau}{(\gamma-1)} \sin z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h\sqrt{\Delta}}{2} dz.$$

2.4.3. Смешанная задача (на торцах заданы касательные усилия и нормальные перемещения)

На торцах заданы касательные усилия и нормальные перемещения, т.е. при $z = \pm h/2$, $\tau_{xz} = \pm X^+$, $\tau_{yz} = \pm Y^+$, $w = w^+$.

Уравнения динамики

Задача А

$$W_1 = \frac{1}{2}(w^+ - w^-), \quad U_2 = \frac{h}{12} \left(\frac{X^+ + X^-}{G} - 2\partial_1 W_1 \right), \quad (2.12)$$

$$V_2 = \frac{h}{12} \left(\frac{Y^+ + Y^-}{G} - 2\partial_2 W_1 \right).$$

Задача Б

$$\frac{h}{6} \left(\frac{\Delta_2}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \right) (\partial_1 U_1 + \partial_2 V_1) + \\ + \left(\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \right) W_2 = \frac{ah}{12} (w^+ + w^-) + \\ + \left(\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} \right) Bh \frac{(\tau^+ + \tau^-)}{12\gamma G} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h}{12\gamma G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\sin z\sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}} - \frac{\sin z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}} \right) (\partial_1 K_1 + \partial_2 K_2) dz - \quad (2.13) \\
& - \frac{h}{12\gamma G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\left(\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta_1}} \frac{\cos z\sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}} - \sqrt{\Delta_2} \frac{\cos z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}} \right) K_3 - Ba\tau \frac{\sin z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}} \right) dz, \\
& \left(\gamma \partial_1^2 \sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} - \frac{\Delta_1(\Delta_1 - \Delta) + \gamma(\Delta_1 + \Delta_2) \partial_1^2}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} \right) U_1 + \\
& + \gamma \left(\sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h\sqrt{\Delta_2}}{2} - \frac{(\Delta_1 + \Delta_2) \operatorname{ctg} \frac{h\sqrt{\Delta_1}}{2}}{2\sqrt{\Delta_1}} \right) \partial_1 \partial_2 V_1 + \\
& + \frac{3\gamma}{h} \left(2\sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h\sqrt{\Delta_2}}{2} - \frac{(\Delta + \Delta_1) \operatorname{ctg} \frac{h\sqrt{\Delta_1}}{2}}{\sqrt{\Delta_1}} \right) \partial_1 W_2 = \frac{\gamma a}{4G} (X^+ - X^-) - \\
& - \frac{B}{4G} \left(2\sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2} - \frac{(\Delta + \Delta_1)}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1} \right) \partial_1 (\tau^+ + \tau^-) + \frac{1}{2G} \times \\
& \quad \times \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ba\partial_1 \tau \sin z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}} dz - \\
& - \frac{1}{4G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{2\Delta \sin z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}} - \frac{(\Delta + \Delta_1) \sin z\sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}} \right) \cdot K_1 dz -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{(\Delta + \Delta_1) \cos z\sqrt{\Delta_1}}{\sqrt{\Delta_1} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}} - \frac{2\sqrt{\Delta_2} \cos z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}} \right) \partial_1 K_3 dz, \\
& \gamma \left(\partial_2^2 \sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2} - \frac{\Delta_1 a - (\Delta_1 + \Delta_2) \partial_2^2}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1} \right) V_1 + \\
& \quad + \gamma \left(\sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2} - \frac{(\Delta + \Delta_2)}{2\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1} \right) \partial_1 \partial_2 U_1 + \\
& + \frac{3\gamma}{h} \left(2\sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2} - \frac{(\Delta + \Delta_1)}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1} \right) \partial_2 W_2 = \frac{\gamma a}{4G} (Y^+ - Y^-) - \\
& - \frac{B}{4G} \left(2\sqrt{\Delta_2} \operatorname{ctg} \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2} - \frac{(\Delta + \Delta_1)}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{ctg} \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1} \right) \partial_2 (\tau^+ + \tau^-) + \frac{1}{2G} \times \\
& \quad \times \int_{-h/2}^{h/2} B a \partial_2 \tau \frac{\sin z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}} dz - \\
& - \frac{1}{4G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(2\Delta \frac{\sin z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}} - \frac{(\Delta + \Delta_1) \sin z\sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}} \right) \cdot K_2 dz - \\
& - \frac{1}{4G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{(\Delta + \Delta_1) \cos z\sqrt{\Delta_1}}{\sqrt{\Delta_1} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}} - 2\sqrt{\Delta_2} \frac{\cos z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}} \right) \partial_2 K_3 dz.
\end{aligned}$$

Уравнения статики

Задача А

$$W_1 = \frac{(w^+ - w^-)}{2}, \quad U_2 = \frac{h}{12} \left(\frac{X^+ + X^-}{G} - 2\partial_1 W_1 \right),$$

$$V_2 = \frac{h}{12} \left(\frac{Y^+ + Y^-}{G} - 2\partial_2 W_1 \right). \quad (2.14)$$

Задача Б

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\sin h\sqrt{\Delta}}{h\sqrt{\Delta}} \right) (\partial_1 U_1 + \partial_2 V_1) + \frac{6}{h} \left(1 + \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{\sin h\sqrt{\Delta}}{h\sqrt{\Delta}} \right) W_2 = \\ & = -\frac{(1 - \cosh \sqrt{\Delta})}{(\gamma-1)h} (w^+ + w^-) + \left(1 + \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{\sin h\sqrt{\Delta}}{h\sqrt{\Delta}} \right) \frac{B}{2\gamma G} (\tau^+ + \tau^-) + \\ & + \frac{1}{\gamma Gh} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{h}{2} \sin z\sqrt{\Delta} \cos \frac{h}{2} \sqrt{\Delta} - z \cos z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta} \right) \times \\ & \times (\partial_1 K_1 + \partial_2 K_2) dz - \frac{1}{\gamma Gh} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\left(z \sin z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta} + \frac{h}{2} \cos z\sqrt{\Delta} \cos \frac{h}{2} \sqrt{\Delta} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{(\gamma+1) \cos z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta}}{(\gamma-1)\sqrt{\Delta}} \right] K_3 dz + \frac{1}{\gamma Gh} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{2B\tau}{\gamma-1} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta} \sin z dz, \\ & (\sqrt{\Delta} \sin h\sqrt{\Delta} - (\gamma-1)h\partial_1^2) U_1 - (\gamma-1)h\partial_1 \partial_2 V_1 - 6 \left(\frac{\sin h\sqrt{\Delta}}{h\sqrt{\Delta}} + (\gamma-1) \right) \partial_1 W_2 = \\ & = \left(\frac{1 - \cos h\sqrt{\Delta}}{2G} \right) (X^+ - X^-) - \frac{Bh}{2\gamma G} \left(\frac{\sin h\sqrt{\Delta}}{h\sqrt{\Delta}} + \gamma - 1 \right) \partial_1 (\tau^+ + \tau^-) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\gamma G} \int_{-h/2}^{h/2} \left[(\gamma-1)\sqrt{\Delta} \left(z \cos z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} - \frac{h}{2} \sin z\sqrt{\Delta} \cos \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \gamma \sin z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} \right] K_1 dz - \\
& -\frac{1}{\gamma G} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma-1) \left(\frac{h}{2} \cos z\sqrt{\Delta} \cos \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} + z \sin z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} \right) \partial_1 K_3 dz + \\
& + \frac{1}{\gamma G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(2B\partial_1 \tau \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} \sin z\sqrt{\Delta} - \frac{\cos z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \partial_1 K_3 \right) dz, \\
& (\sqrt{\Delta} \sin h\sqrt{\Delta} - (\gamma-1)h\partial_2^2) V_1 - (\gamma-1)h\partial_1 \partial_2 U_1 - 6 \left(\frac{\sin h\sqrt{\Delta}}{h\sqrt{\Delta}} + \gamma-1 \right) \partial_2 W_2 = \\
& = \left(\frac{1 - \cos h\sqrt{\Delta}}{2G} \right) (Y^+ - Y^-) - \frac{Bh}{2\gamma G} \left(\frac{\sin h\sqrt{\Delta}}{h\sqrt{\Delta}} + \gamma-1 \right) \partial_2 (\tau^+ + \tau^-) - \\
& -\frac{1}{\gamma G} \int_{-h/2}^{h/2} \left[(\gamma-1)\sqrt{\Delta} \left(z \cos z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} - \frac{h}{2} \sin z\sqrt{\Delta} \cos \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \gamma \sin z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} \right] K_2 dz - \frac{1}{\gamma G} \times \\
& \times \int_{-h/2}^{h/2} \left[(\gamma-1) \left(\frac{h}{2} \cos z\sqrt{\Delta} \cos \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} + z \sin z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} \right) \right] \partial_2 K_3 dz + \\
& + \frac{1}{\gamma G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(2B\partial_2 \tau \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta} \sin z\sqrt{\Delta} - \frac{\cos z\sqrt{\Delta} \sin \frac{h}{2}\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \partial_2 K_3 \right) dz.
\end{aligned}$$

Остальные функции U_{ic} , V_{ic} , W_{is} , U_{is} , V_{is} , W_{ic} определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
U_{ic} = & -\frac{6 \cos \pi i}{\pi^2 i^2} U_2 - \frac{2}{\gamma h \left(\Delta_1 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) \left(\Delta_2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right)} \times \\
& \times \left\{ 2 \cos \pi i \left(\gamma_2 \Delta_1 + \frac{4\gamma \pi^2 i^2}{h^2} \right) \partial_1 W + \right. \\
& + \frac{1}{G} \left[\Delta_1 - \frac{4\gamma \pi^2 i^2}{h^2} + (\gamma - 1) \partial_2^2 \right] \left[\left(X^+ + X^- \right) \cos \pi i + \int_{-h/2}^{h/2} K_1 \cos \frac{2\pi i z}{h} dz \right] - \\
& - \frac{(\gamma - 1) \partial_1 \partial_2}{G} \left[\left(Y^+ + Y^- \right) \cos \pi i + \int_{-h/2}^{h/2} K_2 \cos \frac{2\pi i z}{h} dz \right] - \frac{2(\gamma - 1) \pi i}{Gh} \times \\
& \times \left. \left(\int_{-h/2}^{h/2} \partial_1 K_3 \sin \frac{2\pi i z}{h} dz - \frac{B}{G} \left(\Delta_1 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} \partial_1 \tau \cos \frac{2\pi i z}{h} dz \right) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{ic} = & -\frac{6 \cos \pi i}{\pi^2 i^2} V_2 - \frac{2}{\gamma h \left(\Delta_1 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) \left(\Delta_2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right)} \times \\
& \times \left\{ 2 \cos \pi i \left(\gamma_2 \Delta_1 + \frac{4\gamma \pi^2 i^2}{h^2} \right) \partial_2 W_1 - \frac{(\gamma - 1) \partial_1 \partial_2}{G} \times \right. \\
& \times \left[\left(X^+ + X^- \right) \cos \pi i + \int_{-h/2}^{h/2} K_1 \cos \frac{2\pi i z}{h} dz \right] + \frac{1}{G} \left[\Delta_1 - \frac{4\gamma \pi^2 i^2}{h^2} + (\gamma - 1) \partial_1^2 \right] \times \\
& \times \left[\left(Y^+ + Y^- \right) \cos \pi i + \int_{-h/2}^{h/2} K_2 \cos \frac{2\pi i z}{h} dz \right] - \frac{2(\gamma - 1) \pi i}{Gh} \times \\
& \times \left. \left(\int_{-h/2}^{h/2} \partial_2 K_3 \sin \frac{2\pi i z}{h} dz - \frac{B}{G} \left(\Delta_1 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} \partial_2 \tau \cos \frac{2\pi i z}{h} dz \right) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{is} = & \frac{1}{\gamma \left(\Delta_1 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) \left(\Delta_2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right)} \left\{ \frac{2 \cos \pi i}{\pi i} \left[\Delta_1 \left(\gamma \Delta_2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{4(\gamma-1)\pi^2 i^2}{h^2} \Delta \right] W_1 - \frac{4(\gamma-1)\pi i \cos \pi i}{Gh^2} \left[\partial_1 (X^+ + X^-) + \partial_2 (Y^+ + Y^-) \right] - \\
& - \frac{4\pi i (\gamma-1)}{Gh^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\partial_1 K_1 + \partial_2 K_2) \cos \frac{2\pi iz}{h} dz - \frac{2}{Gh} \left(\gamma \Delta_2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) \times \\
& \times \left. \int_{-h/2}^{h/2} K_3 \sin \frac{2\pi iz}{h} dz - \frac{4\pi i}{Gh^2} \left(\Delta_1 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} B \tau \sin \frac{2\pi iz}{h} dz \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{is} = & \frac{1}{\gamma \left(\Delta_1 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) \left(\Delta_2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right)} \left\{ \frac{\cos \pi i}{\pi i} \left[2\gamma \Delta_1 \left(\Delta_2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) - \right. \right. \\
& - \left. \frac{16(\gamma-1)\pi^2 i^2}{h^2} \partial_1^2 \right] U_1 - \frac{16\pi^2 i^2 (\gamma-1) \cos \pi i}{\pi i h^2} \partial_1 \partial_2 V_1 + \\
& + \frac{4(\gamma-1)\pi i \partial_1 (Z^+ + Z^-) \cos \pi i}{Gh^2} - \frac{(\gamma-1)}{Gh} \partial_1 \partial_2 \int_{-h/2}^{h/2} K_2 \sin \frac{2\pi iz}{h} dz - \\
& - \frac{2}{Gh} \left[\Delta_1 - \frac{4\gamma\pi^2 i^2}{h^2} - (\gamma-1) \partial_1^2 \right] \int_{-h/2}^{h/2} K_1 \sin \frac{2\pi iz}{h} dz + \frac{2(\gamma-1)\pi i}{Gh^2} \times \\
& \times \left. \int_{-h/2}^{h/2} 2\partial_1 K_3 \cos \frac{2\pi iz}{h} dz + \frac{2B}{Gh} \left(\Delta_1 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} \partial_1 \tau \sin \frac{2\pi iz}{h} dz \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{is} = & \frac{2}{\gamma \left(\Delta_1 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) \left(\Delta_2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right)} \left\{ -\frac{8\pi^2 i^2 (\gamma - 1) \cos \pi i}{\pi i h^2} \partial_1 \partial_2 U_1 + \right. \\
& + \left(\gamma \Delta_1 \left(\Delta_2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) - \frac{8(\gamma - 1)\pi^2 i^2}{h^2} \partial_2^2 \right) \frac{\cos \pi i}{\pi i} V_1 + \\
& + \frac{2(\gamma - 1)\pi i \partial_2 (Z^+ + Z^-) \cos \pi i}{G h^2} - \frac{1}{G h} \left[\Delta_1 - \frac{4\gamma \pi^2 i^2}{h^2} - (\gamma - 1) \partial_2^2 \right] \times \\
& \times \int_{-h/2}^{h/2} K_2 \sin \frac{2\pi i z}{h} dz - \frac{(\gamma - 1)}{G h} \int_{-h/2}^{h/2} \partial_1 \partial_2 K_1 \sin \frac{2\pi i z}{h} dz + \frac{2(\gamma - 1)\pi i}{G h^2} \times \\
& \times \int_{-h/2}^{h/2} \partial_2 K_3 \cos \frac{2\pi i z}{h} dz + \frac{B}{G h} \left(\Delta_1 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} \partial_2 \tau \sin \frac{2\pi i z}{h} dz \left. \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{ic} = & -\frac{6 \cos \pi i}{\pi^2 i^2} W_2 - \frac{2}{\gamma h \left(\Delta_1 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) \left(\Delta_2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right)} \left\{ 2 \cos \pi i \left(\gamma \Delta_2 + \frac{4\gamma_2 \pi^2 i^2}{h^2} \right) \times \right. \\
& \times (\partial_1 U_1 + \partial_2 V_1) + \frac{1}{G} \left(\gamma \Delta_2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) \cos \pi i (Z^+ + Z^-) - \frac{2(\gamma - 1)\pi i}{G h} \times \\
& \times \int_{-h/2}^{h/2} (\partial_1 K_1 + \partial_2 K_2) \sin \frac{2\pi i z}{h} dz + \frac{1}{G} \left(\gamma \Delta_2 - \frac{4\gamma \pi^2 i^2}{h^2} \right) \times \\
& \times \int_{-h/2}^{h/2} K_3 \cos \frac{2\pi i z}{h} dz - \frac{2B\pi i}{G} \left(\Delta_1 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} \tau \sin \frac{2\pi i z}{h} dz \left. \right\}.
\end{aligned}$$

В дальнейшем нам понадобятся для операторных решений суммы:

$$\sum_{i=1}^{\infty} U_{ic} \cos \frac{2\pi iz}{h}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} V_{ic} \cos \frac{2\pi iz}{h}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} W_{is} \sin \frac{2\pi iz}{h},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} U_{is} \sin \frac{2\pi iz}{h}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} V_{is} \sin \frac{2\pi iz}{h}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} W_{ic} \cos \frac{2\pi iz}{h}.$$

Для их вычисления используем известные формулы суммирования:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{6 \cos \pi i}{\pi^2 i^2} \cos \frac{2\pi iz}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{12z^2}{h^2} - 1 \right), \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos \pi i}{\pi i} \sin \frac{2\pi iz}{h} = -\frac{z}{h},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos \pi i \cos \frac{2\pi iz}{h}}{\alpha^2 - i^2} = -\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\pi \cos \frac{2\pi \alpha z}{h}}{2\alpha \sin \pi \alpha},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos \pi i \cos \frac{2\pi iz}{h}}{(\alpha^2 - i^2)^2} = -\frac{1}{2\alpha^4} + \frac{\pi^2 z \sin \frac{2\pi iz}{h}}{2\alpha^2 h \sin \pi \alpha} + \frac{\pi \cos \frac{2\pi \alpha z}{h}}{4\alpha^3 \sin \pi \alpha} +$$

$$+ \frac{\pi^2 \cos \pi \alpha \cos \frac{2\pi \alpha z}{h}}{4\alpha^2 \sin^2 \pi \alpha}.$$

В результате применения последних сумм находим:

$$u_c = \frac{1}{\gamma a} \left(\frac{(\Delta + \Delta_1) \cos z \sqrt{\Delta_2}}{\sqrt{\Delta_2} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} - \frac{2\sqrt{\Delta_1} \cos z \sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1}} \right) \partial_1 W_1 + u_c^*,$$

$$\begin{aligned}
v_c &= \frac{1}{\gamma a} \left(\frac{(\Delta + \Delta_1) \cos z\sqrt{\Delta_2}}{\sqrt{\Delta_2} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} - \frac{2\sqrt{\Delta_1} \cos z\sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1}} \right) \partial_2 W_1 + v_c^*, \\
w_s &= \frac{1}{\gamma a} \left(\frac{2\Delta \sin z\sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1}} - \frac{(\Delta + \Delta_1) \sin z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} \right) W_1 + w_s^*, \\
u_s &= \frac{1}{\gamma a} \left(\frac{2\partial_1^2 \sin z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} - \frac{(2\partial_1^2 - \gamma a) \sin z\sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1}} \right) U_1 + \\
&\quad + \frac{2}{\gamma a} \left(\frac{\sin z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} - \frac{\sin z\sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1}} \right) \partial_1 \partial_2 V_1 + u_s^*, \\
v_s &= \frac{1}{\gamma a} \left(\frac{2\partial_2^2 \sin z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} - \frac{(2\partial_2^2 - \gamma a) \sin z\sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1}} \right) V_1 + \\
&\quad + \frac{2}{\gamma a} \left(\frac{\sin z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} - \frac{\sin z\sqrt{\Delta_1}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1}} \right) \partial_1 \partial_2 U_1 + v_s^*, \\
w_c &= \frac{1}{\gamma a} \left(\frac{2\sqrt{\Delta_2} \cos z\sqrt{\Delta_2}}{\sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_2}} - \frac{(\Delta + \Delta_1) \cos z\sqrt{\Delta_1}}{\sqrt{\Delta_1} \sin \frac{h}{2} \sqrt{\Delta_1}} \right) (\partial_1 U_1 + \partial_2 V_1) + w_c^*,
\end{aligned}$$

где u_c^* , u_s^* , v_c^* , v_s^* , w_c^* , w_s^* – четные и нечетные решения, соответствующие объемной, температурной и поверхностной нагрузке.

2.5. Применение вариационного уравнения равновесия элементарного столбика к построению приближенной теории пластин

2.5.1. Построение уточненной теории трансверсально-изотропных пластин на основе выполнения краевых условий на торцах пластинки

Как известно, в настоящее время ведутся интенсивные поиски в создании уточненной теории пластин и оболочек. Так, в работе [11] дано уточнение за счет поперечных сдвигов и нормального напряжения σ_z , в докладе [47] рассказывается о построении внутренне непротиворечивой теории оболочек за счет рассмотрения уравновешенной системы поперечных пар. В работе [55] рассматривается изгиб пластин без привлечения гипотез Кирхгофа. При этом используются вариационное уравнение Лагранжа и метод неопределенных множителей. Известна также работа [65], в которой дифференциальные уравнения изгиба и растяжения плиты получаются путем интегрирования вариаций потенциальной энергии плиты по ее толщине и введения полимоментных характеристик.

Предлагаемая теория трансверсально-изотропных пластин для перехода от трехмерной задачи теории упругости к двумерной использует рассмотренный в работе [91] вариант вариационного уравнения Лагранжа в форме уравнения равновесия элементарного столбика [12]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_h} \int (i \cdot T) \delta \bar{u} dz + \frac{\partial}{\partial y_h} \int (j \cdot T) \delta \bar{u} dz - \int_h T \cdot \delta E dz + \\ + \int_h \left(\bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \delta \bar{u} dz + \bar{F}_n \cdot \delta \bar{u} \Big|_s = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

При этом точно выполняются все краевые условия на торцах и приближенно внутри и на боковой поверхности пластинки, причем указанная приближенность тем точнее, чем больше сохранено членов ряда, в виде которого ищется решение.

Пусть дана пластинка постоянной толщины. На торцах пластинки должны быть выполнены следующие статические условия:

$$\text{при } z = \pm h/2, \sigma_z = \pm Z^-, \tau_{xz} = \pm X^+, \tau_{yz} = \pm Y^-. \quad (2.16)$$

Для решения задачи представим искомые перемещения в виде конечных сумм по полиномам Лежандра:

$$u = \sum_{i=0}^m U_i(x, y) P_i\left(\frac{2z}{h}\right), \quad v = \sum_{k=0}^n V_k(x, y) P_k\left(\frac{2z}{h}\right), \quad (2.17)$$

$$w = \sum_{h_1=0}^l W_{h_1}(x, y) P_{h_1}\left(\frac{2z}{h}\right).$$

Как видно, число всех обобщенных координат U_i, V_k, W_h равно $p = m + n + l + 3$. Однако введенные обобщенные перемещения должны удовлетворять шести уравнениям связей (2.16), которые запишем в развернутом виде:

$$\frac{2C_{33}}{h} \sum_{h_1=0}^l W_{h_1}(x, y) P'_{h_1}(\pm 1) + C_{13} \left(\sum_{i=0}^m \partial_1 U_i(x, y) (\pm 1)^i + \sum_{k=0}^n \partial_2 V_k(x, y) (\pm 1)^k \right) = \pm Z^\pm,$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{2C_{44}}{h} \sum_{i=1}^m U_i(x, y) P_i(\pm 1) + C_{44} \sum_{h_1=0}^l \partial_1 W_{h_1}(x, y) (\pm 1)^{h_1} = \pm X^\pm, \quad (2.18)$$

$$\frac{2C_{44}}{h} \sum_{k=0}^n V_k(x, y) P'_k(\pm 1) + C_{44} \sum_{h_1=0}^l \partial_2 W_{h_1}(x, y) (\pm 1)^{h_1} = \pm Y^\pm.$$

Поэтому число независимых обобщенных координат равно $p = m + n + l + 3$. Итак, для определения $m + n + l + 3$ обобщенных перемещений (2.17) имеем $m + n + l - 3$ уравнений, получаемых из вариационного уравнения (2.15) и шесть уравнений связей (2.18).

Выясним теперь характер независимых возможных перемещений. Для определенности будем считать $U_1, U_2, V_1, V_2, W_1, W_2$ зависимыми от всех остальных обобщенных координат. Тогда вариации возможных перемещений вычисляются по формулам:

$$\varphi_j = \frac{\delta u}{\delta U_j} = P_j + \frac{\delta U_1}{\delta U_j} P_1 + \frac{\delta U_2}{\delta U_j} P_2,$$

$$\psi_g = \frac{\delta v}{\delta V_g} = P_g + \frac{\delta V_1}{\delta V_g} P_1 + \frac{\delta V_2}{\delta V_g} P_2,$$

$$f_d = \frac{\delta w}{\delta W_d} = P_d + \frac{\delta W_1}{\delta W_d} P_1 + \frac{\delta W_2}{\delta W_d} P_2.$$

Производные

$$\frac{\delta U_1}{\delta U_j}, \frac{\delta U_2}{\delta U_j}, \frac{\delta V_1}{\delta V_g}, \frac{\delta V_2}{\delta V_g}, \frac{\delta W_1}{\delta W_d}, \frac{\delta W_2}{\delta W_d}$$

находятся из условий (2.18):

$$\frac{\delta U_1}{\delta U_j} = -\frac{1}{2}(P'_j(1) + P'_j(-1)), \quad \frac{\delta U_2}{\delta U_j} = -\frac{1}{6}(P'_j(1) - P'_j(-1)),$$

$$\frac{\delta V_1}{\delta V_g} = -\frac{1}{2}(P'_g(1) + P'_g(-1)), \quad \frac{\delta V_2}{\delta V_g} = -\frac{1}{6}(P'_g(1) - P'_g(-1)),$$

$$\frac{\delta W_1}{\delta W_d} = -\frac{1}{2}(P'_d(1) + P'_d(-1)), \quad \frac{\delta W_2}{\delta W_d} = -\frac{1}{6}(P'_d(1) - P'_d(-1)).$$

Какое наименьшее число членов ряда нужно взять, чтобы построить достаточно полную теорию пластин? Если взять по два члена, то получим шесть обобщенных перемещений, с помощью которых можно удовлетворить только статическим условиям на торцах пластин. При трех слагаемых в разложениях (2.17) будем иметь девять обобщенных координат, которые позволяют удовлетворить всем условиям на поверхности и в среднем внутри объема пластинки.

Однако при девяти обобщенных координатах все три независимые возможные перемещения являются постоянными величинами $\varphi_0 = \psi_0 = f_0 = 1$. Следовательно, работа внутренних сил будет совершаться только на постоянных по толщине возможных перемещениях, что справедливо при безмоментном состоянии пластинки. При четырех слагаемых получаем 12 обобщенных координат, которые позволяют построить шесть независимых возможных перемещений:

$$\varphi_0 = \psi_0 = f_0 = 1, \quad \varphi_3 = \psi_3 = f_3 = \frac{20z^3}{h^3} - \frac{15z}{h}, \quad (2.19)$$

учитывающих работу как постоянных по толщине усилий, так и переменных.

Итак, в качестве первого приближения возьмем

$$\begin{aligned} u &= U_0 + \frac{2z}{h}U_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{12z^2}{h^2} - 1\right)U_2 + \left(\frac{20z^3}{h^3} - \frac{3z}{h}\right)U_3, \\ v &= V_0 + \frac{2z}{h}V_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{12z^2}{h^2} - 1\right)V_2 + \left(\frac{20z^3}{h^3} - \frac{3z}{h}\right)V_3, \\ w &= W_0 + \frac{2z}{h}W_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{12z^2}{h^2} - 1\right)W_2 + \left(\frac{20z^3}{h^3} - \frac{3z}{h}\right)W_3. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Раскрывая вариационное уравнение (2.15) для разложений (2.20) и вариаций (2.19), получим шесть уравнений внутри равновесия изотропной пластинки (объемными силами пренебрегаем):

$$\begin{aligned}
1. & h[\gamma\Delta - (\gamma-1)\partial_2^2]U_0 + (\gamma-1)h\partial_1\partial_2V_0 + 2\gamma_2\partial_1(W_1 + W_3) + \frac{X^+ + X^-}{G} = 0, \\
2. & h(\gamma-1)\partial_1\partial_2U_0 + h[\gamma\Delta - (\gamma-1)\partial_1^2]V_0 + 2\gamma_2\partial_2(W_1 + W_3) + \frac{Y^+ + Y^-}{G} = 0, \\
3. & 2[\partial_1(U_1 + U_3) + \partial_2(V_1 + V_3)] + h\Delta W_0 + \frac{Z^+ + Z^-}{G} = 0; \\
4. & -2h\left[\gamma\Delta - (\gamma-1)\partial_2^2 - \frac{10}{h^2}\right]U_1 + \frac{h}{7}[\gamma\Delta - (\gamma-1)\partial_2^2]U_3 - 2(\gamma-1)h\partial_1\partial_2V_1 + \\
& + \frac{h}{7}(\gamma-1)\partial_1\partial_2V_3 + 2\partial_1[5W_0 - (6\gamma_2 + 1)W_2] - \frac{5}{G}(X^+ - X^-) = 0; \\
5. & -2(\gamma-1)h\partial_1\partial_2U_1 + \frac{h}{7}(\gamma-1)\partial_1\partial_2U_3 - 2h\left[\gamma\Delta - (\gamma-1)\partial_1^2 - \frac{10}{h^2}\right]V_1 + \\
& + \frac{h}{7}[\gamma\Delta - (\gamma-1)\partial_1^2]V_3 + 2\partial_2[5W_0 - (6\gamma_2 + 1)W_2] - \frac{5}{G}(Y^+ - Y^-) = 0;
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
6. & 10\gamma_2(\partial_1U_0 + \partial_2V_0) - 2(\gamma_2 + 6)(\partial_1U_2 + \partial_2V_2) - \\
& 2h\left(\Delta - \frac{10\gamma}{h^2}\right)W_1 + \frac{h\Delta W_3}{7} - \frac{5(Z^+ - Z^-)}{G} = 0, \\
& \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}, \quad \gamma_2 = \gamma - 2
\end{aligned}$$

и шесть уравнений равновесия на торцах пластинки, которые после разделения нагрузки на симметричную и кососимметричную (см., например, работу [145]) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
7. & \frac{2}{h}(U_1 + 6U_3) + \partial_1(W_0 + W_2) = \frac{1}{2G}(X^+ - X^-); \\
8. & \frac{6}{h}U_2 + \partial_1(W_1 + W_3) = \frac{1}{2G}(X^+ + X^-); \\
9. & \frac{2}{h}(V_1 + 6V_3) + \partial_2(W_0 + W_2) = \frac{1}{2G}(Y^+ - Y^-);
\end{aligned} \tag{2.22}$$

10. $\frac{6}{h}V_2 + \partial_2(W_1 + W_3) = \frac{1}{2G}(Y^+ + Y^-)$;
11. $\gamma_2[\partial_1(U_0 + U_2) + \partial_2(V_0 + V_2)] + \frac{2\gamma}{h}(W_1 + 6W_3) = \frac{1}{2G}(Z^+ - Z^-)$;
12. $\gamma_2[\partial_1(U_1 + U_3) + \partial_2(V_1 + V_3)] + \frac{6\gamma}{h}W_2 = \frac{1}{2G}(Z^+ + Z^-)$.

Как и следовало ожидать, имеем две независимые друг от друга системы дифференциальных уравнений. Первая система уравнений 1, 2, 6, 8, 10, 11 определяет обобщенные перемещения $U_0, V_0, U_2, V_2, W_1, W_3$, характеризующие растяжение (сжатие) пластинки (задача А), а вторая система 3, 4, 5, 7, 9, 12 определяет изгиб пластинки (задача Б) [145]. После некоторых выкладок для задачи А получим

$$\Delta\Delta W_3 - \frac{48(\gamma-1)}{\gamma\gamma_2 h^2}\Delta W_3 + \frac{28 \cdot 96(\gamma-1)}{\gamma_2 h^4}W_3 = \frac{14\Delta(Z^+ - Z^-)}{5Gh} - \left(\frac{(3\gamma-4)28}{5\gamma_2 Gh^2} - \frac{7\Delta}{15G} \right) (\partial_1(X^+ + X^-) + \partial_2(Y^+ + Y^-)). \quad (2.23)$$

Перемещения W_1, U_0, V_0 находятся из соотношений

$$\Delta W_1 = -\left(1 + \frac{15}{14\gamma_2}\right)\Delta W_3 + \frac{60\gamma}{\gamma_2 h^2}W_3 + \frac{(\gamma-1)}{2\gamma_2 G}(\partial_1(X^+ + X^-) + \partial_2(Y^+ + Y^-));$$

$$\Delta(\partial_2 U_0 - \partial_1 V_0) = -\frac{1}{Gh}(\partial_2(X^+ + X^-) - \partial_1(Y^+ + Y^-)); \quad (2.24)$$

$$\partial_1 U_0 + \partial_2 V_0 = \frac{h}{6}\Delta(W_1 + W_3) - \frac{2\gamma}{\gamma_2 h}(W_1 + W_3) - \frac{10\gamma}{\gamma_2 h}W_3 + \frac{Z^+ - Z^-}{2\gamma G} - \frac{h}{12G}(\partial_1(X^+ + X^-) + \partial_2(Y^+ + Y^-)).$$

Перемещения U_2 и V_2 определяются из уравнений 8 и 10. Для задачи Б имеем

$$\begin{aligned} \Delta\Delta W_0 - \frac{224(\gamma-1)}{\gamma\gamma_2 h^2} \Delta W_0 &= \frac{672}{\gamma_2 G h^5} (Z^+ + Z^-) + \\ + \frac{4(3\gamma^2 + 42\gamma - 28)}{\gamma\gamma_2 G h^3} \Delta(Z^+ + Z^-) - \frac{(\gamma-1)}{\gamma_2 G h} \Delta\Delta(Z^+ + Z^-) &+ (2.25) \\ + \left(\frac{336}{\gamma G h^4} + \frac{6\gamma\Delta}{\gamma_2 G h^2} \right) &\left(\partial_1(X^+ - X^-) + \partial_2(Y^+ - Y^-) \right) \end{aligned}$$

Перемещения W_2 , U_3 и V_3 определяются из соотношений

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{\gamma_2 h^2}{12\gamma} \Delta W_0 + \frac{(\gamma-1)h}{12\gamma G} (Z^+ + Z^-), \\ \partial_1 U_3 + \partial_2 V_3 &= -\frac{h}{10} \Delta W_2 + \frac{1}{10G} (Z^+ + Z^-) + \\ + \frac{h}{20G} &\left(\partial_1(X^+ - X^-) + \partial_2(Y^+ - Y^-) \right), \\ \left(\frac{85h}{7} \Delta - \frac{120}{h} \right) &\left(\partial_2 U_3 - \partial_1 V_3 \right) = \frac{h^2}{2G} \left(\partial_2(X^+ - X^-) - \partial_1(Y^+ - Y^-) \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Перемещения U_1 и V_1 находятся из уравнений и (2.22).

В случае трансверсально-изотропной пластины уравнения (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) принимают следующий вид [12]

Задача А

$$\begin{aligned} \left(\frac{5h^2}{28} C_{13} C_{11} C_{44} \Delta^2 - \frac{15}{7} C_{44} (C_{11} C_{33} - C_{13}^2) \Delta + \frac{120}{h^2} (C_{11} C_{33} - C_{13}^2) \right) W_3 &= \\ = \frac{h}{2} C_{11} C_{13} (Z^+ - Z^-) + \left(\left(\frac{C_{13} + C_{44}}{C_{44}} (C_{13}^2 - C_{11} C_{33}) + C_{13}^2 + \frac{h^2}{12} C_{11} C_{13} \Delta \right) \right) &\times \\ \times \left(\partial_1(X^+ + X^-) + \partial_2(Y^+ + Y^-) \right), \end{aligned}$$

$$\Delta W_1 = -\left(\frac{15}{14} \frac{C_{44}}{C_{13}} + 1\right) \Delta W_3 + \frac{60 C_{33} W_3}{h^2 C_{13}} + \frac{C_{13} + C_{44}}{2 C_{13} C_{44}} \left(\partial_1 (X^+ + X^-) + \partial_2 (Y^+ + Y^-)\right),$$

$$\Delta(\partial_2 U_0 - \partial_1 V_0) = -\frac{2}{(C_{11} - C_{12})h} \left(\partial_2 (X^+ + X^-) - \partial_1 (Y^+ + Y^-)\right),$$

$$\partial_1 U_0 + \partial_2 V_0 = \frac{h}{6} \Delta(W_1 + W_3) - \frac{2 C_{33}}{h C_{13}} (W_1 + W_3) - \frac{10 C_{33}}{h C_{13}} W_3 + \frac{1}{2 C_{13}} (Z^+ - Z^-) - \frac{h}{12 C_{44}} \left(\partial_1 (X^+ + X^-) + \partial_2 (Y^+ + Y^-)\right),$$

Задача Б

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \Delta W_0 - \frac{56(C_{11} C_{33} - C_{13}^2)}{C_{11} C_{33} h^2} \Delta \Delta W_0 = & -\frac{336 C_{11} (\partial_1 (X^+ - X^-) + \partial_2 (Y^+ - Y^-))}{C_{11} C_{13} C_{44} h^2} - \\ & - \frac{672 C_{33} (Z^+ + Z^-)}{C_{11} C_{13} h^5} - \frac{4(3 C_{11} C_{13} + 14(C_{11} C_{33} - C_{13}^2) - C_{13} C_{44})}{C_{11} C_{13} C_{44} h^3} \Delta (Z^+ + Z^-) - \\ & - \frac{C_{13} + C_{44}}{C_{13} C_{44} h} \Delta \Delta (Z^+ + Z^-) + \frac{6 C_{13} \Delta}{C_{13} C_{44} h^2} \left(\partial_1 (X^+ - X^-) + \partial_2 (Y^+ - Y^-)\right), \end{aligned}$$

$$W_2 = \frac{h^2}{12} \frac{C_{13}}{C_{33}} \Delta W_0 + \frac{h(C_{13} + C_{44})}{12 C_{33} C_{44}} (Z^+ + Z^-),$$

$$\begin{aligned} \partial_1 U_3 + \partial_2 V_3 = & -\frac{h}{10} \Delta W_2 + \frac{h}{20 C_{44}} \times \\ & \times \left(\partial_1 (X^+ - X^-) + \partial_2 (Y^+ - Y^-)\right) + \frac{Z^+ + Z^-}{10 C_{44}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{85}{14} h (C_{11} - C_{12}) \Delta - \frac{120 C_{44}}{h} \right) (\partial_2 U_3 - \partial_1 V_3) = \\ & = \frac{h^2 (C_{11} - C_{12}) \Delta}{4 C_{44}} (\partial_2 (X^+ - X^-) - \partial_1 (Y^+ - Y^-)), \end{aligned}$$

где C_{11} , C_{13} , C_{33} , C_{12} , C_{44} – упругие постоянные.

2.5.2. Равновесие круглой изотропной пластинки с защемленными краями и нагруженной по верхнему торцу постоянной нагрузкой

В качестве примера рассмотрим круглую изотропную сплошную пластинку с защемленными краями, нагруженную по верхнему торцу постоянной нагрузкой интенсивностью q .

В нашем случае разложения (2.20) запишутся

$$u = U_0(r) + \frac{2z}{h} U_1(r) + \frac{1}{2} \left(\frac{12z^2}{h^2} - 1 \right) U_2(r) + \left(\frac{20z^3}{h^3} - \frac{3z}{h} \right) U_3(r),$$

$$v = 0,$$

$$w = W_0(r) + \frac{2z}{h} W_1(r) + \frac{1}{2} \left(\frac{12z^2}{h^2} - 1 \right) W_2(r) + \left(\frac{20z^3}{h^3} - \frac{3z}{h} \right) W_3(r).$$

Решение системы уравнений задачи А и Б дает, например, для

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{\gamma B_1}{\gamma_2 k_1} \left(\frac{15}{7\gamma_2 h} + \frac{5k_1^2 h}{28\gamma} + \frac{120}{\gamma_2 k_1^3 h^3} \right) J_1(k_1 r) + \\ &+ \frac{\gamma B_2}{\gamma_2 k_2} \left(\frac{15}{7\gamma_2 h} + \frac{5k_2^2 h}{28\gamma} + \frac{120}{\gamma_2 k_2^3 h^3} \right) \cdot J_1(k_2 r) - \frac{\gamma B_3 r}{\gamma_2 h} + \frac{qr}{4\gamma_2 G}, \\ U_2 &= -\frac{5B_1(56\gamma + k_1^2 h^2)}{28\gamma_2 h k_1} J_1(k_1 r) - \frac{5B_2(56\gamma + k_2^2 h^2)}{28\gamma_2 h k_2} J_1(k_2 r), \end{aligned}$$

$$W_1 = -\frac{B_1}{\gamma_2} \left(\frac{60\gamma}{k_1^2 h^2} + \gamma_2 + \frac{15}{14} \right) J_0(k_1 r) - \frac{B_2}{\gamma_2} \left(\frac{60\gamma}{k_2^2 h^2} + \gamma_2 + \frac{15}{14} \right) J_0(k_2 r) + B_3,$$

$$U_1 = \frac{iC_1 kh}{2} \left(1 - \frac{56(\gamma-1)}{15\gamma^2} \right) J_1(ikr) - C_2 hr - \frac{3\gamma qr^3}{32(\gamma-1)Gh^2} + \frac{\gamma_2 qr}{80(\gamma-1)G} - \frac{3qr}{10G},$$

$$U_3 = \frac{28(\gamma-1)iC_1 kh}{15\gamma^2} J_1(ikr) + \frac{(3\gamma-2)qr}{80(\gamma-1)G},$$

$$W_0 = C_1 J_0(ikr) + C_2 r^2 + C_3 + \frac{3\gamma qr^4}{64(\gamma-1)Gh^3},$$

$$W_2 = C_1 \frac{56(\gamma-1)}{3\gamma^2} J_0(ikr) + C_2 \gamma_2 \frac{h^2}{3\gamma} + \frac{\gamma_2 qr^2}{16(\gamma-1)Gh} + \frac{(\gamma-1)qh}{12\gamma G},$$

$$k^2 = \frac{224(\gamma-1)}{\gamma\gamma_2 h^2}, \quad k_1^2 = \frac{24(\gamma-1)}{\gamma\gamma_2 h^2} \left(\sqrt{1 - \frac{14\gamma^2 \gamma_2}{3(\gamma-1)}} - 1 \right),$$

$$k_2^2 = -\frac{24(\gamma-1)}{\gamma\gamma_2 h^2} \left(\sqrt{1 - \frac{14\gamma^2 \gamma_2}{3(\gamma-1)}} + 1 \right).$$

Для определения произвольных постоянных введем следующие краевые условия для задачи А: $r = R$, $U = 0$ ($U_0 = U_2 = 0$), $\tau_{rz} = 0$, для задачи Б: $r = R$, $U = 0$ ($U_1 = U_3 = 0$). Кроме того, при $r = R$, $z = z_0$ общее перемещение W полагаем равным нулю. Данные краевые условия в геометрическом смысле означают такую связь, при которой края пластинки находятся в абсолютно жестких вертикальных направляющих, препятствующих тангенциальному перемещению, причем контурная окружность неподвижна.

Для введенных краевых условий получаем следующие значения постоянных интегрирования:

$$B_1 = B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{qh}{4\gamma G}, \quad C_1 = -\frac{3\gamma^2(3\gamma-2)qR}{448(\gamma-1)^2 Gh J_1(ikR)},$$

$$C_2 = -\left(\frac{3\gamma^2(3\gamma-2)q}{896(\gamma-1)^2 Gh} + \frac{q}{4Gh} + \frac{3\gamma qR^2}{32(\gamma-1)Gh^3} \right),$$

$$C_3 = \frac{3\gamma^2(3\gamma-2)qR J_0(ikR)}{448ik(\gamma-1)^2 Gh J_1(ikR)} + \frac{3\gamma qR^4}{64(\gamma-1)Gh^3} + \frac{3\gamma^2(3\gamma-2)qR^2}{896(\gamma-1)^2 Gh} + \frac{qR^2}{4Gh} - \frac{qz_0}{2\gamma G} - \frac{1}{2} \left(\frac{12z^2}{h^2} - 1 \right) \left(\frac{qh}{12\gamma G} + \frac{\gamma_2 qR^2}{32(\gamma-1)Gh} - \frac{(3\gamma-2)qR J_0(ikR)}{8ik(\gamma-1)Gh J_1(ikR)} \right).$$

При данных постоянных интегрирования перемещение W равно

$$w = \frac{3\gamma^2(3\gamma-2)qR(J_0(ikR) - J_0(ikr))}{448ik(\gamma-1)^2 Gh J_1(ikR)} + \frac{q(R^2 - r^2)}{4Gh} + \frac{3\gamma^2(3\gamma-2)q(R^2 - r^2)}{896(\gamma-1)^2 Gh} + \frac{q(z - z_0)}{2\gamma G} + \frac{3\gamma q(R^2 - r^2)^2}{64(\gamma-1)Gh^3} - \frac{1}{2} \left(\frac{12z^2}{h^2} - 1 \right) \frac{(3\gamma-2)qR J_0(ikR)}{8ik(\gamma-1)Gh J_1(ikR)} + \frac{1}{2} \left(\frac{12z^2}{h^2} - 1 \right) \left(\frac{qh}{12\gamma G} + \frac{\gamma_2 qR^2}{16(\gamma-1)Gh} - \frac{\gamma_2 qR^2}{32(\gamma-1)Gh} - \frac{\gamma\gamma_2(3\gamma-2)qh}{896(\gamma-1)^2 G} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{12z_0^2}{h^2} - 1 \right) \left(\frac{qh}{12\gamma G} + \frac{\gamma_2 qR^2}{32(\gamma-1)Gh} - \frac{\gamma\gamma_2(3\gamma-2)qh}{896(\gamma-1)^2 G} - \frac{(3\gamma-2)qR J_0(ikR)}{8ik(\gamma-1)Gh J_1(ikR)} \right).$$

Прогиб пластинки при $z = 0$ в центре $r = 0$, если она закреплена вдоль окружности $z_0 = 0$, равен

$$W_0 = \frac{(3\gamma-2)(3\gamma^2 - 28\gamma + 28)qR(J_0(ikR) - 1)}{448ik(\gamma-1)^2 Gh J_1(ikR)} + \frac{3\gamma qR^4}{64(\gamma-1)Gh^3} + \frac{qR^2}{Gh} \left(\frac{3\gamma^2(3\gamma-2)}{896(\gamma-1)^2} + \frac{1}{4} + \frac{\gamma_2}{32(\gamma-1)} \right).$$

Прогиб пластинки по классической теории равен $W_k = \frac{qR^4}{64D}$,

$$\text{где } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{(\gamma-1)Gh^3}{3\gamma}.$$

Отношение $\frac{W_0}{W_k}$ в центре пластинки составляет

$$\begin{aligned} \frac{W_0}{W_k} = 1 + \frac{h^2}{R^2} \left(\frac{\gamma(3\gamma-2)}{14(\gamma-1)} + \frac{16(\gamma-1)}{3\gamma} + \frac{2\gamma_2}{3\gamma} \right) + \\ + \frac{h^3}{R^3} \frac{(3\gamma^2 - 28\gamma + 28)(J_0(ikR) - 1)}{21ik\gamma(\gamma-1)J_1(ikR)}. \end{aligned}$$

При $h/R \rightarrow 0$ имеем $\lim W_0/W_k = 1$. Это означает, что результаты классической теории совпадают с результатами предлагаемой теории пластин при достаточно малом отношении h/R . Чем больше отношение h/R , тем сильнее расхождение. Так, при $h/R = 1/5$ $\nu = 0,25$, $W_0/W_k = 1,188$, т.е. прогиб увеличивается на 18,8 процента, что соответствует прогибу по теории толстых плит. Таким образом, предлагаемая теория пластин точнее классической и свободна от присущих ей внутренних противоречий. Данная теория удовлетворяет всем физическим граничным условиям на торцах пластинки и учитывает влияние на деформированное состояние как касательных усилий, так и нормальных напряжений. По сравнению с уточненной теорией расчета пластин [11] данная теория учитывает нормальные перемещения, постоянные и переменные по толщине пластинки.

В работе [11] нормальные перемещения предполагаются постоянными по толщине. Следует указать, что нормальные напряжения σ_z в работе [11] найдены из уравнения равновесия внутри объема. Если попытаться вычислить напряжения по формуле обобщенного закона Гука, то получим совершенно другие результаты. В этом состоит противоречие теории пластин, рассмотренной в работе [11].

В заключение отметим, что для построения точного решения задачи необходимо выполнять все краевые условия, в том числе и есте-

ственные (статические) для уравнения Лагранжа. Легко проверить, что естественные условия не всегда будут выполнены в строгом смысле только лишь за счет увеличения вариационных уравнений.

Так, если не привлекать уравнения статических связей, а строить лишь вариационные уравнения за счет всех членов ряда аппроксимирующих функций (2.1), в том числе и за счет полиномов Лежандра, то разрешающие уравнения будут отличны от вышеприведенных. В частности, если осуществить понижение мерности задачи растяжения (сжатия) за счет вариационных уравнений без привлечения связей, то получим систему линейно зависимых дифференциальных уравнений. Оказывается, что вариационные уравнения на

возможных перемещениях $\cos \frac{2\pi iz}{h}$ (при $i \rightarrow \infty$) и $\frac{1}{2} \left(\frac{12z^2}{h^2} - 1 \right)$

получаются тождественными. Следовательно, при невыполнении естественных условий с увеличением числа вариационных уравнений результаты решения могут не улучшаться, а ухудшаться.

Глава 3. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ О РАВНОВЕСИИ УПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ В НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДАХ

Несмотря на то, что прошло более 170 лет с того времени, как были выведены основные уравнения классической теории упругости, все попытки крупнейших математиков мира решить основные краевые задачи теории упругости в замкнутом виде для простейших тел и фигур, как, например, для прямоугольника, конечного цилиндра и параллелепипеда, не привели к успеху. Разработаны различные приближенные методы решения: вариационные методы [17, 45, 87, 166], методы конечных разностей (элементов) [18, 42, 179, 183], методы однородных решений [58, 168, 188] и другие методы приведения к бесконечной системе алгебраических уравнений [3, 4, 10, 23–25, 39–41, 49, 63, 64].

В чем трудности получения замкнутого решения? Трудности заключаются в том, что решения этих задач строятся в рядах по собственным неортогональным функциям, а в математике неизвестен алгоритм разложения функции в неортогональный ряд, за исключением разложения в простейший степенной ряд и некоторые другие

частные ряды. Основные усилия математиков в настоящее время сосредоточены на том, чтобы ортогонализировать эти ряды, найти такую обобщенную ортогональность, которая позволила бы найти любой член разложения в замкнутом виде. Попытки найти такую обобщенную ортогональность можно найти в многочисленных работах [37, 81, 192].

Однако, за исключением некоторых частных случаев краевых задач (согласованные краевые условия) [38, 157], эти попытки не увенчались успехом. По-видимому, не существует обобщенная ортогональность для бигармонических функций. Нужны другие пути решения бигармонической проблемы, например, получение таких функциональных уравнений, которые бы эффективно и с малыми вычислительными трудностями решали краевые задачи теории упругости.

3.1. Функциональные ряды в задачах теории упругости. Упругий параллелепипед и цилиндр. Статические задачи

Приведенные в предыдущей главе дифференциальные уравнения в операторной форме, как мы увидим, позволили выполнить краевые условия на торцах цилиндрического тела $z = \pm h/2$ и имеют мерность на единицу меньше, чем уравнения Ляме. Представляя решение этих уравнений в операторном виде, например, в виде

$$W_1 = W_{10} \cos y d_x + \sum_{k=1}^{\infty} W_{1k} \cos y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} \quad (3.1)$$

(λ_k – корни характеристического уравнения), снова понизим мерность задачи на единицу.

Выпишем некоторые операторные решения для упругого параллелепипеда и цилиндра.

3.1.1. На торцах параллелепипеда $z = \pm h/2$ заданы напряжения τ_{xz} , τ_{yz} , σ_z .

Задача А

$$sh\lambda_k h + \lambda_k h = 0.$$

$$\begin{aligned}
u = & - \sum_{k=1}^{\infty} \left(2ch\lambda_k z + (\gamma - 1)\lambda_k \left(2zsh\lambda_k z - hch\lambda_k zcth \frac{\lambda_k h}{2} \right) \right) \frac{d_x W_k}{\lambda_k} \times \\
& \times \cos y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m \cos \frac{2\pi m z}{h} \cos \left(y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 m^2}{h^2}} \right) + (3.2) \\
& + \Phi_0 \cos y d_x + \frac{A}{d_x} + u^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(2ch\lambda_k z + (\gamma - 1)\lambda_k \left(2zsh\lambda_k z - hch\lambda_k zcth \frac{\lambda_k h}{2} \right) \right) \times \\
& \times \frac{W_k}{\lambda_k} \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} \cdot \sin y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} + yB - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m \cos \frac{2\pi m z}{h} \frac{d_x \sin y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2}}{\sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2}} - \Phi_0 \sin y d_x + v^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(2\gamma sh\lambda_k z - (\gamma - 1)\lambda_k \left(2zch\lambda_k z - hsh\lambda_k zcth \frac{\lambda_k h}{2} \right) \right) \times \\
& \times W_k \cos y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} - \frac{\gamma_2}{\gamma} (A + B)z + w^*,
\end{aligned}$$

d_x – производная по "x", u^* , v^* , w^* – частные решения неоднородных уравнений.

Задача Б

$$sh\lambda_k h - \lambda_k h = 0.$$

$$\begin{aligned}
u = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(2\gamma sh\lambda_k z + (\gamma - 1)\lambda_k \left(2zch\lambda_k z - hsh\lambda_k zcth \frac{\lambda_k h}{2} \right) \right) \frac{d_x \Phi_k}{\lambda_k} \times \\
& \times \cos y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m \sin \frac{\pi(2m-1)z}{h} \cos \left(y \cdot \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2m-1)^2}{h^2}} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Phi_{10}}{\gamma-1} d_x z \cos y d_x + \frac{\gamma z}{\gamma-1} d_x \Phi_{11} y \sin y d_x - \\
& - \frac{\Phi_{11}(3\gamma-2)z^3}{3(\gamma-1)} d_x^2 \cos y d_x + \frac{19h^2 z}{24} d_x^2 \Phi_{11} \cos y d_x + u^*, \\
v = & - \sum_{k=1}^{\infty} \left(2\gamma sh\lambda_k z + (\gamma-1)\lambda_k \left(2zch\lambda_k z - hsh\lambda_k zcth \frac{\lambda_k h}{2} \right) \right) \frac{\Phi_k}{\lambda_k} \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} \times \\
& \times \sin y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} - \sum_{m=1}^{\infty} d_x \Phi_m \sin \frac{\pi(2m-1)z}{h} \frac{\sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2m-1)^2}{h^2}}}{\sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2m-1)^2}{h^2}}} - \\
& - \frac{\Phi_{10}}{\gamma-1} d_x z \sin y d_x + \frac{\gamma z}{\gamma-1} \Phi_{11} (\sin y d_x + y d_x \cos y d_x) + \quad (3.3) \\
& + \frac{\Phi_{11} z^3 (3\gamma-2)}{3(\gamma-1)} d_x^2 \sin y d_x - \frac{19h^2 d_x^2}{24} z \Phi_{11} \sin y d_x + v^*, \\
w = & - \sum_{k=1}^{\infty} \left(2ch\lambda_k z - (\gamma-1)\lambda_k \left(2zsh\lambda_k z - hch\lambda_k zcth \frac{\lambda_k h}{2} \right) \right) \times \\
& \times \Phi_k \cos y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} - \frac{\Phi_{10}}{\gamma-1} \cos y d_x - \frac{\gamma \Phi_{11}}{\gamma-1} y \sin y d_x - \\
& - \frac{\gamma z^2 \Phi_{11}}{\gamma-1} d_x \cos y d_x + \frac{5}{24} h^2 d_x \Phi_{11} \cos y d_x + w^*.
\end{aligned}$$

3.1.2. На торцах параллелепипеда $z = \pm h/2$ заданы перемещения u , v и w .

Задача А

$$(\gamma+1)sh\lambda_k h - (\gamma-1)\lambda_k h = 0.$$

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(zsh\lambda_k z - \frac{h}{2} th \frac{\lambda_k h}{2} ch\lambda_k z \right) \frac{d_x \Phi_k}{\lambda_k} \cos y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} + \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m \cos \frac{\pi(2m-1)z}{h} \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2m-1)^2}{h^2}} + u^*, \\
v &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2}}{\lambda_k} \left(zsh\lambda_k z - \frac{h}{2} th \frac{\lambda_k h}{2} ch\lambda_k z \right) \Phi_k \sin y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} - \\
&- \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m \cos \frac{\pi(2m-1)z}{h} \frac{d_x \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2m-1)^2}{h^2}}}{\sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2m-1)^2}{h^2}}} + v^*, \\
w &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(zch\lambda_k z - \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{sh\lambda_k z}{\lambda_k} - \frac{h}{2} sh\lambda_k z th \frac{\lambda_k h}{2} \right) \times \\
&\times \Phi_k \cos y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} + w^*.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Задача Б

$$(\gamma+1)sh\lambda_k h + (\gamma-1)\lambda_k h = 0.$$

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(zch\lambda_k z - \frac{h}{2} sh\lambda_k z th \frac{\lambda_k h}{2} \right) d_x W_k \cos y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} + \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m \sin \frac{2\pi m z}{h} \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 m^2}{h^2}} + u^*,
\end{aligned}$$

$$v = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(zch\lambda_k z - \frac{h}{2} cth \frac{\lambda_k h}{2} sh\lambda_k z \right) W_k \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} \sin y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} - \quad (3.5)$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} d_x \Phi_m \sin \frac{2\pi m z}{h} \frac{\sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 m^2}{h^2}}}{\sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 m^2}{h^2}}} + v^*,$$

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \left(z\lambda_k sh\lambda_k z - \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) ch\lambda_k z - \frac{h}{2} \lambda_k ch\lambda_k z cth \frac{\lambda_k h}{2} \right) \times \\ \times W_k \cos y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} + w^*.$$

3.1.3. На торцах параллелепипеда $z = \pm h/2$ заданы напряжения τ_{xz} , τ_{yz} и перемещения w .

Задача А

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} d_x \Phi_k \frac{y \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}}{\sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}} \cos \frac{2\pi k z}{h} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\pi m}{h} U_m \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 m^2}{h^2}} \cos \frac{2\pi m z}{h} + \Phi_0 \cos y dx, \quad (3.6)$$

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k y \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \cos \frac{2\pi k z}{h} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\pi m}{h} V_m \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 m^2}{h^2}} \cos \frac{2\pi m z}{h} - \Phi_0 \sin y dx,$$

$$\begin{aligned}
w = & - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(\gamma+1)h}{(\gamma-1)2\pi k} \cos \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \frac{2\pi k y \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}}{h \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}} \right) \times \\
& \times \Phi_k \sin \frac{2\pi k z}{h} - \sum_{m=1}^{\infty} \left(d_x U_m + V_m \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 m^2}{h^2}} \right) \times \\
& \times \sin \frac{2\pi m z}{h} \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 m^2}{h^2}}.
\end{aligned}$$

Задача Б

$$\begin{aligned}
u = & \sum_{k=1}^{\infty} d_x \Phi_k \frac{y \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2 (2k-1)^2}{h^2}}}{\sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2 (2k-1)^2}{h^2}}} \sin \frac{\pi(2k-1)z}{h} + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi(2m-1)}{h} U_m \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2 (2m-1)^2}{h^2}} \sin \frac{\pi(2m-1)z}{h}, \\
v = & \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k y \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2 (2k-1)^2}{h^2}} \sin \frac{\pi(2k-1)z}{h} + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi(2m-1)}{h} V_m \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2 (2m-1)^2}{h^2}} \sin \frac{\pi(2m-1)z}{h},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
w = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(\gamma + 1)h \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2k-1)^2}{h^2}}}{(\gamma - 1)\pi(2k-1)} + \right. \\
& \left. + \frac{\pi(2k-1)y \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2k-1)^2}{h^2}}}{h \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2k-1)^2}{h^2}}} \right) \cdot \Phi_k \cos \frac{\pi(2k-1)z}{h} + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left(d_x U_m + V_m \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2m-1)^2}{h^2}} \right) \times \\
& \times \cos \frac{\pi(2m-1)z}{h} \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2m-1)^2}{h^2}}.
\end{aligned}$$

3.1.4. На торцах параллелепипеда $z = \pm h/2$ заданы напряжение σ_z и касательные перемещения u и v .

Задача А

$$\begin{aligned}
u = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi(2k-1)d_x B_k y \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2k-1)^2}{h^2}}}{h \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2k-1)^2}{h^2}}} \cos \frac{\pi(2k-1)z}{h} + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi(2m-1)}{h} D_m \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2m-1)^2}{h^2}} \cos \frac{\pi(2m-1)z}{h},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi(2k-1)}{h} B_k y \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2k-1)^2}{h^2}} \cos \frac{\pi(2k-1)z}{h} + \\
&\quad (3.8) \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi(2m-1)}{h \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2m-1)^2}{h^2}}} E_m \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2m-1)^2}{h^2}} \cos \frac{\pi(2m-1)z}{h}, \\
w &= - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left(\frac{\pi^2(2k-1)^2 y \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2k-1)^2}{h^2}}}{h \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2k-1)^2}{h^2}}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2k-1)^2}{h^2}} \right) \cdot \sin \frac{\pi(2k-1)z}{h} - \\
&- \sum_{m=1}^{\infty} (d_x D_m + E_m) \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2m-1)^2}{h^2}} \sin \frac{\pi(2m-1)z}{h}.
\end{aligned}$$

Задача Б

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi k d_x A_k y \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}}{h \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}} \sin \frac{2\pi k z}{h} + \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\pi m}{h} C_m \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 m^2}{h^2}} \sin \frac{2\pi m z}{h},
\end{aligned}$$

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi k}{h} A_k y \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \sin \frac{2\pi k z}{h} + \quad (3.9)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\pi m B_m \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 m^2}{h^2}} \sin \frac{2\pi m z}{h}}{h \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 m^2}{h^2}}},$$

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{4\pi^2 k^2 y \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}}{h^2 \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}} + \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right) \times$$

$$\times \cos \frac{2\pi k z}{h} + \sum_{m=1}^{\infty} (d_x C_m + B_m) \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 m^2}{h^2}} \cos \frac{2\pi m z}{h}.$$

3.1.5. На торце параллелепипеда $z = 0$ заданы перемещения u , v , w , а на торце параллелепипеда $z = h$ – напряжения τ_{xz} , τ_{yz} , σ_z .
 $(\gamma^2 - 1)ch2\lambda_k h + 2(\gamma - 1)^2 \lambda_k^2 h^2 + \gamma^2 + 1 = 0.$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(\gamma - 1)\lambda_k h ch \lambda_k h + sh \lambda_k h}{\gamma ch \lambda_k h - \lambda_k h(\gamma - 1)sh \lambda_k h} z sh \lambda_k z + \right.$$

$$\left. + \frac{(\gamma + 1)sh \lambda_k z}{(\gamma - 1)\lambda_k} + z ch \lambda_k z \right) d_x \Phi_k \cos y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} F_m \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2 (2m-1)^2}{4h^2}} \sin \frac{\pi(2m-1)z}{2h} + u^*,$$

$$\begin{aligned}
v = & - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(\gamma-1)\lambda_k h c h \lambda_k h + s h \lambda_k h}{\gamma c h \lambda_k h - \lambda_k h (\gamma-1) s h \lambda_k h} z s h \lambda_k z + \right. \\
& \left. + \frac{(\gamma+1) s h \lambda_k z}{(\gamma-1)\lambda_k} + z c h \lambda_k z \right) \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} \sin y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} - (3.10) \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} d_x F_m \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2m-1)^2}{4h^2}} \sin \frac{\pi(2m-1)z}{2h} + v^*, \\
w = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(\gamma-1)\lambda_k h c h \lambda_k h + s h \lambda_k h}{\gamma c h \lambda_k h - \lambda_k h (\gamma-1) s h \lambda_k h} \left(\lambda_k z c h \lambda_k z - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} s h \lambda_k z \right) + \right. \\
& \left. + \lambda_k z s h \lambda_k z \right) \Phi_k \cos y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} + w^*.
\end{aligned}$$

3.1.6. На торце параллелепипеда $z = 0$ заданы перемещения u , v , w , а на торце параллелепипеда $z = h$ – нормальные перемещения w и касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} .

$$(\gamma+1)sh2\lambda_k h - 2(\gamma-1)\lambda_k h = 0.$$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left(z c h \lambda_k z + \frac{(\gamma+1) s h \lambda_k z}{(\gamma-1)\lambda_k} - \frac{(\gamma-1)\lambda_k h s h \lambda_k h z s h \lambda_k z}{\lambda_k h (\gamma-1) c h \lambda_k h - (\gamma+1) s h \lambda_k h} \right) d_x \Phi_k \times \quad (3.11)$$

$$\times \cos y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} + \sum_{m=1}^{\infty} F_m \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2m-1)^2}{4h^2}} \sin \frac{\pi(2m-1)z}{2h},$$

$$\begin{aligned}
v = & - \sum_{k=1}^{\infty} \left(z c h \lambda_k z + \frac{(\gamma+1) s h \lambda_k z}{(\gamma-1)\lambda_k} - \frac{(\gamma-1)\lambda_k h z s h \lambda_k z s h \lambda_k h}{(\gamma-1)\lambda_k h c h \lambda_k h - (\gamma+1) s h \lambda_k h} \right) \times \\
& \times \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} \Phi_k \sin y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_x F_m \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2m-1)^2}{4h^2}}}{\sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2(2m-1)^2}{4h^2}}} \sin \frac{\pi(2m-1)z}{2h},
\end{aligned}$$

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k z sh \lambda_k z - \frac{\lambda_k h sh \lambda_k h ((\gamma - 1) \lambda_k z ch \lambda_k z - (\gamma + 1) sh \lambda_k z)}{(\gamma - 1) \lambda_k h ch \lambda_k h - (\gamma + 1) sh \lambda_k h} \right) \times \\ \times \Phi_k \cos y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2}.$$

3.1.7. На торце параллелепипеда заданы перемещения u , v , w , а на торце параллелепипеда $z = h$ нормальное напряжение σ_z и касательные перемещения u , v .

$$(\gamma + 1) sh 2 \lambda_k h + 2(\gamma - 1) \lambda_k h = 0.$$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left(z ch \lambda_k z - z sh \lambda_k z ch \lambda_k h - \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1) \lambda_k h} (z sh \lambda_k z - h sh \lambda_k z) \right) d_x \Phi_k \times \\ \times \cos y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} + \sum_{m=1}^{\infty} F_m \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2 m^2}{h^2}} \sin \frac{\pi m z}{h}, \quad (3.12)$$

$$v = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(z ch \lambda_k z - z sh \lambda_k z ch \lambda_k h - \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1) \lambda_k h} (z sh \lambda_k z - h sh \lambda_k z) \right) \times \\ \times \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} \Phi_k \sin y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2} - \\ - \sum_{m=1}^{\infty} d_x F_m \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{\pi^2 m^2}{h^2}} \sin \frac{\pi m z}{h},$$

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\lambda_k ch \lambda_k h + \frac{\gamma + 1}{(\gamma - 1) h} \right) \left(\frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} \frac{sh \lambda_k z}{\lambda_k} - z ch \lambda_k z \right) + z \lambda_k sh \lambda_k z \right) \times \\ \times \Phi_k \cos y \sqrt{d_x^2 + \lambda_k^2}.$$

Цилиндр. Статические задачи.

Вследствие неравноправности цилиндрических координат r , θ , z операторные решения для цилиндрических тел могут иметь различные формы в зависимости от того, в какой последовательности про-

изводится понижение мерности задачи. Рассмотрим понижение мерности задачи сначала по координате z , а затем по r .

3.1.8. На торцах цилиндра $z = \pm h/2$, заданы напряжения τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$, σ_z .

Задача А

$$sh\lambda_k h + \lambda_k h = 0.$$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2ch\lambda_k z + (\gamma - 1)\lambda_k \left(2zsh\lambda_k z - hch\lambda_k zcth\frac{\lambda_k h}{2} \right) \right) \times \\ \times W_k \frac{d}{dr} J_{\pm i\partial_\theta}(\lambda_k r) + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m \left(J_{\pm i\partial_\theta+1} \left(\frac{2\pi mir}{h} \right) + J_{\pm i\partial_\theta-1} \left(\frac{2\pi mir}{h} \right) \right) \times \\ \cos \frac{2\pi mz}{h} + \Phi_0 r^{-(\pm i\partial_\theta+1)} + Ar,$$

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2ch\lambda_k z + (\gamma - 1)\lambda_k \left(2zsh\lambda_k z - hch\lambda_k zcth\frac{\lambda_k h}{2} \right) \right) \times \\ \times \frac{\partial_\theta W_k}{r} J_{\pm i\partial_\theta}(\lambda_k r) + i \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m \left(J_{\pm i\partial_\theta+1} \left(\frac{2\pi mir}{h} \right) - \right. \quad (3.13) \\ \left. - J_{\pm i\partial_\theta-1} \left(\frac{2\pi mir}{h} \right) \right) \cos \frac{2\pi mz}{h} \pm i\Phi_0 r^{-(\pm i\partial_\theta+1)} + \frac{Br}{\partial_\theta},$$

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(2\gamma sh\lambda_k z - (\gamma - 1)\lambda_k \left(2zch\lambda_k z - hsh\lambda_k zcth\frac{\lambda_k h}{2} \right) \right) \times \\ \times W_k J_{\pm i\partial_\theta}(\lambda_k r) - \frac{\gamma 2}{\gamma} (2A + B)z.$$

Задача Б

$$sh\lambda_k h - \lambda_k h = 0.$$

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(2\gamma sh\lambda_k z + (\gamma - 1)\lambda_k \left(2zch\lambda_k z - hsh\lambda_k zcth \frac{\lambda_k h}{2} \right) \right) \times \\
&\quad \times W_k \frac{d}{dr} J_{\pm i\partial_\theta}(\lambda_k r) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \left(J_{\pm i\partial_\theta+1} \left(\frac{\pi(2n-1)ir}{h} \right) + \right. \\
&\quad \left. + J_{\pm i\partial_\theta-1} \left(\frac{\pi(2n-1)ir}{h} \right) \right) \sin \frac{\pi(2n-1)z}{h} + \Phi_{10} z r^{\mp i\partial_\theta-1} + \\
&\quad + \frac{\gamma z (\mp i\partial_\theta + 2) \Phi_{11} r^{\mp i\partial_\theta+1}}{2(\gamma-1)(\mp i\partial_\theta+1)} \pm \frac{i\partial_\theta z^3 (3\gamma-2)}{3(\gamma-1)} \Phi_{11} r^{\mp i\partial_\theta-1} \mp \frac{19ih^2 z \partial_\theta}{24} \Phi_{11} r^{\mp i\partial_\theta-1}, \\
v &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(2\gamma sh\lambda_k z + (\gamma - 1)\lambda_k \left(2zch\lambda_k z - hsh\lambda_k zcth \frac{\lambda_k h}{2} \right) \right) \times \\
&\quad \times \frac{\partial_\theta W_k}{r} J_{\pm i\partial_\theta}(\lambda_k r) + i \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \left(J_{\pm i\partial_\theta+1} \left(\frac{\pi(2n-1)ir}{h} \right) - \right. \\
&\quad \left. - J_{\pm i\partial_\theta-1} \left(\frac{\pi(2n-1)ir}{h} \right) \right) \sin \frac{\pi(2n-1)z}{h} \pm i\Phi_{10} z r^{\mp i\partial_\theta-1} + \\
&\quad + \frac{\gamma \Phi_{11} \partial_\theta z r^{\mp i\partial_\theta+1}}{2(\gamma-1)(\mp i\partial_\theta+1)} - \frac{\partial_\theta z^3 (3\gamma-2)}{3(\gamma-1)} \Phi_{11} r^{\mp i\partial_\theta-1} + \frac{19h^2 z \partial_\theta}{24} \Phi_{11} r^{\mp i\partial_\theta-1}, \\
w &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(2ch\lambda_k z - (\gamma - 1)\lambda_k \left(2zsh\lambda_k z - hch\lambda_k zcth \frac{\lambda_k h}{2} \right) \right) \times \\
&\quad \times W_k J_{\pm i\partial_\theta}(\lambda_k r) \mp \frac{i\Phi_{10}}{\partial_\theta} r^{\mp i\partial_\theta} - \\
&\quad - \frac{\gamma \Phi_{11} r^{\mp i\partial_\theta+2}}{2(\gamma-1)(\mp i\partial_\theta+1)} - \frac{\gamma_2 z^2}{\gamma-1} \Phi_{11} r^{\mp i\partial_\theta} + \frac{5h^2}{24} r^{\mp i\partial_\theta} \Phi_{11}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

3.1.9. На торцах цилиндра $z = \pm h/2$ заданы перемещения u , v , w .

Задача А

$$(\gamma + 1)sh\lambda_k h - (\gamma - 1)\lambda_k h = 0.$$

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(zsh\lambda_k z - \frac{h}{2} ch\lambda_k zth \frac{\lambda_k h}{2} \right) \Phi_k \frac{d}{dr} J_{\pm i\partial_\theta}(\lambda_k r) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m \left(J_{\pm i\partial_\theta+1} \left(\frac{\pi(2m-1)ir}{h} \right) + J_{\pm i\partial_\theta-1} \left(\frac{\pi(2m-1)ir}{h} \right) \right) \cos \frac{\pi(2m-1)z}{h}, \\ v &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(zsh\lambda_k z - \frac{h}{2} ch\lambda_k zth \frac{\lambda_k h}{2} \right) \frac{\partial_\theta \Phi_k}{r} J_{\pm i\partial_\theta}(\lambda_k r) + \\ &+ i \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m \left(J_{\pm i\partial_\theta+1} \left(\frac{\pi(2m-1)ir}{h} \right) - J_{\pm i\partial_\theta-1} \left(\frac{\pi(2m-1)ir}{h} \right) \right) \cos \frac{\pi(2m-1)z}{h}, \\ w &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(zch\lambda_k z - \frac{h}{2} sh\lambda_k zth \frac{\lambda_k h}{2} - \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{sh\lambda_k z}{\lambda_k} \right) \Phi_k J_{\pm i\partial_\theta}(\lambda_k r). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Задача Б

$$(\gamma + 1)sh\lambda_k h + (\gamma - 1)\lambda_k h = 0.$$

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(zch\lambda_k z - \frac{h}{2} sh\lambda_k zcth \frac{\lambda_k h}{2} \right) W_k \frac{d}{dr} J_{\pm i\partial_\theta}(\lambda_k r) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \left(J_{\pm i\partial_\theta+1} \left(\frac{2\pi n ir}{h} \right) + J_{\pm i\partial_\theta-1} \left(\frac{2\pi n ir}{h} \right) \right) \sin \frac{2\pi n z}{h}, \end{aligned}$$

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \left(zch\lambda_k z - \frac{h}{2} sh\lambda_k zcth \frac{\lambda_k h}{2} \right) \frac{\partial_{\theta} W_k}{r} J_{\pm i\partial_{\theta}}(\lambda_k r) + \quad (3.16)$$

$$+ i \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \left(J_{\pm i\partial_{\theta}+1} \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) - J_{\pm i\partial_{\theta}-1} \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) \right) \sin \frac{2\pi n z}{h},$$

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k z sh\lambda_k z - \frac{h}{2} \lambda_k ch\lambda_k zcth \frac{\lambda_k h}{2} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} ch\lambda_k z \right) W_k J_{\pm i\partial_{\theta}}(\lambda_k r).$$

3.1.10. На торцах цилиндра $z = \pm h/2$ заданы напряжения и нормальные перемещения τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$, w .

Задача А

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dr} \left(r J_{\pm i\partial_{\theta}+1} \left(\frac{2\pi m r}{h} \right) - \frac{\gamma h i}{(\gamma-1)\pi m} J_{\pm i\partial_{\theta}} \left(\frac{2\pi m r}{h} \right) \right) \times$$

$$\times \Phi_m \cos \frac{2\pi m z}{h} - \sum_{m=1}^{\infty} F_m \frac{d}{dr} J_{\pm i\partial_{\theta}} \left(\frac{2\pi m r}{h} \right) \cos \frac{2\pi m z}{h} + \Phi_{10} r^{\mp i\partial_{\theta}-1} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} E_m \frac{\partial_{\theta}}{r} J_{\pm i\partial_{\theta}} \left(\frac{2\pi m r}{h} \right) \cos \frac{2\pi m z}{h} + \left(\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)(\pm i\partial_{\theta}+1)} - 1 \right) \Phi_{20} r^{\pm i\partial_{\theta}+1},$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \partial_{\theta} \left(J_{\pm i\partial_{\theta}+1} \left(\frac{2\pi m r}{h} \right) - \frac{\gamma h i}{(\gamma-1)\pi m r} J_{\pm i\partial_{\theta}} \left(\frac{2\pi m r}{h} \right) \right) \times$$

$$\times \Phi_m \cos \frac{2\pi m z}{h} - \sum_{m=1}^{\infty} F_m \frac{\partial_{\theta}}{r} J_{\pm i\partial_{\theta}} \left(\frac{2\pi m r}{h} \right) \times \quad (3.17)$$

$$\times \cos \frac{2\pi m z}{h} \pm i \Phi_{10} r^{\mp i\partial_{\theta}-1} - \sum_{m=1}^{\infty} E_m \frac{d}{dr} J_{\pm i\partial_{\theta}} \left(\frac{2\pi m r}{h} \right) \times$$

$$\times \cos \frac{2\pi m z}{h} \pm i \left(\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)(\pm i\partial_{\theta}+1)} + 1 \right) \Phi_{20} r^{\pm i\partial_{\theta}+1},$$

$$w = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\pi mr}{h} \left(\Phi_m J_{\pm i\partial_\theta + 1} \left(\frac{2\pi mir}{h} \right) - \frac{F_m}{r} J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{2\pi mir}{h} \right) \right) \sin \frac{2\pi mz}{h}.$$

Задача Б

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{hi}{\pi(2n-1)} \frac{d}{dr} \left(r J_{\pm i\partial_\theta + 1} \left(\frac{\pi(2n-1)ir}{h} \right) - \frac{2\gamma hi}{(\gamma-1)\pi(2n-1)} \times \right. \\ &\quad \left. \times J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{\pi(2n-1)ir}{h} \right) \right) \Phi_n \sin \frac{\pi(2n-1)z}{h} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(W_{1n} \frac{d}{dr} J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{\pi(2n-1)ir}{h} \right) + W_{2n} \frac{\partial_\theta}{r} J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{\pi(2n-1)ir}{h} \right) \right) \sin \frac{\pi(2n-1)z}{h}, \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{hi\partial_\theta}{\pi(2n-1)} \left(J_{\pm i\partial_\theta + 1} \left(\frac{\pi(2n-1)ir}{h} \right) - \frac{2\gamma hi}{(\gamma-1)\pi(2n-1)r} \times \right. \\ &\quad \left. \times J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{\pi(2n-1)ir}{h} \right) \right) \Phi_n \sin \frac{\pi(2n-1)z}{h} + \quad (3.18) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi(2n-1)z}{h} \left(W_{1n} \frac{\partial_\theta}{r} J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{\pi(2n-1)ir}{h} \right) - W_{2n} \frac{d}{dr} J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{\pi(2n-1)ir}{h} \right) \right), \\ w &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi(2n-1)z}{h} \left(ir\Phi_n J_{\pm i\partial_\theta + 1} \left(\frac{\pi(2n-1)ir}{h} \right) + \right. \\ &\quad \left. + W_{1n} J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{\pi(2n-1)ir}{h} \right) \frac{\pi(2n-1)}{h} \right). \end{aligned}$$

3.1.11. На торцах цилиндра $z = \pm h/2$ заданы касательные перемещения и нормальное напряжение u, v, σ_z .

Задача А

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{hi}{\pi(2m-1)} \frac{d}{dr} \left(r J_{\pm i\partial_\theta + 1} \left(\frac{\pi(2m-1)ir}{h} \right) - \frac{2\gamma hi}{(\gamma-1)\pi(2m-1)} \times \right)$$

$$\begin{aligned}
& \times J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{\pi(2m-1)ir}{h} \right) \Phi_m \cos \frac{\pi(2m-1)z}{h} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left(W_{1m} \frac{d}{dr} J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{\pi(2m-1)ir}{h} \right) - \right. \\
& \left. - W_{2m} \frac{\partial_\theta}{r} J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{\pi(2m-1)ir}{h} \right) \right) \cos \frac{\pi(2m-1)z}{h}, \\
v = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{hi\partial_\theta}{\pi(2m-1)} \left(J_{\pm i\partial_\theta+1} \left(\frac{\pi(2m-1)ir}{h} \right) - \frac{2\gamma hi}{(\gamma-1)\pi(2m-1)r} \times \right. \\
& \times J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{\pi(2m-1)ir}{h} \right) \left. \right) \Phi_m \cos \frac{\pi(2m-1)z}{h} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left(W_{1m} \frac{\partial_\theta}{r} J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{\pi(2m-1)ir}{h} \right) - \right. \\
& \left. - W_{2m} \frac{d}{dr} J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{\pi(2m-1)ir}{h} \right) \right) \cos \frac{\pi(2m-1)z}{h}, \\
w = & \sum_{m=1}^{\infty} \left(-ir\Phi_m J_{\pm i\partial_\theta+1} \left(\frac{\pi(2m-1)ir}{h} \right) + \right. \\
& \left. + W_{1m} J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{\pi(2m-1)ir}{h} \right) \frac{\pi(2m-1)}{h} \right) \sin \frac{\pi(2m-1)z}{h}. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Задача Б

$$\begin{aligned}
u = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dr} \left(r J_{\pm i\partial_\theta+1} \left(\frac{2\pi n ir}{h} \right) - \frac{\gamma hi}{(\gamma-1)\pi n} J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{2\pi n ir}{h} \right) \right) \Phi_n \cos \frac{2\pi n z}{h} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left(W_{1n} \frac{d}{dr} J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{2\pi n ir}{h} \right) + W_{2n} \frac{\partial_\theta}{r} J_{\pm i\partial_\theta} \left(\frac{2\pi n ir}{h} \right) \right) \sin \frac{2\pi n z}{h},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v &= \sum_{n=1}^{\infty} \partial_{\theta} \left(J_{\pm i \partial_{\theta} + 1} \left(\frac{2\pi n i r}{h} \right) - \frac{\gamma h i}{(\gamma - 1)\pi n} J_{\pm i \partial_{\theta}} \left(\frac{2\pi n i r}{h} \right) \right) \Phi_n \sin \frac{2\pi n z}{h} - \\
&\quad (3.20) \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left(W_{1n} \frac{\partial_{\theta}}{r} J_{\pm i \partial_{\theta}} \left(\frac{2\pi n i r}{h} \right) - W_{2n} \frac{d}{dr} J_{\pm i \partial_{\theta}} \left(\frac{2\pi n i r}{h} \right) \right) \sin \frac{2\pi n z}{h}, \\
w &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{h} \left(r \Phi_n J_{\pm i \partial_{\theta} + 1} \left(\frac{2\pi n i r}{h} \right) + W_{1n} J_{\pm i \partial_{\theta}} \left(\frac{2\pi n i r}{h} \right) \right) \cos \frac{2\pi n z}{h}, \\
i &= \sqrt{-1}, \quad \partial_{\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}.
\end{aligned}$$

3.2. Операторные методы разложения функции в неортогональные (ортогональные) ряды

Для лучшего понимания метода начнем с разложения функции в ортогональный, например, тригонометрический ряд Фурье. Пусть требуется разложить функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$. Этот ряд известен:

$$x = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n} \sin n x.$$

Найдем коэффициенты ряда новым методом:

$$x = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin n x.$$

Функции $\sin n x$ являются собственными функциями дифференциального оператора $\frac{d^2}{n^2 dx^2} + 1$. Поэтому возьмем от обеих частей равенства оператор

$$\frac{d}{dx} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^{\infty} \left(\frac{d^2}{n^2 dx^2} + 1 \right).$$

Тогда имеем

$$\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^{\infty} a_i \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right) \frac{d}{dx} \sin ix = \frac{dx}{dx}, \quad \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^{\infty} ia_i \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right) \cos ix = 1.$$

Вычислим бесконечное произведение. Для этого, заметим, что [181]

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Следовательно

$$\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^{\infty} i \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\sin \pi z}{\pi \left(1 - \frac{z^2}{i^2}\right)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\cos \pi z}{-2z} i^2 = -\frac{i \cos \pi i}{2},$$

т.е. после вычисления бесконечного произведения получим

$$-\frac{ia_i \cos \pi i}{2} \cos ix = 1.$$

Что же нужно подставить в полученном равенстве вместо x ? Нужно подставить такое значение x , в окрестности которого левая и правая часть равенства имеют одинаковое аналитическое представление. Такой точкой в данном равенстве является $x = 0$, откуда

$$a_i = -\frac{2}{i \cos \pi i} = -\frac{2 \cos \pi i}{i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Предлагаемый метод определения коэффициентов ряда сводится к операции бесконечного дифференцирования. Поэтому он является обобщением метода разложения функции в степенной ряд, коэффициенты которого также определяются путем дифференцирования левой и правой части равенства. При этом, как и при разложении в степенной ряд, область сходимости построенного ряда определяет-

ся дополнительными исследованиями на основании известных признаков сходимости функциональных рядов. Однако предлагаемый метод (будем его называть операторным методом) не связан с условием ортогональности членов ряда. И поэтому он может быть применен к разложению функции в любой функциональный (ортогональный или неортогональный) ряд. Заметим, что бесконечное произведение может быть вычислено в операторной форме до применения к разложению в ряд. Так, в рассмотренном примере бесконечное произведение равно

$$\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2}{n^2 dx^2} + 1 \right) = \frac{sh\pi d_x}{\pi \left(1 + \frac{d_x^2}{i^2} \right)}, \quad d_x = \frac{d}{dx}.$$

Поэтому разложение функции x в ряд $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin ix$ может быть выполнено за счет применения к обеим частям равенства оператора

$$\frac{sh\pi d_x(x)}{\pi \left(1 + \frac{d_x^2}{i^2} \right)} = \frac{sh\pi d_x}{\pi \left(1 + \frac{d_x^2}{i^2} \right)} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin ix \right).$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{sh\pi d_x(x)}{\pi \left(1 + \frac{d_x^2}{i^2} \right)} &= 1, \quad \frac{sh\pi d_x}{\pi \left(1 + \frac{d_x^2}{i^2} \right)} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin ix \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{sh\pi z}{\pi \left(1 - \frac{z^2}{i^2} \right)} a_i \cos ix = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{\cos \pi z \cos ix}{-2z/i^2} a_i = -\frac{i \cos \pi i \cos ix}{2} a_i, \quad 1 = -\frac{i \cos \pi i \cos ix}{2}, \end{aligned}$$

т.е. получим ранее выведенное выражение $a_i = -\frac{2 \cos \pi i}{i}$, справедливое в окрестности точки $x = 0$.

В связи со сведением задачи разложения функции в ряд к задаче применения некоторого дифференциального оператора бесконечно высокого порядка к членам ряда и данной функции возникает вопрос, можно ли применять к равенству, дающему разложение в ряд, не только собственный оператор, но и другие операторы. Простейшие примеры показывают, что не всегда. Например,

$$x = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n} \sin nx .$$

Применяя оператор $\sin \pi d_x$ к этому равенству, получим

$$\pi = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos \pi n}{n} sh \pi n \cos nx ,$$

что абсурдно, так как полученный ряд расходится во всех точках x . Члены этого ряда неограниченно возрастают. Этот пример показывает, что применение дифференциального оператора к разложению функции в ряд может изменить область сходимости ряда вплоть до превращения его в расходящийся ряд. Напомним, что применение конечных дифференциальных операторов к степенному ряду не изменяет области сходимости ряда. Что касается применения конечных дифференциальных операторов к любому функциональному (нестепенному) ряду, то область сходимости ряда изменяется даже при простом дифференцировании. Этот факт известен из теории рядов Фурье [181]. Влияние операторного и простого дифференцирования на изменение области сходимости должно учитываться при разложении функции в ряд (ортогональный или неортогональный).

3.2.1. Операторный метод разложения функции в ряд Фурье

Покажем, что разложение функции в ряд Фурье в промежутке от $-\pi$ до π по синусам требует применение оператора $\frac{sh \pi d_x}{d_x^2 + n^2}$, а по

косинусам – операторов $\frac{sh\pi d_x}{\pi d_x}$ и $\frac{d_x sh\pi d_x}{d_x^2 + n^2}$. Для этой цели рассмотрим функцию e^x и разложим ее в ряд Фурье:

$$e^x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Применяя оператор $\frac{sh\pi d_x}{\pi d_x}$, записываем

$$\frac{sh\pi d_x}{\pi d_x} e^x = \frac{sh\pi d_x}{\pi d_x} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right),$$

откуда находим $a_0 = \frac{sh\pi}{\pi}$.

Оператор $\frac{sh\pi d_x}{\pi d_x}$ был применен для того, чтобы обратить в нуль все члены ряда, кроме a_0 .

Для нахождения a_n применяем четный относительно производной d_x оператор $\frac{d_x sh\pi d_x}{d_x^2 + n^2}$, так как он обращает в нуль коэффициент a_0 и члены, содержащие b_n , при $x = 0$.

$$\frac{d_x sh\pi d_x}{d_x^2 + n^2} e^x = \frac{d_x sh\pi d_x}{d_x^2 + n^2} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right),$$

$$\frac{d_x sh\pi d_x}{d_x^2 + n^2} e^x = \frac{sh\pi}{n^2 + 1} e^x,$$

$$\begin{aligned} \frac{d_x sh \pi d_x}{d_x^2 + n^2} (a_n \cos nx) &= a_n \lim_{d_x \rightarrow in} \frac{\pi d_x ch \pi d_x + sh \pi d_x}{2d_x} \cos nx = \\ &= \frac{a_n}{2} \pi \cos \pi n \cos nx, \end{aligned}$$

$$\frac{a_n}{2} \pi \cos \pi n \lim_{x \rightarrow 0} \cos nx = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{sh \pi}{n^2 + 1} e^x = \frac{sh \pi}{n^2 + 1},$$

$$\frac{a_n \pi \cos \pi n}{2} = \frac{sh \pi}{\pi},$$

откуда $a_n = \frac{2sh \pi}{\pi(n^2 + 1) \cos \pi n}$.

Для определения b_n применяем оператор $\frac{sh \pi d_x}{d_x^2 + n^2}$, который обращает в нуль a_0 и при $x = 0$ члены, содержащие a_n .

$$\begin{aligned} \frac{sh \pi d_x}{d_x^2 + n^2} e^x &= \frac{sh \pi}{n^2 + 1} e^x = \frac{sh \pi d_x}{d_x^2 + n^2} (b_n \sin nx) = \\ &= \lim_{d_x \rightarrow in} b_n \frac{ch \pi d_x}{2d_x} \sin nx = -\frac{b_n \pi \cos \pi n}{2n} \cos nx, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{sh \pi}{n^2 + 1} e^x = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \cos \pi n}{2n} b_n \cos nx,$$

$$\frac{sh \pi}{n^2 + 1} = -\frac{\pi \cos \pi n}{2n} b_n,$$

откуда $b_n = -\frac{2nsh \pi}{\pi(n^2 + 1) \cos \pi n}$.

Окончательно

$$e^x = \frac{sh\pi}{\pi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sh\pi}{\pi(n^2 + 1)\cos \pi n} (\cos nx - n \sin nx),$$

что легко проверяется по известным формулам для коэффициентов разложения функции в ряд Фурье из условий ортогональности.

3.2.2. Операторный метод разложения функции в ортогональный ряд по функциям Бесселя

Требуется разложить в ряд Бесселя нулевого индекса функцию x^2 на отрезке $-1, 1$.

$$x^2 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n x), \quad (3.21)$$

где λ_n – корни уравнения $J_1(\lambda_n x) = 0$.

Запишем бесконечное произведение, составленное из дифференциальных операторов, которым удовлетворяют функции $J_0(\lambda_n x)$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d_x^2}{\lambda_n^2} + \frac{d_x}{x\lambda_n^2} + 1 \right).$$

Это бесконечное произведение равно $\frac{I_1(d)}{d}$, $\left(d^2 = d_x^2 + \frac{d_x}{x} \right)$

вследствие того, что собственные числа λ_n являются корнями уравнения $J_1(\lambda_n x) = 0$, $I_1(d)$ – модифицированная функция Бесселя.

Для определения коэффициента a_n строим оператор

$$\frac{dI_1(d)}{d^2 + \lambda_n^2}, \quad (3.22)$$

который обращает в нуль все члены ряда, за исключением одного:

$$\frac{dI_1(d)}{d^2 + \lambda_n^2} x^2 = dI_1(d) \left(\frac{x^2}{\lambda_n^2} - \frac{4}{\lambda_n^4} \right) = \frac{2}{\lambda_n^2}.$$

Оператор (3.22) от собственной функции $J_0(\lambda_n x)$ вычисляем, используя правило Лопитала:

$$\frac{dI_1(d)}{d^2 + \lambda_n^2} J_0(\lambda_n x) = \lim_{d \rightarrow i\lambda_n} \frac{dI_0(d)}{2d} J_0(\lambda_n x) = \frac{J_0(\lambda_n) J_0(\lambda_n x)}{2}.$$

Следовательно, имеем $\lim_{x \rightarrow 0} a_n \frac{J_0(\lambda_n) J_0(\lambda_n x)}{2} = \frac{2}{\lambda_n^2},$

откуда $a_n = \frac{4}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)}.$

Для определения коэффициента a_0 применяем к разложению (3.21) оператор $I_1(d)/d$, который обращает в нуль все члены, содержащие a_n .

$$\frac{I_1(d)}{d} x^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}, \quad \frac{I_0(d)}{d} a_0 = \frac{a_0}{2},$$

откуда $a_0 = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}.$

Итак $x^2 = \frac{1}{2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n x)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)},$ что совпадает с [14].

3.2.3. Операторный метод разложения функции в неортогональный ряд по функциям Бесселя

Определим коэффициенты разложения функции $I_1(ax)$ в неортогональный ряд

$$I_1(ax) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_1(k_n x), \quad k_n = \frac{\pi n}{l}$$

на отрезке $-l, l$.

Строим оператор $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{d^2}{k_n^2}\right) = \frac{shdl}{dl}$, где $d^2 = d_x^2 + \frac{d_x}{x} - \frac{1}{x^2}$.

Для нахождения коэффициента a_n применяем к разложению оператора $\frac{shdl}{d^2 + k_n^2}$,

$$\begin{aligned} \frac{shdl}{d^2 + k_n^2} I_1(ax) &= a_n \frac{shdl}{d^2 + k_n^2} J_1(k_n x) = \frac{shal}{a^2 + k_n^2} I_0(ax) = \\ &= a_n \lim_{d \rightarrow ik_n} \frac{lchdl}{2d} J_1(k_n x) = -\frac{a_n}{2k_n} l \cos \pi n J_0(k_n x), \end{aligned}$$

откуда

$$a_n = -\frac{2k_n shal}{l(a^2 + k_n^2) \cos \pi n} = -\frac{2(-1)^n k_n shal}{l(a^2 + k_n^2)}.$$

Окончательно запишем

$$I_1(ax) = -\frac{2shal}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k_n}{a^2 + k_n^2} J_1(k_n x).$$

Для проверки правильности данного результата рассмотрим следующий контурный интеграл

$$J_1(ax) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{z J_1(zx) dz}{\sin lz(z^2 + a^2)},$$

где C_n – окружность бесконечно большого радиуса с центром в начале координат комплексной плоскости z .

При вычислении контурного интеграла используем теорию вычетов.

Подынтегральная функция имеет полюсы в точках $z = 0$, $z = \pi n/l$, $z = \pm ia$. Вычет в полюсах $z = \pi n/l$ равен

$$\operatorname{resf}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_n J_1(k_n x)}{l \cos \pi n(a^2 + k_n^2)} = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k_n}{a^2 + k_n^2} J_1(k_n x).$$

Вычет в точке $z = 0$ равен нулю. Вычет в полюсах $z = \pm ia$ равен

$$\operatorname{resf}(z) = \frac{J_1(iax)}{2 \sin ial} + \frac{J_1(-iax)}{2 \sin(-ial)} = \frac{I_1(ax)}{shal}.$$

Учитывая, что сумма всех вычетов равна нулю, находим

$$I_1(ax) = -\frac{2shal}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k_n}{a^2 + k_n^2} J_1(k_n x).$$

3.2.4. Операторный метод разложения функции в ряд, члены которого зависят от комплексно-сопряженных корней трансцендентного уравнения

Рассмотрим разложение функций x^{2r} и x^{2r+1} ($r = 0, 1, 2, \dots$) в ряды по $cha_k x$ и $sha_k x$, т.е. определим коэффициенты в рядах вида

$$x^{2r} = \sum_{k=1}^{\infty} B_{k,2r} cha_k x + B_{0,2r},$$

$$x^{2r+1} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{k,2r+1} sha_k x,$$

где a_k – корни трансцендентного уравнения $sha_k - a_k = 0$, которое для каждого k имеет четыре комплексных сопряженных корня.

Для нахождения коэффициентов разложений операторным методом используем следующие операторы:

$$D_0 = \frac{shd_x - d_x}{d_x^3}, \quad D_1 = \frac{shd_x - d_x}{d_x^2(d_x^2 - a_k^2)}, \quad D_2 = \frac{shd_x - d_x}{d_x(d_x^2 - a_k^2)}.$$

В результате получаем следующие соотношения (при $x = 0$) для определения коэффициентов:

$$\left. \frac{(shd_x - d_x)x^{2r+1}}{d_x^2(d_x^2 - a_k^2)} \right|_{x=0} = A_{k,2r+1} \left. \frac{(cha_k - 1)cha_k x}{2a_k^3} \right|_{x=0},$$

$$\left. \frac{(shd_x - d_x)x^{2r}}{d_x^3} \right|_{x=0} = \frac{1}{6} B_{0,2r},$$

$$\left. \frac{(shd_x - d_x)x^{2r}}{d_x(d_x^2 - a_k^2)} \right|_{x=0} = B_{k,2r} \left. \frac{(cha_k - 1)cha_k x}{2a_k^2} \right|_{x=0}.$$

С учетом того, что

$$D_1(x^{2r+1}) \Big|_{x=0} = -\frac{1}{a_k^2} \left\{ \frac{d^{2r+1}}{d\mu^{2r+1}} \left[\frac{sh\mu - \mu}{\mu^2 - \frac{\mu^4}{a_k^2}} \right] \right\} \Big|_{\mu=0},$$

$$D_0(x^{2r}) \Big|_{x=0} = \frac{d^{2r}}{d\mu^{2r}} \left(\frac{\varphi(\mu)}{\mu} \right) \Big|_{\mu=0} = \frac{6}{a_{2r}} U_{2r+1},$$

$$D_2(x^{2r}) \Big|_{x=0} = -\frac{1}{a_k^2} \left\{ \frac{d^{2r}}{d\mu^{2r}} \left[\frac{sh\mu - \mu}{\mu - \frac{\mu^3}{a_k^2}} \right] \right\} \Big|_{\mu=0},$$

$$\frac{d^{2r+1}}{d\mu^{2r+1}} \left[\frac{sh\mu - \mu}{\mu^2 - \frac{\mu^4}{a_k^2}} \right]_{\mu=0} = \frac{\lambda_k^{(r)}}{a_{2r+1}},$$

получим

$$A_{k,2r+1} = -\frac{2a_k \lambda_k^{(r)}}{a_{2r+1}(cha_k - 1)},$$

$$B_{0,2r} = \frac{6U_{2r+1}}{a_{2r}},$$

$$B_{k,2r} = -\frac{2\lambda_k^{(r-1)}}{a_{2r}(cha_k - 1)}.$$

Здесь в формулах приняты следующие обозначения:

$$\varphi(\mu) = 6\mu(sh\mu - \mu)^2, \quad a_{2r} = \frac{1}{(2r)!},$$

$$a_{2r+1} = \frac{1}{(2r+1)!}, \quad U_{2s+1} = \frac{1}{(2s+3)!},$$

$$\frac{sh\mu - \mu}{\mu^2} = \sum_{s=0}^{\infty} U_{2s+1} \mu^{2s+1}, \quad \lambda_k^{(r)} = \sum_{s=0}^r \frac{U_{2(r-s)+1}}{a_k^{2s}}.$$

Подставляя в ряды полученные коэффициенты, приходим к формулам, приведенным в работе [62] в результате применения теории вычетов:

$$x^{2r+1} = -\frac{2}{a_{2r+1}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \lambda_k^{(r)} sh \lambda_k x}{cha_k - 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k \bar{\lambda}_k^{(r)} sh \bar{a}_k x}{ch \bar{a}_k - 1} \right),$$

$$x^{2r} = \frac{6U_{2r+1}}{a_{2r}} - \frac{2}{a_{2r}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{(r-1)} ch\lambda_k x}{cha_k - 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\lambda}_k^{(r-1)} ch\bar{a}_k x}{ch\bar{a}_k - 1} \right).$$

3.2.5. Операторный метод разложения функций в ряд по гиперболическим функциям, зависящим от порядкового номера

Разложим функцию $\exp(\exp(x))$ в ряд по гиперболическим функциям следующего вида:

$$\exp[\exp(x)] = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k shkx + B_k chkx).$$

Используем операторы

$$D_0 = \sin \pi d_x, \quad D_1 = \frac{\sin \pi d_x}{d_x^2 - k^2}, \quad D_2 = \frac{d_x \sin \pi d_x}{d_x^2 - k^2}$$

и получим по аналогии с вышеизложенным разрешающие уравнения для искомых коэффициентов разложения:

$$\left[\frac{(-1)^k \pi \exp(kx)}{2k!k} \right]_{x=0} = \left[B_k (-1)^k \frac{\pi chkx}{2k} \right]_{x=0} = \left[A_k (-1)^k \frac{\pi chkx}{2k} \right]_{x=0},$$

$$\pi = B_0 \pi.$$

Отсюда получаем $B_0 = 1$, $A_k = B_k = 1/k!$, а исходное разложение принимает вид

$$\exp[\exp(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(shkx + chkx)}{k!}.$$

Достоверность формулы легко установить посредством разложения в ряд Маклорена:

$$\exp(\exp(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp(kx)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(sh kx + ch kx)}{k!}.$$

Если в последней формуле выделить четную и нечетную части, то

$$\exp(chx)sh(shx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{shkx}{k!},$$

$$\exp(chx)ch(shx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{chkx}{k!}.$$

Таким образом, разложение функции как в ортогональный, так и в неортогональный ряд проводится с единых позиций. Для этого строится дифференциальный оператор, в числителе которого стоит собственный оператор для всего набора заданного полного класса функций, по которым проводится разложение, а в знаменателе собственный оператор к функции с номером n . При разложении в ряд по четным функциям строится четный оператор, при разложении в ряд по нечетным функциям – нечетный оператор. Анализ приведенных примеров показывает, что операторный метод требует меньше выкладок, чем методы интегрирования. Особенно это преимущество проявляется при разложении функции в неортогональный ряд, т.к. не требуется составление контурного интеграла, для выбора подинтегральной функции которого нет общего правила.

3.3. Применение к решению задач теории упругости операторного метода разложения функции в неортогональный ряд

3.3.1. Сжатие упругого квадрата параболической нагрузкой

В качестве первого примера рассмотрим задачу сжатия (растяжения) упругого квадрата параболической нагрузкой вида

$$P = q \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right), \text{ где } a \text{ – сторона квадрата (рис. 3.1). Как известно,}$$

данная задача не имеет замкнутого решения. Операторный метод позволяет построить новое функциональное уравнение, которое эффективно решает поставленную задачу.

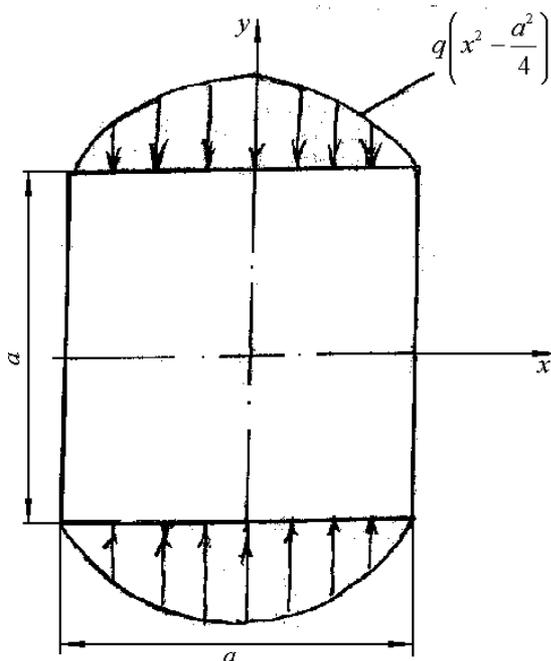


Рис. 3.1. Сжатие упругого квадрата параболической нагрузкой

На основе дифференциальной структуры (3.2) запишем решение задачи в форме

$$u = -\frac{\gamma_2}{\gamma} Cx + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(2\gamma sh\lambda_k x - (\gamma-1)\lambda_k \left(2xch\lambda_k x - ash\lambda_k xcth\frac{\lambda_k a}{2} \right) \right) \cos\lambda_k y,$$

$$v = Cy + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(2ch\lambda_k x + (\gamma-1)\lambda_k \left(2xsh\lambda_k x - ach\lambda_k xcth\frac{\lambda_k a}{2} \right) \right) \sin\lambda_k y,$$

где $\lambda_k a$ – корни трансцендентного уравнения $\frac{sh\lambda_k a}{\lambda_k a} + 1 = 0$.

Краевые условия на сторонах $x = \pm a/2$ точно выполняются за счет корней уравнения $sh\lambda_k a + \lambda_k a = 0$.

Краевые условия на сторонах $y = \pm a/2$ должны быть следующие:

$$\sigma_y\left(x, \pm \frac{a}{2}\right) = q\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right), \quad \tau_{xy}\left(x, \pm \frac{a}{2}\right) = 0.$$

В развернутом виде условия на сторонах $y = \pm a/2$ записываются так:

$$\frac{4(\gamma-1)CG}{\gamma} + 4(\gamma-1)G \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k \left(2ch\lambda_k x + \lambda_k \times \right. \\ \left. \times \left(2xsh\lambda_k x - ach\lambda_k xcth \frac{\lambda_k a}{2}\right)\right) \cos \frac{\lambda_k a}{2} = q\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right),$$

$$4(\gamma-1)G \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 A_k \left(2xch\lambda_k x - ash\lambda_k xcth \frac{\lambda_k a}{2}\right) \sin \frac{\lambda_k a}{2} = 0.$$

Вследствие того, что члены неортогонального ряда определяют самоуравненное напряженное состояние, коэффициент C находим из условия равенства нулю главного вектора напряжений на сторонах $y = \pm a/2$.

$$\int_{-a/2}^{a/2} \sigma_y\left(x, \pm \frac{a}{2}\right) dx = \frac{4(\gamma-1)GCa}{\gamma} = q \int_{-a/2}^{a/2} \left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) dx = -\frac{qa^3}{6}, \\ C = -\frac{\gamma qa^2}{24(\gamma-1)G}.$$

Для нахождения коэффициентов A_k применяем операторы

$$\frac{d_x(shd_x a + d_x a)}{(d_x^2 - \lambda_k^2)(\bar{d}_x^2 - \bar{\lambda}_k^2)} \left(\sigma_y\left(x, \pm \frac{a}{2}\right) \right),$$

$$\frac{(shd_x a + d_x a)}{(d_x^2 - \lambda_k^2)(d_x^2 - \bar{\lambda}_k^2)} \left(\tau_{xy} \left(x, \pm \frac{a}{2} \right) \right).$$

В результате выполненных выкладок получим следующую систему двух функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} & \lambda_k a (1 + ch \lambda_k a) (N + 2) A_k \cos \frac{\lambda_k a}{2} - \bar{\lambda}_k a (1 + ch \bar{\lambda}_k a) (\bar{N} + 2) \bar{A}_k \cos \frac{\bar{\lambda}_k a}{2} + \\ & + 4(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2) \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m^3 a (1 + ch \lambda_m a) A_m \cos \frac{\lambda_m a}{2}}{(\lambda_m^2 - \lambda_k^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)} + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{\lambda}_m^3 a (1 + ch \bar{\lambda}_m a) \bar{A}_m \cos \frac{\bar{\lambda}_m a}{2}}{(\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_k^2)} \right) = \frac{4q(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2)a}{(\gamma - 1)G\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k^2}, \end{aligned}$$

$$N = 1 - \frac{2(\lambda_k^2 + \bar{\lambda}_k^2)}{\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2},$$

$$\begin{aligned} & (N - 2)(1 + ch \lambda_k a) A_k \sin \frac{\lambda_k a}{2} - (\bar{N} - 2)(1 + ch \bar{\lambda}_k a) \bar{A}_k \sin \frac{\bar{\lambda}_k a}{2} + \\ & + 4(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2) \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m^2 (1 + ch \lambda_m a) A_m \sin \frac{\lambda_m a}{2}}{(\lambda_m^2 - \lambda_k^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)} + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{\lambda}_m^2 (1 + ch \bar{\lambda}_m a) \bar{A}_m \sin \frac{\bar{\lambda}_m a}{2}}{(\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_k^2)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Решение полученных функциональных уравнений осуществляем методом последовательных приближений. В качестве первого приближения возьмем решение без бесконечных сумм, входящих в уравнения. Тогда неизвестные комплексно сопряженные коэффициенты A_k и \bar{A}_k находятся по формулам:

$$A_k = \frac{4q(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{N} - 2)\sin\frac{\bar{\lambda}_k a}{2}}{(\gamma - 1)G\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k^2 (1 + ch\lambda_k a)\Delta}, \quad \bar{A}_k = \frac{4q(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2)(N - 2)\sin\frac{\lambda_k a}{2}}{(\gamma - 1)G\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k^2 (1 + ch\bar{\lambda}_k a)\Delta},$$

$$\Delta = \lambda_k(N + 2)(\bar{N} - 2)\sin\frac{\bar{\lambda}_k a}{2}\cos\frac{\lambda_k a}{2} - \bar{\lambda}_k(\bar{N} + 2)(N - 2)\sin\frac{\lambda_k a}{2}\cos\frac{\bar{\lambda}_k a}{2}.$$

Критерием точности первого приближения полученного решения является выполнение краевых условий на сторонах $y = \pm a/2$ и прежде всего неоднородного условия $\sigma_y\left(x, \pm \frac{a}{2}\right) = q\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)$.

Для этой цели выпишем формулу напряжений σ_y в точках x .

$$\sigma_y\left(x, \pm \frac{a}{2}\right) = -\frac{qa^2}{6} + 16qa^2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} (2ch\lambda_k x + \lambda_k \times$$

$$\times \left(2xsh\lambda_k x - ach\lambda_k xcth\frac{\lambda_k a}{2}\right)) \cdot \frac{(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{N} - 2)\lambda_k \sin\frac{\bar{\lambda}_k a}{2}\cos\frac{\lambda_k a}{2}}{\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k^2 (1 + ch\lambda_k a)\Delta}.$$

Вычислим напряжение σ_y сначала в точке $x = 0, y = a/2$:

$$\sigma_y\left(0, \frac{a}{2}\right) = -\frac{qa^2}{6} + 16qa^2 \operatorname{Re} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{N} - 2)\lambda_k (3 + ch\lambda_k a)\sin\frac{\bar{\lambda}_k a}{2}\cos\frac{\lambda_k a}{2}}{\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k^2 (1 + ch\lambda_k a)\Delta}.$$

Необходимые величины для вычислений приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Значения функций и корней уравнения $sh\lambda_k a + \lambda_k a = 0$

$\lambda_k a$	2,25075+ +i4,212396	3,103165+ +i10,71253	3,551072+ +i17,07334
$N = 1 - \frac{2(\lambda_k^2 + \bar{\lambda}_k^2)}{\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2}$	1-i1,337236	1-i3,162454	1-i4,599904
$\sin \frac{\lambda_k a}{2}$	3,7625166+ +i1,7438692	105,94875+ +i2,0354803	2495,9273- -i518,2774
$\cos \frac{\lambda_k a}{2}$	1,7962737- -i3,6526911	2,035931- -i105,94403	-518,2774- -i2495,9271
$\sin \frac{\bar{\lambda}_k a}{2} \cos \frac{\lambda_k a}{2}$	0,3886941- -i16,875777	0,0192142- -i11228,78	-i6498264
$\lambda_k (N+2)(\bar{N}-2) \times$ $\times \sin \frac{\bar{\lambda}_k a}{2} \cos \frac{\lambda_k a}{2}$	107,20784+ +i428,96622	1282929,6+ +i1277678,8	(23,482598+ +i15,612812)10
$ch\lambda_k a$	-2,3012549- -i4,1247468	-3,1158199- -i10,669568	-3,5573094- -i17,044924

При учете одного корня $\sigma_y \left(0, \frac{a}{2}\right) = -0,2735qa^2$.

При учете двух корней $\sigma_y \left(0, \frac{a}{2}\right) = -0,278qa^2$.

При учете трех корней $\sigma_y \left(0, \frac{a}{2}\right) = -0,279qa^2$.

Дальнейшее уточнение можно сделать, отметив, что каждое последующее слагаемое меньше предыдущего в 5,9; 5,4 раз. Поэтому если взять в качестве знаменателя бесконечно убывающей геометрической прогрессии $q = 1/5$, то ее сумма равна

$$\frac{0,279 - 0,278}{1 - 1/5} = 0,00125,$$

$$\sigma_y\left(0, \frac{a}{2}\right) = -(0,279 + 0,00125)qa^2 \approx -0,28qa^2.$$

Таким образом, первое приближение дает увеличение напряжения в точке $x = 0$, $y = \pm a/2$ на 12 процентов.

Теперь выясним, что дает второе приближение задачи. Для этой цели перепишем функциональные уравнения для комплексно-сопряженных коэффициентов A_k и \bar{A}_k в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_k(1 + ch\lambda_k a)\Delta &= \frac{4q(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2)}{\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k^2} (\bar{N} - 2) \sin \frac{\lambda_k a}{2} - \\ &\quad - 4(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2) (\bar{N} - 2) \sin \frac{\bar{\lambda}_k a}{2} \times \\ &\quad \times \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m^3 a(1 + ch\lambda_m a) A_m \cos \frac{\lambda_m a}{2}}{(\lambda_m^2 - \lambda_k^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)} + \frac{\bar{\lambda}_m^3 a(1 + ch\bar{\lambda}_m a) \bar{A}_m \cos \frac{\bar{\lambda}_m a}{2}}{(\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_k^2)} \right) + \\ &\quad + 4(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2) (\bar{N} + 2) \bar{\lambda}_k a \cos \frac{\bar{\lambda}_k a}{2} \times \\ &\quad \times \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m^2 (1 + ch\lambda_m a) A_m \sin \frac{\lambda_m a}{2}}{(\lambda_m^2 - \lambda_k^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)} + \frac{\bar{\lambda}_m^2 (1 + ch\bar{\lambda}_m a) \bar{A}_m \sin \frac{\bar{\lambda}_m a}{2}}{(\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_k^2)} \right). \\ \bar{A}_k &= \frac{(N - 2)(1 + ch\lambda_k a) A_k \sin \frac{\lambda_k a}{2}}{(\bar{N} - 2)(1 + ch\bar{\lambda}_k a) \sin \frac{\bar{\lambda}_k a}{2}} + \frac{4(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2)}{(\bar{N} - 2)(1 + ch\bar{\lambda}_k a) \sin \frac{\bar{\lambda}_k a}{2}} \times \end{aligned}$$

$$\times \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m^2 (1 + ch\lambda_m a) A_m \sin \frac{\lambda_m a}{2}}{(\lambda_m^2 - \lambda_k^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)} + \frac{\bar{\lambda}_m^2 (1 + ch\bar{\lambda}_m a) \bar{A}_m \sin \frac{\bar{\lambda}_m a}{2}}{(\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_k^2)} \right).$$

Подставляя вместо A_m и \bar{A}_m решения, полученные при первом приближении задачи, имеем для коэффициента A_k второе приближение:

$$A_k = \frac{4q(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{N} - 2) \sin \frac{\bar{\lambda}_k a}{2}}{(\gamma - 1)G\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k^2 (1 + ch\lambda_k a)\Delta} \left\{ 1 - 4\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k^2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \frac{1}{\Delta} (\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_m^2) \times \right. \\ \times \left(\frac{\lambda_m a (\bar{N} - 2) \sin \frac{\bar{\lambda}_m a}{2} \cos \frac{\lambda_m a}{2}}{\bar{\lambda}_m^2 (\lambda_m^2 - \lambda_k^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)} + \frac{\bar{\lambda}_m a (N - 2) \sin \frac{\lambda_m a}{2} \cos \frac{\bar{\lambda}_m a}{2}}{\lambda_m^2 (\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_k^2)} \right) + \\ + \frac{4\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k^3 a (\bar{N} + 2)}{(\bar{N} - 2)tg \frac{\bar{\lambda}_k a}{2}} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \frac{(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_m^2)}{\Delta} \sin \frac{\bar{\lambda}_m a}{2} \sin \frac{\lambda_m a}{2} \times \\ \left. \times \left(\frac{\bar{N} - 2}{\bar{\lambda}_m^2 (\lambda_m^2 - \lambda_k^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)} + \frac{N - 2}{\lambda_m^2 (\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_k^2)} \right) \right\}.$$

Итак, для второго приближения требуется вычислить две суммы S_1 и S_2 .

$$S_1 = 4\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k^2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \frac{(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_m^2)}{\Delta} \left(\frac{\lambda_m a (\bar{N} - 2) \sin \frac{\bar{\lambda}_m a}{2} \cos \frac{\lambda_m a}{2}}{\bar{\lambda}_m^2 (\lambda_m^2 - \lambda_k^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)} + \right. \\ \left. + \frac{\bar{\lambda}_m a (N - 2) \sin \frac{\lambda_m a}{2} \cos \frac{\bar{\lambda}_m a}{2}}{\lambda_m^2 (\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_k^2)} \right),$$

$$S_2 = \frac{4\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k^3 a (\bar{N} + 2)}{(\bar{N} - 2) \bar{\lambda}_k \frac{a}{2}} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \frac{(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_m^2)}{\Delta} \sin \frac{\bar{\lambda}_m a}{2} \sin \frac{\lambda_m a}{2} \times$$

$$\times \left(\frac{\bar{N} - 2}{\bar{\lambda}_m^2 (\lambda_m^2 - \lambda_k^2) (\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)} + \frac{N - 2}{\lambda_m^2 (\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_k^2) (\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_k^2)} \right).$$

Вычисляем первую сумму S_1 :

$$S_1 \Big|_{m=2}^{k=1} = 0,09, \quad S_1 \Big|_{m=3}^{k=1} = 0,0027175,$$

$$S_1 \Big|_{m=1}^{k=2} = -2,173981, \quad S_1 \Big|_{m=3}^{k=2} = 0,231752.$$

Вычисляем для тех же значений m и k сумму S_2 :

$$S_2 \Big|_{m=2}^{k=1} = (9,08268 - 36,342154i)10^{-3};$$

$$S_2 \Big|_{m=3}^{k=1} = (4,9707193 - 19,889129i)10^{-4};$$

$$S_2 \Big|_{m=1}^{k=2} = 0,97722779 - 0,97321465i;$$

$$S_1 \Big|_{m=3}^{k=2} = (-0,1339405 + 0,1334150i)10^{-2}.$$

Итак, второе приближение при учете лишь одного корня дает следующее значение напряжения σ_y в точке $x = 0, y = \pm a/2$:

$$\sigma_y = -\frac{qa^2}{6} - 0,10680813qa^2 \operatorname{Re}(1 - 1,321437i) \times$$

$$\times (1 - 0,09 - 0,00271754 + 0,00908268 - 0,03634215i +$$

$$+ 0,00049707 - 0,0019889i) \cong -0,259qa^2.$$

Погрешность при этом составляет 3,6 процента.

Второе приближение при учете двух корней

$$\begin{aligned} \sigma_y = & -0,259qa^2 - 0,0045552qa^2 \operatorname{Re}(1 - 4,7131985i)(1 + 2,1739181 - \\ & - 0,23175205 + 0,97722779 - 0,97321465i - 0,0013394015 + \\ & + 0,0013341505i) = -0,259qa^2 - 0,0045552qa^2 \times \\ & \times \operatorname{Re}(1 - 4,7131985i)(3,9180544 - 0,9718805i) = -0,255qa^2, \end{aligned}$$

что дает лишь 2 процента погрешности.

Как видим, второе приближение для случая нагружения достаточно гладкой параболической нагрузкой позволяет получить хорошее решение задачи при учете лишь нескольких первых корней трансцендентного уравнения $sh\lambda a + \lambda a = 0$. Этот вывод подтверждается и при вычислении напряжения σ_y в других точках границы $y = \pm a/2$.

При первом приближении и учете одного корня

$$\begin{aligned} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) &= -qa^2\left(\frac{1}{6} - 0,223\right) = 0,0564qa^2\left(\sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0\right), \\ \sigma_y\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right) &= -qa^2\left(\frac{1}{6} + 0,323\right) = -0,199qa^2, \\ \left(\sigma_y\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right) = -0,1875qa^2\right). \end{aligned}$$

При втором приближении и учете одного корня

$$\begin{aligned} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) &= -\frac{qa^2}{6} + qa^2 \operatorname{Re}(0,2230487 - 0,11002786i)(0,91686221 - \\ & - 0,038331i) = -qa^2\left(\frac{1}{6} - 0,20028745\right) = 0,03362qa^2, \\ \sigma_y\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right) &= -\frac{qa^2}{6} - qa^2 \operatorname{Re}(0,03234614 + 0,00458602i) \times \\ & \times (0,91686221 - 0,038331i) = -0,19649934qa^2. \end{aligned}$$

При втором приближении и учете двух корней

$$\sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0,03362qa^2 - 0,0045552qa^2 \operatorname{Re}(3,3287918 - 2,5814i) \times \\ \times (3,9180544 - 0,9718805i) = -0,01436176qa^2,$$

$$\sigma_y\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right) = -0,19649934qa^2 - 0,0045552qa^2 \operatorname{Re}(-0,98779034 + \\ + 4,0963831i) \cdot (3,9180544 - 0,9718805i) = -0,196qa^2.$$

Заметим, что в угловой точке $x = \pm a/2$, $y = \pm a/2$, как и следовало ожидать, обнаруживается медленная сходимость, причем с каждым приближением не только уменьшаются числовые значения напряжений $\sigma_y(a/2, a/2)$, но и меняется их знак.

Подводя итог вышеизложенному, отметим, что так подробно приведены вычислительные операции для того, чтобы убедиться в эффективности метода последовательных приближений применительно к функциональным уравнениям, полученным предлагаемым операторным методом. Как видим, ряды с комплексными членами не вызывают трудностей в вычислительных операциях. Требуется лишь соответствующая математическая культура обращения с ними.

Хорошая сходимость на границе гарантирует надежные и достаточно точные результаты внутри области.

Приведенный пример опровергает мнение об неэффективности неортогональных рядов. Секрет успеха заключается в той процедуре, которую осуществляем над неортогональными рядами. Предлагаемый операторный метод, следовательно, относится к одной из эффективных процедур, выполняемых над неортогональными рядами. Секрет успеха предлагаемого операторного метода составления функциональных уравнений и их решения объясняется, как увидим ниже, его тесной связью с обобщенной ортогональностью.

3.3.2. Обоснование функциональных уравнений для решения задачи о растяжении (сжатии) упругого квадрата

Ответим сначала на вопрос, можно ли вышеприведенные функциональные уравнения получить другим путем, например, методом ортогонализации. Оказывается, можно.

Для этой цели вычислим интегралы от гиперболических функций, зависящих от корней трансцендентного уравнения $sh\lambda a + \lambda a = 0$.

$$\int_0^a ch\lambda_k x (ch\lambda_m (x-a) - 1) dx = \begin{cases} 0, & m \neq k, \\ \frac{a}{2} (1 + ch\lambda_k a), & m = k \end{cases}$$

$$\int_0^a sh\lambda_k x sh\lambda_m (x-a) dx = \begin{cases} 0, & m \neq k, \\ -\frac{a}{2} (1 + ch\lambda_k a), & m = k \end{cases}$$

$$\int_0^a x sh\lambda_k x (ch\lambda_m (x-a) - 1) dx = \begin{cases} \frac{\lambda_m^2 a (1 + ch\lambda_k a)}{\lambda_k (\lambda_k^2 - \lambda_m^2)}, & m \neq k, \\ -\frac{3a}{4\lambda_k} (1 + ch\lambda_k a) - \frac{\lambda_k a^3}{4}, & m = k \end{cases};$$

$$\int_0^a x ch\lambda_k x sh\lambda_m (x-a) dx = \begin{cases} \frac{\lambda_m a (1 + ch\lambda_k a)}{\lambda_m^2 - \lambda_k^2}, & m = k, \\ \frac{a}{4\lambda_k} (1 + ch\lambda_k a + \lambda_k^2 a^2), & m \neq k \end{cases}.$$

Учитывая вышеприведенные интегралы, ортогонализируем уравнения равновесия на границе

$$\int_0^a \sigma_y \Big|_{y=\pm \frac{a}{2}} (ch\lambda_m (x-a) - 1) dx = 2(\gamma - 1) G \int_0^a \sum_{k=1}^{\infty} [2ch\lambda_k x +$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_k \left(2x \operatorname{sh} \lambda_k x - a \operatorname{ch} \lambda_k x \operatorname{cth} \frac{\lambda_k a}{2} \right) \lambda_k A_k \cos \frac{\lambda_k a}{2} (\operatorname{ch} \lambda_m (x-a) - 1) dx = \\
& = \int_0^a \left(q \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) - C \right) (\operatorname{ch} \lambda_m (x-a) - 1) dx, \quad C = -\frac{qa^2}{6}, \\
& \int_0^a \tau_{xy} \Big|_{y=\pm \frac{a}{2}} \operatorname{sh} \lambda_m (x-a) dx = 2(\gamma-1)G \int_0^a \sum_{k=1}^{\infty} \left[2 \operatorname{ch} \lambda_k x - \right. \\
& \left. - a \operatorname{sh} \lambda_k x \operatorname{cth} \frac{\lambda_k a}{2} \right] \lambda_k^2 A_k \sin \frac{\lambda_k a}{2} \operatorname{sh} \lambda_m (x-a) dx = 0.
\end{aligned}$$

В результате вычисления интегралов и последующих преобразований получим следующую систему функциональных уравнений:

$$\begin{aligned}
& (1 + \operatorname{ch} \lambda_k a) \lambda_k a A_k \cos \frac{\lambda_k a}{2} + \frac{4\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k a}{\bar{\lambda}_k^2 - \lambda_k^2} (1 + \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k a) \bar{A}_k \cos \frac{\bar{\lambda}_k a}{2} + \\
& + 4\lambda_k^2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m a (1 + \operatorname{ch} \lambda_m a) A_m \cos \frac{\lambda_m a}{2}}{\lambda_m^2 - \lambda_k^2} + \frac{\bar{\lambda}_m a (1 + \operatorname{ch} \bar{\lambda}_m a) \bar{A}_m \cos \frac{\bar{\lambda}_m a}{2}}{\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_k^2} \right) = \\
& = -\frac{qa}{(\gamma-1)G} \left(\frac{4}{\lambda_k^2} + \frac{a^2}{6} \right), \\
& - (1 + \operatorname{ch} \lambda_k a) A_k \sin \frac{\lambda_k a}{2} - \frac{4\bar{\lambda}_k^2}{\bar{\lambda}_k^2 - \lambda_k^2} (1 + \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k a) \bar{A}_k \sin \frac{\bar{\lambda}_k a}{2} - \\
& - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m^2 (1 + \operatorname{ch} \lambda_m a) A_m \sin \frac{\lambda_m a}{2}}{\lambda_m^2 - \lambda_k^2} + \frac{\bar{\lambda}_m^2 (1 + \operatorname{ch} \bar{\lambda}_m a) \bar{A}_m \sin \frac{\bar{\lambda}_m a}{2}}{\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_k^2} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Теперь умножим на сопряженные функции $ch\bar{\lambda}_m(x-a)-1$ и $sh\bar{\lambda}_m(x-a)$ и также проинтегрируем уравнения на границе.

$$\begin{aligned}
 & (1 + ch\bar{\lambda}_k a)\bar{\lambda}_k a\bar{A}_k \cos \frac{\bar{\lambda}_k a}{2} + \frac{4\bar{\lambda}_k^2 \lambda_k a}{\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2} (1 + ch\lambda_k a)A_k \cos \frac{\lambda_k a}{2} + \\
 & + 4\bar{\lambda}_k^2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m a (1 + ch\lambda_m a) A_m \cos \frac{\lambda_m a}{2}}{\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_k^2} + \frac{\bar{\lambda}_m a (1 + ch\bar{\lambda}_m a) \bar{A}_m \cos \frac{\bar{\lambda}_m a}{2}}{\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_k^2} \right) = \\
 & = -\frac{qa}{(\gamma-1)G} \left(\frac{4}{\bar{\lambda}_k^2} + \frac{a^2}{6} \right), \\
 & - (1 + ch\bar{\lambda}_k a)\bar{A}_k \sin \frac{\bar{\lambda}_k a}{2} - \frac{4\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2} (1 + ch\lambda_k a)A_k \sin \frac{\lambda_k a}{2} - \\
 & - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m^2 (1 + ch\lambda_m a) A_m \sin \frac{\lambda_m a}{2}}{\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_k^2} + \frac{\bar{\lambda}_m^2 (1 + ch\bar{\lambda}_m a) \bar{A}_m \sin \frac{\bar{\lambda}_m a}{2}}{\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_k^2} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Наконец, если выполнить соответствующие вычитания

$$\begin{aligned}
 & \int_0^a \sigma_y \Big|_{y=\pm \frac{a}{2}} \left((ch\lambda_m(x-a)-1) - (ch\bar{\lambda}_m(x-a)-1) \right) dx, \\
 & \int_0^a \tau_{xy} \Big|_{y=\pm \frac{a}{2}} \left((sh\lambda_m(x-a)) - (sh\bar{\lambda}_m(x-a)) \right) dx,
 \end{aligned}$$

то и получим функциональные уравнения, выведенные в предыдущем параграфе операторным методом:

$$\begin{aligned}
& (1 + ch\lambda_k a)\lambda_k a A_k \left(1 - \frac{4\bar{\lambda}_k^2}{\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2}\right) \cos \frac{\lambda_k a}{2} - \bar{\lambda}_k a (1 + ch\bar{\lambda}_k) \bar{A}_k \times \\
& \quad \times \left(1 - \frac{4\lambda_k^2}{\bar{\lambda}_k^2 - \lambda_k^2}\right) \cos \frac{\bar{\lambda}_k a}{2} + 4(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2) \times \\
& \quad \times \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m^3 a (1 + ch\lambda_m a) A_m \cos \frac{\lambda_m a}{2}}{(\lambda_m^2 - \lambda_k^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)} + \frac{\bar{\lambda}_m^3 a (1 + ch\bar{\lambda}_m a) \bar{A}_m \cos \frac{\bar{\lambda}_m a}{2}}{(\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_k^2)} \right) = \\
& \quad = -\frac{4q(\bar{\lambda}_k^2 - \lambda_k^2)a}{(\gamma - 1)G\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k^2}, \\
& - (1 + ch\lambda_k a) \left(1 - \frac{4\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2}\right) A_k \sin \frac{\lambda_k a}{2} + (1 + ch\bar{\lambda}_k a) \times \\
& \quad \times \left(1 - \frac{4\bar{\lambda}_k^2}{\bar{\lambda}_k^2 - \lambda_k^2}\right) \bar{A}_k \sin \frac{\bar{\lambda}_k a}{2} - 4(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2) \times \\
& \quad \times \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m^2 (1 + ch\lambda_m a) A_m \sin \frac{\lambda_m a}{2}}{(\lambda_m^2 - \lambda_k^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)} + \frac{\bar{\lambda}_m^2 (1 + ch\bar{\lambda}_m a) \bar{A}_m \sin \frac{\bar{\lambda}_m a}{2}}{(\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_k^2)} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Итак, предлагаемый операторный метод построения функциональных уравнений эквивалентен проведению обобщенной ортогонализации. На этом примере мы увидели важное преимущество операторного метода по сравнению с методом ортогонализации, так как, во-первых, освобождает нас от поиска обобщенной ортогональности, которую не всегда легко найти, во-вторых, освобождает нас от значительных математических выкладок, связанных с процессом ортогонализации, в-третьих, ввиду равносильности предлагаемого операторного способа (с помощью однократного оператора,

например, $\left(\frac{shd_x a + d_x a}{(d_x^2 - \lambda_k^2)(d_x^2 - \bar{\lambda}_k^2)} \right)$ и обобщенной ортогональности появляется уверенность в надежности и эффективности численной реализации метода. Применение двукратного оператора, например, $\frac{(shd_x a + d_x a)^2}{(d_x^2 - \lambda_k^2)^2 (d_x^2 - \bar{\lambda}_k^2)^2}$ [5], хотя и позволяет построить замкнутое решение задачи, но ухудшает сходимость, обнаруживая сильное осциллирование на границе [101]. Это можно объяснить, по-видимому, невозможностью найти обобщенную ортогональность, эквивалентную применению двукратного оператора, в результате чего изменяется норма и область сходимости.

3.3.3. Другие примеры применения однократного оператора к решению краевых задач теории упругости

Прежде всего, в целях исследования сходимости в случаях приложения сосредоточенных сил, рассмотрим задачу о сжатии упругого квадрата двумя сосредоточенными силами. Краевые условия записываются в виде

$$\sigma_y \Big|_{y=\pm \frac{a}{2}} = \frac{P}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P}{a} \cos \frac{2\pi n x}{a}, \quad \tau_{xy} \Big|_{y=\pm \frac{a}{2}} = 0.$$

Левые части функциональных уравнений остаются такими же, как и при действии параболической нагрузки. Изменяется лишь правая часть.

$$\begin{aligned} & \lambda_k a (1 + ch \lambda_k a) (N + 2) A_k \cos \frac{\lambda_k a}{2} - \bar{\lambda}_k a (1 + ch \bar{\lambda}_k a) \times \\ & \times (\bar{N} + 2) \bar{A}_k \cos \frac{\bar{\lambda}_k a}{2} + 4 (\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2) \times \end{aligned}$$

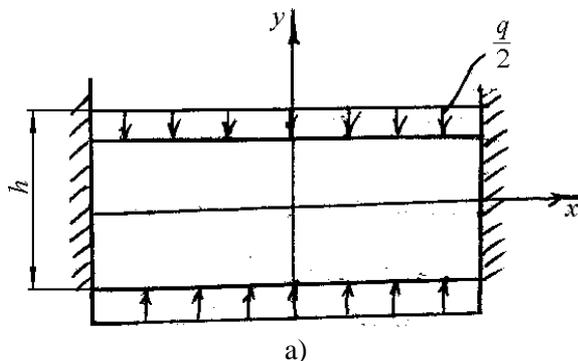
$$\begin{aligned}
& \times \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m^3 a (1 + ch\lambda_m a) A_m \cos \frac{\lambda_m a}{2}}{(\lambda_m^2 - \lambda_k^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)} + \frac{\bar{\lambda}_m^3 a (1 + ch\bar{\lambda}_m a) \bar{A}_m \cos \frac{\bar{\lambda}_m a}{2}}{(\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_k^2)} \right) = \\
& = - \frac{(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2) P}{(\gamma - 1) G a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi^2 n^2}{\left(\lambda_k^2 + \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} \right) \left(\bar{\lambda}_k^2 + \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} \right)} = \frac{P(ch\lambda_k a - ch\bar{\lambda}_k a)}{4(\gamma - 1)G}, \\
& (1 + ch\lambda_k x)(N - 2)A_k \sin \frac{\lambda_k a}{2} - (1 + ch\bar{\lambda}_k x) \times \\
& \quad \times (\bar{N} - 2)\bar{A}_k \sin \frac{\bar{\lambda}_k a}{2} + 4(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2) \times \\
& \times \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m^2 (1 + ch\lambda_m a) A_m \sin \frac{\lambda_m a}{2}}{(\lambda_m^2 - \lambda_k^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)} + \frac{\bar{\lambda}_m^2 (1 + ch\bar{\lambda}_m a) \bar{A}_m \sin \frac{\bar{\lambda}_m a}{2}}{(\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_k^2)} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Первое приближение решения этих функциональных уравнений при учете одного корня дает значение напряжения σ_y в центре квадрата $\sigma_y = 0,802P/a$, при учете двух корней $\sigma_y = 0,8335P/a$. Дальнейший учет корней мало что изменяет. Второе приближение ухудшает результаты. Для получения достаточно точных результатов требуется несколько приближений задачи и при учете десятка корней трансцендентного уравнения. Такое поведение решения для случая сосредоточенной силы, ступенчатой нагрузки, а также для непрерывной нагрузки, имеющей разрывы первого рода производной, вполне естественное. Численное исследование поведения решения для такой нагрузки мы проведем в гл. 5 с помощью функциональных уравнений на основе гиперголо-тригонометрических рядов, зависящих от вещественных корней характеристического трансцендентного уравнения. Обстоятельства, возникающие при решении задач в случае задания не вполне гладких граничных функций, нисколько не умаляют достоинства неортогональных рядов, зависящих от комплексных корней трансцендентного уравнения. Даже при применении ортогональных рядов решение задачи с не вполне

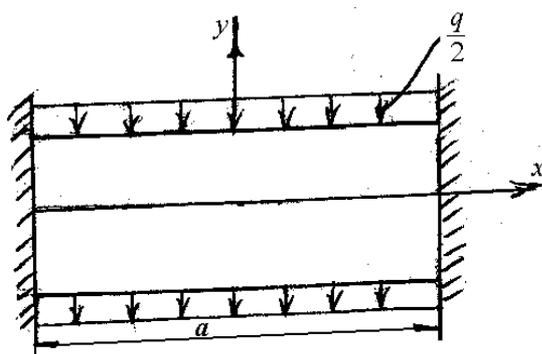
гладкими краевыми условиями требуется много членов ряда, чтобы получить достаточно точное решение.

Рассмотрим другие примеры составления функциональных уравнений для решения краевых задач теории упругости.

Растяжение (сжатие) прямоугольника равномерной симметричной нагрузкой при условии закрепления двух его противоположных сторон (рис. 3.2, а).



а)



б)

Рис. 3.2. Сжатие и изгиб прямоугольника равномерной нагрузкой при условии закрепления двух его противоположных сторон

Формулы для упругих перемещений

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(2ch\lambda_m y + (\gamma - 1)\lambda_m \left(2ysh\lambda_m y - hch\lambda_m \operatorname{csth} \frac{\lambda_m h}{2} \right) \right) \sin \lambda_m x,$$

$$v = \frac{qy}{2\gamma G} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m (2\gamma sh\lambda_m y - (\gamma - 1)\lambda_m \times \\ \times \left(2ych\lambda_m y - hsh\lambda_m ycth \frac{\lambda_m h}{2} \right)) \cos \lambda_m x,$$

где λ_m – корни уравнения $sh\lambda_m h + \lambda_m h = 0$.

Используем следующие операторы для нахождения неизвестных коэффициентов:

$$\frac{shd_y h + d_y h}{d_y (d_y^2 - \lambda_m^2)(d_y^2 - \bar{\lambda}_m^2)} u \Big|_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0,$$

$$\frac{shd_y h + d_y h}{(d_y^2 - \lambda_m^2)(d_y^2 - \bar{\lambda}_m^2)} v \Big|_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0, \quad d_y = \frac{d}{dy}.$$

Для этой цели находим операторные производные от функций $sh\lambda_m y$, $ch\lambda_m y$, $ysh\lambda_m y$, $ych\lambda_m y$:

$$\frac{(shd_y h + d_y h)sh\lambda_m y}{(d_y^2 - \lambda_m^2)(d_y^2 - \bar{\lambda}_m^2)} = \frac{h(1 + ch\lambda_m h)ch\lambda_m y}{2\lambda_m(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_m^2)},$$

$$\frac{(shd_y h + d_y h)ch\lambda_m y}{d_y (d_y^2 - \lambda_m^2)(d_y^2 - \bar{\lambda}_m^2)} = \frac{h(1 + ch\lambda_m h)ch\lambda_m y}{2\lambda_m^2(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_m^2)},$$

$$\frac{(shd_y h + d_y h)ysh\lambda_m y}{d_y (d_y^2 - \lambda_m^2)(d_y^2 - \bar{\lambda}_m^2)} = \frac{h(1 + ch\lambda_m h)}{2\lambda_m^2(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_m^2)} \left(ysh\lambda_m y - \frac{ch\lambda_m y}{\lambda_m} + \right. \\ \left. + \frac{h}{2} th \frac{\lambda_m h}{2} ch\lambda_m y - \frac{(5\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_m^2)ch\lambda_m y}{2\lambda_m(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_m^2)} \right),$$

$$\frac{(shd_y h + d_y h)ych\lambda_m y}{(d_y^2 - \lambda_m^2)(d_y^2 - \bar{\lambda}_m^2)} = \frac{h(1 + ch\lambda_m h)}{2\lambda_m(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_m^2)} \times$$

$$\times \left(ysh\lambda_m y + \frac{h}{2} th \frac{\lambda_m h}{2} ch\lambda_m y - \frac{(5\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_m^2)ch\lambda_m y}{2\lambda_m(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_m^2)} \right).$$

В результате применения вышеприведенных формул для операторных производных после некоторых преобразований получим функциональные уравнения относительно комплексно-сопряженных коэффициентов A_m и \bar{A}_m .

$$\frac{(1 + ch\lambda_m h)}{\lambda_m^2} \sin \frac{\lambda_m a}{2} \left(1 + \frac{4(\gamma - 1)\lambda_m^2}{(\gamma - 3)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_m^2)} \right) A_m - \frac{(1 + ch\bar{\lambda}_m h)}{\bar{\lambda}_m^2} \sin \frac{\bar{\lambda}_m a}{2} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{4(\gamma - 1)\bar{\lambda}_m^2}{(\gamma - 3)(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_m^2)} \right) \bar{A}_m - \frac{4(\gamma - 1)}{\gamma - 3} (\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_m^2) \times$$

$$\times \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{\infty} \left(\frac{(1 + ch\lambda_k h) \sin \frac{\lambda_k a}{2} A_k}{(\lambda_k^2 - \lambda_m^2)(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_m^2)} + \frac{(1 + ch\bar{\lambda}_k h) \sin \frac{\bar{\lambda}_k a}{2} \bar{A}_k}{(\bar{\lambda}_k^2 - \bar{\lambda}_m^2)(\bar{\lambda}_k^2 - \lambda_m^2)} \right) = 0,$$

$$\frac{(1 + ch\lambda_m h)}{\lambda_m} \cos \frac{\lambda_m a}{2} \left(1 + \frac{4(\gamma - 1)\lambda_m^2}{(\gamma + 1)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_m^2)} \right) A_m - \frac{(1 + ch\bar{\lambda}_m h)}{\bar{\lambda}_m} \cos \frac{\bar{\lambda}_m a}{2} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{4(\gamma - 1)\bar{\lambda}_m^2}{(\gamma + 1)(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_m^2)} \right) \bar{A}_m - \frac{4(\gamma - 1)}{\gamma + 1} (\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_m^2) \times$$

$$\times \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k (1 + ch\lambda_k h) \cos \frac{\lambda_k a}{2} A_k}{(\lambda_k^2 - \lambda_m^2)(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_m^2)} + \frac{\bar{\lambda}_k (1 + ch\bar{\lambda}_k h) \cos \frac{\bar{\lambda}_k a}{2} \bar{A}_k}{(\bar{\lambda}_k^2 - \bar{\lambda}_m^2)(\bar{\lambda}_k^2 - \lambda_m^2)} \right) =$$

$$= - \frac{2q(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_m^2)}{\gamma(\gamma + 1)G\lambda_m^2 \bar{\lambda}_m^2}.$$

Изгиб прямоугольника равномерной антисимметричной нагрузкой при условии закрепления его двух противоположных сторон показан на рис. 3.2, б.

Формулы для упругих перемещений при условии загрузки равномерной нагрузкой на сторонах

$$\begin{aligned}
 u = & -\frac{\gamma q x^3 y}{2(\gamma-1)Gh^3} + \frac{(3\gamma-2)qxy^3}{2(\gamma-1)Gh^3} - \frac{3qxy}{4Gh} + 2Cxy + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(2\gamma sh\lambda_n y + (\gamma-1)\lambda_n \left(2ych\lambda_n y - hsh\lambda_n ycth \frac{\lambda_n h}{2} \right) \right) \sin \lambda_n x, \\
 v = & -\frac{3q(x^2 - y^2)}{8Gh} + \frac{\gamma q x^4}{8(\gamma-1)Gh^3} + \frac{3\gamma_2 q x^2 y^2}{4(\gamma-1)Gh^3} - \\
 & - \frac{(3\gamma-4)qy^4}{8(\gamma-1)Gh^3} - C \left(x^2 + \frac{\gamma_2 y^2}{\gamma} \right) + D + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(2ch\lambda_n y - (\gamma-1)\lambda_n \left(2ysh\lambda_n y - hch\lambda_n ycth \frac{\lambda_n h}{2} \right) \right) \cos \lambda_n x,
 \end{aligned}$$

где λ_n – корни уравнения $sh\lambda_n h - \lambda_n h = 0$.

Константы C и D , не входящие в бесконечные ряды могут быть определены неоднозначно. Например, C можно определить операторным путем в результате применения оператора $\frac{sh\lambda_n h - \lambda_n h}{d_y^2}$, на

основании которого получаем зависимость между постоянной C и другими постоянными, входящими в бесконечные ряды. Другой способ определения постоянной C может быть основан на условии равенства нулю главного момента всех сил, действующих на сторонах прямоугольника, включая и напряжения в заделке. Дело в том, что бесконечные суммы характеризуют безмоментное напряженное состояние в любом сечении прямоугольника $x = \text{const}$. В этом легко

убедиться, вычислив интеграл $\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y dy$. Постоянная C при ис-

пользовании условия $M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y dy$ определяется независимо от

других постоянных. Удачное определение постоянных, не входящих в бесконечные суммы, позволяет улучшить первые приближения при решении функциональных уравнений. Так было и в задаче о сжатии квадрата параболической нагрузкой, когда для определения постоянной, не входящей в бесконечные суммы, использовалось условие равенства нулю главного вектора напряжений в сечении квадрата $y = \text{const}$, так как бесконечные суммы определяли са-

моуравновешенное напряженное состояние, т.е. $\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dx = 0$. В ре-

зультате было получено, как мы увидели, хорошее совпадение заданных и вычисленных напряжений σ_y на границе $y = \pm a/2$.

Константу D находим из кинематических условий на сторонах прямоугольника $x = \pm a/2$. Например, при $x = \pm a/2, y = 0, v = 0$.

Для нахождения комплексно-сопряженных коэффициентов B_n и \bar{B}_n используем следующие операторы:

$$\left. \frac{(shd_y h - d_y h)}{d_y^2 (d_y^2 - \lambda_n^2) (d_y^2 - \bar{\lambda}_n^2)} u \right|_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0,$$

$$\left. \frac{shd_y h - d_y h}{d_y^3 (d_y^2 - \lambda_n^2) (d_y^2 - \bar{\lambda}_n^2)} v \right|_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0.$$

В результате получаем следующую систему функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{1 - ch\lambda_n h}{\lambda_n} \left(N - \frac{\gamma - 3}{4\gamma - 4} \right) B_n \sin \frac{\lambda_n a}{2} - \frac{1 - ch\bar{\lambda}_n h}{\bar{\lambda}_n} \times \\ & \times \left(\bar{N} - \frac{\gamma - 3}{4\gamma - 4} \right) \bar{B}_n \sin \frac{\bar{\lambda}_n a}{2} + (\lambda_n^2 - \bar{\lambda}_n^2) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m (1 - ch\lambda_m h) B_m \sin \frac{\lambda_m a}{2}}{(\lambda_m^2 - \lambda_n^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_n^2)} + \frac{\bar{\lambda}_m (1 - ch\bar{\lambda}_m h) \bar{B}_m \sin \frac{\bar{\lambda}_m a}{2}}{(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_n^2)(\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_n^2)} \right) = \\
& = \frac{(3\gamma - 2)qa(\lambda_n^2 - \bar{\lambda}_n^2)}{8(\gamma - 1)^2 Gh\lambda_n^2 \bar{\lambda}_n^2}, \\
& \frac{1 - ch\lambda_n h}{\lambda_n^2} \left(N + \frac{\gamma - 3}{4\gamma - 4} \right) B_n \cos \frac{\lambda_n a}{2} - \frac{(1 - ch\bar{\lambda}_n h)}{\bar{\lambda}_n^2} \times \\
& \quad \times \left(\bar{N} + \frac{\gamma - 3}{4\gamma - 4} \right) \bar{B}_n \cos \frac{\bar{\lambda}_n a}{2} + (\lambda_n^2 - \bar{\lambda}_n^2) \times \\
& \quad \times \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \left(\frac{(1 - ch\lambda_m h) B_m \cos \frac{\lambda_m a}{2}}{(\lambda_m^2 - \lambda_n^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_n^2)} + \frac{(1 - ch\bar{\lambda}_m h) \bar{B}_m \cos \frac{\bar{\lambda}_m a}{2}}{(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_n^2)(\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_n^2)} \right) = \\
& = \frac{(3\gamma - 4)q(\lambda_n^4 - \bar{\lambda}_n^4)}{4(\gamma - 1)^2 G\lambda_n^4 \bar{\lambda}_n^4}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим сжатие (растяжение) конечного цилиндра равномерной нагрузкой при жестком закреплении его боковой цилиндрической поверхности.

Формулы для упругих перемещений.

$$\begin{aligned}
u &= -\frac{\gamma Cr}{\gamma_2 h} + \frac{qr}{4\gamma_2 G} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[2ch\lambda_k z + (\gamma - 1)\lambda_k \times \right. \\
& \quad \left. \times \left(2zsh\lambda_k z - hch\lambda_k zcth \frac{\lambda_k h}{2} \right) \right] J_1(\lambda_k r), \\
w &= \frac{2Cz}{h} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[2\gamma sh\lambda_k z - (\gamma - 1)\lambda_k \times \right. \\
& \quad \left. \times \left(2zch\lambda_k z - hsh\lambda_k zcth \frac{\lambda_k h}{2} \right) \right] J_0(\lambda_k r).
\end{aligned}$$

Операторы для составления функциональных уравнений

$$\frac{(shd_z h + d_z h)}{d_z (d_z^2 - \lambda_k^2)(d_z^2 - \bar{\lambda}_k^2)} u \Big|_{r=R} = 0,$$

$$\frac{(shd_z h + d_z h)}{(d_z^2 - \lambda_k^2)(d_z^2 - \bar{\lambda}_k^2)} w \Big|_{r=R} = 0.$$

Функциональные уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + ch\lambda_k h)}{\lambda_k^2} \left(N - \frac{1}{2\gamma - 2} \right) A_k J_1(\lambda_k R) - \frac{(1 + ch\bar{\lambda}_k h)}{\bar{\lambda}_k^2} \times \\ & \quad \times \left(\bar{N} - \frac{1}{2\gamma - 2} \right) \bar{A}_k J_1(\bar{\lambda}_k R) - (\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2) \times \\ & \times \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left[\frac{(1 + ch\lambda_m h) A_m J_1(\lambda_m R)}{(\lambda_m^2 - \lambda_k^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)} + \frac{(1 + ch\bar{\lambda}_m h) \bar{A}_m J_1(\bar{\lambda}_m R)}{(\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_k^2)} \right] = 0, \\ & \frac{(1 + ch\lambda_k h)}{\lambda_k} \left(N + \frac{1}{2\gamma - 2} \right) A_k J_0(\lambda_k R) - \frac{(1 + ch\bar{\lambda}_k h)}{\bar{\lambda}_k} \times \\ & \quad \times \left(\bar{N} + \frac{1}{2\gamma - 2} \right) \bar{A}_k J_0(\bar{\lambda}_k R) - (\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2) \times \\ & \times \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left[\frac{\lambda_m (1 + ch\lambda_m h) A_m J_0(\lambda_m R)}{(\lambda_m^2 - \lambda_k^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)} + \frac{\bar{\lambda}_m (1 + ch\bar{\lambda}_m h) \bar{A}_m J_0(\bar{\lambda}_m R)}{(\bar{\lambda}_m^2 - \bar{\lambda}_k^2)(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_k^2)} \right] = \\ & = -\frac{q(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2)}{2\gamma(\gamma - 1)G\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k^2}, \quad N = \frac{3}{4} + \frac{\lambda_k^2 + \bar{\lambda}_k^2}{2(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2)}. \end{aligned}$$

Изгиб конечного цилиндра равномерной нагрузкой при жестком закреплении его боковой цилиндрической поверхности.

Формулы для упругих перемещений

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{z}{h} \left(C_2 r - \frac{3\gamma q r^3}{16(\gamma-1)Gh^2} \right) + \frac{(3\gamma-2)qrz}{16(\gamma-1)Gh} \left(\frac{4z^2}{h^2} - 1 \right) + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[2\gamma sh\lambda_n z + (\gamma-1)\lambda_n \left(2zch\lambda_n z - hsh\lambda_n zcth \frac{\lambda_n h}{2} \right) \right] B_n J_1(\lambda_n r), \\
 w &= \frac{3\gamma q r^4}{64(\gamma-1)Gh^3} - \frac{q r^2}{4Gh} - \frac{C_2 r^2}{2h} + \left(\frac{\gamma_2 q r^2}{32(\gamma-1)Gh} + \frac{qh}{24\gamma G} - \frac{\gamma_2 h C_2}{12\gamma} \right) \times \\
 &\times \left(\frac{12z^2}{h^2} - 1 \right) - \frac{(3\gamma-4)qh}{(\gamma-1)G} \left(\frac{z^4}{h^4} - \frac{z^2}{2h^2} \right) + D_2 + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[2ch\lambda_n z - (\gamma-1)\lambda_n \left(2zsh\lambda_n z - hch\lambda_n zcth \frac{\lambda_n h}{2} \right) \right] B_n J_0(\lambda_n r), \\
 &\frac{(shd_z h - d_z h)}{d_z^2 (d_z^2 - \lambda_n^2) (d_z^2 - \bar{\lambda}_n^2)} u \Big|_{r=R} = 0, \\
 &\frac{(shd_z h - d_z h)}{d_z^3 (d_z^2 - \lambda_n^2) (d_z^2 - \bar{\lambda}_n^2)} w \Big|_{r=R} = 0, \\
 &\frac{(1 - ch\lambda_n h)}{\lambda_n} \left(N - \frac{\gamma-3}{4\gamma-4} \right) B_n J_1(\lambda_n R) - \frac{(1 - ch\bar{\lambda}_n h)}{\bar{\lambda}_n} \times \\
 &\times \left(\bar{N} - \frac{\gamma-3}{4\gamma-4} \right) \bar{B}_n J_1(\bar{\lambda}_n R) + (\lambda_n^2 - \bar{\lambda}_n^2) \times \\
 &\times \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \left[\frac{\lambda_m (1 - ch\lambda_m h) B_m J_1(\lambda_m R)}{(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) (\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_n^2)} + \frac{\bar{\lambda}_m (1 - ch\bar{\lambda}_m h) \bar{B}_m J_1(\bar{\lambda}_m R)}{(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_n^2) (\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_n^2)} \right] = \\
 &= \frac{(3\gamma-2)qR(\lambda_n^2 - \bar{\lambda}_n^2)}{8(\gamma-1)^2 Gh \lambda_n^2 \bar{\lambda}_n^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(1 - ch\lambda_n h)}{\lambda_n^2} \left(N + \frac{\gamma - 3}{4\gamma - 4} \right) B_n J_0(\lambda_n R) - \frac{(1 - ch\bar{\lambda}_n h)}{\bar{\lambda}_n^2} \times \\
& \quad \times \left(\bar{N} + \frac{\gamma - 3}{4\gamma - 4} \right) \bar{B}_n J_0(\bar{\lambda}_n R) + (\lambda_n^2 - \bar{\lambda}_n^2) \times \\
& \times \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \left[\frac{(1 - ch\lambda_m h) B_m J_0(\lambda_m R)}{(\lambda_m^2 - \lambda_n^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_n^2)} + \frac{(1 - ch\bar{\lambda}_m h) \bar{B}_m J_0(\bar{\lambda}_m R)}{(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_n^2)(\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_n^2)} \right] = \\
& \quad = \frac{(3\gamma - 4)q(\lambda_n^4 - \bar{\lambda}_n^4)}{4(\gamma - 1)^2 G \lambda_n^4 \bar{\lambda}_n^4}.
\end{aligned}$$

3.3.4. Операторный метод решения задачи о равновесии упругого прямоугольного параллелепипеда

В качестве примера решения задачи в неортогональных рядах, зависящих от комплексных корней трансцендентного уравнения, рассмотрим сжатие прямоугольного параллелепипеда при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned}
x &= \pm \frac{a}{2} \quad (\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0), \\
y &= \pm \frac{b}{2} \quad \left(\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = q \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right), \quad \tau_{yz} = 0 \right), \\
z &= \pm \frac{h}{2} \quad (\tau_{xz} = \tau_{yz} = w = 0),
\end{aligned}$$

т.е. на четырех гранях $x = \pm a/2$, $y = \pm b/2$ имеем несогласованные условия, а на гранях $z = \pm h/2$ – согласованные условия.

Используя ряды (3.6) решения задачи о равновесии упругого параллелепипеда при согласованных условиях при $z = \pm h/2$ $\tau_{xz} = \tau_{yz} = w = 0$, запишем выражения для напряжений

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= G \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(2y \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \frac{\sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}}{\sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}} \right) d_x \Phi_k + \right. \\
&\quad \left. + \left(d_x V_k - U_k \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right) \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right] \cos \frac{2\pi k z}{h}, \\
\sigma_y &= 2G \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(-\sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} y \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \frac{1}{\gamma - 1} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \Phi_k \right) + V_k \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right] \cos \frac{2\pi k z}{h}, \\
\tau_{yz} &= -G \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{4\pi k y}{h} \cos y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \frac{2\pi k}{h} \frac{\sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}}{\sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\gamma + 1)h}{(\gamma - 1)2\pi k} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right\} \Phi_k - \\
&\quad - \frac{h}{2\pi k} \left[\left(d_x^2 - \frac{8\pi^2 k^2}{h^2} \right) V_k + d_x U_k \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right] \times \\
&\quad \times \sin y \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \left. \right\} \sin \frac{2\pi k z}{h}.
\end{aligned}$$

На гранях $y = \pm b/2$ выполняем краевые условия

$$\tau_{xy}\Big|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0,$$

$$d_x \Phi_k \left(b \cos \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \frac{\sin \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}}{\sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}} \right) +$$

$$+ \left(d_x V_k - U_k \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right) \sin \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} = 0 \quad (k=0,1,2,\dots),$$

$$\tau_{yz}\Big|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0,$$

$$- \left[\frac{2\pi k b}{h} \cos \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \frac{2\pi k}{h} \frac{\sin \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}}{\sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}} - \frac{(\gamma+1)h}{(\gamma-1)2\pi k} \times \right.$$

$$\times \left. \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \sin \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right] \Phi_k + \frac{h}{2\pi k} \left[\left(d_x^2 - \frac{8\pi^2 k^2}{h^2} \right) V_k + \right.$$

$$\left. + d_x U_k \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right] \sin \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} = 0 \quad (k=0,1,2,\dots),$$

$$\sigma_y\Big|_{y=\pm\frac{b}{2}} = q \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(-b \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \sin \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{\gamma-1} \cos \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right) \Phi_k + \right. \\ \left. + 2V_k \cos \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right] \cos \frac{2\pi k z}{h} = q \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right).$$

Система операторных уравнений распадается на две независимые друг от друга группы при $k = 0$ и $k \neq 0$. Рассмотрим сначала группу уравнений при $k = 0$ (плоское деформированное состояние).

$$\left(b d_x \cos \frac{b}{2} d_x + \sin \frac{b}{2} d_x \right) \Phi_0 + d_x (V_0 - U_0) \sin \frac{b}{2} d_x = 0,$$

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1} d_x \sin \frac{b}{2} d_x \Phi_0 + d_x^2 (V_0 + U_0) \sin \frac{b}{2} d_x = 0,$$

$$\left(-b d_x \sin \frac{b}{2} d_x + \frac{2}{\gamma-1} \cos \frac{b}{2} d_x \right) \Phi_0 + 2d_x V_0 \cos \frac{b}{2} d_x = -\frac{q h^2}{6} \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right).$$

Решение системы состоит из суммы общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы. Найдем сначала частное решение неоднородной системы. Для этой цели разделим третье уравнение на оператор $\cos \frac{b}{2} d_x$, в результате чего получим

$$\left(-b d_x \operatorname{tg} \frac{b}{2} d_x + \frac{2}{\gamma-1} \right) \Phi_0^* + 2d_x V_0^* = -\frac{q h^2 x^2}{6} + \frac{q h^2 (a^2 - b^2)}{24}.$$

Далее, разделив первое уравнение на оператор $\sin \frac{b}{2} d_x$, а второе – на $d_x \sin \frac{b}{2} d_x$, и, сложив, получим

$$\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + 1 + bd_x \operatorname{ctg} \frac{b}{2} d_x \right) \Phi_0^* + 2d_x V_0^* = 0.$$

Вычитая полученные два последних уравнения, исключим V_0^*

$$-\left(bd_x \left(\operatorname{ctg} \frac{b}{2} d_x + \operatorname{tg} \frac{b}{2} d_x \right) + 2 \right) \Phi_0^* = -\frac{qh^2 x^2}{6} + \frac{qh^2 (a^2 - b^2)}{24}.$$

В результате преобразований имеем

$$(\sin bd_x + bd_x) \Phi_0^* = \frac{\sin bd_x}{2} \left(\frac{qh^2 x^2}{6} - \frac{qh^2 (a^2 - b^2)}{24} \right).$$

Кстати, отметим, что оператор левой части уравнения определяет однородное решение. Частное решение ищем в форме $\Phi_0^* = Cx^2 + D$. Находим

$$C = \frac{qh^2}{24}, \quad D = \frac{qh^2}{96} \left(\frac{b^2}{3} - a^2 \right),$$

$$\Phi_0^* = \frac{qh^2 x^2}{24} + \frac{qh^2}{96} \left(\frac{b^2}{3} - a^2 \right).$$

Теперь находим V_0^* из третьего уравнения основной системы, а U_0^* из первого.

$$\begin{aligned}
2d_x V_0^* &= -\frac{qh^2 x^2}{6} + \frac{qh^2(a^2 - b^2)}{24} - \frac{2}{\gamma - 1} \Phi_0^* + bd_x \operatorname{tg} \frac{b}{2} d_x \Phi_0^* = \\
&= -\frac{qh^2 x^2}{6} + \frac{qh^2(a^2 - b^2)}{24} - \frac{2}{\gamma - 1} \left[\frac{qh^2 x^2}{24} + \frac{qh^2}{96} \left(\frac{b^2}{3} - a^2 \right) \right] + \\
&+ bd_x \sin \frac{b}{2} d_x \left[\frac{qh^2 x^2}{24} + \frac{qh^2}{24} \left(\frac{b^2}{3} - \frac{a^2}{4} \right) \right] = -\frac{qh^2 x^2}{6} + \frac{qh^2(a^2 - b^2)}{24} - \\
&\quad - \frac{2}{\gamma - 1} \left[\frac{qh^2 x^2}{24} + \frac{qh^2}{96} \left(\frac{b^2}{3} - a^2 \right) \right] + \frac{qh^2 b^2}{24} = \\
&\quad = -\frac{(2\gamma - 1)qh^2}{12(\gamma - 1)} \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) - \frac{qb^2 h^2}{144(\gamma - 1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_x U_0^* &= -d_x V_0^* - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \Phi_0^* = \frac{(2\gamma - 1)qh^2}{24(\gamma - 1)} \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) + \frac{qh^2 b^2}{288(\gamma - 1)} - \\
&- \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \left(\frac{qh^2}{24} + \frac{qh^2}{96} \left(\frac{b^2}{3} - a^2 \right) \right) = \frac{qh^2}{24(\gamma - 1)} \left[\gamma_2 \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) - \gamma \frac{b^2}{12} \right].
\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения U_0^* , V_0^* , Φ_0^* в исходные операторные выражения для перемещений, получим

$$\begin{aligned}
u^* &= \frac{qh^2 x}{24(\gamma - 1)} \left(\gamma_2 \left(\frac{x^2}{3} - \frac{a^2}{4} \right) + \gamma \left(y^2 - \frac{b^2}{12} \right) \right), \\
v^* &= -\frac{qh^2 y}{24(\gamma - 1)} \left(\gamma \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) + \gamma_2 \left(\frac{y^2}{3} - \frac{b^2}{12} \right) \right).
\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что полученные неоднородные решения удовлетворяют уравнениям Ламе.

Напряжения, соответствующие частному решению неоднородных уравнений, вычисляются по формулам

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_x = \frac{qh^2}{6} \left(y^2 - \frac{b^2}{12} \right), \quad \sigma_y = -\frac{qh^2}{6} \left(x^2 - \frac{a^2}{12} \right),$$

$$\sigma_z = \frac{\gamma_2 qh^2}{12(\gamma-1)} \left(y^2 - x^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{12} \right).$$

Решение однородной системы ищем в виде

$$\Phi_0 = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos \lambda_m x,$$

где λ_m – корни уравнения $sh\lambda_m b + \lambda_m b = 0$.

Выражая функции U_0 и V_0 через Φ_0 имеем

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{b\lambda_m}{2} \operatorname{cth} \frac{b\lambda_m}{2} - \frac{1}{\gamma-1} \right) \frac{ch\lambda_m y}{\lambda_m} - ysh\lambda_m y \right] A_m \sin \lambda_m x,$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ych\lambda_m y - \left(\frac{b\lambda_m}{2} \operatorname{cth} \frac{b\lambda_m}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{sh\lambda_m y}{\lambda_m} \right] A_m \cos \lambda_m x.$$

Окончательно выражения для упругих перемещений и напряжений при $k = 0$ записываются в виде

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left[2ch\lambda_m y + (\gamma-1)\lambda_m \left(ysh\lambda_m y - bch\lambda_m y \operatorname{cth} \frac{b\lambda_m}{2} \right) \right] \sin \lambda_m x +$$

$$+ \frac{qh^2 x}{24(\gamma-1)} \left[\gamma \left(y^2 - \frac{b^2}{12} \right) + \gamma_2 \left(\frac{x^2}{3} - \frac{a^2}{4} \right) \right],$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left[2\gamma sh\lambda_m y - (\gamma - 1) \left(2ych\lambda_m y - bsh\lambda_m ycth \frac{b\lambda_m}{2} \right) \right] \cos \lambda_m x - \frac{qh^2 y}{24(\gamma - 1)} \left[\gamma_2 \left(\frac{y^2}{3} - \frac{b^2}{12} \right) + \gamma \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \right],$$

$$\tau_{xy} = 2(\gamma - 1)G \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 A_m \left(2ych\lambda_m y - bsh\lambda_m ycth \frac{b\lambda_m}{2} \right) \sin \lambda_m x,$$

$$\sigma_x = 2(\gamma - 1)G \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m A_m \left(2ch\lambda_m y + \lambda_m \left(2ysh\lambda_m y - bch\lambda_m ycth \frac{b\lambda_m}{2} \right) \right) \times \cos \lambda_m x + \frac{qh^2}{6} \left(y^2 - \frac{b^2}{12} \right),$$

$$\sigma_y = 2(\gamma - 1)G \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m A_m \left(2ch\lambda_m y - \lambda_m \left(2ysh\lambda_m y - bch\lambda_m ycth \frac{b\lambda_m}{2} \right) \right) \times \cos \lambda_m x - \frac{qh^2}{6} \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right),$$

$$\sigma_z = 4G \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m A_m ch\lambda_m y \cos \lambda_m x + \frac{\gamma_2 qh^2}{12(\gamma - 1)} \left(y^2 - x^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{12} \right),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Итак, при $k = 0$ получили краевую задачу для прямоугольника с несогласованными условиями. Отличие этой задачи от рассмотренной ранее задачи растяжения (сжатия) упругого квадрата параболической нагрузкой состоит в том, что теперь заранее выполняется

неоднородное условие при $y = \pm b/2$ $\sigma_y = -\frac{qh^2}{6} \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right)$, а усло-

вие отсутствия нагрузки при $x = \pm a/2$ равносильно нагружению па-

рабочей нагрузкой вида $\sigma_x = \frac{qh^2}{6} \left(y^2 - \frac{b^2}{12} \right)$. Решение полу-

ченной задачи ничем не отличаются от ранее рассмотренной.

Перейдем к изучению случая $k \neq 0$.

Система операторных уравнений

$$\begin{aligned} & \left(bd_x \cos \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + d_x \sin \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right) \Phi_k + \\ & + \left(d_x V_k - U_k \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right) \sin \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} = 0, \\ & \left[-\frac{2\pi k b}{h} \cos \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} - \frac{2\pi k \sin \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}}{h \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}} + \right. \\ & \left. + \frac{(\gamma+1)h}{(\gamma-1)2\pi k} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \sin \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right] \Phi_k + \\ & + \frac{h}{2\pi k} \left[d_x U_k \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \left(d_x^2 - \frac{8\pi^2 k^2}{h^2} \right) V_k \right] \sin \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} = 0, \\ & \left(-bd_x \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \sin \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \frac{2}{\gamma-1} \cos \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right) \Phi_k + \\ & + 2V_k \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \cos \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} = \frac{qh^2}{\pi^2 k^2} \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \cos \pi k. \end{aligned}$$

Сначала рассмотрим однородную систему, разделив первое и второе уравнение на $sh \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}$, а третье на $\cos \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}$.

$$\left(bd_x \operatorname{ctg} \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \frac{d_x}{\sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}} \right) \Phi_k +$$

$$+ d_x V_k - U_k \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} = 0,$$

$$\left[-\frac{2\pi k b}{h} \operatorname{ctg} \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} - \frac{2\pi k}{h \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}} + \frac{(\gamma + 1)h}{(\gamma - 1)2\pi k} \times \right.$$

$$\times \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \left. \right] \Phi_k + \frac{h}{2\pi k} \left[d_x U_k \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \right.$$

$$\left. + \left(d_x^2 - \frac{8\pi^2 k^2}{h^2} \right) V_k \right] = 0,$$

$$\left(-bd_x \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \frac{2}{\gamma - 1} \right) \times$$

$$\times \Phi_k + 2V_k \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} = 0.$$

Умножив первое уравнение на d_x , а второе на $\frac{2\pi k}{h}$ и сложив их, получим

$$\left[\left(d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2} \right) b \operatorname{ctg} \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right] \Phi_k + 2 \left(d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2} \right) V_k = 0.$$

Разделим последнее уравнение на $\sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}$ и вычтем из него третье. В результате имеем

$$\left(b \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \left(\operatorname{ctg} \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \operatorname{tg} \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right) + 2 \right) \Phi_k = 0$$

и после преобразований

$$\left(\sin b \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + b \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \right) \Phi_k = 0,$$

откуда

$$\Phi_k = \sum_{m=1}^{\infty} A_{mk} \cos x \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}},$$

где λ_m – корни уравнения $sh \lambda_m b + \lambda_m b = 0$.

Для функций U_k и V_k имеем выражения

$$U_k = \left[\frac{bd_x \operatorname{ctg} \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}}{2 \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}} - \frac{d_x}{(\gamma - 1) \left(d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2} \right)} \right] \Phi_k,$$

$$V_k = \left[\frac{b \operatorname{ctg} \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}}{2} - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}} \right] \Phi_k.$$

Учитывая, что при делении на $\sin \frac{b}{2} \sqrt{d_x^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}$ было потеряно решение для U_k и V_k , при $\Phi_k = 0$ имеем

$$U_k = \sum_{n=1}^{\infty} B_{nk} ch 2\pi x \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}}, \quad V_k = 0.$$

Запишем формулы для упругих перемещений и напряжений при $k \neq 0$ (объемное напряженно-деформированное состояние) при условии отсутствия нагрузки на гранях $y = \pm b/2$.

$$u = - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[ch \lambda_m y + (\gamma - 1) \lambda_m \left(y sh \lambda_m y - \frac{b}{2} ch \lambda_m y \operatorname{ctg} \frac{\lambda_m b}{2} \right) \right] \times \right. \\ \times \frac{A_{mk}}{(\gamma - 1) \lambda_m^2} \sin x \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} - B_{0k} sh \frac{2\pi k x}{h} - \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} B_{nk} \cos \frac{2\pi n y}{b} sh 2\pi x \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}} \right\} \cos \frac{2\pi k z}{h},$$

$$\begin{aligned}
v &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ych\lambda_m y - \left(\frac{b}{2} cth \frac{\lambda_m b}{2} - \frac{\gamma}{(\gamma-1)\lambda_m} \right) sh\lambda_m y \right] A_{mk} \times \\
&\quad \times \cos x \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \cos \frac{2\pi k z}{h}, \\
w &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\pi k}{\lambda_m h} \left[ysh\lambda_m y - \left(\frac{b}{2} cth \frac{\lambda_m b}{2} - \frac{1}{(\gamma-1)\lambda_m} \right) ch\lambda_m y \right] A_{mk} \times \right. \\
&\quad \times \cos x \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \frac{h}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}} B_{nk} ch 2\pi x \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}} \times \\
&\quad \left. \times \cos \frac{2\pi n y}{b} + B_{0k} ch \frac{2\pi k x}{h} \right\} \sin \frac{2\pi k z}{h}, \\
\tau_{xy} &= -G \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[ych\lambda_m y - bcth \frac{\lambda_m b}{2} sh\lambda_m y \right] A_{mk} \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \times \right. \\
&\quad \times \sin x \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{b} B_{nk} sh 2\pi x \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}} \sin \frac{2\pi n y}{b} \left. \right\} \cos \frac{2\pi k z}{h}, \\
\sigma_x &= 2G \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{4\pi^2 k^2}{(\gamma-1)\lambda_m^2 h^2} - 1 \right) ch\lambda_m y + \left(\frac{4\pi^2 k^2}{h^2} - 1 \right) \lambda_m \times \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left(ysh\lambda_m y - \frac{b}{2} ch\lambda_m ycth \frac{\lambda_m b}{2} \right) \right] A_{mk} \cos x \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \frac{2\pi k}{h} B_{0k} ch \frac{2\pi k x}{h} + \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi B_{nk} \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}} ch 2\pi x \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}} \cos \frac{2\pi n y}{b} \right\} \cos \frac{2\pi k z}{h},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & G \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\pi k}{\lambda_m h} \left[ysh\lambda_m y - \left(\frac{b}{2} cth \frac{\lambda_m b}{2} - \frac{1}{(\gamma-1)\lambda_m} \right) ch\lambda_m y \right] A_{mk} \times \right. \\ & \times \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \sin x \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi h}{k} \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2} \right) B_{nk} \times \\ & \left. \times \cos \frac{2\pi n y}{b} sh 2\pi x \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}} - \frac{4\pi k}{h} B_{0k} sh \frac{2\pi k x}{h} \right\} \sin \frac{2\pi k z}{h}. \end{aligned}$$

Теперь остается найти частное решение и выполнить условие отсутствия нагрузки на гранях $x = \pm a/2$. Частное решение строим в форме $\Phi_k = A_1 x^2 + B_1$, $U_k = A_2 x^2 + B_2$, $V_k = A_3 x^2 + B_3$. Используя краевые условия на гранях $y = \pm b/2$, находим из системы операторных уравнений коэффициенты $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$.

$$A_1 = -\frac{qh^2 \cos \pi k sh \frac{\pi kb}{h}}{\pi^2 k^2 \left(sh \frac{2\pi kb}{h} + \frac{2\pi kb}{h} \right) G}, \quad A_2 = \frac{hA_1}{2\pi k} \left[\frac{h}{(\gamma-1)\pi k} - bcth \frac{\pi kb}{h} \right],$$

$$A_3 = -A_1 \left(\frac{\pi kb}{h} cth \frac{\pi kb}{h} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \right), \quad B_2 = 0,$$

$$\begin{aligned} B_1 = & -\frac{bh}{4\pi k} A_1 cth \frac{\pi kb}{h} + \frac{bhA_1 ch \frac{2\pi kb}{h}}{\pi k \left(sh \frac{2\pi kb}{h} + \frac{2\pi kb}{h} \right)} + \\ & + \frac{qh^2 a^2 \cos \pi k sh \frac{\pi kb}{h}}{4\pi^2 k^2 \left(sh \frac{2\pi kb}{h} + \frac{2\pi kb}{h} \right) G}, \end{aligned}$$

$$B_3 = A_1 \left[\frac{b^2}{4} + \frac{(2\gamma - 1)bhcth \frac{\pi kb}{h}}{4(\gamma - 1)\pi k} \right] - \frac{\left(\frac{\pi kb}{h} cth \frac{\pi kb}{h} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)}{sh \frac{2\pi kb}{h} + \frac{2\pi kb}{h}} \times$$

$$\times \left[\frac{bhA_1 ch \frac{2\pi kb}{h}}{\pi k} + \frac{qh^2 a^2 \cos \pi ksh \frac{\pi kb}{h}}{4\pi^2 k^2 G} \right].$$

Частное решение записывается в виде

$$u^* = x \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_1 h}{\pi k} ysh \frac{2\pi ky}{h} + A_2 ch \frac{2\pi ky}{h} \right) \cos \frac{2\pi kz}{h},$$

$$v^* = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(A_1 x^2 + B_1 \right) ych \frac{2\pi ky}{h} - \frac{A_1 h y^2}{2\pi k} sh \frac{2\pi ky}{h} + \frac{h}{2\pi k} \left(A_3 x^2 + B_3 \right) \times \right.$$

$$\left. \times sh \frac{2\pi ky}{h} + \frac{h^2 A_3}{4\pi^2 k^2} \left(\frac{h}{2\pi k} sh \frac{2\pi ky}{h} - ych \frac{2\pi ky}{h} \right) \right] \cos \frac{2\pi kz}{h},$$

$$w^* = - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[y \left(A_1 x^2 + B_1 \right) sh \frac{2\pi ky}{h} - \frac{A_1 h y^2}{2\pi k} ch \frac{2\pi ky}{h} + \frac{h^2 y A_1}{4\pi^2 k^2} sh \frac{2\pi ky}{h} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{(\gamma + 1)h}{2\pi k} \left[\left(A_1 x^2 + B_1 \right) ch \frac{2\pi ky}{h} - \frac{A_1 h y}{2\pi k} sh \frac{2\pi ky}{h} \right] + \frac{h}{2\pi k} \times \right.$$

$$\left. \times \left[A_2 ch \frac{2\pi ky}{h} + \left(A_3 x^2 + B_3 \right) ch \frac{2\pi ky}{h} - \frac{h y A_3}{2\pi k} sh \frac{2\pi ky}{h} \right] \right\} \sin \frac{2\pi kz}{h},$$

$$\tau_{xy}^* = Gx \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{A_1 h}{\pi k} + \frac{2\pi k}{h} A_2 + \frac{A_3 h}{\pi k} \right) sh \frac{2\pi ky}{h} + 4A_1 ych \frac{2\pi ky}{h} \right] \cos \frac{2\pi kz}{h},$$

$$\sigma_x^* = \frac{2G}{\gamma-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_1 h}{2\pi k} ysh \frac{2\pi ky}{h} - (A_1 x^2 + B_1) ch \frac{2\pi ky}{h} \right] \cos \frac{2\pi kz}{h},$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^* = & -Gx \sum_{k=1}^{\infty} \left[4A_1 ysh \frac{2\pi ky}{h} + \frac{(\gamma+1)h}{(\gamma-1)\pi k} A_1 ch \frac{2\pi ky}{h} + \right. \\ & \left. + \frac{2A_2 \pi k}{h} ch \frac{2\pi ky}{h} + \frac{h}{2\pi k} ch \frac{2\pi ky}{h} \right] \sin \frac{2\pi kz}{h}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^* = & G \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\gamma-1} (A_1 x^2 + B_1) ch \frac{2\pi ky}{h} + \frac{4\pi ky}{h} (A_1 x^2 + B_1) \times \right. \\ & \times sh \frac{2\pi ky}{h} - \frac{\gamma h y A_1}{(\gamma-1)\pi k} sh \frac{2\pi ky}{h} + 2(A_3 x^2 + B_3) \times \\ & \left. \times ch \frac{2\pi ky}{h} - 2A_1 y^2 ch \frac{2\pi ky}{h} - \frac{h y}{\pi k} A_3 sh \frac{2\pi ky}{h} \right] \cos \frac{2\pi kz}{h}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz}^* = & -G \sum_{k=1}^{\infty} \left[(A_1 x^2 + B_1) \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} sh \frac{2\pi ky}{h} + \frac{4\pi ky}{h} ch \frac{2\pi ky}{h} \right) - \right. \\ & - 2A_1 y^2 sh \frac{2\pi ky}{h} + 2(A_3 x^2 + B_3) sh \frac{2\pi ky}{h} - \frac{h y}{\pi k} A_3 ch \frac{2\pi ky}{h} - \\ & \left. - \frac{\gamma h y A_1}{(\gamma-1)\pi k} ch \frac{2\pi ky}{h} - \frac{h^2 A_1 sh \frac{2\pi ky}{h}}{2(\gamma-1)\pi^2 k^2} + A_2 sh \frac{2\pi ky}{h} \right] \sin \frac{2\pi kz}{h}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^* = & -G \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (A_1 x^2 + B_1) \left[\frac{4\pi ky}{h} sh \frac{2\pi ky}{h} + \frac{2(2\gamma-1)}{(\gamma-1)} ch \frac{2\pi ky}{h} \right] - \right. \\ & - 2A_1 y^2 ch \frac{2\pi ky}{h} - \frac{\gamma h y A_1}{(\gamma-1)\pi k} sh \frac{2\pi ky}{h} + A_2 ch \frac{2\pi ky}{h} + \\ & \left. + 2(A_3 x^2 + B_3) ch \frac{2\pi ky}{h} - \frac{h y}{\pi k} A_3 sh \frac{2\pi ky}{h} \right\} \cos \frac{2\pi kz}{h}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание полученные формулы, запишем условия отсутствия нагрузки на гранях параллелепипеда $x = \pm a/2$.

$$\begin{aligned} \tau_{xy}|_{x=\frac{a}{2}} = & -G \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left(2ych\lambda_m y - bsh\lambda_m ycth \frac{\lambda_m b}{2} \right) A_{mk} \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \times \right. \\ & \times \sin \frac{a}{2} \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{b} B_{nk} \sin \frac{2\pi ny}{b} sh\pi a \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}} - \\ & \left. - \frac{a}{2} \left[\left(\frac{A_1 h}{\pi k} + \frac{2\pi k A_2}{h} + \frac{h A_3}{\pi k} \right) sh \frac{2\pi ky}{h} + 4A_1 ych \frac{2\pi ky}{h} \right] \right\} \cos \frac{2\pi kz}{h} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x|_{x=\frac{a}{2}} = & 2G \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{4\pi^2 k^2}{(\gamma-1)\lambda_m^2 h^2} - 1 \right) ch\lambda_m y + \left(\frac{4\pi^2 k^2}{\lambda_m^2 h^2} - 1 \right) \lambda_m \times \right. \right. \\ & \times \left(ysh\lambda_m y - \frac{b}{2} ch\lambda_m ycth \frac{\lambda_m b}{2} \right) \left. \right] A_{mk} \cos \frac{a}{2} \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \frac{2\pi k}{h} \times \\ & \times B_{0k} ch \frac{\pi ka}{h} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi B_{nk} \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}} \cos \frac{2\pi ny}{b} ch\pi a \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}} + \frac{1}{\gamma-1} \times \\ & \left. \times \left[\frac{A_1 h}{2\pi k} ysh \frac{2\pi ky}{h} - \left(A_1 \frac{a^2}{4} + B_1 \right) ch \frac{2\pi ky}{h} \right] \right\} \cos \frac{2\pi kz}{h} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz}|_{x=\frac{a}{2}} = & G \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\pi k}{\lambda_m h} \left[ysh\lambda_m y - \left(\frac{b}{2} cth \frac{\lambda_m b}{2} - \frac{1}{(\gamma-1)\lambda_m} \right) ch\lambda_m y \right] \times \right. \\ & \times A_{mk} \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \sin \frac{a}{2} \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} - \frac{4\pi k}{h} B_{0k} sh \frac{\pi ka}{h} - \\ & - \frac{2\pi h}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{2k^2}{h^2} \right) B_{nk} \cos \frac{2\pi ny}{b} sh\pi a \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}} - a \left[2A_1 ysh \frac{\pi ky}{h} + \right. \\ & \left. + \frac{(\gamma+1)hA_1}{(\gamma-1)2\pi k} ch \frac{2\pi ky}{h} + \frac{A_2 \pi k}{h} ch \frac{2\pi ky}{h} + \frac{h}{2\pi k} A_3 ch \frac{2\pi ky}{h} \right] \left. \right\} \sin \frac{2\pi kz}{h} = 0. \end{aligned}$$

Для составления функциональных уравнений с целью определения неизвестных постоянных коэффициентов методом ортогонализации сначала исключим B_{0k} и B_{nk} , используя, например, условие $\tau_{xz}|_{x=\pm\frac{a}{2}} = 0$. Для нахождения коэффициента B_{0k} запишем условие

$$\int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}|_{x=\pm\frac{a}{2}} \sin \frac{2\pi kz}{h} dydz = 0,$$

откуда

$$B_{0k} = -\frac{ha}{4\pi k b s h} \frac{\pi k a}{b} \left[A_1 \left(\frac{bh}{\pi k} ch \frac{\pi k b}{h} - \frac{(\gamma-3)h^2 sh \frac{\pi k b}{h}}{2(\gamma-1)\pi^2 k^2} \right) + \left(A_2 + \frac{h^2 A_3}{2\pi^2 k^2} \right) sh \frac{\pi k b}{h} \right] - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\gamma_2 sh \frac{\lambda_m b}{2} A_{mk}}{(\gamma-1)b\lambda_m^3 sh \frac{\pi k a}{h}} \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \sin \frac{a}{2} \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}.$$

При нахождении коэффициента B_{nk} выполняем следующее интегрирование:

$$\int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}|_{x=\pm\frac{a}{2}} \cos \frac{2\pi ny}{b} \sin \frac{2\pi kz}{h} dydz = 0,$$

откуда

$$B_{nk} = -\frac{ak \cos \pi n}{\pi^3 bh \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2} \right) \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{2k^2}{h^2} \right) sh \pi a \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}}} \left[\frac{\pi k b}{h} A_1 ch \frac{\pi k b}{h} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + A_1 \frac{(n^2 h^2 - k^2 b^2) sh \frac{\pi k b}{h}}{n^2 h^2 + k^2 b^2} + \left(\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} A_1 + \frac{A_2 \pi^2 k^2}{h^2} + \frac{A_3}{2} \right) sh \frac{\pi k b}{h} \Bigg] + \\
& + \frac{8k^2 \cos \pi n}{bh^2 \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{2k^2}{h^2} \right) sh \pi a \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{mk}}{\lambda_m \left(\frac{4\pi^2 n^2}{b^2} + \lambda_m^2 \right)} \times \\
& \times \left[\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{\lambda_m^2}{\frac{4\pi^2 n^2}{b^2} + \lambda_m^2} \right] sh \frac{\lambda_m b}{2} \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \sin \frac{a}{2} \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}.
\end{aligned}$$

Далее к уравнению $\tau_{xy}|_{x=\pm\frac{a}{2}} = 0$ применяем оператор

$$\frac{(shbd_y + bd_y)}{(d_y^2 - \lambda_p^2)(d_y^2 - \bar{\lambda}_p^2)} \tau_{xy}|_{x=\pm\frac{a}{2}} = 0,$$

а к уравнению $\sigma_x|_{x=\pm\frac{a}{2}} = 0$ оператор

$$\frac{d_y (shbd_y + bd_y)}{(d_y^2 - \lambda_p^2)(d_y^2 - \bar{\lambda}_p^2)} \sigma_x|_{x=\pm\frac{a}{2}} = 0.$$

В результате получаем следующие два функциональных уравнения для нахождения неизвестных комплексно-сопряженных коэффициентов A_{pk} и \bar{A}_{pk} :

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{(1 + ch\lambda_p b)}{2\lambda_p^2 (\lambda_p^2 - \bar{\lambda}_p^2)^2} (3\lambda_p^2 + \bar{\lambda}_p^2) A_{pk} b \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \sqrt{\lambda_p^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \sin \frac{a}{2} \sqrt{\lambda_p^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} - \\
-2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq p}}^{\infty} & \frac{(1 + ch\lambda_m b) A_{mk} b \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} \sin \frac{a}{2} \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}}{(\lambda_m^2 - \lambda_p^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_p^2)} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi^2 n^2 B_{nk} sh\pi a \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}}}{b^2 \left(\frac{4\pi^2 n^2}{h^2} + \lambda_p^2 \right) \left(\frac{4\pi^2 n^2}{h^2} + \bar{\lambda}_p^2 \right)} + \\
& + \frac{a}{\left(\frac{4\pi^2 k^2}{h^2} - \lambda_p^2 \right) \left(\frac{4\pi^2 k^2}{h^2} - \bar{\lambda}_p^2 \right)} \times \\
& \times \left[\left(\frac{A_1 h}{2\pi k} + \frac{\pi k A_2}{h} + \frac{A_3 h}{2\pi k} \right) \left(sh \frac{2\pi k b}{h} + \frac{2\pi k b}{h} \right) + 2A_1 b \left(1 + ch \frac{2\pi k b}{h} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{8\pi k \left(\lambda_p^2 + \bar{\lambda}_p^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2} \right) \left(sh \frac{2\pi k b}{h} + \frac{2\pi k b}{h} \right) A_1}{h \left(\frac{4\pi^2 k^2}{h^2} - \lambda_p^2 \right) \left(\frac{4\pi^2 k^2}{h^2} - \bar{\lambda}_p^2 \right)} \right] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Re \left\{ - \left[1 + \frac{4(\gamma - 3)\pi^2 k^2}{(\gamma - 1)\lambda_p^2 h^2} + 4 \left(\frac{4\pi^2 k^2}{\lambda_p^2 h^2} - 1 \right) \frac{\bar{\lambda}_p^2}{\lambda_p^2 - \bar{\lambda}_p^2} \right] \frac{1 + ch\lambda_p b}{\lambda_p^2 - \bar{\lambda}_p^2} A_{pk} \times \right. \\
\left. \times \cos \frac{a}{2} \sqrt{\lambda_p^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq p}}^{\infty} \left(\frac{4\pi^2 k^2}{\lambda_m^2 h^2} - 1 \right) \frac{\lambda_m^2 (1 + ch\lambda_m b) A_{mk} \cos \frac{a}{2} \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2}}}{(\lambda_m^2 - \lambda_p^2)(\lambda_m^2 - \bar{\lambda}_p^2)} - \\
& - \frac{16\pi^3}{b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 B_{nk} \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}} ch\pi a \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}}}{\left(\frac{4\pi^2 n^2}{h^2} + \lambda_p^2 \right) \left(\frac{4\pi^2 n^2}{h^2} + \bar{\lambda}_p^2 \right)} + \\
& + \frac{1}{(\gamma - 1) \left(\frac{4\pi^2 k^2}{h^2} - \lambda_p^2 \right) \left(\frac{4\pi^2 k^2}{h^2} - \bar{\lambda}_p^2 \right)} \cdot \frac{2\pi k}{h} \times \\
& \times \left[\frac{A_1 h \left(1 + ch \frac{2\pi kb}{h} \right)}{\pi k} - \frac{8\pi k \left(\lambda_p^2 + \bar{\lambda}_p^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{h^2} \right) \left(sh \frac{2\pi kb}{h} + \frac{2\pi kb}{h} \right) A_1}{h \left(\frac{4\pi^2 k^2}{h^2} - \lambda_p^2 \right) \left(\frac{4\pi^2 k^2}{h^2} - \bar{\lambda}_p^2 \right)} \right] - \\
& - \frac{2\pi k \left(A_1 \frac{a^2}{2} + 2B_1 \right) \left(sh \frac{2\pi kb}{h} + \frac{2\pi kb}{h} \right)}{bh(\gamma - 1) \left(\frac{4\pi^2 k^2}{h^2} - \lambda_p^2 \right) \left(\frac{4\pi^2 k^2}{h^2} - \bar{\lambda}_p^2 \right)} \Bigg\} = 0.
\end{aligned}$$

Итак, можно считать, что задача о равновесии параллелепипеда с несогласованными краевыми условиями на четырех гранях принципиально разрешена в неортогональных рядах, зависящих от комплексных корней трансцендентного уравнения. Полученные функциональные уравнения не встречают трудностей при численной реализации. Проходит все тот же метод последовательных приближений, который для гладких граничных условий быстро сходится, разумеется, при краевых условиях одного и того же вида. В случае раздела вида краевых условий имеем особенности в точках перехода от одних условий к другим. Задачи такого рода в данной работе не рассматриваются.

Пока остается открытым вопрос для задачи о равновесии параллелепипеда с несогласованными краевыми условиями на всех его шести гранях. В этом случае при точном выполнении краевых условий на четырех гранях возникает новое трансцендентное уравнение, зависящее от комплексных корней предыдущего уравнения.

Глава 4. ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО СЛОЯ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В литературе имеется большое количество работ, посвященных приведению трехмерных задач теории упругости к одномерным на основе вариационного уравнения Лагранжа. Это в основном работы В.З.Власова и его последователей [52, 152, 158]. В качестве аппроксимирующих функций в указанных работах принимались функции из априорных соображений на основании вводимых гипотез относительно кинематики элементарной полоски. Никаким краевым условиям эти аппроксимирующие функции не подчинялись, причем для них допускались разрывы 1 рода. Поэтому говорить о какой-то математической строгости приведения трехмерной задачи к одномерной в этих работах не приходится. Можно лишь говорить о корректности с позиций строительной механики и тех гипотез, которые положены в ее основу.

Применение стандартных полных рядов в качестве аппроксимирующих функций и составление уравнений связей на основе поверхностных условий равновесия и закрепления тела позволят отказаться от различных гипотез и строить решение, обеспечивающее выполнение краевых условий и условий равновесия внутри в той или иной форме и тем самым дающее надежные результаты для практики.

4.1. Применение рядов Фурье для изучения напряженно-деформированного состояния цилиндрического тела на основе вариационного уравнения равновесия элементарного слоя

Покажем это на примере равновесия упругого параллелепипеда.

$$\bar{u} = \bar{U}_0 + \frac{2z}{h} \bar{U}_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{12z^2}{h^2} - 1 \right) \bar{U}_2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\bar{U}_{is} \sin \frac{2\pi iz}{h} + \bar{U}_{ic} \cos \frac{2\pi iz}{h} \right),$$

$$\bar{U}_0 = iU_0 + jV_0 + kW_0, \quad \bar{U}_1 = iU_1 + jV_1 + kW_1, \quad \bar{U}_2 = iU_2 + jV_2 + kW_2,$$

$$\bar{U}_{is} = iU_{is} + jV_{is} + kW_{is}, \quad \bar{U}_{ic} = iU_{ic} + jV_{ic} + kW_{ic}.$$

Как ранее указывалось, функции $U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2$ находятся из условий на торцах $z = \pm h/2$. Для остальных функций строим ряды аппроксимирующих функций по координате y в случае параллелепипеда или по полярному углу θ в случае кругового цилиндра также с дополнительными членами в виде полиномов Лежандра.

$$\begin{aligned} \bar{U}_0 = & \bar{U}_{00} + \frac{2y}{b}\bar{U}_{01} + \frac{1}{2}\left(\frac{12y^2}{b^2} - 1\right)\bar{U}_{02} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\bar{U}_{0ks}\sin\frac{2\pi ky}{b} + \bar{U}_{0kc}\cos\frac{2\pi ky}{b}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_{is} = & \bar{U}_{is0} + \frac{2y}{b}\bar{U}_{is1} + \frac{1}{2}\left(\frac{12y^2}{b^2} - 1\right)\bar{U}_{is2} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\bar{U}_{isks}\sin\frac{2\pi ky}{b} + \bar{U}_{iskc}\cos\frac{2\pi ky}{b}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_{ic} = & \bar{U}_{ic0} + \frac{2y}{b}\bar{U}_{ic1} + \frac{1}{2}\left(\frac{12y^2}{b^2} - 1\right)\bar{U}_{ic2} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\bar{U}_{icks}\sin\frac{2\pi ky}{b} + \bar{U}_{ickc}\cos\frac{2\pi ky}{b}\right), \end{aligned}$$

где векторы \bar{u} с любыми индексами раскладывают соответственно по осям координат $u = iU + jV + kW$, а функции $U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2$ раскладываются в обычные ряды Фурье без дополнительных членов.

Итого, получим все 63 обобщенные перемещения:

$U_{10}, V_{10}, W_{10}, U_{20}, V_{20}, W_{20}, U_{1s}, V_{1s}, W_{1s}, U_{2s}, V_{2s}, W_{2s}, U_{1c}, V_{1c}, W_{1c},$
 $U_{2c}, V_{2c}, W_{2c}, U_{00}, V_{00}, W_{00}, U_{01}, V_{01}, W_{01}, U_{02}, V_{02}, W_{02}, U_{0ks}, V_{0ks}, W_{0ks},$
 $U_{0kc}, V_{0kc}, W_{0kc}, U_{is0}, V_{is0}, W_{is0}, U_{is1}, V_{is1}, W_{is1}, U_{is2}, V_{is2}, W_{is2}, U_{isks}, V_{isks},$

$W_{isks}, U_{iskc}, V_{iskc}, W_{ickc}, U_{icks}, V_{icks}, W_{icks}, U_{ickc}, V_{ickc}, W_{ickc}, U_{ic0}, V_{ic0}, W_{ic0}, U_{ic1}, V_{ic1}, W_{ic1}, U_{ic2}, V_{ic2}, W_{ic2}$.

Для их определения имеем 27 уравнений на основе вариационного уравнения равновесия элементарного слоя:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_F (T \cdot i) \cdot \delta \bar{u} dF - \int_F T \cdot \delta E dF + \int_F \left(\bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \bar{u} dF + \oint_S \bar{F}_n \cdot \delta \bar{u} dS = 0.$$

Ввиду полноты ряда Фурье внутри области в качестве возможных перемещений берем члены ряда Фурье без дополнительных слагаемых, т.е.

$$\delta \bar{u} \left(1, \sin \frac{2\pi iz}{h}, \cos \frac{2\pi iz}{h}, \sin \frac{2\pi ky}{b}, \cos \frac{2\pi ky}{b}, \sin \frac{2\pi iz}{h} \sin \frac{2\pi ky}{b}, \right. \\ \left. \sin \frac{2\pi iz}{h} \cos \frac{2\pi ky}{b}, \cos \frac{2\pi iz}{h} \sin \frac{2\pi ky}{b}, \cos \frac{2\pi iz}{h} \cos \frac{2\pi ky}{b} \right).$$

Остальные уравнения составляем из интегральных условий равновесия на гранях $z = \pm h/2$ при возможных перемещениях $\left(1, \sin \frac{2\pi ky}{b}, \cos \frac{2\pi ky}{b} \right)$ и на гранях $y = z = \pm b/2$ при возможных перемещениях $\left(1, \sin \frac{2\pi iz}{h}, \cos \frac{2\pi iz}{h} \right)$. В случае согласованных условий на гранях $z = \pm h/2$ функции $U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2$ не раскладываются в ряды Фурье, а находятся сразу из условий на торцах и равны

$$U_1 = \frac{u_z^+ - u_z^-}{2}, \quad V_1 = \frac{v_z^+ - v_z^-}{2}, \quad W_1 = \frac{w_z^+ - w_z^-}{2},$$

$$U_2 = \frac{h}{12} \left[\frac{x_z^+ + x_z^-}{G} - \frac{\partial}{\partial x} (w_z^+ - w_z^-) \right],$$

$$V_2 = \frac{h}{12} \left[\frac{y_z^+ + y_z^-}{G} - \frac{\partial}{\partial y} (w_z^+ - w_z^-) \right],$$

$$W_2 = \frac{h}{12\gamma} \left[\frac{z^+ + z^- + \sigma(\tau^+ + \tau^-)}{G} - \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x} (u_z^+ - u_z^-) - \gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} (v_z^+ - v_z^-) \right].$$

Если имеются согласованные условия не только на гранях $z = \pm h/2$, но и на гранях $y = z = \pm b/2$, то все дополнительные функции находятся сразу из условий на поверхности.

Отметим, что при согласованных условиях на торцах $z = \pm h/2$ вследствие ортогональности рядов Фурье система дифференциальных уравнений внутри и на поверхности распадается на восемь независимых друг от друга подгрупп, характеризующих четыре группы деформации упругого параллелепипеда: растяжение (сжатие), изгиб в двух плоскостях и кручение (сдвиг). Дадим краткую характеристику этих подгрупп.

1. $U_{00}, U_{02}, V_{01}, U_{0kc}, V_{0ks}$ – характеризуют плоское растяжение (сжатие), независимое от координаты z .

2. $U_{ic0}, U_{ic2}, V_{ic1}, W_{is0}, W_{is2}, U_{ickc}, V_{icks}, W_{iskc}$ характеризуют объемное растяжение (сжатие).

3. W_{01}, W_{0ks} – кручение, независимое от координаты z .

4. $U_{is1}, V_{is0}, V_{is2}, W_{ic1}, U_{isks}, V_{iskc}, W_{icks}$ – трехмерное кручение.

5. W_{00}, W_{02}, W_{0kc} – независимый от координаты z чистый сдвиг.

6. $U_{is0}, U_{is2}, V_{is1}, W_{ic0}, W_{ic2}, U_{iskc}, V_{isks}, W_{ickc}$ – трехмерный изгиб при сохранении в плоскости XOZ сечения тела.

7. $U_{01}, V_{00}, V_{02}, U_{0ks}, V_{0kc}$ – независимый от координаты z изгиб в плоскости XOY .

8. $U_{ic1}, V_{ic0}, V_{ic2}, W_{is1}, U_{icks}, V_{ickc}, W_{isks}$ – трехмерный изгиб при сохранении в плоскости XOY сечения тела.

Приведем системы дифференциальных уравнений для некоторых подгрупп.

Группа уравнения растяжения (сжатия), подгруппы 1 и 2:

$$V_{01} = \frac{1}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} (v_y^+ - v_y^-) dz, \quad U_{02} = -\frac{b}{6} \frac{\partial V_{01}}{\partial x} + \frac{b}{12Gh} \int_{-h/2}^{h/2} (x_y^+ + x_y^-) dz,$$

$$V_{ic1} = -\frac{6 \cos \pi i}{\pi^2 i h} V_2 \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} + \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (v_{y^+} - v_{y^-}) \cos \frac{2\pi i z}{h} dz,$$

$$U_{ic2} = -\frac{b}{6} \frac{\partial V_{ic1}}{\partial x} + \frac{b}{12h} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{G} (x_{y^+} + x_{y^-}) \cos \frac{2\pi i z}{h} dz,$$

$$W_{ic2} = \frac{\pi b i}{3h} + \frac{b}{6Gh} \int_{-h/2}^{h/2} (z_{y^+} + z_{y^-}) \sin \frac{2\pi i z}{h} dz.$$

Остальные обобщенные перемещения U_{00} , U_{ic0} , U_{0kc} , U_{ickc} , V_{0ks} , V_{icks} , W_{is0} , W_{iskc} находятся из следующих уравнений равновесия внутри параллелепипеда:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right)^2 W_{is0} = -\frac{24}{b^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) W_{is2} + \\ & + \frac{\cos \pi i}{\gamma \pi b i} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\gamma \Delta - \frac{4\gamma_2 \pi^2 i^2}{h^2} \right) \Delta (w_z^+ - w_z^-) dy - \frac{4(\gamma-1)\pi i \cos \pi i}{\gamma G h^2 b} \times \\ & \times \int_{-b/2}^{b/2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (x_z^+ + x_z^-) + \frac{\partial}{\partial y} (x_{y^+} + x_{y^-}) \right] dy - \frac{4\pi i}{\gamma G h^2 b} \times \\ & \times \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ (\gamma-1) \left(\frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y} \right) + \left(\Delta - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) B \tau \right\} \cos \frac{2\pi i z}{h} + \\ & + \frac{h}{2\pi i} \left(\gamma \Delta - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) K_3 \sin \frac{2\pi i z}{h} \Big\} dy dz, \end{aligned}$$

$$\left(\gamma \frac{d^2}{dx^2} - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) U_{ic0} = -\frac{12}{b^2} U_{ic2} - \frac{2(\gamma-1)}{b} \frac{\partial V_{ic1}}{\partial x} - \frac{2\pi i}{h} (\gamma-1) \frac{\partial}{\partial x} W_{is0} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{6\cos\pi i}{\pi^2 b i^2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[\left(\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) U_2 + (\gamma-1) \frac{\partial^2 V_2}{\partial x \partial y} \right] dy + \\
& + \frac{2\cos\pi i}{\pi b i} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\partial}{\partial x} (w_z^+ - w_z^-) dy - \frac{2}{Gbh} \int_{-b/2}^{b/2} [(x_z^+ + x_z^-) \cos\pi i + \\
& \quad + \int_{-h/2}^{h/2} \left(K_1 - B \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) \cos \frac{2\pi i z}{h} dz] dy, \\
& \frac{d^2 U_0}{dx^2} = -\frac{1}{\gamma b h} \left\{ \int_{-b/2}^{b/2} \left[\gamma_2 \frac{\partial}{\partial x} (w_z^+ - w_z^-) + \frac{x_z^+ + x_z^-}{G} \right] dy + \right. \\
& \left. + \int_{-h/2}^{h/2} \left[\gamma_2 \frac{\partial}{\partial x} (v_y^+ - v_y^-) + \frac{x_y^+ + x_y^-}{G} \right] dz + \frac{1}{G} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left(K_1 - B \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) dy dz \right\}, \\
& \left(\gamma \frac{d^2}{dx^2} - \frac{4\pi^2 k^2}{b^2} \right) U_{0kc} + \frac{2(\gamma-1)\pi k}{b} \frac{dV_{0ks}}{dx} = -\frac{6\gamma \cos \pi k}{\pi^2 k^2} \frac{d^2}{dx^2} U_{02} - \\
& -\frac{2}{bh} \int_{-b/2}^{b/2} \left[\gamma_2 \frac{\partial}{\partial x} (w_z^+ - w_z^-) + \frac{x_z^+ + x_z^-}{G} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(K_1 - B \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) dz \right] \cos \frac{2\pi k y}{b} dy, \\
& -\frac{2(\gamma-1)\pi k}{b} \frac{dU_{0kc}}{dx} + \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{4\gamma\pi^2 k^2}{b^2} \right) U_{0ks} = \frac{12(\gamma-1)\cos\pi k}{\pi k} \frac{dU_{02}}{dx} + \\
& + \frac{2\cos\pi k}{\pi k} \frac{d^2 V_{01}}{dx^2} - \frac{2}{bh} \int_{-b/2}^{b/2} \left[\gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} (w_z^+ - w_z^-) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{G} \int_{-h/2}^{h/2} \left(K_2 - B \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) dz \left[\sin \frac{2\pi ky}{b} dy, \right. \\
& \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{4\pi^2 k^2}{b^2} - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right)^2 W_{iskc} = - \frac{6 \cos \pi k}{\pi^2 k^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) w_{is2} + \\
& + \frac{2 \cos \pi i}{\gamma \pi b i} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\gamma \Delta - \frac{4\gamma_2 \pi^2 i^2}{h^2} \right) \Delta (w_z^+ - w_z^-) \cos \frac{2\pi ky}{b} dy - \frac{8\pi i (\gamma - 1)}{\gamma G b h^2} \times \\
& \times \int_{-b/2}^{b/2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (x_z^+ + x_z^-) + \frac{\partial}{\partial y} (y_z^+ + y_z^-) \right] \cos \frac{2\pi ky}{b} dy - \frac{8\pi i (\gamma - 1)}{\gamma G b h^2} \times \\
& \times \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ (\gamma - 1) \left(\frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y} \right) + \left(\Delta - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) B \tau \right\} \cos \frac{2\pi iz}{h} + \\
& \left. + \frac{h}{2\pi i} \left(\gamma \Delta - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) K_3 \sin \frac{2\pi iz}{h} \right\} \cos \frac{2\pi ky}{b} dy dz, \\
& \left(\gamma \frac{d^2}{dx^2} - \frac{4\pi^2 k^2}{b^2} - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right)^2 U_{ickc} + \frac{2(\gamma - 1)\pi k}{b} \frac{dV_{icks}}{dx} = - \frac{2\pi i (\gamma - 1)}{bh} \frac{d}{dx} W_{iskc} - \\
& - \frac{6 \cos \pi k}{\pi^2 k^2} \left(\gamma \frac{d^2}{dx^2} - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) U_{ic2} - \frac{12(\gamma - 1)\pi i}{\pi^2 k^2 h} \frac{dW_{is2}}{dx} \cos \pi k - \\
& - \int_{-b/2}^{b/2} \frac{2 \cos \pi i}{\pi^2 i^2} \left[\left(\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) U_2 + (\gamma - 1) \frac{\partial^2 V_2}{\partial x \partial y} \right] \cos \frac{2\pi ky}{b} dy + \\
& + \frac{4 \cos \pi i}{bh} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\partial}{\partial x} (w_z^+ - w_z^-) \cos \frac{2\pi ky}{b} dy - \frac{4}{Gb h} \times \\
& \times \int_{-b/2}^{b/2} \left(x_z^+ + x_z^- \right) \cos \pi i + \int_{-h/2}^{h/2} \left(K_1 - B \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) \cos \frac{2\pi iz}{h} dz \left[\cos \frac{2\pi ky}{b} dy, \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2(\gamma-1)\pi k}{b} \frac{d}{dx} U_{ickc} + \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{4\gamma\pi^2 k^2}{b^2} - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right)^2 U_{icks} = \\
& = \frac{4(\gamma-1)\pi^2 ik}{bh} W_{iskc} + \frac{12(\gamma-1)\cos\pi k}{\pi kb} \frac{dU_{ic2}}{dx} + \frac{24(\gamma-1)i\cos\pi k}{bhk} W_{is2} + \\
& + \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) \frac{2\cos\pi k}{\pi k} V_{ic1} + \frac{4\cos\pi i}{bh} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\partial}{\partial y} (w_z^+ - w_z^-) \sin \frac{2\pi ky}{b} dy - \\
& - \frac{3\cos\pi i}{\pi^2 i^2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[(\gamma-1) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) V_2 \right] \sin \frac{2\pi ky}{b} dy - \\
& - \frac{4}{Gb h} \int_{-b/2}^{b/2} \left[(y_z^+ + y_z^-) \cos\pi i + \int_{-h/2}^{h/2} \left(K_2 - B \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) \cos \frac{2\pi iz}{h} dz \right] \sin \frac{2\pi ky}{b} dy,
\end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots$$

В приведенных уравнениях:

K_1, K_2, K_3 – проекции объемной нагрузки, G – модуль сдвига, τ – закон распределения температуры в упругом теле, $v_y^+ = -v_y^-$ – нормальные перемещения на гранях $y = \pm b/2$, $w_z^+ = -w_z^-$ – нормальные перемещения на гранях $z = \pm h/2$, $x_y^+ = x_y^-$, $z_y^+ = z_y^-$ – касательные напряжения на гранях $y = \pm b/2$, $x_z^+ = x_z^-$, $y_z^+ = y_z^-$ – касательные напряжения на гранях $z = \pm h/2$.

Как и следовало ожидать, мы получили систему дифференциальных уравнений конечного порядка благодаря выполнению согласованных краевых условий на гранях $z = \pm h/2$ и $y = \pm b/2$, а именно: при $z = \pm h/2$ $w = \pm w_z^+$, $\tau_{xz} = x_z^+$, $\tau_{yz} = y_z^+$, при $y = \pm b/2$ $v = \pm v_z^+$, $\tau_{xy} = x_y^+$, $\tau_{yz} = z_y^+$.

В результате решения уравнений получим следующие выражения для искомых перемещений:

$$\begin{aligned}
u &= A_0x + B_0 + U_{00}^* + \frac{1}{2} \left(\frac{12y^2}{b^2} - 1 \right) U_{02} + \frac{1}{2} \left(\frac{12z^2}{h^2} - 1 \right) U_2 + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_{0k} sh \frac{2\pi kx}{b} + B_{0k} ch \frac{2\pi kx}{b} + \right. \\
&\quad \left. + x \left(C_{0k} sh \frac{2\pi kx}{b} + D_{0k} ch \frac{2\pi kx}{b} \right) + U_{0kc}^* \right] \cos \frac{2\pi ky}{b} - \\
&\quad - \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \left[A_{i0} - \frac{(\gamma+1)hD_{i0}}{2\pi i(\gamma-1)} \right] ch \frac{2\pi ix}{h} + \left[B_{i0} - \frac{(\gamma+1)hC_{i0}}{2\pi i(\gamma-1)} \right] sh \frac{2\pi ix}{h} - U_{ic0}^* + \right. \\
&\quad \left. + x \left(C_{i0} ch \frac{2\pi ix}{h} + D_{i0} sh \frac{2\pi ix}{h} \right) \right\} \cos \frac{2\pi iz}{h} + \frac{1}{2} \left(\frac{12y^2}{b^2} - 1 \right) \sum_{i=1}^{\infty} U_{ic2} \cos \frac{2\pi iz}{h} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ E_{ik} sh 2\pi x \sqrt{\frac{i^2}{h^2} + \frac{k^2}{b^2}} + F_{ik} ch 2\pi x \sqrt{\frac{i^2}{h^2} + \frac{k^2}{b^2}} - \frac{hx}{i} \sqrt{\frac{i^2}{h^2} + \frac{k^2}{b^2}} [D_{ik} \times \right. \\
&\quad \left. \times sh 2\pi x \sqrt{\frac{i^2}{h^2} + \frac{k^2}{b^2}} + C_{ik} ch 2\pi x \sqrt{\frac{i^2}{h^2} + \frac{k^2}{b^2}}] + U_{ick}^* \right\} \cos \frac{2\pi ky}{b} \cos \frac{2\pi iz}{h}, \\
v &= \frac{2y}{b} V_{01} + \frac{1}{2} \left(\frac{12z^2}{h^2} - 1 \right) V_2 + \frac{2y}{b} \sum_{i=1}^{\infty} V_{ic1} \cos \frac{2\pi iz}{h} - \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[A_{0k} + \frac{(\gamma+1)bD_{0k}}{2\pi k(\gamma-1)} \right] ch \frac{2\pi kx}{b} + \left[B_{0k} + \frac{(\gamma+1)bC_{0k}}{2\pi k(\gamma-1)} \right] sh \frac{2\pi kx}{b} - V_{0ks}^* + \right. \\
&\quad \left. + x \left(C_{0k} ch \frac{2\pi kx}{b} + D_{0k} sh \frac{2\pi kx}{b} \right) \right\} \cos \frac{2\pi iz}{h} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{(\gamma+1)bhD_{ik}}{2\pi ki(\gamma-1)} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{biA_{ik}}{hk \sqrt{\frac{i^2}{h^2} + \frac{k^2}{b^2}}} - \frac{b}{k} E_{ik} \right] \sqrt{\frac{i^2}{h^2} + \frac{k^2}{b^2}} ch 2\pi x \sqrt{\frac{i^2}{h^2} + \frac{k^2}{b^2}} + \left[\frac{(\gamma+1)bhD_{ik}}{2\pi ki(\gamma-1)} - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. - \frac{biA_{ik}}{hk\sqrt{\frac{i^2}{h^2} + \frac{k^2}{b^2}}} - \frac{b}{k} F_{ik} \right] \sqrt{\frac{i^2}{h^2} + \frac{k^2}{b^2}} sh2\pi x \sqrt{\frac{i^2}{h^2} + \frac{k^2}{b^2}} + \frac{hkx}{bi} \times \\
& \times \left\{ C_{ik} sh2\pi x \sqrt{\frac{i^2}{h^2} + \frac{k^2}{b^2}} + D_{ik} ch2\pi x \sqrt{\frac{i^2}{h^2} + \frac{k^2}{b^2}} + V_{icks}^* \right\} \sin \frac{2\pi ky}{b} \cos \frac{2\pi iz}{h}, \\
& w = \frac{2z}{h} W_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{12y^2}{b^2} - 1 \right) \sum_{i=1}^{\infty} W_{is2} \sin \frac{2\pi iz}{h} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[A_{i0} sh \frac{2\pi ix}{h} + \right. \\
& + B_{i0} ch \frac{2\pi ix}{h} + x \left(C_{i0} sh \frac{2\pi ix}{h} + D_{i0} ch \frac{2\pi ix}{h} + \right) + W_{is0}^* \left. \right] \sin \frac{2\pi iz}{h} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left[A_{ik} sh2\pi x \sqrt{\frac{i^2}{h^2} + \frac{k^2}{b^2}} + B_{ik} ch2\pi x \sqrt{\frac{i^2}{h^2} + \frac{k^2}{b^2}} + W_{isk}^* + \right. \\
& \left. + x \left(C_{ik} sh2\pi x \sqrt{\frac{i^2}{h^2} + \frac{k^2}{b^2}} + D_{ik} ch2\pi x \sqrt{\frac{i^2}{h^2} + \frac{k^2}{b^2}} \right) \right] \cos \frac{2\pi ky}{b} \sin \frac{2\pi iz}{h},
\end{aligned}$$

где U_{00}^* , U_{0kc}^* , U_{ic0}^* , U_{ickc}^* , V_{0ks}^* , V_{icks}^* , W_{is0}^* , W_{iskc}^* – частные решения неоднородных уравнений при данной объемной, поверхностной и температурной нагрузке, $A_0, B_0, A_{0k}, B_{0k}, C_{0k}, D_{0k}, A_{i0}, B_{i0}, C_{i0}, D_{i0}, E_{ik}, F_{ik}, D_{ik}, C_{ik}$ – произвольные постоянные, определяемые из условий на гранях $x = 0$ и $x = a$.

Приведем пример. Упругий невесомый параллелепипед, нижняя грань которого $x = 0$ закреплена, а верхняя $x = a$ свободна, находится в абсолютно жестких гладких направляющих $z = \pm h/2$ и шероховатых направляющих $y = \pm b/2$, нагруженных касательной нагрузкой $T = x_y^+ = x_y^-$, равномерно распределенной по площади.

Из вышеприведенных уравнений находим:

$$U_{02} = \frac{bT}{6G}, \quad U_{00}^* = -\frac{Tx^2}{\gamma Gb}, \quad w = 0,$$

$$u = \frac{Tx(2a-x)}{\gamma Gb} + \frac{Tb}{12G} \left(\frac{12y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{Tb}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi k}{\pi^2 k^2 D} \left\{ A \left[xch \frac{2\pi kx}{b} - \frac{(\gamma+1)b}{(\gamma-1)2\pi k} sh \frac{2\pi kx}{b} \right] + Bxsh \frac{2\pi kx}{b} - Dch \frac{2\pi kx}{b} \right\} \cos \frac{2\pi ky}{b},$$

$$v = -\frac{Tb}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi k}{\pi^2 k^2 D} \left\{ Axsh \frac{2\pi kx}{b} + B \left[xch \frac{2\pi kx}{b} + \frac{(\gamma+1)b}{(\gamma-1)2\pi k} sh \frac{2\pi kx}{b} \right] - Dsh \frac{2\pi kx}{b} \right\} \sin \frac{2\pi ky}{b},$$

$$\sigma_x = \frac{2T(a-x)}{b} + 4T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi k}{\pi k D} \left\{ A \left[xsh \frac{2\pi kx}{b} - \frac{\gamma bch \frac{2\pi kx}{b}}{2(\gamma-1)\pi k} \right] + B \left[xch \frac{2\pi kx}{b} + \frac{b}{2(\gamma-1)\pi k} sh \frac{2\pi kx}{b} \right] - Dsh \frac{2\pi kx}{b} \right\} \cos \frac{2\pi ky}{b},$$

$$\sigma_y = -\frac{2\gamma_2 T x}{\gamma b} - 4T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi k}{\pi k D} \left\{ A \left[xsh \frac{2\pi kx}{b} - \frac{\gamma_2 bch \frac{2\pi kx}{b}}{2(\gamma-1)\pi k} \right] + B \left[xch \frac{2\pi kx}{b} + \frac{(2\gamma-1)b}{\gamma-1} sh \frac{2\pi kx}{b} \right] - Dsh \frac{2\pi kx}{b} \right\} \cos \frac{2\pi ky}{b},$$

$$\sigma_z = 2\gamma_2 T - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi k}{\pi k D} \left\{ A \left[xsh \frac{2\pi kx}{b} - \frac{b}{2(\gamma-1)\pi k} ch \frac{2\pi kx}{b} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + B \left[\frac{b}{2\pi k} \operatorname{sh} \frac{2\pi k x}{b} + x \operatorname{ch} \frac{2\pi k x}{b} \right] - D \operatorname{sh} \frac{2\pi k x}{b} \left\{ \cos \frac{2\pi k y}{b} - \frac{2\gamma_2 T x}{\gamma b} \right\}, \\
\tau_{xy} = & -4T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi k}{\pi k D} \left\{ A \left[x \operatorname{ch} \frac{2\pi k x}{b} - \frac{b}{2(\gamma-1)\pi k} \operatorname{sh} \frac{2\pi k x}{b} \right] + \right. \\
& + B \left[x \operatorname{sh} \frac{2\pi k x}{b} + \frac{\gamma b}{2(\gamma-1)\pi k} \operatorname{ch} \frac{2\pi k x}{b} \right] - D \operatorname{ch} \frac{2\pi k x}{b} \left. \right\} \sin \frac{2\pi k y}{b} + \frac{2yT}{b}, \\
\tau_{xz} = & \tau_{yz} = 0,
\end{aligned}$$

где A, B, D – постоянные, определяемые из краевых условий: при $x = 0$ $w = u = v = 0$, при $x = a$ $\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$, и равные

$$\begin{aligned}
A = & a - \frac{b}{2\pi k} \operatorname{sh} \frac{2\pi k a}{b} \operatorname{ch} \frac{2\pi k a}{b} - a \operatorname{ch} \frac{2\pi k a}{b} - \frac{b}{2(\gamma-1)\pi k} \operatorname{sh} \frac{2\pi k a}{b}, \\
B = & a \operatorname{sh} \frac{2\pi k a}{b} - \frac{\gamma b \operatorname{ch} \frac{2\pi k a}{b}}{2(\gamma-1)\pi k} + \frac{b}{2(\gamma-1)\pi k} \left(\gamma \operatorname{ch}^2 \frac{2\pi k a}{b} - \operatorname{sh}^2 \frac{2\pi k a}{b} \right), \\
D = & a^2 + \frac{b^2}{4(\gamma-1)^2 \pi^2 k^2} \left(\gamma^2 \operatorname{ch}^2 \frac{2\pi k a}{b} - \operatorname{sh}^2 \frac{2\pi k a}{b} \right).
\end{aligned}$$

В данном примере на гранях $z = \pm h/2$ и $y = \pm b/2$ выполнены согласованные краевые условия. Если в группе уравнений, характеризующих растяжение (сжатие), выполнить несогласованные краевые условия, то приходим к системе дифференциальных уравнений бесконечно высокого порядка. В частности, в кандидатской диссертации Н.Я. Бойко [35], выполненной под руководством автора, данным методом рассмотрены задачи о равновесии упругого параллелепипеда при согласованных краевых условиях на гранях $z = \pm h/2$ и произвольных, в том числе несогласованных краевых условиях на гранях $y = \pm b/2$.

В заключение приведем еще некоторые группы уравнений, характеризующие частные случаи напряженно-деформированного состояния упругого параллелепипеда.

Группа уравнений, содержащих обобщенные перемещения W_{00} , W_{02} , W_{0kc} :

$$\frac{d^2 W_{00}}{dx^2} = -\frac{12}{b^2 W_{02}} - \frac{2}{bh} \int_{-b/2}^{b/2} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{1}{2G} \left(z_y^+ + z_y^- + \int_{-h/2}^{h/2} K_3 dz \right) \right] dy,$$

$$W_{02} = \frac{b}{12Gh} \int_{-h/2}^{h/2} (z_y^+ + z_y^-) dz - \frac{1}{6h} \left[V_1 \left(\frac{b}{2} \right) - V_1 \left(-\frac{b}{2} \right) \right],$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{4\pi^2 k^2}{b^2} \right) W_{0kc} = -\frac{6 \cos \pi k}{\pi^2 k^2} \frac{d^2 W_{02}}{dx^2} - \frac{4}{bh} \int_{-b/2}^{b/2} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{1}{2G} \left(z^+ + z^- + \int_{-h/2}^{h/2} K_3 dz \right) \right] \cos \frac{2\pi ky}{b} dy.$$

Группа уравнений, содержащих обобщенные перемещения W_{01} , W_{0ks} :

$$\cos \frac{b}{2} d_x W_{01} = \frac{\sin \frac{b}{2} d_x}{hd_x} \left[\frac{1}{2G} \int_{-h/2}^{h/2} (z_y^+ - z_y^-) dz - V_1 \left(\frac{b}{2} \right) - V_1 \left(-\frac{b}{2} \right) - \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\sin y d_x}{hd_x} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{1}{2G} \left(z^+ + z^- + \int_{-h/2}^{h/2} K_3 dz \right) \right] \cos \frac{2\pi ky}{b} dy, \right.$$

$$\left. \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{4\pi^2 k^2}{b^2} \right) W_{0ks} = \frac{4}{bh} \left\{ \frac{bh \cos \pi k}{2\pi k} \frac{d^2 W_{01}}{dx^2} - \int_{-b/2}^{b/2} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{1}{2G} \left(z^+ + z^- + \int_{-h/2}^{h/2} K_3 dz \right) \right] \sin \frac{2\pi ky}{b} dy. \right\}$$

Пример. Равновесие упругого параллелепипеда при краевых условиях:

$$\begin{aligned} z = \pm h/2 & & u = 0, v = s, \sigma_z = 0 \\ y = \pm b/2 & & \tau_{xy} = \sigma_y = \tau_{yz} = 0 \\ x = 0, x = a & & w = 0, \tau_{xy} = \sigma_x = 0 \\ u = 0, & & v = 2zs/h, \end{aligned}$$

$$w = -\frac{2yS}{h} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8bs \cos \pi m \sin \frac{\pi(2m+1)y}{b} ch \frac{\pi(2m+1)(2x-a)}{2b}}{\pi^2 h(2m+1)^2 ch \frac{\pi(2m+1)a}{2b}},$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad \tau_{xy} = 0,$$

$$\tau_{yz} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8bs \cos \pi m \cos \frac{\pi y(2m+1)}{b} ch \frac{\pi(2m+1)(2x-a)}{2b}}{\pi h(2m+1)ch \frac{\pi(2m+1)a}{2b}},$$

$$\tau_{xz} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8bs \cos \pi m \sin \frac{\pi(2m+1)\pi y}{b} sh \frac{\pi(2m+1)(2x-a)}{2b}}{\pi h(2m+1)ch \frac{\pi(2m+1)a}{2b}}.$$

Итак, двойные ряды Фурье с дополнительными членами в виде полиномов Лежандра позволяют успешно решать самые разнообразные задачи о равновесии упругого параллелепипеда в точной постановке и, что особенно важно, разбить задачу на целый ряд частных задач, решаемых независимо друг от друга.

4.2. Применение степенных рядов для решения задач о равновесии тел при помощи вариационного уравнения элементарного слоя

Возможность получения точного решения с помощью двойных рядов Фурье с дополнительными членами в виде полиномов Ле-

жандра не исключает поиск надежных приближенных решений. В этом плане методы аналитической механики обладают несомненными преимуществами по сравнению с другими методами, основанными на гипотезах или на интегральных условиях, выполненных на поверхности. По мнению автора, самое главное в решении задач математической физики – это точное выполнение краевых условий. Ярким подтверждением этого мнения является ранее изложенная методика построения уточненной теории пластин.

Используем этот подход к построению решения задачи о равновесии упругого параллелепипеда при условии точного выполнения отсутствия нагрузки на четырех гранях с помощью стандартных степенных рядов. Записываем краевые условия на гранях параллелепипеда:

$$\begin{aligned} x = \pm a/2 & \quad \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \\ y = \pm b/2 & \quad \tau_{xy} = \sigma_y = \tau_{yz} = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачи растяжения (сжатия) и изгиба в плоскости.

4.2.1. Задача растяжения (сжатия) упругого параллелепипеда

Из соображений четности и нечетности строим степенные ряды

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m-1} y^{2n-2} U_{2m-1, 2n-2}, \\ v &= \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m-2} y^{2n-1} V_{2m-2, 2n-1}, \\ w &= \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m-2} y^{2n-2} W_{2m-2, 2n-2}. \end{aligned}$$

При выполнении условий на гранях получим систему алгебраических и дифференциальных уравнений. Пользуясь терминологией аналитической механики, алгебраические уравнения можно назвать голономными связями, а дифференциальные неинтегрируемые – неголономными связями. В результате исключения некоторых обобщенных перемещений из уравнений голономных и неголоном-

ных связей в операторной форме имеем следующие четыре напряженно-деформированные состояния упругого параллелепипеда при сжатии (растяжении).

Первое состояние описывается следующими рядами и двумя связями:

$$u = x \sum_{m=1} \left[\frac{1}{2m+1} \left(\frac{a^{2m}}{4^m} - x^{2m} \right) - \frac{2ma^{2m-2}}{4^{m-1} d_z^2} \right] d_z W_{2m,0}(z),$$

$$v = y \sum_{n=1} \left[\frac{1}{2n+1} \left(\frac{b^{2n}}{4^n} - y^{2n} \right) - \frac{2nb^{2n-2}}{4^{n-1} d_z^2} \right] d_z W_{0,2n}(z),$$

$$w = W_{00}(z) + \sum_{m=1} x^{2m} W_{2m,0}(z) + \sum_{n=1} y^{2n} W_{0,2n}(z),$$

$$\begin{aligned} & \gamma_2 d_z W_{00}(z) + \sum_{m=1} \left[\frac{a^{2m}}{4^m} \left(\frac{\gamma}{2m+1} - 2 \right) - \frac{2\gamma m a^{2m-2}}{4^{m-1} d_z^2} \right] d_z W_{2m,0}(z) + \\ & + \sum_{n=1} \left[\frac{b^{2n-2}}{4^{n-1}} \left(\frac{b^2}{4(2n+1)} - \frac{2n}{d_z^2} \right) \right] d_z W_{0,2n}(z) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gamma_2 d_z W_{00}(z) + \gamma_2 \sum_{m=1} \left[\frac{a^{2m-2}}{4^{m-1}} \left(\frac{a^2}{4(2m+1)} - \frac{2m}{d_z^2} \right) \right] d_z W_{2m,0}(z) + \\ & + \sum_{n=1} \left[\frac{b^{2n}}{4^n} \left(\frac{\gamma}{2n+1} - 2 \right) - \frac{2\gamma n b^{2n-2}}{4^{n-1} d_z^2} \right] d_z W_{0,2n}(z) = 0. \end{aligned}$$

Изучение полученных рядов показывает, что при такой деформации грани параллелепипеда $x = \pm a/2$, $y = \pm b/2$ преобразуются в цилиндрические поверхности, а грани $z = \pm h/2$ в поверхность, определяемую уравнением

$$w = W_{00}\left(\pm \frac{h}{2}\right) + \sum_{m=1} x^{2m} W_{2m,0}\left(\pm \frac{h}{2}\right) + \sum_{n=1} y^{2n} W_{0,2n}\left(\pm \frac{h}{2}\right).$$

Второе состояние определяется рядом $u = v = 0$:

$$w = \left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)^2 \left(\frac{b^2}{4} - y^2\right)^2 \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m} y^{2n} W_{2m+4,2n+4}(z).$$

При этом состоянии грани $x = \pm a/2$, $y = \pm b/2$ неподвижны, а грани $z = \pm h/2$ переходят в поверхность, проходящую через контур прямоугольника $z = \pm h/2$, $x = \pm a/2$, $y = \pm b/2$.

Третье состояние характеризуется рядом $u = v = 0$:

$$w = x^2 y^2 \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left(\frac{a^{2m}}{4^m} - \frac{x^{2m}}{m+1}\right) \left(\frac{b^{2n}}{4^n} - \frac{y^{2n}}{n+1}\right) C_{2m+2,2n+2}.$$

Это состояние показывает, что контур поперечного сечения деформируется лишь в продольном направлении, причем продольное перемещение w не зависит от координаты z .

Приведем ряды, которые описывают четвертое состояние параллелепипеда:

$$\begin{aligned} u = & x \sum_{m=1} \left[y^{2m} - \frac{b^{2m}}{4^m} + \frac{\gamma m(2m-1)b^{2m-2}}{\gamma_2 4^{m-1}} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{a^2}{4} \right) \right] U_{1,2m} + \\ & + x \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ x^{2m} \left[y^{2n+2} - \frac{(n+1)b^{2n}y^2}{4^n} + \frac{nb^{2n+2}}{4^{n+1}} \right] + \frac{\gamma n(n+1)a^{2m}b^{2n}}{\gamma_2 4^{m+n}} \right\} \times \\ & \times \left(\frac{x^2}{3} - \frac{a^2}{4} \right) U_{2m+1,2n+2} + x \sum_{m=1} \left[(m+1)x^{2m} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{\gamma_2} \left(\frac{a^{2m+2}}{4^{m+1}} - \frac{x^{2m+2}}{2m+3} \right) \right] V_{2m+2,1} + \frac{\gamma(2n+1)b^{2n}}{\gamma_2 4^n} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{a^{2m+2}}{4^{m+1}} - \frac{x^{2m+2}}{2m+3} + \frac{2n(m+1)a^{2m}}{(2n+1)4^m} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{a^2}{4} \right) \right] V_{2m+2,2n+1}, \\
v = & y \sum_{m=1} \left\{ \left[x^{2m+2} - \frac{a^{2m+2}}{4^{m+1}} + \frac{\gamma(m+1)(2m+1)a^{2m}}{\gamma_2 4^m} \left(\frac{y^2}{3} - \frac{b^2}{4} \right) \right] \right\} V_{2m+2,1} + \\
& + \sum_{m=1} \sum_{n=1} y \left\{ y^{2n} \left[x^{2m+2} - \frac{(m+1)a^{2m}x^2}{4^m} + \frac{ma^{2m+2}}{4^{m+1}} \right] - \frac{(m+1)a^{2m}b^{2n}}{4^{m+n}} \times \right. \\
& \times \left. \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) + \frac{\gamma(m+1)(2m+1)a^{2m}b^{2n}}{\gamma_2 4^{m+n}} \left(\frac{y^2}{3} - \frac{b^2}{4} \right) \right\} V_{2m+2,2n+1} + \\
& + y \sum_{m=1} \left[my^{2m-2} \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) + \frac{\gamma}{\gamma_2} \left(\frac{b^{2m}}{4^m} - \frac{y^{2m}}{2m+1} \right) \right] U_{1,2m} + \\
& + y \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ \frac{(n+1)a^{2m}}{4^m} \left(y^{2n} - \frac{b^{2n}}{4^n} \right) \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) + \frac{(2m+1)\gamma a^{2m}}{\gamma_2 4^m} \times \right. \\
& \times \left. \left[\frac{b^{2n+2}}{4^{n+1}} - \frac{y^{2n+2}}{2n+3} + \frac{(n+1)b^{2n}}{4^n} \left(\frac{y^2}{3} - \frac{b^2}{4} \right) \right] \right\} U_{2m+1,2n+2}, \quad w = 0, \\
\tau_{xy} = & 2Gxy \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left(\frac{a^{2m}}{4^m} - x^{2m} \right) \left(\frac{b^{2n}}{4^n} - y^{2n} \right) \times \\
& \times \left[(n+1)U_{2m+1,2n+2} + (m+1)V_{2m+2,2n+1} \right], \\
\sigma_x = & G \sum_{m=1} \left\{ m(2m-1) \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \left(\gamma_2 y^{2m-2} - \frac{\gamma^2 b^{2m-2}}{\gamma_2 4^{m-1}} \right) U_{1,2m} + \right. \\
& + \left. \left[\left(\frac{a^{2m+2}}{4^{m+1}} - x^{2m+2} \right) \frac{4(\gamma-1)}{\gamma_2} - \gamma(m+1)(2m+1) \left(\frac{a^{2m}}{4^m} - x^{2m} \right) \right] V_{2m+2,1} \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + G \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ (n+1) \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \left[\gamma_2 (2n+1) y^{2n} - \frac{b^{2n}}{4^n} \left(\gamma_2 + \frac{2\gamma^2 n}{\gamma_2} \right) \right] \frac{a^{2m}}{4^m} + \right. \\
& + \gamma (2m+1) \left(\frac{a^{2m}}{4^m} - x^{2m} \right) \left[(n+1) y^2 \frac{b^{2n}}{4^n} - y^{2n+2} - \frac{nb^{n+2}}{4^{n+1}} \right] \left. \right\} U_{2m+1, 2n+2} + \\
& + G \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ \gamma (m+1) (2m+1) \frac{b^{2n}}{4^n} \left(x^{2m} - \frac{a^{2m}}{4^m} \right) \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) + \right. \\
& + (2n+1) \left(\frac{a^{2m+2}}{4^{m+1}} - x^{2m+2} \right) \left(\frac{\gamma^2}{\gamma_2} \frac{b^{2n}}{4^n} - \gamma_2 y^{2n} \right) + \\
& \left. + (m+1) \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \frac{a^{2m} b^{2n}}{4^{m+n}} \left[\frac{2\gamma^2 n}{\gamma_2} - \gamma_2 \right] \right\} V_{2m+2, 2n+1}.
\end{aligned}$$

Четвертое состояние определяет плоскую деформацию упругого параллелепипеда. Первые три из указанных состояний характеризуют продольное напряженно-деформированное состояние параллелепипеда, а последнее – поперечное.

Покажем, что первое приближение задачи можно получить при удержании третьей степени.

4.2.2. Определение частот продольных колебаний упругого стержня прямоугольного сечения

$$u = xU_{10} + xy^2U_{12} + x^3U_{30},$$

$$v = yV_{10} + x^2yV_{21} + y^3V_{03},$$

$$w = W_{00} + x^2W_{20} + y^2W_{02}.$$

Запишем краевые условия на гранях $x = \pm a/2$, $y = \pm b/2$:

$$\sigma_x = \gamma G \left(U_{10} + y^2 U_{12} + \frac{3a^2}{4} U_{30} \right) + \\ + \gamma_2 G \left(V_{10} + \frac{a^2}{4} V_{21} + 3y^2 V_{03} + W'_{00} + \frac{a^2}{4} W'_{20} + y^2 W'_{02} \right) = 0,$$

$$\tau_{xy} = Gay(U_{12} + V_{21}) = 0,$$

$$\tau_{xz} = G \frac{a}{2} \left(U'_{10} + y^2 U'_{12} + \frac{a^2}{4} U'_{30} + 2W_{20} \right) = 0,$$

$$\tau_{xy} = Gbx(U_{12} + V_{21}) = 0,$$

$$\sigma_y = \gamma G \left(V_{01} + x^2 V_{21} + \frac{3b^2}{4} V_{03} \right) + \\ + \gamma_2 G \left(U_{10} + \frac{b^2}{4} U_{21} + 3x^2 U_{30} + W'_{00} + \frac{b^2}{4} W'_{02} + x^2 W'_{20} \right) = 0,$$

$$\tau_{yz} = G \frac{b}{2} \left(V'_{01} + x^2 V'_{21} + \frac{b^2}{4} V'_{03} + 2W_{02} \right) = 0.$$

В результате приравнивания нулю всех коэффициентов при одинаковых степенях x и y получим следующую систему уравнений связей, из которых сразу видим, что $U_{12} = C$, $V_{21} = -C$, где C – произвольная постоянная.

$$\gamma \left(U_{10} + \frac{3}{4} a^2 U_{30} \right) + \gamma_2 \left(V_{01} + \frac{a^2}{4} V_{21} + W'_{00} + \frac{a^2}{4} W'_{20} \right) = 0,$$

$$\gamma U_{12} + \gamma_2 (3V_{03} + W'_{02}) = 0, \quad U_{12} + V_{21} = 0, \quad U'_{10} + 2W_{20} + \frac{a^2}{4} U'_{30} = 0,$$

$$\gamma \left(V_{01} + \frac{3}{4} b^2 V_{03} \right) + \gamma_2 \left(U_{10} + \frac{b^2}{4} U_{12} + W'_{00} + \frac{b^2}{4} W'_{02} \right) = 0,$$

$$\gamma V_{21} + \gamma_2 (3U_{30} + W'_{20}) = 0, \quad V'_{01} + 2W_{02} + \frac{b^2}{4} V'_{03},$$

$$V'_{12} = 0, \quad V'_{21} = 0.$$

Для замкнутости системы составленных шести уравнений с семью неизвестными U_{10} , U_{30} , V_{01} , V_{03} , W_{00} , W_{02} , W_{20} запишем вариационное уравнение движения элементарного слоя при условии выбора вариаций $\delta u = \delta v = 0$, $\delta w = 1$:

$$\frac{d}{dz} \int_F \sigma_z dF - \rho \int_F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dF = 0.$$

Исключение всех обобщенных перемещений, кроме W_{00} , W_{20} , W_{02} , позволяет получить следующие выражения для компонентов вектора перемещений и тензора напряжений:

$$u = x \left[\frac{1}{3} \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) - \frac{2}{d_z^2} \right] d_z W_{20} + x \left[y^2 - \frac{b^2}{4} + \frac{\gamma}{\gamma_2} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{a^2}{4} \right) \right] C,$$

$$v = y \left[\frac{1}{3} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) - \frac{2}{d_z^2} \right] d_z W_{02} + y \left[\frac{a^2}{4} - x^2 + \frac{\gamma}{\gamma_2} \left(\frac{b^2}{4} - \frac{y^2}{3} \right) \right] C,$$

$$w = W_{00} + x^2 W_{20} + y^2 W_{02},$$

$$\tau_{xz} = \frac{Gx}{3} \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) d_z^2 W_{20},$$

$$\tau_{yz} = \frac{Gy}{3} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) d_z^2 W_{02}, \quad \tau_{xy} = 0,$$

$$\sigma_x = G \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \left[2d_z W_{20} - \frac{4(\gamma-1)C}{\gamma_2} \right],$$

$$\sigma_y = G \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \left[2d_z W_{02} + \frac{4(\gamma-1)C}{\gamma_2} \right],$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \gamma G d_z W_{00} + 2G \left(x^2 + \frac{\gamma_2 a^2}{24} - \frac{\gamma_2}{d_z^2} \right) d_z W_{20} + \\ & + 2G \left(y^2 + \frac{\gamma_2 b^2}{24} - \frac{\gamma_2}{d_z^2} \right) d_z W_{02} + 2G \left(x^2 - y^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4} \right) C. \end{aligned}$$

Из всех уравнений связей остаются два:

$$-\gamma_2 d_z^2 W_{00} + \left[(\gamma+2) \frac{a^2 d_z^2}{12} + 4(\gamma-1) \right] W_{20} - \frac{\gamma_2 b^2}{4} d_z^2 W_{02} = 0,$$

$$-\gamma_2 d_z^2 W_{00} + \left[(\gamma+2) \frac{b^2 d_z^2}{12} + 4(\gamma-1) \right] W_{02} - \frac{\gamma_2 a^2}{4} d_z^2 W_{20} = 0.$$

Третье вариационное уравнение преобразуется при этом к следующему виду:

$$\begin{aligned} \gamma G d_z^2 W_{00} + 2G \left(\frac{\gamma a^2}{24} d_z^2 W_{20} - \gamma_2 W_{20} \right) + 2G \left(\frac{\gamma b^2}{24} d_z^2 W_{02} - \gamma_2 W_{02} \right) - \\ - \rho d_t^2 \left(W_{00} + \frac{a^2}{12} W_{20} + \frac{b^2}{12} W_{02} \right) = 0, \quad d_z = \frac{\partial}{\partial z}, \quad d_t = \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

Представляя обобщенные перемещения W в виде $W = W^* \sin(\omega t + \beta)$, получим разрешающее уравнение

$$\frac{\gamma a^2 b^2}{9} d_z^6 + \left[8(\gamma - 1)(a^2 + b^2) + \frac{a^2 b^2 \rho \omega^2}{3G} \right] \frac{d_z^4}{3} + \left[16(3\gamma - 4) + \frac{2\gamma \rho \omega^2}{3G} (a^2 + b^2) \right] d_z^2 + \frac{16(\gamma - 1)\rho \omega^2}{G} = 0.$$

Дифференциальное уравнение может быть записано относительно любой из трех функций W_{00} , W_{02} , W_{20} .

Сохраняя в качестве разрешающей функцию W_{20} , запишем решение, при котором выполняется условие $w = 0$, $z = 0$:

$$W_{20} = A_1 sh\alpha_1 z + A_2 sh\alpha_2 z + A_3 sh\alpha_3 z,$$

где α удовлетворяет кубическому характеристическому уравнению относительно α^2 .

$$\frac{\gamma a^2 b^2 \alpha^6}{9} + \frac{\alpha^4}{3} \left[8(\gamma - 1)(a^2 + b^2) + \frac{a^2 b^2 \rho \omega^2}{3G} \right] + \alpha^2 \left[16(3\gamma - 4) + \frac{2\gamma \rho \omega^2}{3G} (a^2 + b^2) \right] + \frac{16(\gamma - 1)\rho \omega^2}{G} = 0.$$

Частотное уравнение получается в результате выполнения условий на свободном конце стержня, т.е. при $z = h$

$$\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0, \quad \int_F \sigma_z dF = 0, \quad \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ B_4 & B_5 & B_6 \\ B_7 & B_8 & B_9 \end{vmatrix} = 0,$$

где $B_1 = \alpha_1^2 sh\alpha_1 h$, $B_2 = \alpha_2^2 sh\alpha_2 h$, $B_3 = \alpha_3^2 sh\alpha_3 h$,

$$B_4 = \frac{(12 + a^2 \alpha_1^2)}{12 + b^2 \alpha_1^2} \alpha_1^2 ch\alpha_1 h, \quad B_5 = \frac{(12 + a^2 \alpha_2^2)}{12 + b^2 \alpha_2^2} \alpha_2^2 sh\alpha_2 h,$$

$$B_6 = \frac{12 + a^2 \alpha_3^2}{12 + b^2 \alpha_3^2} \alpha_3^2 sh\alpha_3 h,$$

$$B_7 = \left\{ \frac{(12 + a^2 \alpha_1^2)}{12 + b^2 \alpha_1^2} \alpha_1 \left(\frac{\gamma b^2}{12} - \frac{2\gamma_2}{\alpha_1^2} \right) + \left(\frac{\gamma a^2}{12} - \frac{2\gamma_2}{\alpha_1^2} \right) \alpha_1 - \frac{\gamma b^2 \alpha_1 (12 + a^2 \alpha_1^2)}{4(12 + b^2 \alpha_1^2)} + \frac{\gamma}{\gamma_2 \alpha_1} \left[\frac{(\gamma + 2)a^2 \alpha_1^2}{12} + 4(\gamma - 1) \right] \right\} ch\alpha_1 h,$$

$$B_8 = \left\{ \frac{\gamma}{\gamma_2 \alpha_2} \left[\frac{(\gamma + 2)a^2 \alpha_2^2}{12} + 4(\gamma - 1) \right] - \frac{\gamma b^2 \alpha_2 (12 + a^2 \alpha_2^2)}{4(12 + b^2 \alpha_2^2)} + \left(\frac{\gamma a^2}{12} - \frac{2\gamma_2}{\alpha_2^2} \right) \alpha_2 + \alpha_2 \left(\frac{\gamma b^2}{12} - \frac{2\gamma_2}{\alpha_2^2} \right) \frac{(12 + a^2 \alpha_2^2)}{12 + b^2 \alpha_2^2} \right\} ch\alpha_2 h,$$

$$B_9 = \left\{ \frac{\gamma}{\gamma_2 \alpha_3} \left[\frac{(\gamma + 2)a^2 \alpha_3^2}{12} + 4(\gamma - 1) \right] - \frac{\gamma b^2 \alpha_3 (12 + a^2 \alpha_3^2)}{4(12 + b^2 \alpha_3^2)} + \left(\frac{\gamma a^2}{12} - \frac{2\gamma_2}{\alpha_3^2} \right) \alpha_3 + \alpha_3 \left(\frac{\gamma b^2}{12} - \frac{2\gamma_2}{\alpha_3^2} \right) \frac{(12 + a^2 \alpha_3^2)}{12 + b^2 \alpha_3^2} \right\} ch\alpha_3 h.$$

В качестве численного примера рассмотрим стержни с одинаковой площадью поперечного сечения, для которых техническая теория дает одни и те же результаты. Данная уточненная теория дает

результаты, которые зависят от размеров поперечного сечения стержня при одной и той же площади. Эту зависимость можно проследить по табл. 4.1. Анализ таблицы показывает, что чем короче стержень и чем больше различие сторон прямоугольника при одинаковой площади, тем больше отличаются частоты по данной теории по сравнению с технической согласно уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma GF \frac{\partial W}{\partial z} \right) - \rho F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0.$$

Как видим, техническая теория дает завышенные результаты.

Для перехода к задаче статики достаточно в разрешающем уравнении положить $\omega = 0$. Тогда уравнение, например, относительно W_{00} записывается в виде

$$d_z^2 \left[d_z^4 + \frac{24(\gamma-1)(a^2+b^2)}{\gamma a^2 b^2} d_z^2 + \frac{144(3\gamma-4)}{\gamma a^2 b^2} \right] W_0 = 0.$$

Характеристическое уравнение и его корни

$$\alpha^2 \left[\alpha^4 + \frac{24(\gamma-1)(a^2+b^2)}{\gamma a^2 b^2} \alpha^2 + \frac{144(3\gamma-4)}{\gamma a^2 b^2} \right] = 0,$$

$$\alpha_{1,2}^2 = \frac{12(\gamma-1)(a^2+b^2)}{\gamma a^2 b^2} \pm \frac{12}{\gamma a^2 b^2} \sqrt{(\gamma-1)^2 (a^2+b^2)^2 - \gamma(3\gamma-4)a^2 b^2},$$

$$\alpha_{3,4} = 0,$$

$$W_0 = A + Bz + C_1 \sin \alpha_1 z + C_2 \cos \alpha_1 z + C_3 \sin \alpha_2 z + C_4 \cos \alpha_2 z.$$

Таблица 4.1

Значения собственных частот продольных колебаний упругих стержней с прямоугольным поперечным сечением

h, м	ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	Техническая теория	785	2356	3926	5496	7067	8637	10208	11778	13349	14919
	a = 0,5м b = 2м	785	2350	3900	5398	6336	6956	90908	13108	14208	15606
	a = 0,25м b = 4м	784	2324	3198	4508	7406	8930	10506	12092	13684	15276
20	Техническая теория	393	1178	1963	2748	3533	4319	5104	5889	6674	7459
	a = 0,5м b = 2м	393	1178	1960	2740	3516	4284	4520	5040	5772	6328
	a = 0,25м b = 4м	393	1176	1950	2700	3196	3486	4562	6644	7188	7898
30	Техническая теория	261	784	1306	1829	2351	2874	3397	3919	4442	4964
	a = 0,5м b = 2м	261	784	1306	1829	2351	2870	3388	3902	4412	4916
	a = 0,25м b = 4м	261	784	1306	1822	2332	2826	3194	3354	3728	3842

4.2.3. Сжатие свободно опертого при $z = 0$ упругого параллелепипеда, нагруженного при $z = h$ нормальной нагрузкой $\sigma_z = p + p_1x^2 + p_2y^2$

В качестве конкретного примера рассмотрим сжатие свободно опертого $z = 0$ упругого параллелепипеда, нагруженного при $z = h$ нормальной нагрузкой $\sigma_z = p + p_1x^2 + p_2y^2$. Выполняя условие на нижнем торце при $z = 0$ $\tau_{xz} = \tau_{yz} = w = 0$, находим $A = C_2 = C_4 = 0$. Отдавая предпочтение выполнению неоднородных условий при $z = h$ $\sigma_z = p + p_1x^2 + p_2y^2$, получим

$$\gamma \frac{d}{dz} W_{00} + \gamma_2 (U_{10} + V_{01}) = -\frac{p}{G}, \quad \gamma \frac{d}{dz} W_{20} + \gamma_2 (3U_{30} + V_{21}) = -\frac{p_1}{G},$$

$$\gamma \frac{d}{dz} W_{02} + \gamma_2 (3V_{03} + U_{12}) = -\frac{p_2}{G}.$$

Однородные условия на торце при $z = h$ $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ оставляем невыполненными.

Выпишем формулы для напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}, \tau_{yz}$:

$$\sigma_x = \left[-p_1 \frac{\cos \alpha_2 z}{\cos \alpha_2 h} + \frac{B_1(-p_1 A_2 + p_2 B_2)}{12(a^2 - b^2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} \times \left(\frac{\cos \alpha_1 z}{\cos \alpha_1 h} - \frac{\cos \alpha_2 z}{\cos \alpha_2 h} \right) \right] \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right),$$

$$\sigma_y = \left[-p_2 \frac{\cos \alpha_1 z}{\cos \alpha_1 h} + \frac{A_2(p_1 A_1 - p_2 B_1)}{12(a^2 - b^2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} \times \left(\frac{\cos \alpha_2 z}{\cos \alpha_2 h} - \frac{\cos \alpha_1 z}{\cos \alpha_1 h} \right) \right] \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right),$$

$$\tau_{xz} = \left[\frac{B_1(p_2 B_2 - p_1 A_1)}{288(a^2 - b^2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} a^2 \left(\frac{\alpha_1 \sin \alpha_1 z}{\cos \alpha_1 h} - \frac{\alpha_2 \sin \alpha_2 z}{\cos \alpha_2 h} \right) - \frac{p_1 \alpha_2 \sin \alpha_2 z}{24a^2 \cos \alpha_2 h} \right] x \left(\frac{4x^2}{a^2} - 1 \right),$$

$$\tau_{yz} = \left[\frac{A_2(p_1 A_1 - p_2 B_1)}{288(a^2 - b^2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} b^2 \left(\frac{\alpha_2 \sin \alpha_2 z}{\cos \alpha_2 h} - \frac{\alpha_1 \sin \alpha_1 z}{\cos \alpha_1 h} \right) - \frac{p_2 \alpha_1 \sin \alpha_1 z}{24b^2 \cos \alpha_1 h} \right] y \left(\frac{4y^2}{b^2} - 1 \right),$$

где $A_1 = a^2\alpha_1^2 - 12$, $A_2 = a^2\alpha_2^2 - 12$, $B_1 = b^2\alpha_1^2 - 12$, $B_2 = b^2\alpha_2^2 - 12$.

Графики изменения напряжений $\sigma_x(x)$, $\tau_{xz}(x)$, $\sigma_y(y)$, $\tau_{yz}(y)$ при $p = 3$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $a = 1$, $b = 2$, $z = 0,5h$, $\gamma = 3$ изображены на рис. 4.1. Графики изменения напряжений $\sigma_z(z)$ при тех же данных показаны на рис. 4.1. Из графиков видно, как выполняются условия отсутствия напряжений на гранях $x = \pm a/2$ и $y = \pm b/2$ и какое отличие закона изменения напряжений σ_z от линейного закона, соответствующего элементарной теории сопротивления материалов.

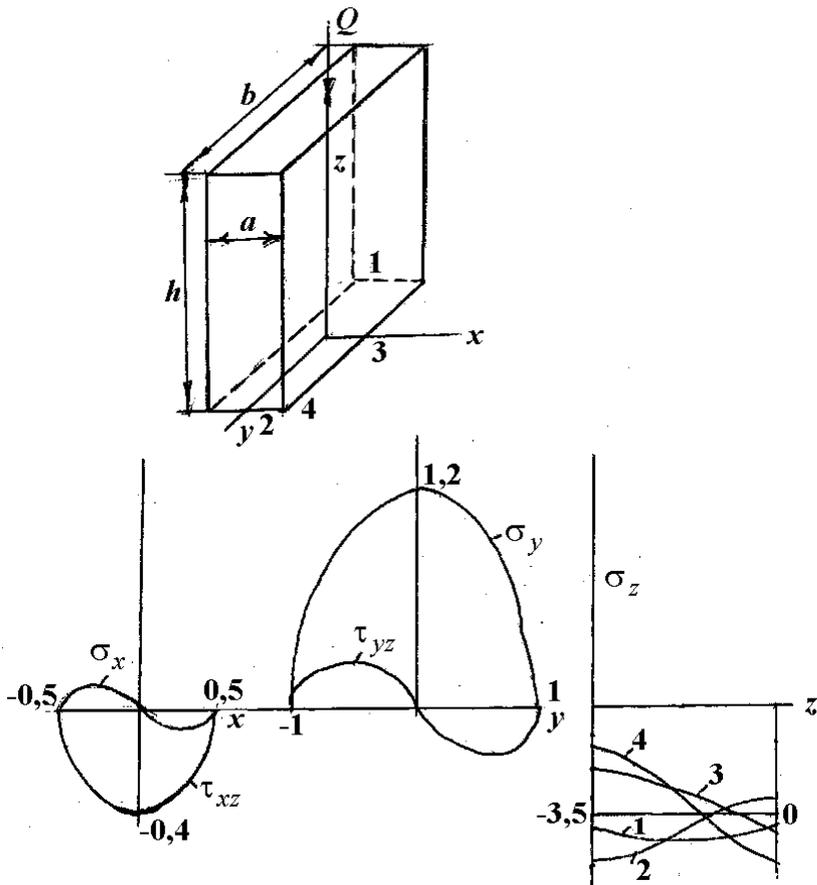


Рис. 4.1. Сжатие свободно опертого прямоугольного параллелепипеда

Итак, полиномы третьей степени позволяют построить достаточно надежное приближение задачи о сжатии (растяжении) упругого параллелепипеда при действии продольных сил, особенно если высота h превышает размеры a и b поперечного сечения. Для кубообразных тел $h \leq a, b$, и при действии поперечных сил требуются полиномы более высокой степени.

4.2.4. Задача изгиба (в плоскости YOZ) упругого параллелепипеда

Из соображений четности и нечетности строим степенные ряды

$$u = \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m-1} y^{2n-1} U_{2m-1, 2n-1},$$

$$v = \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m-2} y^{2n-2} U_{2m-2, 2n-2},$$

$$w = \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m-2} y^{2n-1} U_{2m-2, 2n-1}.$$

Исходя из условий отсутствия нагрузки на боковой поверхности записываем уравнения связей

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \gamma G \frac{\partial U}{\partial x} + \gamma_2 G \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0 \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \\ \tau_{xz} &= G \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x = \pm \frac{a}{2},$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \gamma G \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma_2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0 \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \\ \tau_{yz} &= G \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } y = \pm \frac{b}{2}.$$

Задача разбивается на четыре напряженных состояния.

Первое напряженное состояние

$$u = 0,$$

$$v = \frac{1}{2} \sum_{n=1} \left\{ \left(\frac{b}{2} \right)^{2n} \left[y^2 d_z - \frac{n}{n+1} \left(\frac{b}{2} \right)^2 d_z \right] - \frac{y^{2n+2}}{n+1} d_z \right\} W_{0,2n+1}(z),$$

$$w = y \sum_{n=1} \left(y^{2n} - \frac{b^{2n}}{4^n} \right) W_{0,2n+1}.$$

Второе напряженное состояние

а) $u = 0, \quad w = 0,$

$$v = x^2 \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ \left[x^{2m+2} - (m+2) \frac{a^{2m+2}}{4^{m+1}} - (m+1) \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^{2m} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[y^{2n+2} - \left(\frac{b}{2} \right)^{2n+2} - (n+1) \left(\frac{b}{2} \right)^{2n} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \right] \right\} V_{2m+4,2n+2}(z);$$

б) $u = 0, \quad w = 0,$

$$v = \left[\frac{x^2}{2} \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) + \frac{a^4}{32} \right] \sum_{n=1} \left\{ \frac{(n-1)}{2} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-4} \left(y^4 - \frac{b^4}{16} \right) - \frac{1}{n} \left(y^{2n} - \frac{b^{2n}}{4^n} \right) - \right.$$

$$-(n-2)\left(\frac{b}{2}\right)^{2n-2}\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right)\left\}d_z W_{4,2n-1}(z).\right.$$

Третье напряженное состояние

$$u = 0,$$

$$\begin{aligned} v = & \frac{x^2}{2} \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) m \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-2} \left[(2n+1) \left(\frac{b}{2} \right)^{2n} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(y^{2n+2} - \frac{b^{2n+2}}{4^{n+1}} \right) \frac{1}{n+1} \right] + \frac{2\gamma_{2n}}{\gamma} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left[x^{2m} - (m+1) \frac{a^{2m}}{4^m} - m \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-2} \right] - \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{3b^2}{4} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(y^4 - \frac{b^4}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-2} mn \right] \right\} d_z W_{2n+2,2n-1}(z), \\ w = & x^2 y \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ m \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-2} n \left(\frac{3b^2}{4} - y^2 \right) \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-2} + \right. \\ & \left. + \left[x^{2m} - (m+1) \frac{a^{2m}}{4hm} \right] \left[y^{2n} - (2n+1) \frac{b^{2n}}{4^n} \right] \right\} W_{2m+2,2n+1}(z). \end{aligned}$$

Четвертое напряженное состояние

$$u = \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m-1} y^{2n-1} U_{2m-1,2n-1}(z),$$

$$v = \frac{x^2}{2} \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) m \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-6} \left[\frac{\gamma(2m-1)}{\gamma_{2n}} \left(y^{2n} - \frac{b^{2n}}{4^n} \right) - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - (2n-1) \frac{a^2}{4} \left(y^{2n-2} - \frac{b^{2n-2}}{4^{n-1}} \right) \Bigg] - \frac{\gamma}{8} \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \Bigg[\frac{3b^2}{4} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) - \\
& \quad - \frac{1}{2} \left(y^4 - \frac{b^4}{16} \right) \Bigg] \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-6} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-6} \times \\
& \times \left[\frac{\gamma(2m-1)b^2}{2\gamma_2} - (n-1)(2n-1) \frac{a^2}{4} \right] - (2n-1) \left[\left(\frac{a}{2} \right)^{2m-2} y^{2n-2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{m} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-2} \left(x^{2m-2} - \frac{ma^{2m-2}}{4^{m-1}} \right) \right] \Bigg\} U_{2m-1, 2n-1}(z) - \frac{x^2}{2} \times \\
& \times \sum_{m=1} \sum_{n=1} \gamma_2 (2m+1) \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-4} \left\{ \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \frac{(m-2)}{8} \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-4} \times \right. \\
& \quad \times \left[\frac{3b^2}{4} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(y^4 - \frac{b^4}{16} \right) \right] + \frac{b^2}{4\gamma} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \times \\
& \times \left[x^{2m-2} - m \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-2} - (m-1) \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-4} \right] \Bigg\} U_{2m+1, 2n-1}(z) + \\
& + \frac{3\gamma_2}{4a^2} \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \left[\frac{3b^2}{4} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(y^4 - \frac{b^4}{16} \right) \right] \sum_{n=1} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-4} \times \\
& \times U_{3, 2n-1}(z) - \frac{x^2}{2} \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-4} \left[\frac{1}{2n} \left(y^{2n} - \frac{b^{2n}}{4^n} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(m-1)(2n-1)}{m} \right] \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-4} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-4} \times \right. \\
& \times \left[\frac{3b^2}{4} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(y^4 - \frac{b^4}{16} \right) \right] - \frac{\gamma_2(2n-1)}{2\gamma m} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-2} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[x^{2m-2} - \frac{ma^{2m-2}}{4^{m-1}} - (m-1) \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-4} \right] \left\{ d_z^2 U_{2m-1,2n-1}(z), \right. \\
w = & \frac{x^2 y}{2} \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ \frac{(2n-1)}{m} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-2} \left(x^{2m-2} - m \frac{a^{2m-2}}{4^{m-1}} \right) - \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-2} \times \right. \\
& \times y^{2n-2} + \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \left(y^2 - \frac{3b^2}{4} \right) \frac{(\gamma+2)}{4} \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-4} \times \\
& \times \left[\frac{1}{2} + \frac{(m-1)(2n-1)}{m} \right] \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-4} \left\{ d_z U_{2m-1,2n-1} - \frac{x^2 y}{8d_z} \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \times \right. \\
& \times \left(y^2 - \frac{3b^2}{4} \right) \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-6} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-6} \gamma \times \left[\frac{2\gamma(2m-1)b^2}{4\gamma_2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - (n-1)(2n-1) \frac{a^2}{4} \right] U_{2m-1,2n-1}(z) + \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-6} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-6} \gamma_2 (m-1) \times \right. \\
& \left. \left. \times (2m+3) \frac{a^2 b^2}{16} U_{2m+3,2n-1}(z) \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

Анализ полученных дифференциальных структур для задачи изгиба показывает, что первые три напряженные состояния характеризуются отсутствием поперечной деформации ($u = 0$), причем первое и третье деформированное состояние по своему характеру приближается к элементарной теории сопромата. Общее у них то, что деформированное состояние определяется лишь двумя компонентами вектора перемещений, причем продольное перемещение w обращается в ноль при $y = 0$ (нейтральный слой). Отличие состоит в том, что имеется продольная деформация, т.е. не выполняется гипотеза плоских сечений, и что напряжения σ_y не равны нулю, т.е. имеется давление одних волокон на другие. Для второго деформированного состояния характерно равенство нулю двух компонентов вектора перемещений $u = w = 0$, а на гранях $y = \pm b/2$ отсутствуют и перемещения v .

Четвертое напряженно-деформированное состояние характеризуется наличием деформации как продольной, так и поперечной, т.е. все три компонента вектора перемещений отличны от нуля.

В качестве первого приближения для задачи изгиба упругого параллелепипеда возьмем полиномы пятой степени и сравним результаты с элементарной теорией сопротивления материалов.

$$u = xyU_{11} + x^3yU_{31} + xy^3U_{13} + x^3y^3U_{33} + xy^5U_{15} + x^5yU_{51},$$

$$v = V_{00} + x^2V_{20} + y^2V_{02} + x^2y^2V_{22} + x^4V_{40} + y^4V_{04},$$

$$w = yW_{01} + y^3W_{03} + x^2yW_{21} + x^4yW_{41} + x^2y^3W_{23} + y^5W_{05}.$$

Выполняя условия отсутствия нагрузки на боковых гранях $x = \pm a/2$, $y = \pm b/2$, получим следующую систему 16-ти уравнений связей:

$$\gamma \left(U_{11} + \frac{3a^2}{4} U_{31} \right) + \gamma \frac{5a^4}{16} U_{51} + \gamma_2 \left[2V_{02} + \frac{a^2}{2} V_{22} + d_z \times \right. \\ \left. \times \left(W_{01} + \frac{a^2}{4} W_{21} + \frac{a^4}{16} W_{41} \right) \right] = 0,$$

$$\gamma \left(U_{13} + \frac{3a^2}{4} U_{33} \right) + \gamma_2 \left[4V_{04} + d_z \left(W_{03} + \frac{a^2}{4} W_{21} + \frac{a^4}{16} W_{23} \right) \right] = 0,$$

$$\gamma U_{15} + \gamma_2 d_z W_{05} = 0,$$

$$\gamma \left(2V_{02} + b^2 V_{04} \right) + \gamma_2 \left[U_{11} + \frac{b^2}{4} U_{13} + \frac{b^4}{16} U_{15} + d_z \times \right. \\ \left. \times \left(W_{01} + \frac{b^2}{4} W_{03} + \frac{b^4}{16} W_{05} \right) \right] = 0,$$

$$2\gamma V_{22} + \gamma_2 \left[3U_{31} + \frac{3b^2}{4} U_{33} + d_z \left(W_{21} + \frac{b^2}{4} W_{23} \right) \right] = 0,$$

$$5U_{51} + d_z W_{41} = 0, \quad U_{15} = 0, \quad U_{51} = 0, \quad U_{11} + 2V_{20} - \frac{3a^2 b^2}{16} U_{33} = 0,$$

$$3U_{13} + \frac{3a^2}{4} U_{33} + 2V_{22} = 0, \quad U_{31} + \frac{3b^2}{4} U_{33} + 4V_{04} = 0,$$

$$d_z \left(U_{11} + \frac{a^2}{4} U_{31} + \frac{a^4}{16} U_{51} \right) + 2W_{21} + a^2 W_{41} = 0,$$

$$d_z \left(U_{13} + \frac{a^2}{4} U_{33} \right) + 2W_{23} = 0,$$

$$d_z \left(V_{00} + \frac{b^2}{4} V_{02} + \frac{b^4}{16} V_{04} \right) + W_{01} + \frac{3b^2}{4} W_{03} + \frac{5b^4}{16} W_{05} = 0,$$

$$d_z \left(V_{20} + \frac{b^2}{4} V_{22} \right) + W_{21} + \frac{3b^2}{4} W_{23} = 0, \quad d_z V_{40} + W_{41} = 0.$$

Недостающие два уравнения для замкнутости системы получим на основании вариационного уравнения равновесия элементарного слоя, полагая $\delta u = 0, \delta v = 1, \delta w = y$.

$$\frac{d}{dz} \int_F \tau_{yz} dF + \oint F_n dS = 0,$$

$$\frac{d}{dz} \int_F y \sigma_z dF - \int_F \tau_{yz} dF + \oint F_n y dS = 0.$$

Исключив из уравнений связей все обобщенные перемещения, кроме U_{13} , U_{33} , V_{00} , W_{03} , получим лишь два уравнения неинтегрируемых (неголономных) связей:

$$\begin{aligned}
 & d_z^2 V_{00} + \frac{b^4}{64} d_z^3 W_{03} + \frac{b^2}{2} d_z W_{03} - \frac{b^2}{64} \left[(5\gamma - 6)a^2 + \frac{(3\gamma - 8)b^2}{\gamma_2} \right] d_z^2 U_{13} - \\
 & - \frac{a^2 b^2}{256} \left[(5\gamma - 6)a^2 + 9\gamma b^2 \right] d_z^2 U_{33} + \frac{(2\gamma - 5)a^2 b^4}{512} d_z^4 \left(U_{13} + \frac{a^2}{4} U_{33} \right) + \\
 & + \frac{1}{4} \left[\frac{4(\gamma - 1)b^2}{\gamma_2} + \frac{3\gamma a^2}{6} \left(\frac{a^2}{2} + \frac{\gamma b^2}{\gamma_2} \right) \right] U_{33} - \frac{a^2}{2} \left(3\gamma + 2 + \frac{8}{\gamma_2} \right) C_1 = 0, \\
 & 3\gamma U_{13} + \left(\frac{3\gamma a^2}{4} + \frac{3\gamma_2 b^2}{2} \right) U_{33} + \frac{\gamma_2 b^2}{4} d_z^2 \left(U_{13} + \frac{a^2}{3} U_{33} \right) + \\
 & + 12\gamma_2 (C_1 z - C_3) = 0.
 \end{aligned}$$

Искомые напряжения в результате указанного исключения обобщенных перемещений принимают вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_x = G y \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) & \left[3\gamma_2 U_{13} + 3 \left(\frac{\gamma_2 a^2}{4} - \gamma y^2 + \frac{3\gamma b^2}{4} \right) U_{33} + \right. \\
 & \left. + \frac{\gamma_2}{2} \left(y^2 - \frac{3b^2}{4} \right) d_z^2 \left(U_{13} + \frac{a^2}{4} U_{33} \right) - 12\gamma C_1 z - 12\gamma C_3 \right],
 \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = 3Gx \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) U_{33},$$

$$\tau_{xz} = Gxy \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left[\left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) U_{33} + 8C_1 \right],$$

$$\begin{aligned}
\tau_{yz} = & G \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \left\{ 3x^2 d_z \left(U_{13} + \frac{a^2}{4} U_{33} \right) - \left(\frac{b^2}{4} + y^2 \right) \times \right. \\
& \times \left[\frac{a^2}{32} d_z^3 \left(U_{13} + \frac{a^2}{4} U_{33} \right) - \right. \\
& - \frac{d_z^2}{4} W_{03} - \frac{\gamma d_z}{4\gamma_2} \left(U_{13} + \frac{3a^2}{4} U_{33} \right) \left. \right] + \frac{d_z}{8} \left[\frac{(\gamma-4)b^2}{\gamma_2} + \frac{3\gamma_2 a^2}{2} \right] U_{13} + \\
& + \frac{3a^2}{32} d_z \left[\frac{\gamma_2 a^2}{2} + \frac{\gamma(\gamma-3)b^2}{\gamma_2} \right] U_{33} - \frac{(\gamma-3)a^2 b^2 d_z^3}{64} \left(U_{13} + \frac{a^2}{4} U_{33} \right) - \\
& \left. - \frac{b^2}{8} d_z^2 W_{03} - (3\gamma-2)C_1 \frac{a^2}{4} - 5C_2 \left(\frac{b^2}{4} + y^2 \right) - 3W_{03} \right\}, \\
\sigma_y = & Gy \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \left[\frac{4(\gamma-1)}{\gamma_2} U_{13} + \frac{3\gamma^2 a^2}{4\gamma_2} U_{33} + \left(\frac{\gamma_2 x^2}{2} - \frac{\gamma a^2}{8} \right) d_z^2 \times \right. \\
& \left. \times \left(U_{13} + \frac{a^2}{4} U_{33} \right) + 2d_z W_{03} \right], \\
\sigma_z = & Gy \left\{ \left[\frac{3(\gamma-1)a^2}{2} + \frac{(7\gamma-10)b^2}{2\gamma_2} - 3\gamma_2 x^2 - 2y^2 \right] U_{13} + \right. \\
& + \left[\frac{3\gamma(5\gamma-6)a^2 b^2}{16\gamma_2} + \frac{3(\gamma-1)a^4}{8} - \frac{3\gamma_2 a^2 x^2}{4} - \frac{9\gamma_2 b^2 x^2}{4} - \frac{3\gamma a^2 y^2}{4} - \right. \\
& \left. - 3\gamma_2 x^2 y^2 \right] U_{33} + \left[\frac{\gamma_2 a^2 y^2}{8} - \frac{3\gamma b^2 x^2}{8} - \frac{\gamma x^2 y^2}{2} - \frac{(5\gamma-6)a^2 b^2}{32} \right] \times \\
& \left. \times d_z^2 \left(U_{13} + \frac{a^2}{4} U_{33} \right) + 2d_z \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) W_{03} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[12\gamma_2 x^2 - (3\gamma^2 - 6\gamma + 4) \frac{2a^2}{\gamma_2} \right] C_1 z + \\
& + \left[\frac{6\gamma}{\gamma_2} (\gamma - 1) a^2 - 12\gamma_2 x^2 \right] C_3 + \frac{4(3\gamma - 4)}{\gamma_2} C_4 \Big\},
\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные. Как видим, напряжения выполняют условия отсутствия нагрузки на боковой поверхности $x = \pm a/2, y = \pm b/2$.

Полученные формулы для напряжений показывают, что с математической точки зрения решение не очень усложнилось по сравнению с элементарной теорией изгиба. Ведь обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами для тел с постоянным поперечным сечением не вызывают больших трудностей.

С другой стороны, по мнению автора, данная теория изгиба прямоугольных стержней обладает целым рядом преимуществ по сравнению с элементарной. Во-первых, отсутствуют противоречия в построении, во-вторых, выполняются точно краевые условия на боковой поверхности, в-третьих, данная теория позволяет строить дальнейшие уточнения задачи на основе вариационного принципа Лагранжа за счет увеличения числа членов степенного ряда. Так, данное приближение выполняет лишь два уравнения Коши в интегральной форме, а именно:

$$\int_F \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dF = 0,$$

$$\int_F \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) y dF = 0.$$

При дальнейших уточнениях появляется возможность лучше выполнить условия Коши внутри.

Приведем конкретный пример расчета и дадим сравнение с результатами других теорий. Пусть дана консольная балка прямоугольного профиля 2×4 см длиной $h = 10$ см и нагружена на конце

поперечной силой $Q = 5 \text{ кг}$ (рис. 4.2). Тогда вследствие свободной деформации при $z = 0$ $v = \sigma_z = 0$ имеем $C_3 = C_4 = 0$.

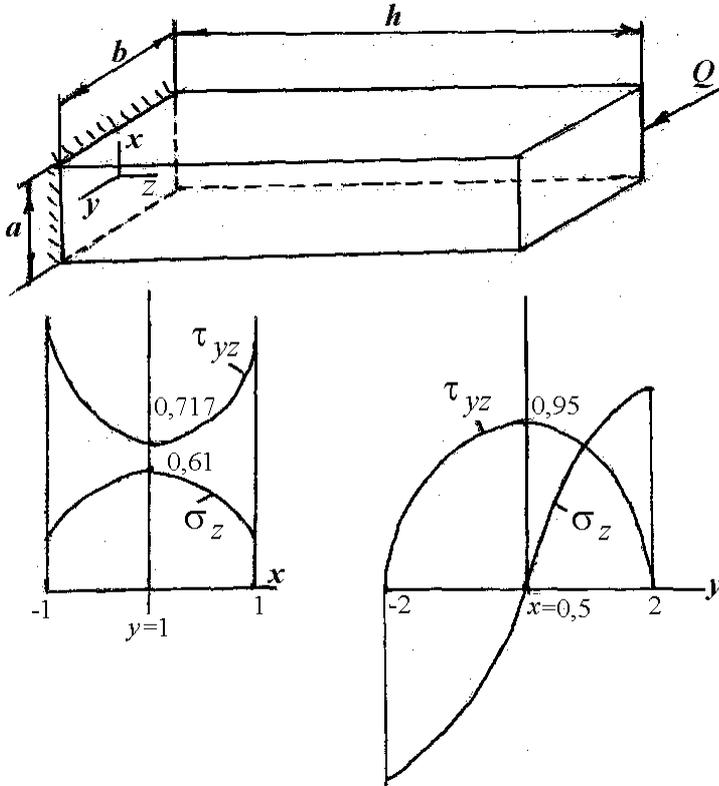


Рис. 4.2. Изгиб консольного прямоугольного параллелепипеда

При $z = h$

$$\int_F \tau_{xz} xy dF = 0, \quad \int_F \tau_{yz} dF = Q, \quad \int_F \sigma_z y dF = 0.$$

Исследование решения системы уравнения связей и двух вариационных уравнений показывает, что искомые обобщенные перемещения определяются линейными функциями вида

$$U_{13} = Az, \quad U_{33} = Bz, \quad W_{03} = C.$$

В данном примере эти постоянные равны

$$A = 1,685 \cdot 10^{-4} \frac{Q}{G}, \quad B = 0,517 \cdot 10^{-4} \frac{Q}{G},$$

$$C_1 = 2,04 \cdot 10^{-4} \frac{Q}{G}, \quad C = -160,46 \cdot 10^{-4} \frac{Q}{G}.$$

Полученные значения постоянных позволяют вычислить напряжения и построить графики их изменения (см. рис. 4.2).

Сравнительная таблица значений τ_{yz} , вычисленных по различным теориям, приводится в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Координаты точек	Формула		
	По данной теории	По формуле Тимошенко (99) [186]	По формуле элементарной теории и $\tau_{yz} = 3Q/2F$
$x = a/2, y = 0$	0,963	1,303	0,9375
$x = y = 0$	0,950	0,808	0,9375

Другие примеры равновесия упругого параллелепипеда рассмотрены в кандидатской диссертации О.Н. Скляр [180], выполненной под руководством автора.

4.3. Равновесие конструкций с круговой осью

В настоящее время при определении напряжений в элементах конструкций с круговой осью (криволинейных стержнях) используются в инженерных расчетах либо гипотетические теории сопротивления материалов [29], либо хорошо известное решение задачи Головина, полученное как решение плоской задачи теории упругости для бруса узкого прямоугольного поперечного сечения [169]. Однако в реальных конструкциях встречаются криволинейные элементы, имеющие круговую ось, соотношения размеров поперечного сечения которых не вписываются в гипотезы теории сопротивления

материалов и задачу Головина. Поэтому использование этих теорий при определении напряжений в подобного рода криволинейных элементах может привести к существенно неверным результатам.

Суть предлагаемого метода расчета криволинейных элементов с круговой осью состоит в разложении компонентов вектора перемещений в ряды по базисным функциям вида $r^m z^n$.

Так, для случая нагрузки, действующей в плоскости кривизны элемента, записываем следующие ряды перемещений:

$$u = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N r^m z^{2n} U_{m,2n}(\theta),$$

$$v = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N r^m z^{2n} V_{m,2n}(\theta),$$

$$w = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N r^m z^{2n+1} W_{m,2n+1}(\theta).$$

Если ограничиться порядком аппроксимации не выше пятой степени $M + N \leq 5$, то получим из условий

$$\sigma_r|_{r=R_1} = 0, \quad \sigma_r|_{r=R_2} = 0, \quad \tau_{r\theta}|_{r=R_1} = 0, \quad \sigma_z|_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0$$

6 + 10 + 6 обыкновенных дифференциальных уравнений связей, из условий

$$\tau_{rz}|_{r=R_1} = 0, \quad \tau_{rz}|_{r=R_2} = 0$$

четыре алгебраических уравнения, а из условия $\tau_{\theta z}|_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0$ пять обыкновенных дифференциальных уравнений.

Полученная комбинированная система уравнений связей содержит, таким образом, 31 уравнение с 33 неизвестными обобщенными перемещениями. Кроме того, обнаруживаются линейно зависимые уравнения, в результате исключения которых фактически остается система из 26 уравнений с 33 неизвестными обобщенными перемещениями.

В результате исключения всех обобщенных перемещений, кроме $U_{00}, U_{30}, U_{40}, U_{50}, U_{14}, V_{02}, V_{32}$, получим три уравнения неголономных связей с указанными выше семью обобщенными перемещениями и шестью произвольными постоянными A, B, C_1, C_2, C_3, D_1 . Уравнения связей решаются совместно с вариационными уравнениями равновесия, которые с учетом того, что связями на напряжения τ_{rz} налагается условие $\tau_{rz} = 0$, будут иметь вид

$$\delta u = 1, \int_F \sigma_\theta dF = -(P \sin \theta_0 - Q \cos \theta_0) \sin \theta + (Q \sin \theta_0 + P \cos \theta_0) \cos \theta,$$

$$\delta v = 1, \int_F \sigma_\theta (r - r_0) dF = M,$$

$$\delta u = r, \int_F \tau_{r\theta} dF = (P \sin \theta_0 - Q \cos \theta_0) \cos \theta + (Q \sin \theta_0 + P \cos \theta_0) \sin \theta,$$

$$\delta v = r, \frac{d}{d\theta} \int_F \tau_{r\theta} r dF - \int_F (\sigma_\theta + \sigma_r) r dF = 0,$$

$$\delta w = z, \frac{d}{d\theta} \int_F \tau_{\theta z} z dF - \int_F \sigma_z r dF = 0,$$

$$\delta w = rz, \frac{d}{d\theta} \int_F \tau_{\theta z} r z dF - \int_F \sigma_z r^2 dF = 0.$$

Решить полученную систему трех уравнений неголономных связей и шести вариационных уравнений с семью неизвестными функциями и шестью константами не представляется возможным. Решение возможно лишь в линейных функциях, что физически означает изгиб при полном отсутствии касательных напряжений. В результате получим напряженное состояние, не зависящее от полярного угла θ :

$$\sigma_\theta = \frac{M}{K} \left\{ h^2 \left[\frac{3\gamma - 2}{4\gamma_2} - \frac{(\gamma - 1)3}{2} \right] \left(r - \frac{a_{10}}{a_{00}} \right) + \left[\frac{3(3\gamma - 2)(5\gamma - 8)h^2}{4\gamma_2(7\gamma - 8)(R_1 + R_2)} + \frac{\gamma(3\gamma - 2)h^2}{2(7\gamma - 8)(R_1 + R_2)} - \frac{4(5\gamma - 8)(9\gamma - 10)(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)}{15\gamma_2(7\gamma - 8)(R_1 + R_2)} \right] \left(r^2 - \frac{a_{20}}{a_{00}} \right) + \right.$$

$$+ \frac{8(3\gamma-5)}{15\gamma_2} \left(r^3 - \frac{a_{30}}{a_{00}} \right) + (3\gamma-4) \left(rz^2 - \frac{a_{12}}{a_{00}} \right) - \frac{3\gamma-2}{R_1+R_2} R_1 R_2 \left(z^2 - \frac{a_{02}}{a_{00}} \right) - \frac{3(3\gamma-2)}{R_1+R_2} \left(r^2 z^2 - \frac{a_{22}}{a_{00}} \right) \Bigg\},$$

$$\sigma_r = \frac{4M}{K} \left\{ \left[\frac{(R_1+R_2)r - R_1 R_2 - r^2}{3\gamma_2(R_1+R_2)} \right] \left[\frac{(9\gamma-10)}{5} (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) - \frac{3(3\gamma-2)h^2}{16} \right] + \frac{(9\gamma-10)}{15\gamma_2} (r-R_1)(r-R_2)(R_1+R_2+r) \right\},$$

$$\sigma_z = \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{M}{K} \left\{ \frac{16(3\gamma-4)}{3\gamma_2(7\gamma-8)(R_1+R_2)} \times \right. \\ \times \left[\frac{3(3\gamma-2)h^2}{16} - \frac{3\gamma(3\gamma-2)(2\gamma-1)h^2}{32\gamma_2} - \frac{(9\gamma-5)}{5} (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) \right] + \frac{\gamma(3\gamma-2)}{\gamma_2} (R_1+R_2) - 3\gamma_2 r + \\ \left. + \frac{(3\gamma-2)(3\gamma-4)}{3\gamma_2^2(R_1+R_2)} \left(\frac{h^2}{4} + z^2 \right) \right\}.$$

Здесь M – изгибающий момент внешней нагрузки;

$a_{mn} = \int_F r^m z^n dF$ – моменты инерции поперечного сечения элемента.

$$K = h^2 \left[\frac{3\gamma-2}{4\gamma_2} - \frac{3(\gamma-1)}{2} \right] \left(a_{20} - \frac{a_{10}^2}{a_{00}} \right) + \left[\frac{\gamma(3\gamma-2)h^2}{2} + \frac{3(3\gamma-2)(5\gamma-8)h^2}{4\gamma_2} - \frac{4(5\gamma-8)(9\gamma-10)}{15\gamma_2} \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) \left] \frac{(a_{30} a_{00} - a_{10} a_{20})}{(7\gamma - 8) a_{00} (R_1 + R_2)} + \frac{8(3\gamma - 5)}{15\gamma_2 a_{00}} \times \right. \\ & \times (a_{40} a_{00} - a_{30} a_{10}) + \frac{(3\gamma - 4)}{a_{00}} (a_{20} a_{00} - a_{12} a_{10}) - \\ & \left. - \frac{(3\gamma - 2) R_1 R_2}{(R_1 + R_2) a_{00}} (a_{12} a_{00} - a_{02} a_{10}) - \frac{(3\gamma - 2)}{(R_1 + R_2) a_{00}} (a_{32} a_{00} - a_{22} a_{10}). \right. \end{aligned}$$

Подробный расчет конструкций с круговой осью в плоскости и из плоскости кривизны рассмотрен А.А. Федутой в кандидатской диссертации, выполненной под руководством автора [190].

Полученные зависимости были использованы при расчете напряженного состояния криволинейных элементов лонжеронов рам большегрузных полуприцепов МАЗ 9994, МАЗ 9988, поперечные сечения которых представляют собой двутавр или двухсвязную область, ограниченную двумя прямоугольниками (коробчатое сечение). При этом важно отметить, что поверхностные граничные условия на внешнем прямоугольном контуре двутаврового и коробчатого сечений выполняются точно, а на оставшейся части границы, где краевые условия выполнены в интегральной форме, напряжения вдоль нормали к поверхности весьма незначительны по сравнению с другими напряжениями. На рис. 4.3 представлены эпюры напряжений в полках и стенках криволинейных элементов рам полуприцепов МАЗ 9988. Результаты расчета позволяют сделать вывод о том, что напряжения σ_r , σ_θ имеют значения одного порядка, причем опасными с точки зрения нарушения прочности конструкций являются именно радиальные сжимающие и растягивающие напряжения в стенках криволинейных элементов, доходящие до предела текучести и вызывающие образование пластических зон в стенках. Это подтверждается характером разрушения рам полуприцепов при их эксплуатации.

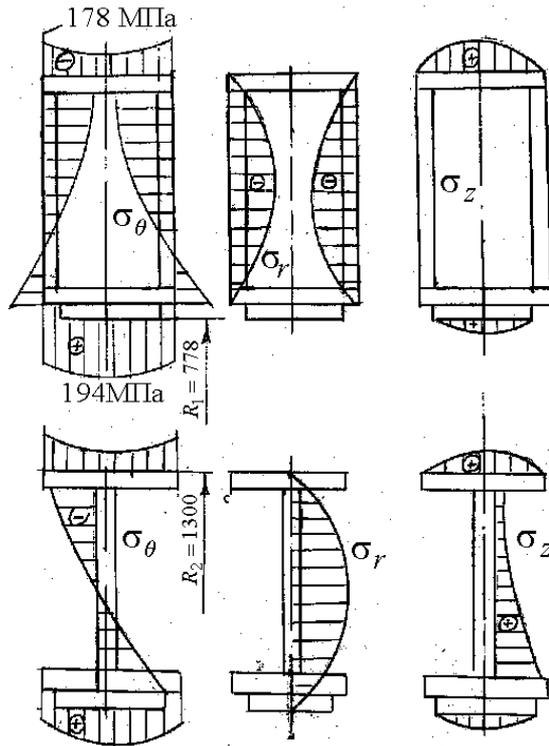


Рис. 4.3. Различные формы поперечного сечения криволинейных элементов полуприцефов и графики напряжений

4.4. Построение дифференциальной структуры решения задачи о равновесии упругого конечного цилиндра

Трудности, связанные с получением точного решения задачи о равновесии конечного цилиндра, заставляют исследователей искать надежные приближенные методы. Одним из таких надежных подходов является построение структуры решения задач при точном выполнении условий на цилиндрической поверхности.

Пусть требуется выполнить условия отсутствия напряжений на боковой цилиндрической поверхности, т.е. при $r = R$ $\tau_{rz} = \sigma_r = \tau_{r\varphi} = 0$.

Запишем ряды перемещений:

$$u = \sum_{m=0} r^m \left[U_{m0} + \sum_{n=1} (U_{mnc} \cos n\varphi + U_{mns} \sin n\varphi) \right],$$

$$v = \sum_{m=0} r^m \left[V_{m0} + \sum_{n=1} (V_{mnc} \cos n\varphi + V_{mns} \sin n\varphi) \right],$$

$$w = \sum_{m=0} r^m \left[W_{m0} + \sum_{n=1} (W_{mnc} \cos n\varphi + W_{mns} \sin n\varphi) \right].$$

Из условий равенства нулю напряжений на боковой поверхности $\sigma_r = \tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = 0$ при $r = R$ получим следующую систему уравнений связей:

$$\sum_{m=0} R^{m-1} (R d_z U_{m0} + m W_{m0}) = 0,$$

$$\sum_{m=0} R^{m-1} (R d_z U_{mnc} + m W_{mnc}) = 0,$$

$$\sum_{m=0} R^{m-1} (R d_z U_{mns} + W_{mns}) = 0,$$

$$\sum_{m=0} R^m V_{m0} = 0,$$

$$\sum_{m=0} \left[(m-1) R^m V_{mnc} - \frac{mn}{d_z} R^{m-1} W_{mns} \right] = 0,$$

$$\sum_{m=0} \left[(m-1) R^m V_{mns} + \frac{mn}{d_z} R^{m-1} W_{mnc} \right] = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0} \left[\gamma m R^{m-1} U_{m0} - \frac{\gamma_2}{d_z} R^m \left(d_z^2 - \frac{m}{R^2} \right) W_{m0} \right] = 0, \\
& \sum_{m=0} \left\{ \gamma m R^{m-1} U_{mnc} - \frac{\gamma_2 m R^{m-2}}{d_z} W_{mnc} + \right. \\
& \left. + \gamma_2 \left[\frac{mn R^{m-2}}{d_z} W_{mnc} + m R^{m-1} W_{mnc} \right] n + \gamma_2 R^m W_{mnc} \right\} = 0, \\
& \sum_{m=0} \left\{ \gamma m R^{m-1} U_{mns} + \frac{\gamma_2 mn^2 R^{m-2}}{d_z} W_{mns} - \gamma_2 \frac{m R^{m-2}}{d_z} W_{mns} - \right. \\
& \left. - \gamma_2 mn R^{m-1} W_{mns} + \gamma_2 R^m d_z W_{mns} \right\} = 0,
\end{aligned}$$

где R – радиус цилиндра, $\gamma = 2(1 - \nu)/(1 - 2\nu)$, $\gamma_2 = \gamma - 2$, ν – коэффициент Пуассона, U_{m0} , V_{m0} , W_{m0} , U_{mnc} , V_{mnc} , W_{mnc} , U_{mns} , V_{mns} , W_{mns} – неизвестные функции от координаты z , $d_z = d/dz$ – оператор производной по z .

В результате исключения обобщенных перемещений U_{00} , U_{0nc} , U_{0ns} , V_{00} , V_{0nc} , V_{0ns} , W_{00} , W_{0nc} , W_{0ns} получим следующие выражения упругих перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left[(r^m - R^m) (U_{m0} + U_{mnc} \cos n\varphi + U_{mns} \sin n\varphi) - \right. \\
& \left. - \frac{m}{d_z} R^{m-1} (W_{m0} + W_{mnc} \cos n\varphi + W_{mns} \sin n\varphi) \right], \\
v &= \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left[(r^m + (m-1)R^m) (V_{m0} + V_{mnc} \cos n\varphi + V_{mns} \sin n\varphi) + \right. \\
& \left. + \frac{mn}{d_z} R^{m-1} (W_{mnc} \sin n\varphi - W_{mns} \cos n\varphi) \right],
\end{aligned}$$

$$w = \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ -\frac{mR^{m-2}}{d_z^2} (n^2 - 1) + (r^m - R^m) (W_{m0} + W_{mnc} \cos n\varphi + W_{mns} \sin n\varphi) + \frac{mn^2}{d_z^2} R^{m-2} W_{m0} + \frac{mn}{d_z} R^{m-1} (V_{mnc} \sin n\varphi - V_{mns} \cos n\varphi) - \frac{\gamma m}{\gamma_2 d_z} (U_{m0} + U_{mnc} \cos n\varphi + U_{mns} \sin n\varphi) \right\},$$

$$\tau_{rz} = G \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ (r^{m-1} - R^{m-1}) d_z (U_{m0} + U_{mnc} \cos n\varphi + U_{mns} \sin n\varphi) + m (r^{m-1} - R^{m-1}) (W_{m0} + W_{mnc} \cos n\varphi + W_{mns} \sin n\varphi) \right\},$$

$$\tau_{r\varphi} = G \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ \frac{(m-1)}{2} (r^m - R^m) (V_{m0} + V_{mnc} \cos n\varphi + V_{mns} \sin n\varphi) - \frac{n}{r} (r^m - R^m) (U_{mnc} \sin n\varphi - U_{mns} \cos n\varphi) \right\},$$

$$\begin{aligned} \sigma_r = & G \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ \gamma m (r^{m-1} - R^{m-1}) (U_{m0} + U_{mns} \sin n\varphi + U_{mnc} \cos n\varphi) + \right. \\ & + \gamma_2 \left[(r^m - R^m) r^{-1} (U_{m0} + U_{mnc} \cos n\varphi + U_{mns} \sin n\varphi) + \frac{n}{r} (r^m + (m-1)R^m) \times \right. \\ & \times (V_{mns} \cos n\varphi - V_{mnc} \sin n\varphi) + mnR^{m-1} (V_{mnc} \sin n\varphi - V_{mns} \cos n\varphi) - \\ & - \frac{mR^{m-1}}{rd_z} (W_{m0} + W_{mnc} \cos n\varphi + W_{mns} \sin n\varphi) + \frac{mn^2 R^{m-1}}{rd_z} \times \\ & \times (W_{mns} \sin n\varphi + W_{mnc} \cos n\varphi) + \left. \left[\frac{m}{d_z} (1 - n^2) R^{m-2} + d_z (r^m - R^m) \right] \times \right. \\ & \left. \left. \times (W_{m0} + W_{mnc} \cos n\varphi + W_{mns} \sin n\varphi) + \frac{mn^2}{d_z} R^{m-2} W_{m0} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Полученные формулы для напряжений τ_{rz} , $\tau_{r\varphi}$ и σ_r показывают, что они равны нулю при $r = R$.

При этом напряженно-деформированное состояние разбивается на ряд отдельных состояний: осесимметричное сжатие (растяжение), кручение, неосесимметричное сжатие, изгиб в двух плоскостях и др.

Рассмотрим в качестве примера осесимметричное равновесие упругого цилиндра [133]. Для этой цели выпишем ряды с членами, не содержащими $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$. Кроме того, выполняем кинематические условия: $v = 0$ при любом r , $u = 0$ при $r = 0$ ($W_{m0} = -RU_{m0}/m$). В результате получим

$$u = \sum_{m=1} r^m U_m, \quad v = 0, \quad w = \sum_{m=1} \left[\frac{(R^m - r^m)}{m} R d_z U_m - \frac{(\gamma m + \gamma_2)}{\gamma_2 d_z} R^{m-1} U_m \right],$$

$$\tau_{rz} = G \sum_{m=1} r^{m-1} (r - R) d_z U_m, \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{z\varphi} = 0,$$

$$\sigma_r = G \sum_{m=1} \left[-(\gamma m + \gamma_2) (R^{m-1} - r^{m-1}) U_m + \frac{\gamma_2}{m} (R^m - r^m) R d_z^2 U_m \right],$$

$$\sigma_\varphi = G \sum_{m=1} \left\{ [(\gamma + \gamma_2 m) r^{m-1} - (\gamma m + \gamma_2) R^{m-1}] U_m + \frac{\gamma_2}{m} (R^m - r^m) R d_z^2 U_m \right\},$$

$$\sigma_z = G \sum_{m=1} \left\{ \frac{\gamma}{m} (R^m - r^m) R d_z^2 U_m + \gamma_2 (m + 1) r^{m-1} U_m - \frac{\gamma}{\gamma_2} (\gamma m + \gamma_2) R^{m-1} U_m \right\}.$$

Тензор возможной деформации равен

$$\delta E = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial \delta u}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \delta w}{2 \partial r} \\ 0 & \frac{\delta u}{r} & 0 \\ \frac{\partial \delta w}{2 \partial r} & 0 & 0 \end{array} \right\},$$

$$T \cdot \delta E = \sigma_r \frac{\partial \delta u}{\partial r} + \sigma_\varphi \frac{\delta u}{r} + \tau_{rz} \frac{\partial \delta w}{\partial r}.$$

Вариационное уравнение равновесия элементарного слоя распадается на два следующих уравнения ($\bar{F}_n = 0$):

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_F \tau_{rz} \delta u dF - \int_F \left(\sigma_r \frac{\partial \delta u}{\partial r} + \sigma_\varphi \frac{\delta u}{r} \right) dF + \int_F \left(K_r - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u dF = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_F \sigma_z \delta w dF - \int_F \tau_{rz} \frac{\partial \delta w}{\partial r} dF + \int_F \left(K_z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w dF = 0.$$

В качестве вариаций можно взять функции

$$\delta u = r^k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \delta w = r^{l-1} \quad (l = 1, 2, \dots).$$

Первое (тривиальное) приближение получим при $\delta u = 0$, $\delta w = 1$:

$$u = rU, \quad w = (R-r)R d_z U - \frac{2(\gamma-1)}{\gamma_2 d_z} U,$$

$$\frac{\gamma R^2}{6} \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} - \frac{(3\gamma-4)}{\gamma_2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\rho}{G} \left[\frac{R^2}{6} \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{(\gamma-1)}{\gamma_2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right] = 0.$$

Без особых трудностей можно построить дифференциальную структуру решения задачи о равновесии цилиндрической оболочки при точном выполнении условий нагружения на цилиндрических поверхностях. Так, пусть, в частности, для осесимметричного равновесия нужно выполнить условия: при $r = R_1$ $\tau_{rz} = \sigma_r = 0$, при $r = R_2$ $\tau_{rz} = 0$, $\sigma_r = F(z)$. Тогда условия $\tau_{rz} = \sigma_r = 0$ при $r = R_1$ выполняются ряды

$$u = \sum_{m=1} r^m U_m, \quad w = \sum_{m=1} \left[\frac{(R_1^m - r^m)}{m} R_1 d_z U_m - \frac{(\gamma m + \gamma_2)}{\gamma_2 d_z} R_1^{m-1} U_m \right].$$

Выполняя условия $\tau_{rz} = 0$, $\sigma_r = F(z)$ при $r = R_2$, получим новые ряды и одно уравнение неголономной связи:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1} r(r^m - R_2^m) U_{m+1} + Cr, \\ w &= \sum_{m=1} \left\{ \left[\frac{(R_1^{m+1} - r^{m+1})}{m+1} - R_2^m (R_1 - r) \right] R_1 d_z U_{m+1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\gamma_2 d_z} \left[(\gamma m + \gamma + \gamma_2) R_1^m - 2(\gamma - 1) R_2^m \right] U_{m+1} \right\} - \frac{2(\gamma - 1) Cz}{\gamma_2} + D, \\ &\quad G \sum_{m=1} \left[(\gamma m + \gamma + \gamma_2) (R_2^m - R_1^m) + \gamma_2 R_1 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{R_1^{m+1} - R_2^{m+1}}{m+1} - R_1 R_2^m + R_2^{m+1} \right) d_z^2 \right] U_{m+1} = F(z) = \sigma_r|_{r=R_2}. \end{aligned}$$

Напряжения при этом вычисляются по формулам:

$$\tau_{rz} = G \sum_{m=1} (R_1 - r) (R_2^m - r^m) d_z U_{m+1},$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= G \sum_{m=1} \left[(\gamma m + \gamma + \gamma_2) (r^m - R_1^m) + \gamma_2 R_1 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{R_1^{m+1} - r^{m+1}}{m+1} - R_1 R_2^m + r R_2^m \right) d_z^2 \right] U_{m+1}, \\ \sigma_\varphi &= G \sum_{m=1} \left[(\gamma_2 m + \gamma + \gamma_2) r^m - (\gamma m + \gamma + \gamma_2) R_1^m + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_2 R_1 \left(\frac{R_1^{m+1} - r^{m+1}}{m+1} - R_1 R_2^m + r R_2^m \right) d_z^2 \right] U_{m+1}, \\ \sigma_z &= G \sum_{m=1} \left[\gamma_2 (m+2) r^m + (3\gamma - 4) R_2^m - \frac{\gamma}{\gamma_2} (\gamma m + \gamma + \gamma_2) R_1^m + \right. \\ &\quad \left. + \gamma R_1 \left(\frac{R_1^{m+1} - r^{m+1}}{m+1} - R_1 R_2^m + r R_2^m \right) d_z^2 \right] U_{m+1} - \frac{2(3\gamma - 4)C}{\gamma_2}. \end{aligned}$$

4.5. Построение дифференциальной структуры решения краевых задач теории упругости в криволинейных координатах

Как известно, криволинейные координаты успешно применяются для решения краевых задач математической физики при наличии областей сложной формы. Покажем успешное применение криволинейных координат при построении структуры решения задач теории упругости в случае кручения (крутильных колебаний) оболочек вращения. Рассмотрим оболочку вращения, которая получается вращением взаимно ортогональных кривых $q_1 = \text{const}$ и $q_2 = \text{const}$, где q_1, q_2 – криволинейные ортогональные координаты. Координата q_3 в данном случае представляет собой угол вращения $q_3 = \varphi$. Полагая перемещения $u = v = 0$ вдоль координат q_1 и q_2 и учитывая, что коэффициенты Ляме H_1, H_2, H_3 не зависят от координаты q_3 , приходим к выводу, что напряжения $\tau_{12} = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ равны нулю тождественно, а напряжения τ_{13} и τ_{23} вычисляются по формулам

$$\tau_{13} = G \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{w}{H_3} \right), \quad \tau_{23} = G \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{w}{H_3} \right).$$

Решение строим в виде следующего степенного ряда:

$$w = H_3 \left(W_0 + q_2 W_1 + q_2^2 W_2 + \dots + q_2^n W_n \right) = H_3 \sum_{n=0} W_n q_2^n.$$

Условие нагружения на боковой поверхности, полученной при вращении линии $q_2 = C_1$:

$$\frac{H_{30}^-}{H_{20}^-} \sum_{n=0} n C_1^{n-1} W_n = -\frac{\tau_{23}^-}{G},$$

при вращении линии $q_2 = C_2$

$$\frac{H_{30}^+}{H_{20}^+} \sum_{n=0} n C_2^{n-1} W_n = \frac{\tau_{23}^+}{G},$$

где H_{30}^- , H_{30}^+ , H_{20}^- , H_{20}^+ – коэффициенты Ляме, вычисленные соответственно при $q_2 = C_1$ и $q_2 = C_2$, W_n , – обобщенные перемещения, зависящие от координаты q_1 и времени t . Исключим из построенного ряда для w обобщенные переменные W_1 и W_2 с помощью уравнений связей. Разрешая уравнения связей относительно W_1 и W_2 , получим

$$W_1 = -\frac{1}{(C_2 - C_1)G} \left(\frac{C_2 H_{20}^- \tau_{23}^-}{H_{30}^-} + \frac{C_1 H_{20}^+ \tau_{23}^+}{H_{30}^+} \right) + \frac{C_1 C_2}{C_2 - C_1} \sum_{n=3} n (C_2^{n-2} - C_1^{n-2}) W_n,$$

$$W_2 = \frac{1}{(C_2 - C_1)G} \left(\frac{H_{20}^- \tau_{23}^-}{H_{30}^-} + \frac{H_{20}^+ \tau_{23}^+}{H_{30}^+} \right) - \frac{1}{2(C_2 - C_1)} \sum_{n=3} n (C_2^{n-1} - C_1^{n-1}) W_n.$$

В результате построили ряд, который точно выполняет краевые условия на боковых поверхностях $q_2 = C_1$ и $q_2 = C_2$:

$$w = H_3 \sum_{n=0} \left[q_2^n + \frac{n(C_2^{n-2} - C_1^{n-2})C_1C_2}{C_2 - C_1} q_2 - \frac{n(C_2^{n-1} - C_1^{n-1})}{2(C_2 - C_1)} q_2^2 \right] W_n - \frac{q_2}{(C_2 - C_1)G} \left(\frac{C_2 H_{20}^- \tau_{23}^-}{H_{30}^-} + \frac{C_1 H_{20}^+ \tau_{23}^+}{H_{30}^+} \right) + \frac{q_2^2}{2(C_2 - C_1)G} \left(\frac{H_{20}^- \tau_{23}^-}{H_{30}^-} + \frac{H_{20}^+ \tau_{23}^+}{H_{30}^+} \right).$$

Возможные перемещения находим по формулам

$$\delta w = H_3 \left[q_2^m + \frac{mq_2 C_1 C_2 (C_2^{m-2} - C_1^{m-2})}{C_2 - C_1} - \frac{mq_2^2 (C_2^{m-1} - C_1^{m-1})}{2(C_2 - C_1)} \right],$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

$$\delta w_0 = H_3, \quad \delta w_1 = \delta w_2 = 0,$$

$$\delta w_3 = H_3 \left[q_2^3 - \frac{3}{2} q_2^2 (C_1 + C_2) + 3q_2 C_1 C_2 \right].$$

Отметим, что производные $\frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\delta W}{H_3} \right)$ равны нулю при $q_2 = C_1$ и

$q_2 = C_2$. Это отвечает требованиям основной леммы вариационного исчисления. При данном выборе аппроксимирующих функций и вариаций в случае отсутствия объемных сил вариационное уравнение равновесия элементарного слоя записывается в виде

$$\sum_{n=0} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\varepsilon_{mn} \frac{\partial W_n}{\partial q_1} \right) - \rho_{mn} W_n - \bar{\varepsilon}_{mn} \frac{\partial^2 W_n}{\partial t^2} \right] + \tau_{23}^+ H_1 H_3 \delta w|_{q_2=C_2} + \tau_{23}^- H_1 H_3 \delta w|_{q_2=C_1} = 0, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Коэффициенты ε_{mn} , $\bar{\varepsilon}_{mn}$, ρ_{mn} вычисляются по формулам:

$$\varepsilon_{mn} = G \int_{C_1}^{C_2} \frac{H_2 H_3^2}{H_1} q_2^n \delta w dq_2, \quad \bar{\varepsilon}_{mn} = \rho \int_{C_1}^{C_2} H_1 H_2 H_3^2 q_2^n \delta w dq_2,$$

$$\rho_{mn} = G \int_{C_1}^{C_2} \frac{n H_1 H_3^3}{H_2} q_2^{n-1} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\delta w}{H_3} \right) dq_2.$$

Полученные вариационные уравнения решаются совместно с уравнениями связей, выражающих равновесие на поверхности тела.

Первое приближение задачи получим при $n = 0$, $m = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\varepsilon \frac{\partial W}{\partial q_1} \right) - \bar{\varepsilon} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \tau_{23}^+ H_1 H_3^2 \Big|_{q_2=C_2} + \tau_{23}^- H_1 H_3^2 \Big|_{q_2=C_1} = 0,$$

$$\varepsilon = G \int_{C_1}^{C_2} \frac{H_2 H_3^3}{H_1} dq_2, \quad \bar{\varepsilon} = \rho \int_{C_1}^{C_2} H_1 H_2 H_3^3 dq_2.$$

Приведем уравнения крутильных колебаний для некоторых оболочек вращения при отсутствии нагрузки $\tau_{23}^+ = \tau_{23}^- = 0$ (рис. 4.4).

Полагая $q_1 = x_1$, $q_2 = r$, $q_3 = \varphi$, получаем уравнение крутильных колебаний цилиндрической оболочки

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

При $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$ имеем уравнение крутильных колебаний конической оболочки

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \rho \frac{r^4}{G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

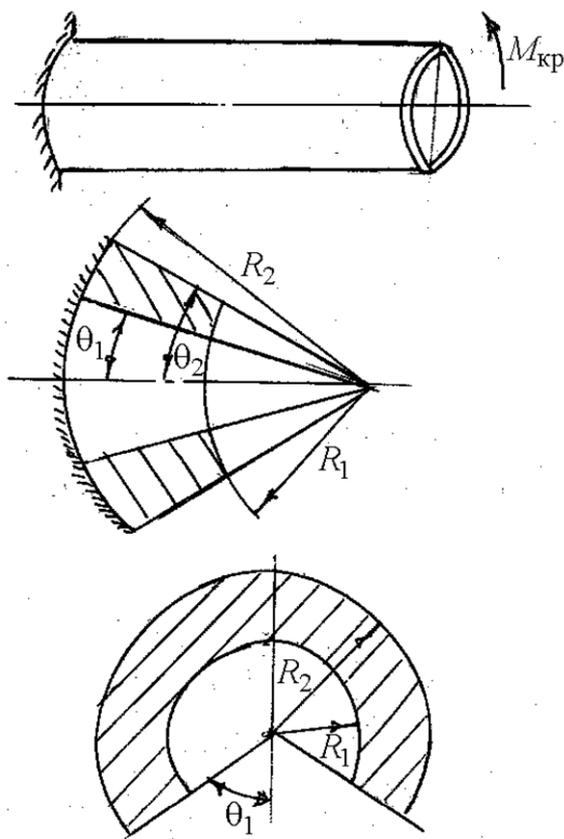


Рис. 4.4. Оболочки вращения (цилиндрическая, коническая и сферическая)

При $q_1 = \theta$, $q_2 = r$, $q_3 = \varphi$ уравнение крутильных колебаний сферической оболочки

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^3 \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{3\rho(R_2^5 - R_1^5) \sin^3 \theta}{5G(R_2^3 - R_1^3)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0.$$

Применяя другие системы криволинейных ортогональных координат, можно получить уравнения крутильных колебаний самых разнообразных тел вращения [91]. Рассмотрим в качестве примера тело, полученное в результате вращения сетки кривых, даваемых

аналитической функцией $z = w + e^w$ (рис. 4.5). Отделяя действительную и мнимую часть, находим $x = u + e^u \cos v$, $y = v + e^u \sin v$. Коэффициенты Ляме равны

$$H_1 = H_2 = \sqrt{1 + 2e^u \cos v + e^{2u}}, \quad H_3 = v + e^u \sin v.$$

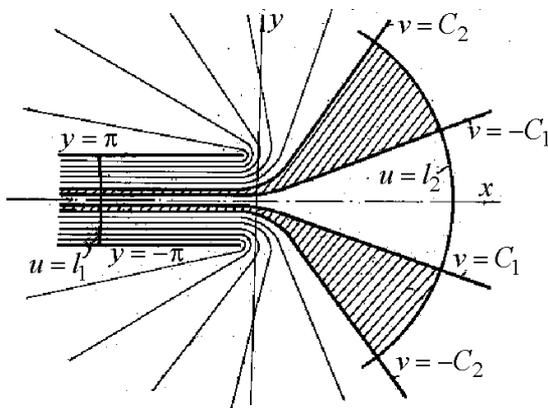


Рис. 4.5. Семейство ортогональных кривых, определяемых аналитической функцией $z = w + e^w$ ($z = x + iy$, $w = u + iv$)

Для задачи статики получаем формулы для касательных напряжений

$$\tau_{u\varphi} = \frac{v + e^u \sin v}{\varepsilon \sqrt{1 + 2e^u \cos v + e^{2u}}}, \quad \tau_{v\varphi} = 0.$$

Исследование выражения для $\tau_{u\varphi}$ показывает, что максимум напряжения возникает при $u = \ln(-\cos v)$. Так, если тело образовано вращением одной из линий $v = \pi$, то при $v = \pi$, $u = 0$ $\tau_{u\varphi}$ равно бесконечности. Этот результат физически можно объяснить как проявление эффекта концентрации напряжений в скручиваемом теле, образованном круговой трещиной, распространенной на глубину (см. рис. 4.5). При других значениях $\pi/2 < v < \pi$ $u = \ln(-\cos v)$ будем получать также наибольшие значения напряжения $\tau_{u\varphi}$ в местах резкого изменения формы тела.

В заключение отметим, что, выбирая ряды упругих перемещений в виде

$$u = \sum_{i=1} U_i(q_1, t) \varphi_i(q_1, q_2, q_3),$$

$$v = \sum_{k=1} V_k(q_1, t) \psi_k(q_1, q_2, q_3),$$

$$w = \sum_{h=1} W_h(q_1, t) f_h(q_1, q_2, q_3),$$

где U_i , V_k , W_h – неизвестные функции от двух переменных; φ_i , ψ_k , f_h – известные (аппроксимирующие) функции от трех криволинейных координат, в монографии [91] автор получил системы дифференциальных уравнений в частных производных по двум переменным (одной из криволинейных координат и времени). Из этой системы вытекают как частные случаи известные уравнения В.З.Власова и И.Ф.Образцова для расчета призматических и конических складчатых систем, уравнения И.Е.Милейковского для расчета массивных тел и др., причем обнаружены неточности в уравнениях для тел переменного сечения в работах [52, 158].

Итак, вариационное уравнение равновесия элементарного слоя и выбор аппроксимирующих функций в виде стандартных рядов с наложением на них связей из условий закрепления и нагружения тела позволяют получить надежные решения целого ряда конкретных инженерных задач. Отметим, что обыкновенные дифференциальные уравнения, получаемые при решении задач статики, можно также успешно решать в виде стандартных рядов с привлечением методов аналитической механики. Так, в кандидатской диссертации [26], выполненной под руководством автора, полученные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными (с разрывами первого рода) коэффициентами при расчете корпуса угольного комбайна В.Я. Беланов успешно решил с помощью стандартных степенных рядов с привлечением уравнений связей, т.е. построил модифицированный метод Бубнова-Галеркина для решения обыкновенных дифференциальных уравнений [28].

Выведенные на основе вариационного уравнения равновесия элементарного слоя динамические уравнения в частных производных по двум переменным могут быть решены методом разделения переменных, операционным методом [80] и другими, в том числе и вариационными методами.

4.6. Решение задачи о внезапном приложении крутящего момента к торцу цилиндрической оболочки

Дадим решение задачи о внезапном приложении крутящего момента $M = M_0 e^{-\alpha t}$ к торцу цилиндрической оболочки со свободными от нагрузки цилиндрическими поверхностями (см. рис. 4.4). Второй торец оболочки считаем закрепленным. Если $\alpha = 0$, то имеем случай внезапного приложения постоянного крутящего момента M_0 . Для больших α имеем случай приложения внезапной ударной нагрузки.

Для решения поставленной задачи сначала находим спектр частот и формы колебаний. С этой целью решения уравнения крутильных колебаний цилиндрической оболочки строим в виде $W = W_0(x) \sin(\omega t + \beta)$, где $W_0(x)$ – функция, которая является решением уравнения

$$d_x^2 W_0 + \frac{\omega^2}{a^2} W_0 = 0.$$

Находим $W_0 = C_1 \sin\left(\frac{\omega x}{a}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\omega x}{a}\right)$ и выполняем краевые условия:

при $x = 0$ $W_0 = 0$ и при $x = l$ $dW_0/dx = 0$, откуда $C_2 = 0$, $\cos\left(\frac{\omega l}{a}\right) = 0$, $\frac{\omega l}{a} = \frac{\pi(2n-1)}{2}$, $\omega_n = \frac{\pi a(2n-1)}{2l}$.

Собственные формы свободных колебаний записываются в виде

$$W_n(x) = \sin \frac{\pi x(2n-1)}{2l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Применяя вариационный метод Галеркина, умножим исходное уравнение крутильных колебаний на свободные формы и проинтегрируем первое слагаемое по частям:

$$\int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2l} dx = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_0^l \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2l} \Big|_0^l - \int_0^l \left[\frac{\pi(2n-1)}{2l} \frac{\partial w}{\partial x} \cos \frac{\pi(2n-1)x}{2l} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2l} \right] dx = 0,$$

$$a^2 = \frac{G}{\rho}.$$

Используя условие на торце $x = l$, находим

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_0^l = \frac{M}{GJ_0} = \frac{M_0 e^{-\alpha t}}{GJ_0}, \quad J_0 = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4).$$

Решение будем искать в виде разложений по формам собственных колебаний

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(t) \sin \frac{\pi(2m-1)x}{2l}.$$

Если подставить сумму для W в уравнение

$$\frac{M_0 e^{-\alpha t}}{GJ_0} (-1)^n + \int_0^l \left[\frac{\pi(2n-1)}{2l} \frac{\partial w}{\partial x} \cos \frac{\pi(2n-1)x}{2l} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2l} \right] dx = 0,$$

то на основании ортогональности собственных форм колебаний получим

$$\frac{d^2 W_m}{dt^2} + \frac{\pi^2(2m-1)^2 a^2}{4l^2} W_m = -\frac{2M_0 e^{-\alpha t}}{GJ_0 l} a^2 (-1)^m.$$

При однородных начальных условиях $W_m|_{t=0} = 0$, $\left. \frac{dW_m}{dt} \right|_{t=0} = 0$

решение записывается в виде следующего бесконечного ряда:

$$W(x, t) = -\frac{2M_0 e^{-\alpha t}}{GJ_0 l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\alpha^2 + \omega_m^2} \times \\ \times \left(\frac{\alpha}{\omega_m} \sin \omega_m t - \cos \omega_m t + e^{-\alpha t} \right) \sin \frac{\pi(2m-1)x}{2l}, \\ \omega_m = \frac{\pi(2m-1)a}{2l}.$$

Глава 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ПРИ ПОЛНОЙ АППРОКСИМАЦИИ УПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПО ТРЕМ КООРДИНАТАМ

5.1. Представление искомых упругих перемещений в виде стандартных степенных рядов

В настоящей работе широко используются стандартные функциональные ряды для построения рядов аппроксимирующих функций и возможных состояний. Степенные ряды по двум координатам применялись успешно для построения теории стержней при полном выполнении краевых условий на цилиндрической поверхности (см. гл. 4). Такое же успешное применение степенных рядов может быть осуществлено и при аппроксимации упругих перемещений по трем координатам. Так, в работах П.А. Бондаренко [36] были использованы степенные ряды для построения бигармонических полиномов приме-

нительно к вариационному методу Треффца, основанному на принципе минимума квадратичного отклонения при выполнении краевых условий. Что касается применения степенных рядов при использовании вариационного принципа Лагранжа, то здесь возможны два основных пути улучшения сходимости вариационного процесса за счет наложения поверхностных кинематических и статических условий и за счет выполнения статических внутренних связей из уравнения $divT + \bar{K} = 0$. При этом в любом варианте поверхностные кинематические условия должны быть выполнены заранее, так как они не могут быть обеспечены за счет вариационных уравнений.

5.2. Составление уравнений связей из условий равновесия внутри и на поверхности упругого тела

Выполнение заранее всех поверхностных условий предпочтительней, чем внутренних статических (динамических), так как сходимость краевой задачи всегда хуже внутренней [79]. Однако гарантировать выполнение поверхностных условий для реальных инженерных конструкций представляется затруднительным, хотя принципиально преодолемым, например, с помощью аппарата R -функций [176]. Выполнение поверхностных условий с помощью степенных рядов при аппроксимации по трем координатам ничем не отличается от решения этой задачи при аппроксимации по двум координатам. Только при этом резко возрастает число поверхностных статических связей, которые в данном случае представляют собой систему алгебраических уравнений, а не дифференциальных.

Поэтому покажем более подробно выполнение статических внутренних условий. Для этой цели наложим на построенные степенные ряды известные уравнения Ламе (без учета инерционной нагрузки) (1.6):

$$G \left[\Delta u + (\gamma - 1) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + K_x = 0, \quad G \left[\Delta v + (\gamma - 1) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] + K_y = 0,$$

$$G \left[\Delta w + (\gamma - 1) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + K_z = 0,$$

где

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2, \quad \theta = \operatorname{div} \bar{u} = \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w, \quad \gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu},$$

ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига, K_x, K_y, K_z – проекции объемной силы на оси координат. Подставляя в уравнения Ламе ряды искомых перемещений u, v и w , получим три уравнения связей. Чтобы полученные уравнения обратились тождественно в нуль, необходимо приравнять к нулю все коэффициенты при одинаковых степенях $x^m y^n z^p$.

Проиллюстрируем сказанное на примере построения внутренних связей для следующих рядов аппроксимирующих функций:

$$u = zU_{001} + xzU_{101} + z^2U_{002} + x^2zU_{201},$$

$$v = yzV_{011} + xyzV_{111},$$

$$w = zW_{001} + xzW_{101} + z^2W_{002} + xz^2W_{102}.$$

Уравнения внутренних связей получаем в результате подстановки данных рядов в уравнения Ламе (объемными силами пренебрегаем) и приравнивания к нулю всех коэффициентов при различных степенях:

$$2U_{002} + (\gamma - 1)W_{101} = 0,$$

$$2\gamma W_{002} + (\gamma - 1)(U_{101} + V_{011}) = 0,$$

$$2\gamma W_{102} + (\gamma - 1)(2U_{201} + V_{111}) = 0,$$

$$2\gamma U_{201} + (\gamma - 1)(V_{111} + 2W_{102}) = 0.$$

Исследование уравнений внутренних связей показывает, что они содержат независимые друг от друга группы обобщенных перемещений в зависимости от суммы $m + n + p$. Так, первая группа содержит обобщенные перемещения

$$U_{101}, U_{002}, V_{011}, W_{002}, W_{101} \quad (m + n + p = 2),$$

вторая группа – обобщенные перемещения

$$U_{201}, V_{111}, W_{102} \quad (m + n + p = 3).$$

Отметим, что обобщенные перемещения U_{001} и W_{001} не входят в уравнения связей, т.е. они удовлетворяют уравнениям Ламе тождественно.

При таком выборе аппроксимирующих функций точно выполняются условия равновесия внутри тела $\operatorname{div} T + \bar{K} = 0$, а вариационное уравнение Лагранжа сводится к выполнению в интегральной форме условий равновесия на поверхности, т.е. получаем модифицированный метод Треффца. Модификация состоит в том, что каждая аппроксимирующая функция не удовлетворяет условию равновесия внутри, а это условие выполняется за счет наложения на построенные ряды внутренних связей.

При выборе возможных состояний возможны два подхода.

1. Возможные состояния строятся независимо от аппроксимирующих функций, даже в разных классах, лишь бы была обеспечена их полнота. При этом число возможных состояний нужно брать равным разности числа аппроксимирующих функций и числа уравнений внутренних связей.

Достоинство такого подхода состоит в том, что выполняются интегральные условия равновесия на поверхности тела на всех введенных возможных состояниях. Это позволяет получить достаточно хорошее решение в отдельных областях упругого тела при сравнительно небольшом числе аппроксимирующих функций. Выбор возможных состояний можно ограничить внутри определенной степени, если задача решается в степенных рядах. Тогда характер степенного ряда для аппроксимирующих функций вполне определяет характер возможных состояний для конкретной степени. Степень аппроксимирующих функций в этом случае всегда больше степени возможных состояний. При таком подходе (в степенных рядах) минимизируем энергию не по всем обобщенным перемещениям, а только по тем, по которым введены возможные состояния. Если в качестве возможных состояний брать ряды, отличные от рядов аппроксимирующих функций, то говорить о минимуме энергии по

каким-то обобщенным перемещениям не имеет смысла. В этом случае основой для улучшения решения будет не минимум потенциальной энергии, а наилучшее выполнение поверхностных условий в интегральной форме, что обеспечивается за счет увеличения числа возможных состояний.

2. Возможные состояния берутся теми же, что и аппроксимирующие функции, и число их равно числу аппроксимирующих функций. Общее число расчетных уравнений равно в этом случае сумме числа вариационных уравнений (числа аппроксимирующих функций) и числа уравнений внутренних связей. Для замкнутости системы можно привлечь неопределенные множители Лагранжа, т.е. в качестве объекта варьирования взять функцию Лагранжа

$$U = \frac{1}{2} \int_V T \cdot \cdot E dV + \sum_{k_1} \lambda_{k_1} F_{k_1}(U_i, V_k, W_h),$$

где U – функция Лагранжа;

$F_{k_1}(U_i, V_k, W_h) = 0$ – уравнения связей;

λ_{k_1} – неопределенные множители Лагранжа.

Для простых по форме тел без резких изменений формы этот метод следует признать эффективным. Хотя число уравнений с применением неопределенных множителей Лагранжа увеличивается, матрица расчетных уравнений становится симметричной, система устойчивой, отпадает некоторая неопределенность в выборе возможных состояний. Однако в этом случае нарушается равенство нулю работы всех внешних и внутренних сил на каждом возможном перемещении, достигается лишь минимум энергии по каждому обобщенному перемещению.

5.3. Классификация расчетных уравнений и их структура

Так как при решении задач теории упругости предполагается заранее выполнить уравнения равновесия внутри $\operatorname{div} T + \bar{K} = 0$, то вариационное уравнение Лагранжа (1.21) сводится к условию

$$\iint_S (\bar{n} \cdot T - \bar{F}_n) \cdot \delta \bar{u} dS = 0$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} \iint_S (n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}) \varphi_j dS &= P_j, \\ \iint_S (n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \tau_{yz}) \psi_g dS &= Q_g, \\ \iint_S (n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_z) f_d dS &= N_d. \end{aligned}$$

Для вычисления коэффициентов уравнений требуется вычислить поверхностные интегралы типа

$$\begin{aligned} S_x &= \iint n_x x^m y^n z^p dS, \\ S_y &= \iint n_y x^m y^n z^p dS, \\ S_z &= \iint n_z x^m y^n z^p dS. \end{aligned}$$

Однако более удобным является вычисление объемных интегралов, поэтому будем исходить из вариационного уравнения Лагранжа в форме табл. 5.1. Это означает, что для решения задач достаточно ограничиться вычислением объемного интеграла

$$J_{mnp} = \iiint_V x^m y^n z^p dx dy dz.$$

Поэтому вариационные уравнения приводятся к алгебраической системе с коэффициентами, вычисляемыми по формулам табл. 5.1. Уравнения внутренних связей также приводятся к алгебраической системе, коэффициенты которой в декартовых координатах вычисляются по стандартным формулам (табл. 5.2).

Вид и число поверхностных связей (табл. 5.3) зависит от конкретных условий задачи, вследствие чего эта группа уравнений является нестандартной. Причем наименее изучены уравнения связей взаимодействия, которые могут выражаться в равенстве друг другу некоторых компонентов тензора деформаций или напряжений и др.

Коэффициенты вариационных уравнений

$$\int_V T \cdot \delta E dV - \int_V \bar{K} \cdot \delta \bar{u} dV - \int_S \bar{F}_n \cdot \delta \bar{u} dS = 0$$

	$U_{m_i n_i p_i}$	$V_{m_k n_k p_k}$	$W_{m_h n_h p_h}$
$\varphi_j = x^{m_j} y^{n_j} z^{p_j}$	$b_{ij} = \gamma m_j m_i J_{m_j+m_i-2, n_j+n_i, p_j+p_i} +$ $+ n_j n_i J_{m_j+m_i, n_j+n_i-2, p_j+p_i} +$ $+ p_j p_i J_{m_j+m_i, n_j+n_i, p_j+p_i-2}$	$c_{jk} = (\gamma_2 m_j n_k + n_j m_k) \times$ $\times J_{m_j+m_k-1, n_j+n_k-1, p_j+p_k}$	$J_{jh} = (\gamma_2 m_j p_h + p_j m_h) \times$ $\times J_{m_j+m_h-1, n_j+n_h, p_j+p_h-1}$
$\psi_g = x^{m_g} y^{n_g} z^{p_g}$	$c_{gi} = (\gamma_2 m_i n_g + n_i m_g) \times$ $\times J_{m_g+m_i-1, n_g+n_i-1, p_g+p_i}$	$s_{gk} = m_g m_k J_{m_g+m_k-2, n_g+n_k, p_g+p_k} +$ $+ \gamma n_g n_k J_{m_g+m_k, n_g+n_k-2, p_g+p_k} +$ $+ p_g p_k J_{m_g+m_k, n_g+n_k, p_g+p_k-2}$	$\delta_{gh} = (\gamma_2 n_g p_h + p_g n_h) \times$ $\times J_{m_g+m_h, n_g+n_h-1, p_g+p_h-1}$
$f_d = x^{m_d} y^{n_d} z^{p_d}$	$J_{di} = (\gamma_2 m_i p_d + p_i m_d) \times$ $\times J_{m_d+m_i-1, n_d+n_i, p_d+p_i-1}$	$\delta_{dk} = (\gamma_2 n_k p_d + p_k n_d) \times$ $\times J_{m_d+m_k, n_d+n_k-1, p_d+p_k-1}$	$\rho_{dh} = m_d m_h J_{m_d+m_h-2, n_d+n_h, p_d+p_h} +$ $+ n_d n_h J_{m_d+m_h, n_d+n_h-2, p_d+p_h} +$ $+ \gamma p_d p_h J_{m_d+m_h, n_d+n_h, p_d+p_h-2}$

Коэффициенты уравнений внутренних связей

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{div}T + \bar{K} = 0 & \\
 & U_{m,n,p} & V_{m,n,p} & W_{m,n,p} \\
 & \gamma(m+1)(m+2)U_{m+2,n,p} + & & \\
 & + (n+1)(n+2)U_{m,n+2,p} + & (\gamma-1)(m+1)(n+1)V_{m+1,n+1,p} & (\gamma-1)(m+1)(p+1)W_{m+1,n,p+1} \quad -K_x \\
 & + (p+1)(p+2)U_{m,n,p+2} & & \\
 m, n, p = 1, 2, 3, \dots & (\gamma-1)(m+1)(n+1)U_{m+1,n+1,p} & \gamma(n+1)(n+2)V_{m,n+2,p} + & (\gamma-1)(n+1)(p+1)W_{m,n+1,p+1} \quad -K_y \\
 & & + (m+1)(m+2)V_{m+2,n,p} + & \\
 & & + (p+1)(p+2)V_{m,n,p+2} & \\
 & (\gamma-1)(m+1)(p+1)U_{m+1,n,p+1} & (\gamma-1)(n+1)(p+1)V_{m,n+1,p+1} & \gamma(p+1)(p+2)W_{m,n,p+2} + \\
 & & & + (m+1)(m+2)W_{m+2,n,p} + \quad -K_z \\
 & & & + (n+1)(n+2)W_{m,n+2,p}
 \end{array}$$

Структура расчетных уравнений

I	Вариационные уравнения из условия $\int_V T \cdot \delta E dV - \int_V \bar{K} \cdot \delta \bar{u} dV - \int_S \bar{F}_n \cdot \delta \bar{u} dS = 0$
II	Уравнения внутренних связей из условия $\operatorname{div} T + \bar{K} = 0$
III	Уравнения кинематических связей
	Уравнения статических связей
	Уравнения связей взаимодействия с другими деталями

5.4. Некоторые элементарные примеры

5.4.1. Растяжение (сжатие) плоской фигуры, имеющей две оси симметрии и нагруженной вдоль оси двумя сосредоточенными силами

$$v = \sum_{k=0} \sum_{m=0} y^{2k+1} z^{2m} V_{2k+1,2m},$$

$$w = \sum_{k=0} \sum_{m=0} y^{2k} z^{2m+1} W_{2k,2m+1},$$

где $V_{2k+1,2m}$, $W_{2k,2m+1}$ – обобщенные перемещения.

Наложение связей на данные ряды на основании условия $\operatorname{div} T = 0$ (собственным весом пренебрегаем) дает следующие соотношения между обобщенными перемещениями:

$$\begin{aligned} y \quad & | \quad 3\gamma V_{30} + V_{12} + (\gamma - 1)W_{21} = 0, \\ z \quad & | \quad 3\gamma W_{30} + W_{21} + (\gamma - 1)V_{12} = 0, \\ y^3 \quad & | \quad 10\gamma V_{50} + V_{32} + 2(\gamma - 1)W_{41} = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$z^3 \mid 10\gamma W_{05} + W_{23} + 2(\gamma - 1)W_{14} = 0,$$

$$y z^2 \mid \gamma V_{32} + 2V_{14} + (\gamma - 1)W_{23} = 0,$$

$$y^2 z \mid \gamma W_{23} + 2W_{41} + (\gamma - 1)W_{32} = 0,$$

где $\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$;

ν – коэффициент Пуассона.

В качестве возможных состояний принимаем функции, являющиеся множителями при обобщенных перемещениях. Если ограничиться только первыми членами ряда ($\delta v = y$, $\delta w = z$), то соответствующие обобщенные перемещения не входят в уравнения связей и решение получается элементарным. Поэтому для первого приближения возьмем полиномы третьей степени и следующие возможные состояния:

$$\delta v = y, \quad yz^2; \quad \delta w = z, \quad y^2z.$$

Следовательно, имеем два уравнения связей (5.1) и четыре вариационных уравнения

$$\begin{aligned} & \gamma(J_{00}V_{10} + J_{02}V_{12} + 3J_{20}V_{30}) + \gamma_2 J_{00}W_{01} + \\ & + \gamma_2 J_{20}W_{21} + 3\gamma_2 J_{02}W_{03} = \frac{2P_{y_1}}{G}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gamma(J_{02}V_{10} + J_{22}V_{30}) + (4J_{22} + \gamma J_{04})V_{12} + \\ & + 3\gamma J_{22}V_{30} + (\gamma + 2)W_{21} + 3\gamma_2 J_{04}W_{03} = 0, \end{aligned}$$

$$\gamma_2(J_{00}V_{10} + J_{02}V_{12} + 3J_{20}V_{30}) + \gamma(J_{00}W_{01} + J_{20}W_{21} + 3J_{02}W_{03}) = 0,$$

$$\begin{aligned} & \gamma_2 J_{20}V_{10} + (\gamma + 2)J_{22}V_{12} + 3\gamma_2 J_{40}V_{30} + \gamma J_{20}W_{01} + \\ & + (4J_{22} + \gamma J_{40})W_{21} + 3\gamma J_{22}W_{03} = 0. \end{aligned}$$

В результате решения системы получим следующие формулы для упругих перемещений и напряжений кольцеобразного звена:

$$v = yV_{10} + yz^2V_{12} - \frac{y^3}{3\gamma} [V_{12} + (\gamma - 1)W_{21}],$$

$$w = zW_{01} + y^2zW_{21} - \frac{z^3}{3\gamma} [W_{21} + (\gamma - 1)V_{12}],$$

$$\sigma_y = G(\gamma V_{10} + \gamma_2 W_{01}) - Gy^2(V_{12} + W_{21}) + \frac{Gz^2}{\gamma} [(3\gamma - 2)V_{12} - \gamma_2 W_{21}],$$

$$\sigma_z = G(\gamma_2 V_{10} + \gamma W_{01}) - Gz^2(V_{12} + W_{21}) + \frac{Gy^2}{\gamma} [(3\gamma - 2)W_{21} - \gamma_2 V_{12}],$$

$$\tau_{yz} = 2Gyz(V_{12} + W_{21}),$$

где

$$V_{10} = \frac{\Delta_{10}}{\Delta}, \quad W_{01} = \frac{\Delta_{01}}{\Delta}, \quad V_{12} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta}, \quad W_{21} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta},$$

$$\Delta = 2(\gamma - 1)(AJ_{20}J_{02} + BJ_{00}^2 - CJ_{00}J_{20} - DJ_{00}J_{02}),$$

$$\Delta_{10} = \frac{Py_1}{G} (\gamma BJ_{00} - \gamma CJ_{20} + \gamma_2 EJ_{02}),$$

$$\Delta_{01} = -\frac{Py_1}{G} (\gamma_2 BJ_{00} - \gamma_2 CJ_{20} + \gamma EJ_{02}),$$

$$\Delta_{12} = \frac{Py_1 J_{02}}{G} [(3\gamma - 2)(J_{00}J_{40} - J_{20}^2) + \gamma(3J_{00}J_{22} + J_{20}J_{02})],$$

$$\Delta_{21} = -\frac{Py_1 J_{02}}{G} [\gamma_2(J_{00}J_{40} - J_{20}^2) - \gamma(3J_{00}J_{22} + J_{20}J_{02})],$$

$$A = -(J_{20} - J_{02})^2, \quad B = 3J_{22}(J_{40} + J_{04}) + 2J_{20}J_{02},$$

$$C = J_{04}(2J_{20} - J_{02}) + 3J_{20}J_{22},$$

$$D = J_{40}(2J_{02} - J_{20}) + 3J_{02}J_{22}, \quad E = J_{02}J_{40} + 3J_{20}J_{22}.$$

Сравним результаты данного решения для сплошного диска с точным решением. Для круглого диска

$$J_{00} = \pi R^2, \quad J_{02} = J_{20} = \frac{\pi R^4}{4}, \quad J_{40} = J_{04} = \frac{\pi R^6}{8}, \quad J_{22} = \frac{\pi R^6}{24}.$$

Напряжение в центре диска

$$\sigma_y = \frac{3P}{\pi R}, \quad \sigma_z = -\frac{P}{\pi R}, \quad \tau_{yz} = 0,$$

что соответствует точному решению.

На контуре:

$$1) \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sigma_n \cos \theta - \tau_{\theta n} \sin \theta) R d\theta = P.$$

Это означает, что проекция на ось "Y" главного вектора контурных напряжений равна P;

$$2) \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sigma_n \sin \theta + \tau_{\theta n} \cos \theta) R d\theta = 0.$$

Это означает, что проекция главного вектора контурной нагрузки на ось "X" равна нулю.

Таким образом, первое приближение для диска дает точное значение напряжений в центре и приближенное – на контуре. Краевые условия при это выполняются в интегральной форме (в смысле Сен-Венана).

5.4.2. Сжатие (растяжение) шара

Ряд аппроксимирующих функций запишем в виде

$$u = \sum_{k=0} \sum_{m=0} r^{2k+1} z^{2m} U_{2k+1,2m},$$

$$w = \sum_{k=0} \sum_{m=0} r^{2k} z^{2m+1} W_{2k,2m+1}.$$

Ограничиваясь полиномами третьей степени, получим следующие ряды для компонент упругих перемещений:

$$u = rU_{10} + rz^2U_{12} + r^3U_{30},$$

$$w = zW_{01} + r^2zW_{21} + z^3W_{03}.$$

В качестве возможных состояний примем

$$\delta u = r, rz^2; \quad \delta w = z, r^2z.$$

В результате раскрытия вариационного уравнения получим:

$$\delta u = r, \\ 2(\gamma - 1)(5U_{10}/R^2 + U_{12} + 4U_{30}) + \gamma_2(5W_{01}/R^2 + 2W_{21} + 3W_{03}) = 0,$$

$$\delta u = rz^2, \\ 2[(\gamma - 1)(7U_{10}/R^2 + 3U_{12} + 4U_{30}) + 2U_{12}] + 7\gamma_2 U_{01}/R^2 + 2\gamma W_{21} + 9\gamma_2 W_{03} = 0,$$

$$\delta w = z, \\ 2\gamma_2(5U_{10}/R^2 + U_{12} + 4U_{30}) + \gamma(5W_{01}/R^2 + 2W_{21} + 3W_{03}) = -\frac{15P}{2\pi R^4 G},$$

$$\delta w = r^2z, \\ 2(7\gamma_2 U_{10}/R^2 + \gamma U_{12} + 8\gamma_2 U_{30}) + 7\gamma W_{01}/R^2 + 4(\gamma + 1)W_{21} + 3\gamma W_{03} = 0.$$

Условие равновесия внутри дает следующие два уравнения связей:

$$U_{12} + 4\gamma U_{30} + (\gamma - 1)W_{21} = 0, \quad 2(\gamma - 1)U_{12} + 2W_{21} + 3\gamma W_{03} = 0.$$

В результате решения шести уравнений найдем обобщенные перемещения

$$U_{10} = \frac{3(40\gamma^2 - 111\gamma + 76)P}{4(3\gamma - 4)(19\gamma - 24)\pi R^2 G}, \quad W_{01} = -2U_{10} - \frac{3P}{2(3\gamma - 4)\pi R^2 G},$$

$$W_{21} = \frac{1}{3(3\gamma - 4)R^2} \left[(2\gamma^2 - \gamma - 4)U_{10} + (\gamma^2 - 12\gamma + 16)W_{01} + \frac{15}{2\pi R^2 G} \right],$$

$$U_{12} = W_{21} + \frac{5\gamma W_{01}}{2(\gamma - 1)R^2} + \frac{15\gamma P}{4(3\gamma - 4)\pi R^4 G},$$

$$U_{30} = -\frac{1}{4R^2} (R^2 U_{12} + 5U_{10}) + \frac{15\gamma_2 P}{16(3\gamma - 4)\pi R^4 G},$$

$$W_{03} = -\frac{5(\gamma - 1)P}{2(3\gamma - 4)\pi R^4 G} - \frac{1}{3R^2} (5W_{01} + 2R^2 W_{21}).$$

Напряжения σ_r , σ_z , τ_{rz} определяются по формулам:

$$\sigma_r = G \left\{ 2(\gamma - 1)U_{10} + \gamma_2 W_{01} + r^2 [2(2\gamma - 1)U_{30} + \gamma_2 W_{21}] + \right. \\ \left. + z^2 [2(\gamma - 1)U_{12} + 3\gamma_2 W_{03}] \right\},$$

$$\sigma_z = G \left\{ 2\gamma_2 U_{10} + \gamma W_{01} + r^2 (4\gamma_2 U_{30} + \gamma W_{21}) + z^2 (2\gamma_2 U_{12} + 3\gamma W_{03}) \right\},$$

$$\tau_{rz} = 2Grz(U_{12} + W_{21}).$$

Вычислим напряжения σ_r и σ_z в центре шара и сравним результаты с точным решением (рис. 5.1) при $R = 1$.

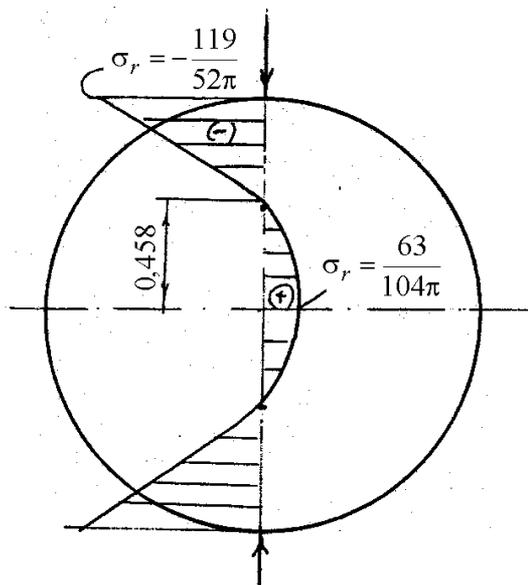


Рис. 5.1. Сжатие шара двумя сосредоточенными силами

По полученным формулам $\sigma_r = \frac{63}{104\pi}$, $\sigma_z = -\frac{141}{52\pi}$, что практически совпадает с точным решением [145].

Рассмотренные два примера хотя и называются элементарными, но точное решение их далеко не элементарное, особенно решение задачи о равновесии упругого шара. Точное решение задачи о равновесии шара строится в рядах по сферическим функциям, в частности по полиномам Лежандра. Следует отметить, что в теории упругости имеется очень мало пространственных задач, решение которых найдено в замкнутом виде в том числе в виде рядов с известными коэффициентами. Как правило, краевые задачи упругих конечных тел в лучшем случае получают решение в рядах, коэффициенты которых находятся из бесконечной системы алгебраических уравнений. Поэтому применение модифицированного метода Треффца к решению упругих задач вполне целесообразно, а приведенные примеры пока-

зывают неплохие результаты, особенно внутри тела. Конечно, чтобы получить хорошие результаты на поверхности, необходимо брать большое число членов степенного ряда и при этом гарантировать сходимости метода можно лишь при условии достаточной гладкости поверхности, т.е. при условии непрерывности нормали к ней. В частности, для приведенной задачи это требование выполнено и дальнейшие приближения будут улучшать решение. В точке приложения сосредоточенных сил ряды будут расходиться, а упругие перемещения и напряжения с каждым приближением возрастать. Так, уже для рассмотренного приближения задачи о сжатии шара σ_r в точке приложения силы равно $\sigma_r = -119/52\pi$, что превышает соответствующее напряжение в центре в 3,8 раза. График изменения напряжений σ_r для этого приближения приводится на рис. 5.1, из которого видно, что внутри шара возникают растягивающие радиальные напряжения, а вблизи к поверхности переходят в сжимающие.

Другие примеры решения задач модифицированным методом Треффца приведем с использованием ЭВМ.

5.5. Программная реализация аналитического вариационного метода решения задач теории упругости

Разработка методов и алгоритмов расчета элементов конструкций в пространственной постановке на основе вариационного принципа Лагранжа при степенной аппроксимации по всем трем координатам невозможна без самого широкого привлечения ЭВМ на всех этапах проведения расчета. Благодаря степенной аппроксимации удалось достичь полной автоматизации расчета, т.к. интегралы и производные от степенных функций представляют собой также степенные функции, вычисление объемных интегралов для элементов в виде параллелепипедов и цилиндров производится по замкнутым формулам и др. В результате все логические операции, связанные с составлением вариационных уравнений (табл. 5.1), уравнений внутренних (табл. 5.2) и поверхностных связей выполняет ЭВМ. Итак, на базе степенных функций разработан пакет программ, которые автоматизируют процесс выбора аппроксимирующих функций и вариаций, процесс формирования вариационных уравнений, урав-

нений внутренних и поверхностных кинематических и статических связей, процесс вычисления объемных и поверхностных интегралов, процесс исключения обобщенных перемещений из уравнений связей с целью модифицирования координатной системы и, наконец, численное решение полученных уравнений и вычисление искоемых величин. Комплекс программ представляет собой пакет модулей, различные комбинации которых, оформленные в виде головных программ, позволяют решать достаточно широкий класс задач. Разбивка алгоритма на отдельные процедуры обеспечивает одновременно компактность и универсальность программного комплекса. Конструирование того или иного алгоритма решения задач сводится к составлению головной (управляющей) программы. Головная программа вызывает модули в последовательности, определенной алгоритмом решения задачи, и тем самым управляет прохождением задания на ЭВМ.

На рис. 5.2 изображена принципиальная блок-схема алгоритма решения задач анализа. Укажем последовательность работы блоков при решении различных классов трехмерных задач (рис. 5.2):

решение задач статики (головная программа BASE) 1→2→3 (или 4) →5→6→7→8→10→12→14;

решение задач о собственных колебаниях (головная программа EIG) 1→2→3 (или 4) →5→6→7→9→11→14;

решение задач о вынужденных колебаниях (головная программа WIBR) 1→2→3 (или 4) →5→6→7→9→11→13→14.

Все программы реализованы на алгоритмическом языке FORTRAN.

Система математического обеспечения расчетов включает 27 программных модулей. Достигнута значительная степень унификации модулей. Так, приблизительно 70% модулей используется при решении как задач статики, так и динамики.

Программная реализация метода расчета по разработанным алгоритмам предусматривает рациональное использование объема памяти ЭВМ и требует сравнительно небольших затрат машинного времени. Это делает возможной организацию вычислительного процесса за один этап. При этом весь обмен информацией внутри этапа осуществляется в оперативном запоминающем устройстве ЭВМ.

Внешнее запоминающее устройство не используется. Все вычисления в программах проводятся с обычной точностью.

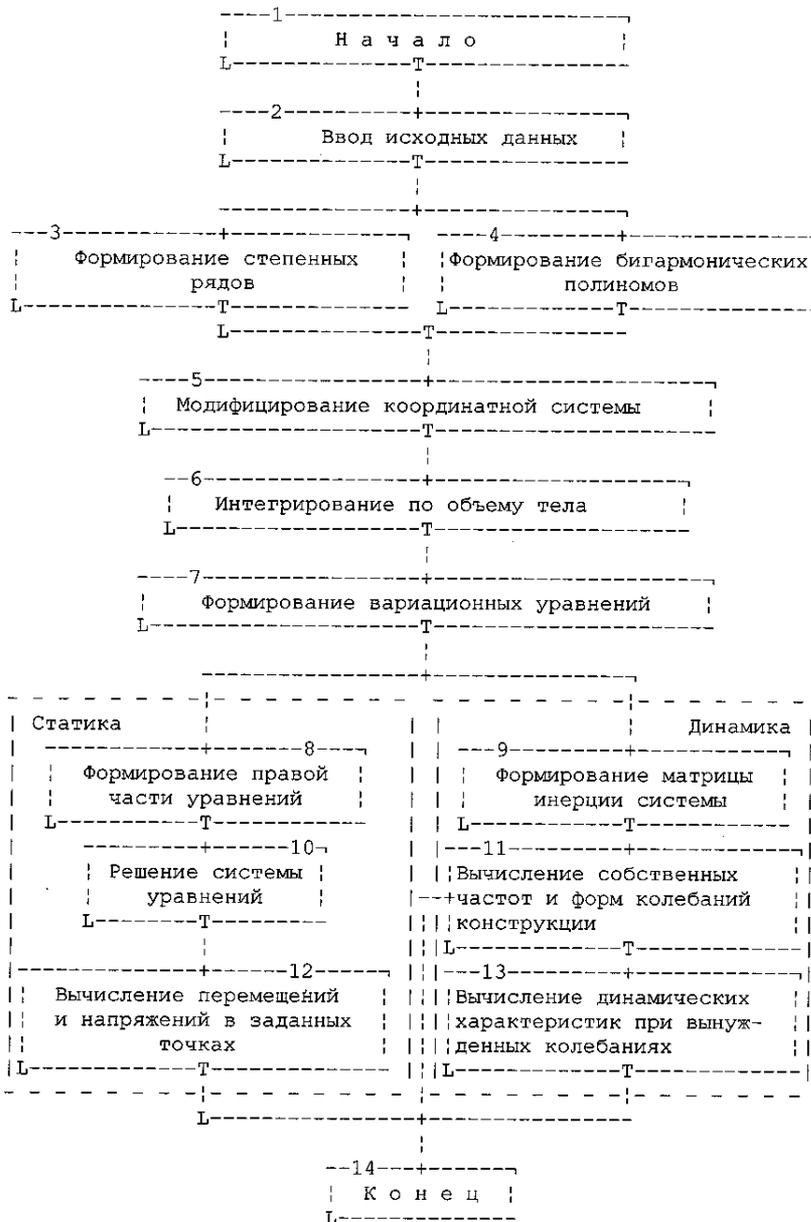


Рис. 5.2. Принципиальная блок-схема алгоритма решения краевых задач теории упругости

Программа BASE предназначена для решения трехмерных упругих статических задач и имеет следующие основные возможности.

1. Рассматриваются произвольные трехмерные области, представимые совокупностью параллелепипедов, призм и цилиндров.

2. Граничные условия в перемещениях удовлетворяются по координатам, плоскостям и в отдельных произвольных точках тела. Граничные условия в напряжениях могут быть точно удовлетворены на некоторой системе точек.

3. Программа позволяет за один этап расчета получить результаты нескольких приближений решения (при различных порядках аппроксимации решения) и оценить сходимость приближенных решений.

При необходимости исследования сходимости приближенных решений матрица разрешающих уравнений формируется сразу для максимального порядка аппроксимации вектора перемещений упругого тела. Разрешающие системы алгебраических уравнений j -х приближений ($j = 1, 2, \dots, n - 1$) образуются путем усечения разрешающей системы n -го приближения.

В рассматриваемом варианте программа позволяет использовать системы, состоящие не более чем из 200 уравнений. Посредством изменения размерностей массивов в головной программе число используемых уравнений может быть увеличено.

Программа EIG предназначена для решения трехмерных упругих задач о собственных колебаниях. Возможности ее аналогичны программе BASE, за исключением п. 3.

Программа WIBR предназначена для решения трехмерных упругих задач о нестационарных вынужденных колебаниях. Программа позволяет рассчитывать вынужденные колебания тел при таких условиях нагружения или закрепления, которые исключают возможность смещения тела как жесткого целого.

Назначение блоков, изображенных на рис. 5.2, следующее:

Блок 2 осуществляет ввод исходной информации, которая включает свойства материала; координаты параллелепипедов, призм и цилиндров, составляющих область; координаты точек, в которых вычисляются перемещения и напряжения, и т.д.

Блок 3 формирует аппроксимирующие функции в виде стандартных степенных рядов.

Блок 4 модифицирует стандартные степенные ряды с целью выполнения ими уравнений Ламе, т.е. строит ряд бигармонических полиномов.

Блок 5 модифицирует построенные стандартные степенные ряды или ряды бигармонических полиномов с целью выполнения граничных условий в отдельных точках.

Блок 6 вычисляет геометрические характеристики упругого тела, т.е. вычисляет интегралы.

Блок 7 формирует вариационные уравнения статики без правых частей.

Блок 8 формирует правые части вариационных уравнений для задач статики.

Блок 9 формирует инерционные члены вариационных уравнений для задач динамики.

Блок 10 решает алгебраические уравнения статического равновесия упругого тела.

Блок 11 вычисляет собственные частоты и формирует собственные формы колебаний конструкции.

Блок 12 вычисляет упругие перемещения и напряжения в заданных точках.

Блок 13 формирует правые части уравнений при вынужденных колебаниях и вычисляет упругие перемещения и напряжения в заданных точках в заданный момент времени.

Кроме описанного в данной работе комплекса программ на ЭВМ под руководством автора разработаны и другие программы для решения двумерных и трехмерных задач теории упругости как в декартовых, так и в цилиндрических координатах. Так, первые и основополагающие программы при степенной аппроксимации были построены под руководством автора В.Ф.Кондратюком [87, 89]. Эти программы позволяют решать как двумерные, так и трехмерные задачи статической теории упругости. Программы В.Ф. Кондратюка основаны на широком привлечении методов аналитической механики, т.е. формируют различные виды уравнений связей и включают их в вариационные уравнения с помощью множителей Лагранжа. Программы предусматривают также построение вариаций независимо от аппроксимирующих функций, т.е. осуществляют переход к проекционному методу при степенной аппроксимации.

Эти программы успешно применялись при выполнении инженерных расчетов в промышленности [13, 159, 170, 171].

Дальнейшее развитие получили программы В.Н. Апановича [17, 109, 113, 120], выполненные под руководством автора. Основное достоинство этих программ состоит в возможности построения модифицированных координатных систем, исключающих применение множителей Лагранжа, а также в возможности решать динамические задачи теории упругости. Применение этих программ позволило сделать целый ряд инженерных расчетов для промышленности [174, 175].

Представляют также значительный интерес программы Н.Я. Луцко для решения осесимметричных задач статики и динамики упругих тел в цилиндрических координатах [125, 127], построенные под руководством автора.

Таким образом, разработанные под руководством автора комплексы программ успешно использовались при решении большого числа двумерных и трехмерных статических и динамических задач теории упругости, а также прикладных технических задач [98–133]. Накоплен значительный опыт эксплуатации пакетов программ.

5.6. Применение множителей Лагранжа

Решение вариационных задач в виде стандартных рядов с привлечением уравнений связей позволяет по-новому решить вопрос о выборе возможных состояний. В качестве возможных состояний можно применять любые полные ряды, т.е. вариации и аппроксимирующие функции можно строить независимо друг от друга. Такой путь реализован в большинстве ранее рассмотренных примеров. Однако указанный путь построения возможных состояний нарушает симметрию задачи, что может вызвать трудности вычислительного характера, особенно для больших приближений. Симметрию расчетных уравнений можно сохранить, если ввести уравнения связей в вариационные уравнения с помощью множителей Лагранжа. Тогда вместо общего уравнения статики упругого тела получим уравнение Лагранжа первого рода. Проиллюстрируем изложенное на примере решения задачи о сжатии упругого квадрата двумя сосредоточенными силами. Решение задачи строим в виде степенных рядов, которые в силу симметрии записываются в виде

$$u = \sum_{m=0} \sum_{n=0} x^{2m+1} y^{2n} U_{2m+1,2n} ,$$

$$v = \sum_{m=0} \sum_{n=0} x^{2m} y^{2n+1} V_{2m,2n+1} .$$

Ограничиваясь третьими степенями, запишем шесть вариационных уравнений типа уравнений Лагранжа первого рода и два уравнения связей из условия $\operatorname{div} T + \bar{K} = 0$:

$$\gamma \left(U_{10} + \frac{1}{3} U_{12} + U_{30} \right) + \gamma_2 \left(V_{01} + \frac{1}{3} V_{21} + V_{03} \right) = 0 ,$$

$$\gamma_2 \left(U_{10} + \frac{1}{3} U_{12} + U_{30} \right) + \gamma \left(V_{01} + \frac{1}{3} V_{21} + V_{03} \right) = \frac{P}{2G} ,$$

$$\begin{aligned} \gamma U_{10} + \left(\frac{3\gamma}{5} + \frac{4}{3} \right) U_{12} + \gamma U_{30} + \gamma_2 V_{01} + \frac{(\gamma+2)V_{21}}{3} + \\ + \frac{9}{5} \gamma_2 V_{03} + \lambda_1 + (\gamma-1)\lambda_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 U_{10} + \frac{(\gamma+2)}{3} U_{12} + \frac{9}{5} \gamma_2 U_{30} + \gamma V_{01} + \left(\frac{3\gamma}{5} + \frac{4}{3} \right) V_{21} + \\ + \gamma V_{03} + (\gamma-1)\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\gamma \left(U_{10} + \frac{1}{3} U_{12} + \frac{9}{5} U_{30} \right) + \gamma_2 \left(V_{01} + \frac{3}{5} V_{21} + V_{03} \right) + 3\gamma\lambda_1 = 0 ,$$

$$\gamma_2 \left(U_{10} + \frac{3}{5} U_{12} + U_{30} \right) + \gamma \left(V_{01} + \frac{V_{21}}{3} + \frac{9}{5} V_{03} \right) + 3\gamma\lambda_2 = \frac{P}{2G} ,$$

$$U_{12} + 3\gamma U_{30} + (\gamma-1)V_{21} = 0 ,$$

$$V_{21} + 3\gamma V_{03} + (\gamma - 1)U_{12} = 0,$$

где λ_1, λ_2 – множители Лагранжа;

G – модуль сдвига.

Аналогично составляются 18 уравнений (12 вариационных и шесть уравнений внутренних связей) для пятых степеней, 32 уравнения (20 вариационных и 12 уравнений внутренних связей) для седьмых степеней, 50 уравнений (30 вариационных и 20 уравнений внутренних связей) для девярых степеней и т.д. Решение уравнений, вычисление искомых напряжений, а также сам процесс составления уравнений Лагранжа первого рода и уравнений внутренних связей производились на ЭВМ. Результаты расчета приведены в табл. 5.4, где в первых строчках записаны расчетные напряжения при решении восьми уравнений, во вторых – результаты решения 18 уравнений, в третьих – 32 уравнений, в четвертых – 50 уравнений, а в пятых строчках приводятся результаты решения 1680 уравнений для этой задачи по методу конечных элементов [179].

Анализ расчетных результатов, приведенных в табл. 5.4, показывает хорошую сходимость внутри упругого квадрата. Так, напряжение σ_y в центре квадрата для третьей степени равно $\sigma_y = 0,813$, для пятой – 0,866, для седьмой 0,924, для девятой 0,940. Отметим, что значение напряжения σ_y в центре квадрата, вычисленное в результате решения 1680 уравнений по методу конечных элементов, равно 0,959. Что касается области, примыкающей к границе, то здесь обнаруживается неустойчивое изменение напряжений в зависимости от степени приближения. Так, напряжение σ_x при $x = 0,8$ для третьей степени равно $\sigma_x = -0,227$, для пятой степени 0,060, для седьмой степени – 0,170, для девятой 0,057. Такое неустойчивое поведение напряжений σ_x имеет место и при $x = 1$, т.е. на самой границе, где оно должно стремиться к нулю. Такое поведение напряжений вблизи границы объясняется отсутствием гладкости контура, наличием точек, где нормаль к границе не существует. Поэтому, получая хорошие результаты внутри упругого тела, мы не в состоянии обеспечить надежность расчета вблизи границы, если привлекать в качестве уравнений связей только уравнения равновесия внутри.

Таблица 5.4

Значения напряжений τ_{xy}

X	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Y						
0,0	0,0	-0,0	0,0	-0,0	0,0	0,0
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,0	0,0	-0,0	0,0	0,0	0,0
	0,0	0,0	-0,0	0,0	0,0	0,0
	-	0,0	0,0	0,0	0,0	-
0,2	0,0	-0,011	-0,021	-0,032	-0,043	-0,054
	0,0	-0,049	-0,087	-0,105	-0,092	-0,038
	0,0	-0,048	-0,066	-0,039	-0,015	-0,033
	0,0	-0,072	-0,106	-0,102	-0,096	-0,108
	-	-0,089	-0,107	-0,074	-0,036	-
0,4	0,0	-0,021	-0,043	-0,064	-0,086	-0,107
	0,0	-0,090	-0,159	-0,187	-0,154	-0,039
	0,0	-0,109	-0,158	-0,116	-0,018	0,010
	0,0	-0,153	-0,211	-0,159	-0,175	-0,029
	-	-0,215	-0,218	-0,122	-0,046	-
0,6	0,0	-0,032	-0,064	-0,096	-0,129	-0,161
	0,0	-0,115	-0,200	-0,224	-0,155	-0,036
	0,0	-0,181	-0,171	-0,223	-0,086	-0,053
	0,0	-0,251	-0,323	-0,175	0,049	0,158
	-	-0,454	-0,300	-0,108	-0,016	-
0,8	0,0	-0,043	-0,107	-0,129	-0,171	-0,214
	0,0	-0,119	-0,196	-0,193	-0,066	0,224
	0,0	-0,233	-0,341	-0,262	-0,061	0,012
	0,0	-0,337	-0,403	-0,152	-0,141	0,017
	-	-0,760	-0,189	-0,014	0,025	-
1,0	0,0	-0,054	-0,107	-0,161	-0,214	-0,268
	0,0	-0,092	-0,132	-0,071	0,144	0,563
	0,0	-0,187	-0,216	-0,004	0,369	0,594
	0,0	-0,233	-0,160	0,187	0,242	-0,074
	-	-	-	-	-	-

Значения напряжений σ_x

X	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Y						
0,0	-0,313	-0,307	-0,291	-0,264	-0,227	-0,179
	-0,242	-0,217	-0,146	-0,045	0,060	0,135
	-0,304	-0,280	-0,223	-0,173	-0,170	-0,212
	-0,298	-0,261	-0,169	-0,057	0,057	0,193
	-0,312	-0,262	-0,162	-0,067	-0,008	-
0,2	-0,280	-0,275	-0,259	-0,232	-0,195	-0,146
	-0,232	-0,208	-0,143	-0,052	-0,041	0,099
	-0,284	-0,256	-0,188	-0,119	-0,090	-0,100
	-0,289	-0,250	-0,155	-0,058	0,007	0,046
	-	-0,248	-0,136	-0,040	0,0	-
0,4	-0,184	-0,179	-0,163	-0,136	-0,098	-0,050
	-0,187	-0,169	-0,121	0,058	-0,005	0,002
	-0,222	-0,186	-0,094	0,012	0,093	0,144
	-0,252	-0,204	-0,098	-0,022	-0,051	-0,189
	-	-0,195	-0,044	0,016	0,022	-
0,6	-0,023	-0,018	-0,002	0,025	0,063	0,111
	-0,070	-0,062	-0,042	-0,026	-0,049	-0,117
	-0,094	-0,057	0,036	0,144	0,223	0,266
	-0,143	-0,086	0,034	0,101	0,034	-0,112
	-	-0,033	0,130	0,098	0,042	-
0,8	0,202	0,207	0,223	0,250	0,288	0,336
	0,182	0,177	0,157	0,107	0,002	0,195
	0,189	0,201	0,218	0,198	0,091	-0,112
	0,183	0,207	0,238	0,196	0,103	0,269
	-0,140	0,497	0,246	0,071	0,012	-
1,0	0,491	0,496	0,512	0,539	0,577	0,625
	0,658	0,636	0,565	0,430	0,206	-0,144
	0,858	0,793	0,579	0,169	-0,488	-1,411
	1,167	1,001	0,509	-0,219	-0,819	-0,371
	-	-	-	-	-	-

Значения напряжений σ_y

X	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Y						
0,0	0,813	0,770	0,641	0,427	0,127	-0,259
	0,866	0,806	0,640	0,410	0,186	0,066
	0,924	0,855	0,612	0,429	0,163	-0,181
	0,940	0,858	0,645	0,373	0,113	-0,063
	0,959	0,847	0,612	0,354	0,130	-0,024
0,2	0,818	0,775	0,646	0,432	0,132	-0,254
	0,891	0,829	0,655	0,412	0,171	0,028
	0,950	0,873	0,670	0,405	0,136	-0,164
	0,979	0,887	0,652	0,370	0,120	-0,060
	–	0,906	0,640	0,362	0,130	–
0,4	0,834	0,791	0,663	0,448	0,148	-0,238
	0,964	0,894	0,697	0,416	0,121	-0,091
	1,036	0,934	0,668	0,339	0,063	-0,106
	1,103	0,973	0,659	0,326	0,098	0,085
	–	0,992	0,600	0,295	0,083	–
0,6	0,861	0,818	0,689	0,475	0,175	-0,211
	1,072	0,989	0,754	0,409	0,025	-0,302
	1,195	1,052	0,681	0,243	-0,048	0,002
	1,330	1,223	0,635	0,174	-0,229	-0,152
	–	1,095	0,454	0,173	0,026	–
0,8	0,898	0,855	0,727	0,513	0,213	0,173
	1,197	1,096	0,808	0,374	-0,136	-0,624
	1,426	1,224	0,705	0,110	-0,208	0,135
	1,673	1,337	0,558	-0,115	-0,229	-0,018
	–	0,828	0,154	0,047	-0,003	–
1,0	0,946	0,904	0,775	0,561	0,261	-0,125
	1,313	1,189	0,832	0,283	-0,388	-0,083
	1,675	1,396	0,682	-0,120	-0,481	0,232
	2,049	1,538	0,388	-0,470	-0,170	1,153
	–	–	–	–	–	–

Итак, нельзя ограничиваться привлечением только внутренних связей, а обязательно заранее использовать в том или ином виде для достоверности расчетных результатов условия на границе.

Рассмотрим примеры с использованием уравнений поверхностных связей.

5.7. Численное исследование точечного выполнения граничных условий

Точное выполнение краевых условий с помощью уравнений связей для вариационного уравнения равновесия полного объема не всегда является возможным из-за сложности геометрической формы реального упругого тела. В связи с этим рассмотрим различные приближенные способы выполнения краевых условий. Одним из таких приближенных способов является выполнение краевых условий в отдельных точках, точечный способ.

Изучим точечный способ на примере решения задачи о сжатии куба со стороной $a = 1$ в трех случаях:

1) на торцах $z = \pm 0,5$ приложена нормальная куполообразная нагрузка $\sigma_{z\pm} = \cos \pi x \cdot \cos \pi y$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$;

2) на торцах $z = \pm 0,5$ приложена нормальная ступенчатая нагрузка $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq -0,15, \quad 0,15 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq -0,15, \quad 0,15 \leq y \leq 1, \\ \pm 25 & -0,15 \leq x \leq 0,15, \quad -0,15 \leq y \leq 0,15; \end{cases}$$

3) сжатие между жесткими плитами, т.е. при $z = \pm 0,5$ $u = v = 0$, $w = \pm w_0 = \pm 0,1$, $\nu = 0,3$.

В силу симметрии рассматривалась 1/8 куба. Граничные условия выполнялись точно в точках $(0; 0; 0,5)$ для задач 1 и 2 и в точках $(0; 0; 0,5)$, $(0; 0,25; 0,5)$, $(0,25; 0; 0,5)$, $(0,25; 0,25; 0,5)$, $(0,5; 0; 0,5)$, $(0,5; 0,5; 0,5)$ для задачи 3.

Исследование сходимости проводилось сравнением численных результатов решений задач при различных степенях аппроксимаций вектора упругих перемещений. При этом уравнения равновесия внутри выполнялись точно для каждого приближения. Степень полинома увеличивалась от $n = 1$ до $n = 9$. Численные эксперименты показали, что точное выполнение граничных условий в области наибольшей

интенсивности поверхностных нагрузок значительно улучшает сходимость приближенных решений к точному. Для задачи 1 (рис. 5.3) показаны распределения напряжений σ_z по поверхности и внутри куба, рассчитанные для $n = 3$ и $n = 5$. Из графиков рис. 5.3 видно, что точечное удовлетворение граничных условий позволяет значительно уточнить расчетное напряженно-деформированное состояние куба в заданной области при низких степенях аппроксимации. Наблюдается хорошая сходимость приближенных решений к точному по энергии (рис. 5.4), где $F(u)$ – значение энергетического функционала, N – количество координатных функций, удерживаемых в решении.

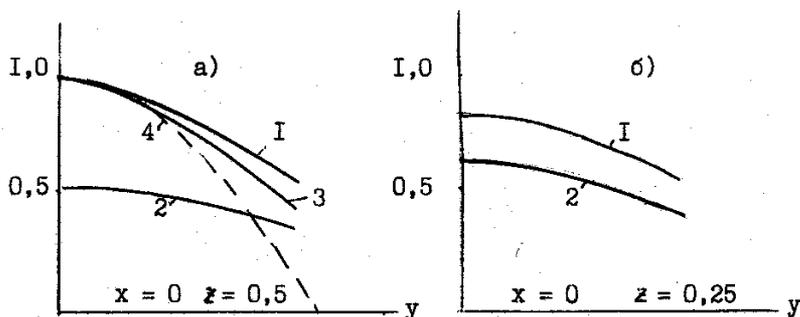


Рис. 5.3. Распределение напряжений для задачи 1:

а) – на поверхности куба; б) – внутри куба; 1 – решение с выполнением граничного условия для $n = 3$; 2, 3 – соответственно решение без выполнения граничных условий для $n = 3$ и $n = 5$; 4 – точное решение

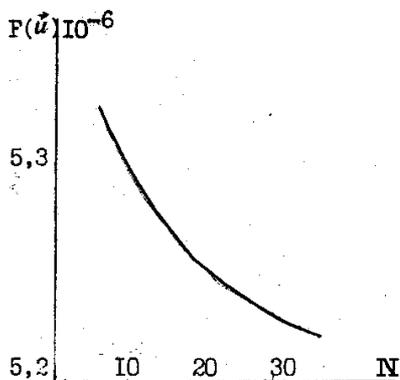


Рис. 5.4. Сходимость приближенных решений по энергии для задачи 1

На рис. 5.5 показаны графики напряжений σ_z на верхней грани куба, вычисленные для задачи 2. Анализ этих графиков показывает, что точечное выполнение граничных условий в области приложения нагрузки способствует успешному выполнению указанных условий на всей грани. С увеличением степени аппроксимации поверхность куба "освобождается" от напряжений в тех областях, где не заданы поверхностные нагрузки. При решении этой задачи также наблюдается хорошая сходимость приближенного решения к точному по энергии (рис. 5.6).

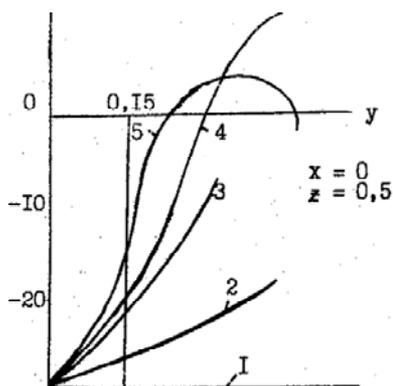


Рис. 5.5. Распределение напряжений σ_z на поверхности куба для задачи 2: 1-5 соответственно для $n = 1, 2, \dots, 5$

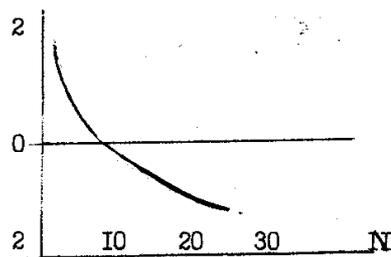


Рис. 5.6. Сходимость по энергии для задачи 2

В задаче 3 граничное условие в перемещениях точно интерполировалось по семи точкам. Решение проведено для $n = 5$.

Анализ вычисленных значений перемещений верхней грани куба показывает, что условие $w = -w_0$ при $z = 0,5$ на всей грани выполняется точно. Значения перемещений u и v на этих же гранях на 4-5 порядков меньше, чем значения перемещений w , что свидетельствует о высокой точности выполнения условий $u = v = 0$ при $z = \pm 0,5$.

На рис. 5.7 показаны графики перемещений в некоторых точках боковых граней куба, из которых видно, что при сжатии между жесткими плитами без скольжения куб приобретает четко выраженную "бочкообразную" форму. Этот факт подтверждается данными экспериментов [89].

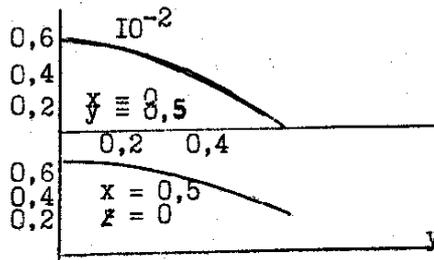


Рис. 5.7. Графики перемещений боковой поверхности куба для задачи 3

В табл. 5.5 приведены значения напряжений в некоторых точках куба, полученные автором (верхняя строка), вариационно-разностным методом [162] (вторая строка), методом М.М.Филоненко-Бородича [89] (третья строка), методом Рунге [147] (четвертая строка). Как видно из таблицы, внутри куба полученное здесь решение хорошо согласуется с решением Б.Е.Победри, С.В.Шешенина [162]. В частности, оба решения обнаруживают тенденцию к уменьшению напряжений σ_z при приближении к поверхности куба. Однако данное решение хуже отражает особенность напряжений на контуре площадки давления. Как показано в работах [89], [162], напряжение σ_z при стремлении к границе площадки резко возрастает. Сглаживание особенности в предлагаемом решении связано, очевидно, с низкой аппроксимацией вектора перемещений куба.

Таблица 5.5

Значения напряжений σ_z в некоторых точках куба

y	x = 0, z = 0			x = 0, z = 0,5		
	0,0	0,25	0,5	0,0	0,25	0,5
σ_z	1,14	1,13	1,11	0,80	0,76	0,66
	1,20	1,17	1,02	0,98	1,01	1,55
	1,11	1,21	0,97	1,01	0,94	1,21
	—	—	—	1,65	1,56	1,21

Таким образом, анализ полученных результатов показывает, что точечное удовлетворение граничных условий является эффективным средством уточнения вариационных решений краевых задач в заданных областях. В кандидатской диссертации В.Ф.Кондратюка, выполненной под руководством автора [88], при расчете станины горячештамповочного прессы К-8544 в условиях рабочих нагрузок были привлечены данные эксперимента лишь в одной точке в качестве уравнения поверхностной связи. В результате было получено полное совпадение расчетных напряжений во всех других точках с результатами эксперимента.

5.8. Численное исследование различных способов задания поверхностных связей

Точечные поверхностные связи, как следует из рассмотрения задачи о сжатии куба, улучшают решение, особенно в области их задания. Однако возможны и другие способы, например, выполнение краевых условий в интегральном виде. Для ответа на вопрос, в каком виде лучше задавать поверхностные связи: в точечном или в интегральном виде, рассмотрим задачу о равновесии втулки под действием радиальной линейной нагрузки, приложенной на внутренней цилиндрической поверхности $r_1 = 0,5$ см (рис. 5.8). В плоскости $z = 0$ полагаем $w = 0$ и $\tau_{rz} = 0$. Плоскость $z = h = 1$ см и цилиндрическая поверхность $r_2 = 1$ см свободны от нагрузки.

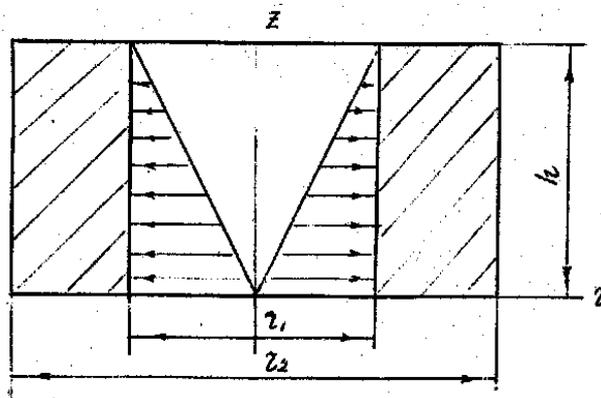


Рис. 5.8. Равновесие втулки под действием радиальной линейной нагрузки

Решение задачи строим в цилиндрических координатах на основе степенных рядов

$$u = \sum_{m=0} \sum_{n=0} r^{2m+1} z^n U_{2m+1,n} ,$$

$$w = \sum_{m=0} \sum_{n=0} r^{2m} z^{n+1} U_{2m,n+1} .$$

Результаты, полученные при задании напряжений в точках $r = 0,5$ $z = 0,3$; $r = 0,5$ $z = 0,7$, а также при сохранении связей в указанных точках дополнительно в точке $r = 1$ $z = 0,5$, показали, что решения наиболее близки друг к другу при пятой и шестой степени полиномов. Однако выполнение краевых условий в рассматриваемом случае при точечном задании напряжений нельзя считать удовлетворительным, т.к. слишком велика разница между полученными напряжениями и заданными на поверхности. При более высоких степенях (7, 8) решение теряет устойчивость. Анализ результатов численного исследования напряженного состояния втулки позволил сделать основной вывод: наложение связей на нагруженных участках поверхности улучшает (рис. 5.9), а на участках поверхности, свободных от напряжений, ухудшает сходимость приближенных решений к точному (рис. 5.10), что характеризуется увеличением средней квадратичной погрешности выполнения краевых условий. Наилучший результат при оценке по этому критерию получается в случае задания интегральных условий вида

$$\int_0^{0,5} \sigma_r|_{r=0,5} dz = -0,1875; \quad \int_{0,5}^1 \sigma_r|_{r=0,5} dz = -0,0625; \quad \int_0^1 \tau_{rz}|_{r=0,5} dz = 0 .$$

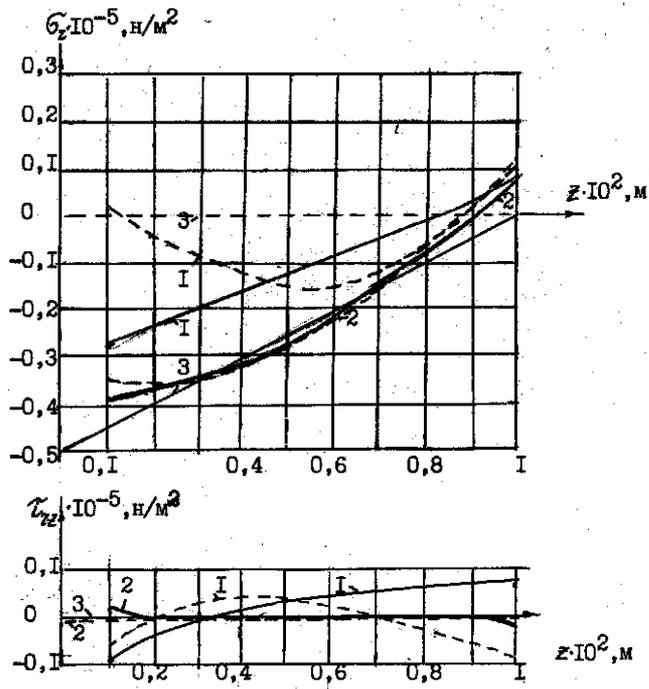


Рис. 5.9. Графики нормальных σ_r и касательных τ_{zr} напряжений на участках поверхности $r = 1, 0 < z < 1$ (пунктир), $r = 0,5, 0 < z < 1$ (сплошные линии). 1 – без задания поверхностных связей, 2 с заданием напряжений в точках $r = 0,5, z = 0,3; r = 0,5, z = 0,7$, 3 – заданные напряжения (точечное задание крайних условий)

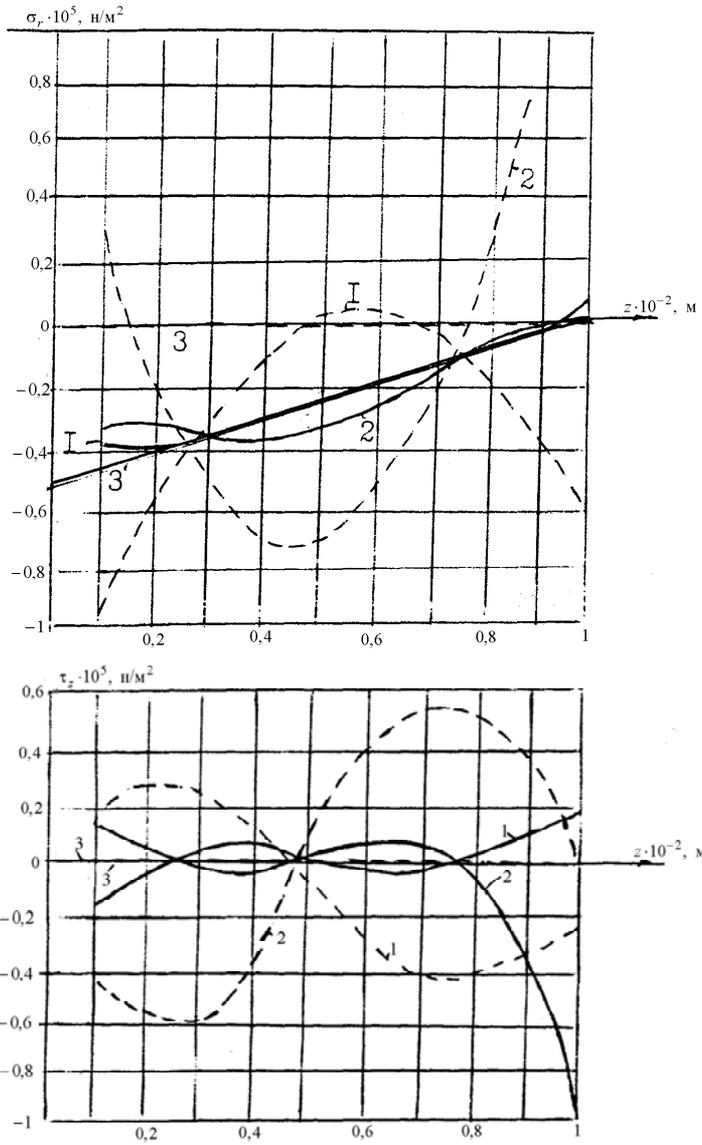


Рис. 5.10. Графики нормальных σ_r и касательных τ_{zr} напряжений на участках поверхности $r = 1, 0 < z < 1$ (пунктир), $r = 0,5, 0 < z < 1$ (сплошные линии) в случае задания их в точках: 1) $r = 0,5, z = 0,3$; $r = 0,5, z = 0,7$; $r = 1, z = 0,5$; 2) $r = 0,5, z = 0,3$; $r = 0,5, z = 0,7$; 3) заданные напряжения (точечное задание крайних условий)

График напряжений для последнего варианта приведен на рис. 5.11.

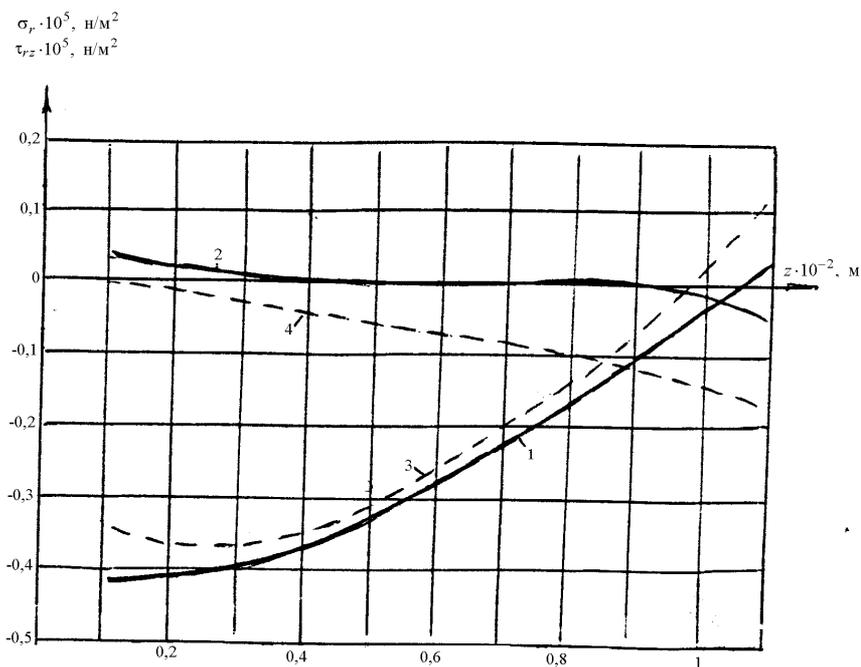


Рис. 5.11. Графики нормальных σ_r (кривые 1, 3) и касательных τ_{zr} (кривые 2,4) напряжений на участках поверхности $r = 0,5, 0 < z < 1$ (сплошные линии), $r = 1, 0 < z < 1$ (пунктир) при интегральном задании краевых условий

Таким образом, численный анализ различных подходов к построению уравнений поверхностных связей на рассматриваемом примере расчета втулки показывает, что:

1) точечные поверхностные связи на любых участках поверхности улучшают решение в окрестности выбранных точек и ухудшают в других (под участком поверхности понимаем ее часть с непрерывной нормалью);

2) интегральные условия хотя и не выполняют точно поверхностные условия в отдельных точках, но обеспечивают достаточно малую невязку выполнения поверхностных условий на участке интегрирования;

3) на участках поверхности, свободных от нагрузки, если не представляется возможность выполнить точно во всех точках, то лучше заранее не выполнять ни точечно, ни интегрально;

4) на загруженных участках всегда следует заранее выполнять краевых условия в точной по возможности, в интегральной или хотя бы в точечной форме.

В статье [146] в развитие этого вопроса было проведено численное исследование влияния внутренних связей, различных форм поверхностных связей на результаты расчета матрицы для прессования порошков. При этом было отмечено преимущественное задание поверхностных связей перед заданием внутренних связей. Решение, точно удовлетворяющее краевым условиям, выполняет уравнения внутренних связей с минимальной погрешностью, в то время как решение, точно удовлетворяющее уравнениям равновесия внутри, дает большую погрешность на поверхности детали.

Преимущество уравнений связей в интегральной форме по сравнению с точечной позволило ученику автора В.Н.Апановичу разработать модифицированный метод конечных элементов, основанный на интегральном равенстве упругих перемещений на границе разбиения области [18].

Приведенные в работах автора и его учеников [15–18; 84–88; 91–98, 102, 109, 112, 113, 115, 117, 118, 120, 125, 126] многочисленные примеры показывают эффективность изложенного в данной главе метода, во-первых, благодаря высокой степени полиномов, применяемых для аппроксимации, и, во-вторых, высокому уровню автоматизации всех этапов проведения расчета при достаточно простой исходной информации.

5.9. Примеры расчета корпусных деталей прессов

Приведем некоторые выполненные под руководством автора примеры расчета корпусных деталей прессов [13, 167, 170, 171, 174].

5.9.1. Стол пресса K2535A (рис. 5.12)

Предполагая полную симметрию стола относительно плоскостей XOZ и YOZ и симметричное нагружение при затяжке, запишем степенные ряды аппроксимирующих функций

$$u = \sum_{m=0} \sum_{n=0} \sum_{p=0} x^{2m+1} y^{2n} z^p U_{2m+1, 2n, p},$$

$$v = \sum_{m=0} \sum_{n=0} \sum_{p=0} x^{2m} y^{2n+1} z^p U_{2m, 2n+1, p},$$

$$w = \sum_{m=0} \sum_{n=0} \sum_{p=0} x^{2m} y^{2n} z^p U_{2m, 2n, p}.$$

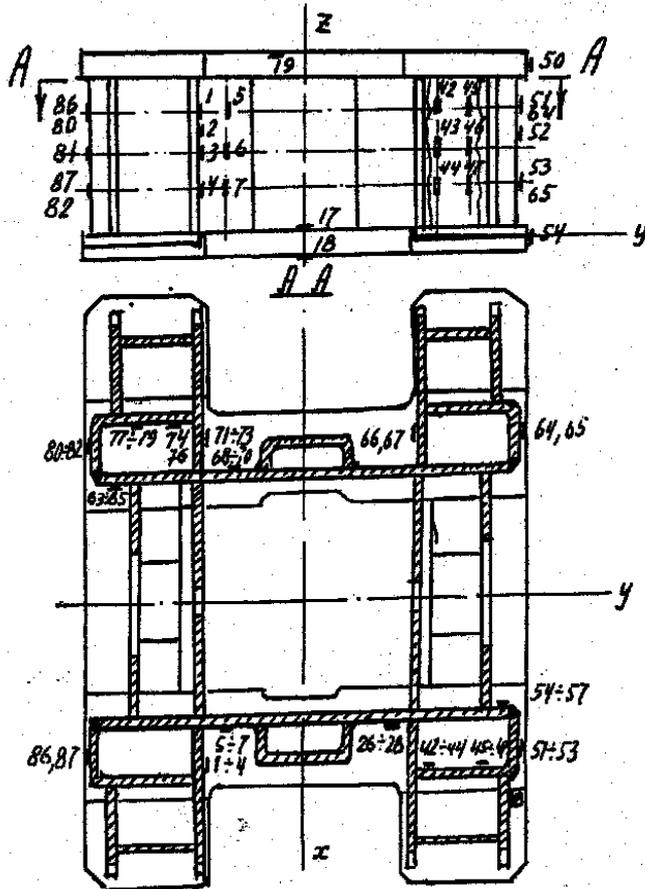


Рис. 5.12. Схема расположения датчиков стола прессы К2535А

Ограничиваясь полными полиномами четвертой степени, имеем 30 обобщенных перемещений ($8 + 8 + 14$), которые подчиняем девяти уравнениям внутренних связей. В качестве поверхностных связей используем условия закрепления и нагружения стола, а именно, обращаем в нуль вертикальное перемещение w при $x = 0,525$ м, $y = 0,77$ м, $z = 0$, т.е. в точках, лежащих на осях шпилек у нижнего края. Эта кинематическая связь необходима, так как обобщенное перемещение W_{000} не определяется из вариационных уравнений и уравнений внутренних связей. Обобщенное перемещение W_{000} не представляет упругую деформацию тела, а определяет лишь жесткое перемещение его. Кроме кинематической связи введем и статическую связь, представляющую собой значение напряжения $\sigma_z = P/4F$ на поверхности стола при $x = 0,525$ м, $y = 0,77$ м, $z = 0,66$ м, где P — усилие затяжки, F — площадь контакта между стойкой и столом.

Таким образом, задача расчета стола при затяжке на основе изложенного свелась к решению 41-го алгебраического уравнения: 30-ти вариационных уравнений по числу аппроксимирующих функций, 9-ти уравнений внутренних связей и 2-х уравнений поверхностных связей. Указанные 11 уравнений связей включаются в вариационные уравнения при помощи множителей Лагранжа.

Формирование вариационных уравнений с множителями Лагранжа, уравнений внутренних и поверхностных связей и все вычисления осуществлены на ЭВМ.

Значения обобщенных перемещений равны

$U_{100} = 4,06$	$U_{300} = -10,67$	$U_{120} = 5,92$	$U_{101} = 14,44$
$U_{301} = 12,59$	$U_{121} = 103,70$	$U_{102} = 3,89$	$U_{103} = -94,46$
$V_{010} = 22,02$	$V_{210} = -1,00$	$V_{030} = 7,52$	$V_{011} = -238,09$
$V_{211} = -115,74$	$V_{031} = 66,05$	$V_{012} = 102,71$	$V_{013} = 154,33$
$W_{000} = -59,73$	$W_{200} = 6,53$	$W_{400} = -25,39$	$W_{020} = 44,14$
$W_{220} = 6,91$	$W_{040} = 92,17$	$W_{001} = -29,17$	$W_{201} = 44,52$
$W_{021} = -90,63$	$W_{002} = 57,53$	$W_{202} = 74,47$	$W_{022} = -287,27$
$W_{003} = -18,52$	$W_{004} = 1,84$		

При вычислении упругих перемещений (в мм) и напряжений (в кг/см^2) нужно вычисленные обобщенные перемещения разделить на $8,1 \cdot 10^4$.

Расчетные значения напряжений при затяжке сравнены с экспериментальными результатами исследования напряженного состояния стола. Схема расположения датчиков изображена на рис. 5.12, а графическое сопоставление их значений с расчетными результатами показано на рис. 5.13. Анализ сравнения показывает удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных результатов. Следует отметить, что результаты расчета получены в предположении полной симметрии конструкции и нагружения стола. На самом деле конструкция стола не совсем симметричная, а шпильки затянуты не одинаково.

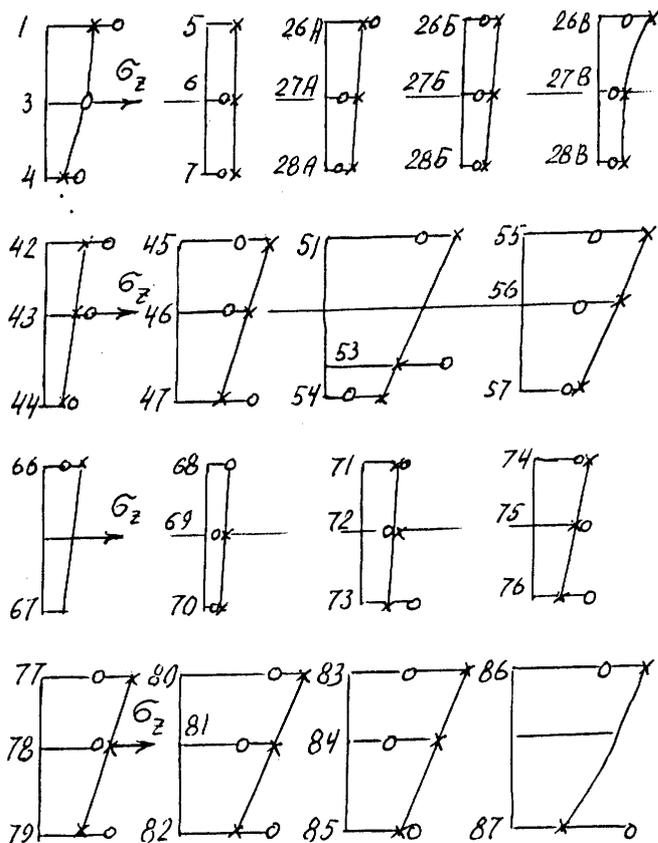


Рис. 5.13. Сравнение расчетных и экспериментальных напряжений σ_z стола прессы К2535А

5.9.2. Станина пресса К8544

Определим напряженное состояние в районе втулки на внутреннем листе станины при статическом действии рабочей нагрузки (усилия прессования). Эта зона станины является наиболее нагруженной, т.к. именно в этом месте на станину действует усилие прессования и возникает концентрация напряжений вследствие наличия отверстия под втулку. Задачу будем строить в форме локального решения, используя наиболее полную информацию нагружения указанной зоны.

Благодаря симметрии конструкций и нагрузки относительно плоскости XOZ (рис. 5.14) и закрепления нижнего края ($z = 0$) станины искомые перемещения запишем в виде следующих степенных рядов:

$$u = \sum_{m=0} \sum_{n=0}^{m+n+p=4} \sum_{p=0} x^m y^{2n} z^{p+1} U_{m,2n,p+1},$$

$$v = \sum_{m=0} \sum_{n=0}^{m+n+p=4} \sum_{p=0} x^m y^{2n+1} z^{p+1} U_{m,2n+1,p+1},$$

$$w = \sum_{m=0} \sum_{n=0}^{m+n+p=4} \sum_{p=0} x^m y^{2n} z^{p+1} U_{m,2n,p+1}.$$

Для 33-х обобщенных перемещений имеем 33 вариационных уравнения и 17 уравнений внутренних связей. Свободные члены вариационных уравнений определяются как работа усилия прессования, равного $0,5 P_n$ ($P_n = 2500$ т), приложенного в точке $x = 0$, $y = 0,66$ м, $z = 3,55$ м.

В качестве достаточной информации для определения напряженного состояния в районе втулки следовало бы привлечь связи взаимодействия станины с эксцентриковым валом и шпильками. Однако выяснение этих связей требует детального исследования работы пресса при учете контактных деформаций во всех местах стыка.

Составление уравнений связей взаимодействия представляет собой отдельную малозученную задачу. Поэтому вместо решения задачи во взаимодействиях с другими деталями будем отбрасывать связи и вводить значения напряжений или перемещений в точках контакта.

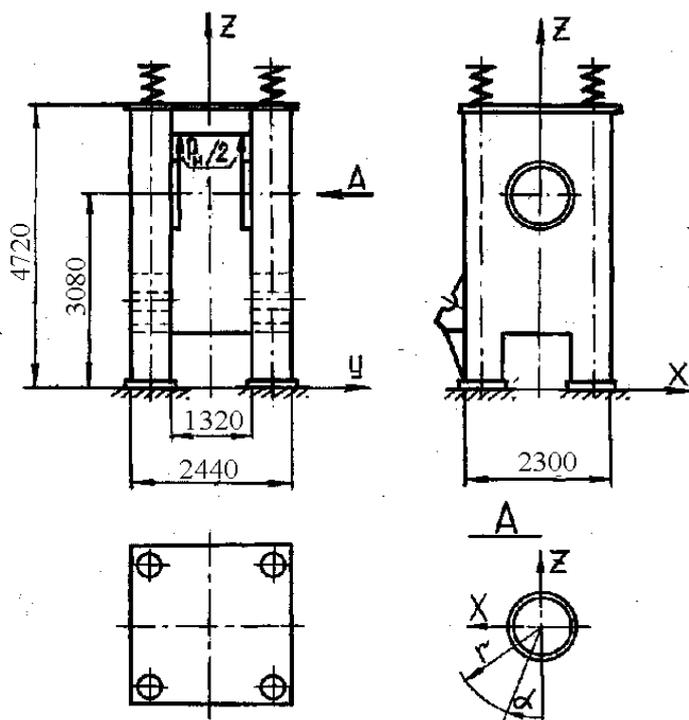


Рис. 5.14. Расчетная схема станины пресса K8544

Итак, для получения решения в районе втулки на внутреннем листе введем перемещения точек верхнего листа $z = 4,72$ м по осям стяжных шпилек (кинематические связи) и напряжения вдоль контура отверстия на внутреннем листе (статические связи). Перемещения этих точек согласно экспериментальным данным составляют приблизительно 20% удлинения от P_{II} , а напряжения вблизи места контакта вала и втулки (верхняя точка втулки) составляет 140 МН/м^2 . Остальные точки контура отверстия предполагаются свободными от напряжений. Таким образом, к 50-ти основным уравнениям добавляются 2 уравнения кинематических связей $W(\pm 0,82; 0,96; 4,72) = 0,275$ мм и 10 уравнений статических связей (табл. 5.6).

Таблица 5.6

Статические точечные связи в районе втулки

Координаты, м			Напряжения, МН/м ²					
x	y	z	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
0	0,66	3,705	–	–	–140	–	0	–
0	0,66	2,63	–	–	0	–	0	–
0,46	0,66	3,09	0	–	–	0	0	–
–0,46	0,66	3,09	0	–	–	0	0	–

В результате получим 62 уравнения (33 вариационных уравнений, 17 уравнений внутренних связей, 2 уравнения кинематических связей и 10 уравнений статических связей) с 62-мя неизвестными (33 обобщенных перемещений, 29 множителей Лагранжа).

Для сравнения расчетных и экспериментальных результатов определены радиальные напряжения по формуле

$$\sigma_r = \sigma_x \sin^2 \alpha - \tau_{xz} \sin 2\alpha + \sigma_z \cos^2 \alpha,$$

где α – угол, отсчет которого показан на рис. 5.14.

Сравнение расчетных и экспериментальных радиальных напряжений приведено на рис. 5.15, где точками отмечены результаты тензометрирования станины в районе втулки. Анализ сравнения обнаруживает хорошее совпадение.

Таким образом, на фоне общего расчета с помощью вариационных уравнений локальное исследование напряженного состояния в районе втулки благодаря применению точечных статических связей, характеризующих нагружение исследуемой зоны, следует признать целесообразным для таких сложных конструкций, как станина. Успех локального исследования напряженного состояния зависит от полноты исходной информации, получение которой требует тщательного изучения условий работы машины и всех ее узлов.

В рассмотренных двух примерах расчета реальных конструкций автор не ставил цель дать решение технических проблем, а стремился показать работоспособность предлагаемого метода и его возможности в достаточно серьезных задачах.

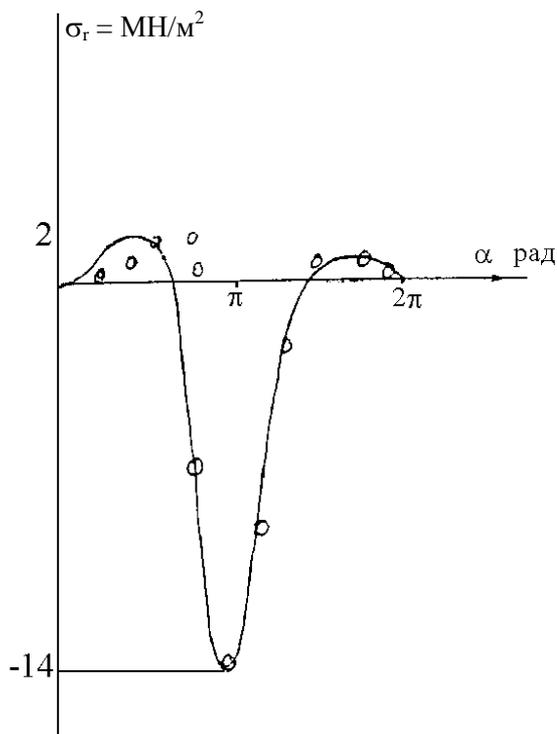


Рис. 5.15. График радиальных напряжений в районе втулки на внутреннем листе станины прессы К8544

Технические задачи совершенствования конструкции были выполнены и представлены в соответствующих отчетах [13, 167, 170, 171].

5.10. Равновесие периодонта как оболочки, ограниченной двумя составными эллиптическими гиперболами

В заключение темы, посвященной исследованию влияния поверхностных и внутренних связей на надежность решения упругой задачи, приведем пример из области биомеханики, представляющий собой разработку расчетной модели тонкой упругой оболочки (прокладки), находящейся между корнем зуба и костной тканью. Мы увидим, что решение, удовлетворяющее краевым условиям, но не удовлетворяющее уравнениям внутренних связей, дает надежное и физически достоверное решение.

Впервые расчетная модель периодонта, ограниченного двумя круговыми конусами, была построена Г.П.Сосниным на основе методов сопротивления материалов [182]. Однако этот метод не позволил перейти к расчету других, более совершенных моделей. В 1974 г. стоматологи Г.П.Соснин и Л.С.Величко предложили автору решить задачу для формы в виде эллиптического конуса. Поставленная задача была решена при достаточно общих предположениях относительно формы поверхностей периодонта и получены формулы для эллиптического конуса [48]. При этом был предложен новый аналитический метод, при котором заранее выполняется условие неподвижности наружной поверхности периодонта и условие жесткой связи внутренней поверхности с корнем зуба, рассматриваемого как абсолютно твердое тело. Модель эллиптического конуса позволила дать более правильную картину распределения напряжений, показала снижение нормальных напряжений за счет возникновения касательных напряжений вдоль образующей и направляющей конуса, объяснить целый ряд фактов, как, например, меньшую сопротивляемость зуба в боковом направлении по сравнению с фронтальным и др. Однако в области вершины корня модель эллиптического конуса не позволила определить действительный характер распределения напряжений, т.к. реальные зубы на конце корня имеют не острие, а закругление. Поэтому переход к модели эллиптического гиперboloида представляется естественным шагом вперед в данном вопросе, тем более что эллиптический конус следует из него как частный случай. Расчет периодонта на основе модели эллиптического гиперboloида был выполнен автором в статье [116], в котором кроме того дано обобщение на случай действия произвольной силы в пространстве, а не в плоскости симметрии, как в работе [48]. Более внимательное изучение формы поперечного сечения корня зуба показывает, что хотя его форма и овальная, однако с одной осью симметрии, т.е. форма эллипса с двумя осями симметрии не совсем отвечает действительности. Следовательно, если модель формы поперечного сечения корня зуба составить из двух различных полуэллипсов с одной общей малой осью $2b$ вдоль оси ординат, то такая модель окажется ближе к действительности [135] (рис. 5.16). Ввиду того, что стыковка двух полуэллипсов производится в вершинах, то сохраняется непрерывность не только поверхности, но и касательной (нормали) к поверхности.

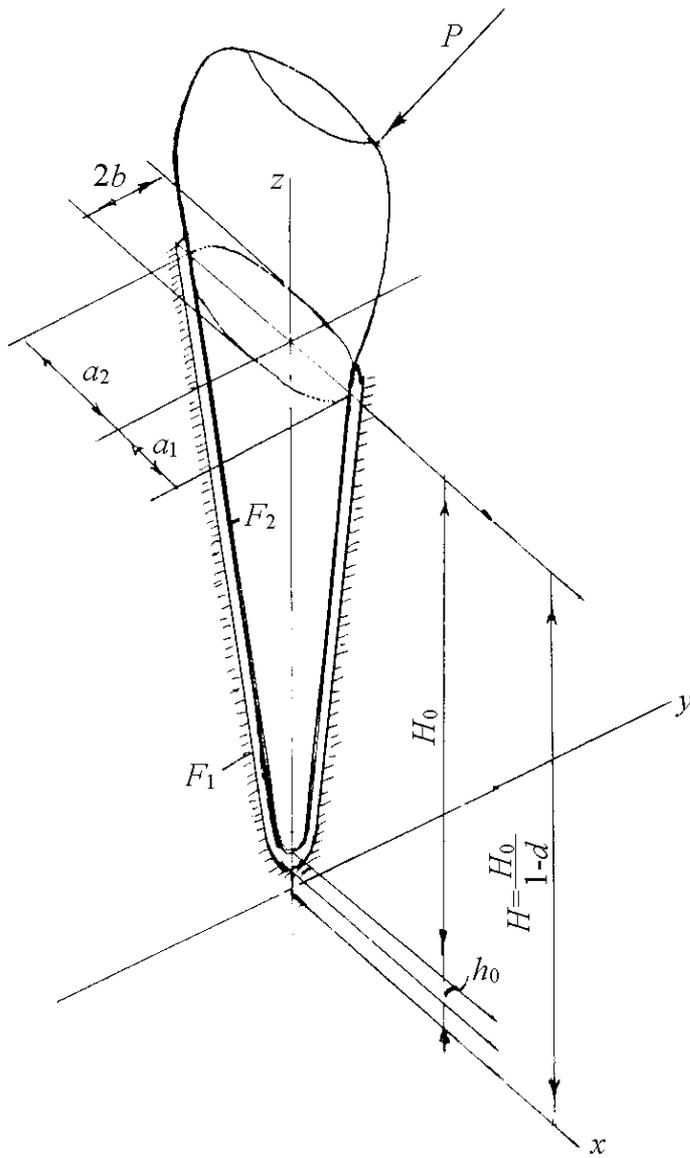


Рис. 5.16. Форма продольного сечения корня зуба и периодонта, ограниченного двумя составными эллиптическими гиперболами

Итак, имеем форму периодонта, ограниченного двумя составными эллиптическими двуполостными гиперboloидами (см. рис. 5.16):

1) со стороны костной ткани

$$F_1 = z + h_0 - H \sqrt{\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b^2} + d^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq a_1,$$

$$F_1 = z + h_0 - H \sqrt{\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b^2} + d^2} = 0, \quad -a_2 \leq x \leq 0;$$

2) со стороны корня зуба

$$F_2 = z - H \sqrt{\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b^2} + d^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq a_1,$$

$$F_2 = z - H \sqrt{\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b^2} + d^2} = 0, \quad -a_2 \leq x \leq 0.$$

При $a_1 = a_2 = a$ получаем эллиптический гиперboloид с двумя плоскостями симметрии. При $d = 0$ получим эллиптические конусы. При $a_1 = a_2 = b$ получаем гиперboloиды вращения, а при $a_1 = a_2 = b$ и $d = 0$ имеем круговые конусы. Таким образом, из новой модели вытекают все другие, ранее предложенные модели.

Используя уравнения наружной и внутренней поверхности периодонта, запишем следующие ряды для искомых упругих перемещений:

$$u = F_1 F_2 \sum_{m=0} \sum_{n=0} \sum_{p=0} A_{mnp} x^m y^n z^p + u^*,$$

$$v = F_1 F_2 \sum_{m=0} \sum_{n=0} \sum_{p=0} B_{mnp} x^m y^n z^p + v^*,$$

$$w = F_1 F_2 \sum_{m=0} \sum_{n=0} \sum_{p=0} C_{mnp} x^m y^n z^p + w^*,$$

где u^* , v^* , w^* – упругие перемещения на внутренней поверхности периодонта $F_2 = 0$, соответствующие перемещению зуба как абсолютно твердого тела. Вследствие незначительной толщины периодонта вклад слагаемых, содержащих произведение $F_1 F_2$, незначителен и мы ограничимся нахождением лишь неоднородных слагаемых u^* , v^* , w^* . Это означает, что мы ограничимся лишь решением, точно удовлетворяющим кинематическим поверхностным условиям на $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$.

Как известно, точки приложения сил, под действием которых зуб получает лишь поступательные перемещения вдоль осей OX , OY и OZ , называются центрами сопротивления. Благодаря введению центров сопротивления величины поступательных перемещений определяются независимо от углов поворота вокруг осей координат. В случае несимметричной формы корня зуба существуют три различных центра сопротивления, т.е. точки приложения двух горизонтальных и одной вертикальной силы, под действием которых зуб получает поступательные перемещения вдоль осей координат. Для корня зуба, ограниченного двумя составными эллиптическими гиперболами, центр сопротивления при действии силы вдоль оси OX лежит на оси OZ : его аппликату обозначим z_a ; центр сопротивления при действии силы вдоль оси OY лежит где-то в плоскости XOZ , его координаты обозначим x_b и z_b ; и, наконец, центр сопротивления при действии силы вдоль оси OZ лежит в плоскости XOZ и имеет абсциссу x_c . Координаты в направлении сил не указываем, т.к. силы в абсолютно твердом теле можно переносить вдоль линии действия. Итак, имеем три центра сопротивления $A(0, 0, z_a)$, $B(x_b, 0, z_b)$, $C(x_c, 0, 0)$. В связи с указанными центрами сопротивления будем искать упругие перемещения в виде следующих выражений:

$$u^* = A[u_0 + (z - z_a)\varphi_y - y\varphi_z],$$

$$v^* = A[v_0 + (x - x_b)\varphi_z - (z - z_b)\varphi_x],$$

$$w^* = A[w_0 + y\varphi_x - (x - x_c)\varphi_y],$$

$$A = \frac{F_1(x, y, z)}{F_1(x, y, z) - F_2(x, y, z)}.$$

При этом на поверхности $F_1(x, y, z) = 0$ $u = v = w = 0$, а на поверхности $F_2(x, y, z) = 0$ периодонт получает перемещение абсолютно твердого тела. Для определения шести параметров перемещений зуба записываем условия равенства нулю главного вектора и главного момента всех сил, действующих на зуб, в том числе и напряжений, возникающих на поверхности $F_2(x, y, z) = 0$:

$$\int_{F_2} \bar{n} \cdot T dS - \bar{P} = 0, \quad \int_{F_2} \bar{r} \times (\bar{n} \cdot T) dS - \bar{m} = 0,$$

где $\bar{n} = in_x + jn_y + kn_z$ – вектор единичной нормали к поверхности $F_2 = 0$;

T – тензор напряжений;

\bar{P} , \bar{m} – главный вектор и главный момент внешних сил.

Связь между тензором напряжений и тензором деформаций выражена законом Гука (1.5). В результате вычисления поверхностных интегралов получены формулы для u , v , w , φ_x , φ_y , φ_z и координат сопротивления x_b , x_c , z_a , z_b [136]. Так, уравнение

$$\int_{F_2} (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) ds - P_x = 0$$

в результате вычисления поверхностных интегралов записывается в виде

$$\frac{\pi GH^2(a_1 + a_2)b}{2h_0} (u_0 - z_a \varphi_y) \left[\left(\frac{1-d^2}{2} + d^2 \ln d \right) \left(\frac{\gamma}{a_1 a_2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{1-d^2}{H^2} \right] + \frac{\pi GH^3(a_1 + a_2)b \varphi_y}{6h_0} \left[\left(\frac{\gamma}{a_1 a_2} + \frac{\gamma_2}{H^2} + \frac{1}{b^2} \right) (1 - 3d^2 + 2d^3) + \frac{3(1-d^2)}{H^2} \right] = P_x,$$

из которого следуют формулы для u_0 и z_a :

$$u_0 = \frac{2P_x h_0}{\pi G(a_1 + a_2) b D},$$

$$z_a = \frac{H \left[3(1 - d^2) + \left(\gamma_2 + \frac{\gamma H^2}{a_1 a_2} + \frac{H^2}{b^2} \right) (1 - 3d^2 + 2d^3) \right]}{3D},$$

$$D = (1 - d^2) \left(1 + \frac{\gamma H^2}{2a_1 a_2} + \frac{H^2}{2b^2} \right) + H^2 \left(\frac{\gamma}{a_1 a_2} + \frac{1}{b^2} \right) d^2 \ln d.$$

Уравнение

$$m_y = \int_{F_z} [(z - z_a)(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) - (x - x_c)(\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z)] ds$$

определяет φ_y независимо от других параметров.

Отметим, что для несимметричного профиля жесткость при поступательных перемещениях возросла, а жесткость при поворотах в зависимости от параметров увеличилась или уменьшилась по сравнению с симметричным профилем. По-видимому, природа, создавая несимметричный профиль корня зуба, стремилась создать оптимальные условия для деформированно-напряженного состояния периодонта. Например, при выполнении жевательного акта необходимо иметь значительную жесткость при поступательном перемещении и хорошую податливость при поворотах зуба для лучшего контакта зубов.

Наибольший интерес представляют напряжения на поверхности соединения периодонта с корнем зуба. Для этой цели определяем вектор нормали к поверхности $F_2 = 0$:

$$\bar{n} = \text{grad} F_2 = -\bar{i} \frac{Hr \cos \theta}{a_1 \sqrt{r^2 + d^2}} - \bar{j} \frac{Hr \sin \theta}{b \sqrt{r^2 + d^2}} + \bar{k}$$

и векторы касательных вдоль образующей и направляющей к поверхности $F_2 = 0$

$$\begin{aligned}\bar{s} &= \bar{i}a_l \cos \theta + \bar{j}b \sin \theta + \frac{\bar{k}Hr}{\sqrt{r^2 + d^2}}, \\ \bar{i} &= -\bar{i} \left[\frac{H^2 r^2}{b(r^2 + d^2)} + b \right] \sin \theta + \bar{j} \left[\frac{H^2 r^2}{a_l(r^2 + d^2)} + a_l \right] \times \\ &\quad \times \cos \theta + \frac{\bar{k}Hr(a_l^2 - b^2) \sin 2\theta}{2a_l b \sqrt{r^2 + d^2}},\end{aligned}$$

где r, θ – полярные координаты $x = a_l r \cos \theta, y = br \sin \theta$. Нормальные и касательные напряжения вычисляем по формулам

$$\sigma_n = \frac{1}{n^2} (T \cdot \bar{n}) \cdot \bar{n}, \quad \tau_{ns} = \frac{1}{ns} (T \cdot \bar{n}) \cdot \bar{S}, \quad \tau_{nt} = \frac{1}{nt} (T \cdot \bar{n}) \cdot \bar{i}.$$

Для стоматологической практики знание напряжений имеет чрезвычайно важное значение при конструировании мостовидных протезов, которые оказывают силовое воздействие на периодонт. Не менее важное значение имеет также кинематика зубов под действием различных силовых факторов, например, в процессе жевательного акта, ортодонтических вмешательствах и особенно при дефектах в расположении зубов. Для этой цели составлено уравнение винтовой оси поворота зуба при учете трех центров сопротивления

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varphi_x} [u_0 + (z - z_a) \varphi_y - y \varphi_z] &= \frac{1}{\varphi_y} [v_0 + (x - x_b) \varphi_z - (z - z_b) \varphi_x] = \\ &= \frac{1}{\varphi_z} [w_0 - (x - x_c) \varphi_y + y \varphi_x].\end{aligned}$$

При этом угол поворота вычисляется по формуле

$$\varphi = \sqrt{\varphi_x + \varphi_y + \varphi_z},$$

а перемещение вдоль винтовой оси

$$u = \frac{1}{\varphi} [(u_0 - z_a \varphi_y) \varphi_x + (v_0 - x_b \varphi_z + z_b \varphi_x) \varphi_y + (w_0 + x_c \varphi_y) \varphi_z].$$

Условием отсутствия перемещения вдоль оси поворота является равенство $u = 0$. В частности, если силы расположены в плоскости симметрии $y = 0$, то $v_0 = 0$, $\varphi_x = \varphi_z = 0$, а неподвижная ось поворота проходит через точку $x = x_c + w_0/\varphi_y$, $z = z_a - u_0/\varphi_y$. При равенстве нулю главного вектора внешних сил, действующих на зуб $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, перемещение вдоль оси равно

$$u = \frac{\varphi_y [(x_c - x_b) \varphi_z + (z_b - z_a) \varphi_x]}{\varphi}.$$

Это означает, что смещение зуба вдоль оси поворота можно осуществить простым поворотом вокруг соответствующей прямой. Это обстоятельство используется стоматологами при удалении зуба и при ортодонтических манипуляциях (лечение аномалий и деформаций зубочелюстной системы).

Таким образом, построенная нами математическая модель равновесия периодонта зуба позволила не только объяснить целый ряд фактов, известных из стоматологической практики (например, меньшую сопротивляемость зуба в боковом направлении по сравнению с фронтальным, снижение нормальных напряжений вследствие возникновения касательных напряжений, резкое увеличение напряжений в периодонте при атрофии корня зуба), но и решить многие вопросы, связанные с рациональным конструированием протезов за счет выбора числа опор, с лечением врожденных и приобретенных дефектов зубов в результате правильного определения оси поворота зуба.

Итак, аналитическое исследование напряженно-деформированного состояния периодонта позволило получить вполне объективные факты и характеристики. Этот пример говорит, что наряду с численными методами с помощью ЭВМ не потеряли своего значения и аналитические приближенные методы, которые имеют целый ряд своих преимуществ, а именно, доступность, наглядность, непосредственность проверки и контроля и пр. Численные методы, к

сожалению, не обладают этими достоинствами. Для их проверки требуется специальная подготовка и большие затраты времени. Разумеется, мы не собираемся противопоставлять аналитические и численные методы. Нельзя впадать в крайности, т.е. нельзя приветствовать только численные методы и отвергать аналитические, и наоборот. По мнению автора, каждый метод хорош, если он доводит решение поставленной задачи до логического конца. Аналитический метод просто необходим при разработке новых физических и математических моделей, а численный метод является его продолжением, обладая безотказностью и эффективностью на основе уже разработанной и всесторонне проверенной модели.

5.11. Применение вариационного уравнения равновесия полного объема к решению динамических задач теории упругости

В предыдущих главах задачи динамики упругих тел рассматривались на основе вариационных уравнений равновесия элементарного столбика и элементарного слоя. При этом были получены разрешающие динамические уравнения при различных краевых условиях на торцах цилиндрического тела на основе уравнения равновесия элементарного столбика. На основе вариационного уравнения равновесия элементарного слоя построены динамические уравнения при точном выполнении условий отсутствия нагрузки на четырех гранях упругого параллелепипеда, а также при условии отсутствия нагрузки на боковой поверхности динамические уравнения крутильных колебаний тел (оболочек) вращения и др. Все эти результаты опубликованы в многочисленных работах автора [105, 106, 108, 132]. Некоторые результаты этих работ приведены в данной монографии.

Вариационное уравнение равновесия полного объема снимает многие математические трудности решения динамических задач теории упругости. Однако значительные трудности возникают при точном выполнении краевых условий. Если ограничиться выполнением лишь главных (кинематических) условий, что является необходимым для вариационного уравнения Лагранжа, то указанные трудности несколько уменьшаются для тел со свободной от закрепления поверхности. При этом отмечаем, что при выполнении только кинематических условий получаем достаточно точные значения

собственных частот и форм колебаний как интегральных характеристик упругого тела.

5.11.1. Примеры определения собственных частот и форм колебаний упругих стержней различной длины с квадратным поперечным сечением

Пользуясь полиномиальным представлением вектора упругих перемещений, рассмотрим в рамках трехмерной теории упругости примеры определения собственных частот и форм колебаний упругих стержней различной длины с квадратным поперечным сечением. Сторона квадрата $a = 1$ м, длина $l = 1; 1,5; 3; 5$ и 10 м. Характеристики материала стержней: модуль упругости $E = 2,04 \cdot 10^{11}$ Н/м², коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность $\rho = 7,85 \cdot 10^3$ кг/м³. Поперечные колебания. Рассмотрим собственные поперечные колебания консольного стержня при изгибе в плоскости XOZ (рис. 5.17). Разложение вектора упругих перемещений в обычный степенной ряд имеет вид

$$u = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p U_{i,2j-2,2k-1} x^i y^{2j-2} z^{2k-1},$$

$$v = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p V_{i,2j-1,2k-1} x^i y^{2j-1} z^{2k-1},$$

$$w = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p W_{i,2j-2,2k-2} x^i y^{2j-2} z^{2k-2}.$$

При этом сумма показателей степени в мономах $x^i y^j z^k$ не должна превышать n_{\max} , т.е. $i + j + k \leq n_{\max}$. Расчет собственных частот и форм колебаний выполнен для $n_{\max} = 5$ при двух видах аппроксимации перемещений.

1. Зависимость перемещений по поперечным координатам y и z принята линейной, а по координате x перемещения аппроксимированы полиномом пятой степени ($m = 5, n = p = 1$). Такая аппроксимация соответствует принятию гипотезы плоских сечений в технической теории изгибных колебаний. Однако в отличие от технической теории все компоненты тензора напряжений (деформации) не равны нулю.

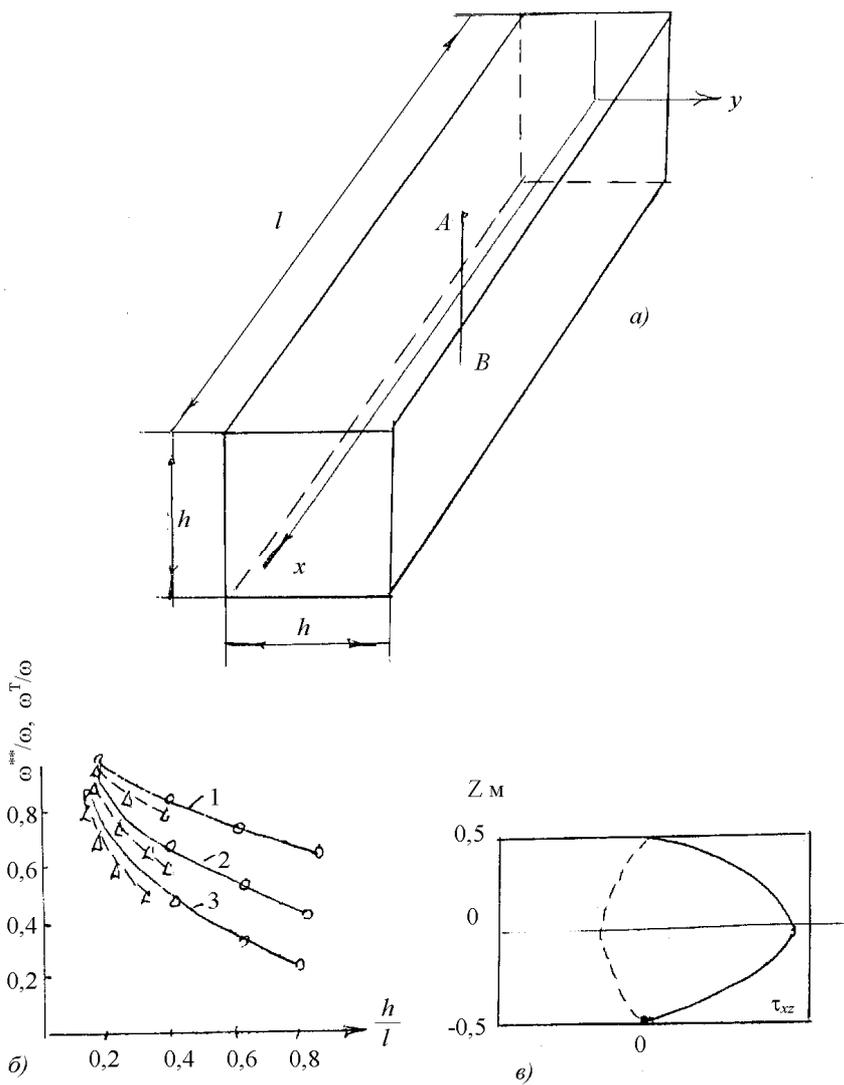


Рис. 5.17. Исследование поперечных колебаний стержней:

а) расчетная схема поперечных колебаний;

б) графики зависимостей ω^{**}/ω , $\omega^T/\omega = f(h/l)$ 1,2,3 – первая, вторая и третья собственные частоты, сплошные линии – ω^{**}/ω , штриховые – ω^T/ω ;

в) графики изменения касательных напряжений в поперечном сечении стержня

2. Перемещения аппроксимируются полиномами пятой степени по всем координатам ($m = n = p = 5$). Результаты расчета собственных частот поперечных колебаний стержней представлены в табл. 5.7, где l – длина стержня, i – номер частоты, ω , ω^* , ω^{**} – собственные частоты, вычисленные по технической теории и трехмерной теории упругости при $m = 5$, $m = p = 1$ и $m = n = p = 5$ соответственно.

Анализ данных табл. 5.7 и графиков рис. 5.17 показывает следующее:

1. Расчетные значения низших собственных частот поперечных колебаний консольных стержней на основе трехмерной теории упругости меньше соответствующих значений частот, полученных с использованием технической теории для стержней с отношением $h/l = 0,5 \dots 1$. Значения первой собственной частоты ω^{**} на 15...35% меньше значений частот ω , вычисленных по технической теории.

2. Для длинных стержней различия в расчетных значениях ω^{**} и ω трех низших собственных частот незначительны и составляют менее 5%. Однако с увеличением порядкового номера частоты различия возрастают.

3. Аппроксимация перемещений по всем координатам полиномами пятой степени приводит к незначительному уменьшению расчетных значений собственных частот в сравнении с линейной аппроксимацией по поперечным координатам для длинных стержней.

4. При $h/l = 0,1 \dots 0,33$ полученные результаты с использованием полиномов пятой степени по всем координатам хорошо согласуются с результатами С.П.Тимошенко [186].

Таблица 5.7

Собственные частоты поперечных колебаний стержней

$l, \text{ м}$	i	$\omega, \text{ рад/с}$	$\omega^*, \text{ рад/с}$	$\omega^{**}, \text{ рад/с}$	ω^{**}/ω
10	1	51,73	56,14	53,04	1,025
	2	324,2	340,7	324,6	1,001
	3	908,0	909,5	879,0	0,968
5	1	206,9	219,8	207,7	1,004
	2	1297	1191	1138	0,878
	3	3632	2861	2767	0,762

$l, \text{ м}$	i	$\omega, \text{ рад/с}$	$\omega^*, \text{ рад/с}$	$\omega^{**}, \text{ рад/с}$	ω^{**}/ω
3	1	574,8	582,1	549,8	0,956
	2	3602	2653	2542	0,706
	3	10088	5821	5654	0,560
1,5	1	2299	–	1855	0,807
	2	14410	–	6070	0,421
	3	40355	–	11982	0,297
1	1	5173	3651	3461	0,669

На рис. 5.17 для второй формы колебаний показано распределение касательных напряжений τ_{xz} по линии АВ (рис. 5.17). Поскольку формы колебаний определены с точностью до постоянного множителя, то абсолютные значения τ_{xz} не указаны. Из графиков рис. 5.17 видно, что наибольшая величина касательных напряжений имеет место на нейтральной оси. Это соответствует основным положениям теории изгиба стержней. На поверхности балки максимальная величина нормальных напряжений σ_x от изгиба на порядок превосходит значения тех компонентов напряжений, которые должны обращаться в ноль. Например, в точке А для первой формы колебаний $\sigma_z = -0,291$, $\sigma_x = 2,46$, $\sigma_y = 0,493$, $\tau_{xy} = 0,0000$, $\tau_{xz} = -0,262$, $\tau_{yz} = 0,000$.

Следовательно, интегральные условия отсутствия поверхностных напряжений выполняется удовлетворительно.

Продольные колебания стержней. При продольных колебаниях стержней вектора перемещений аппроксимируем рядом

$$u = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p U_{i,2j-2,2k-2} x^i y^{2j-2} z^{2k-2},$$

$$v = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p V_{i,2j-1,2k-2} x^i y^{2j-1} z^{2k-2},$$

$$w = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p W_{i,2j-2,2k-1} x^i y^{2j-2} z^{2k-1}.$$

Как и в случае поперечных колебаний выполняем условие $i + j + k < n_{\max}$. При $m = 5, n = p = 1$ (количество членов в разложении вектора перемещений равно $N = 12$), $m = n = p = 5, N = 24$.

В табл. 5.8 приведены результаты расчета собственных частот продольных колебаний консольных стержней различной длины. Обозначения табл. 5.8 соответствуют обозначениям табл. 5.7.

Таблица 5.8

Собственные частоты продольных колебаний стержней

$l, \text{ м}$	i	$\omega, \text{ рад/с}$	$\omega^*, \text{ рад/с}$	$\omega^{**}, \text{ рад/с}$	ω^{**}/ω
10	1	801	809	809	1,010
	2	2402	2423	2427	1,010
	3	4004	4116	4093	1,022
5	1	1602	1619	1620	1,011
	2	4804	4842	4836	1,006
	3	8007	8194	8082	1,009
3	1	2669	2703	2704	1,013
	2	8007	8036	7980	0,996
	3	13346	13522	13001	0,974
1,5	1	5338	–	5437	1,018
	2	16015	–	13165	0,822
	3	26693	–	14920	0,559
1	1	8007	8231	8189	1,023
	2	24022	16264	13987	0,582
	3	40037	20440	15602	0,389

На рис. 5.18 показаны графики зависимости $\omega^{**}/\omega = f(h/l)$ для трех низших частот продольных колебаний консольных стержней.

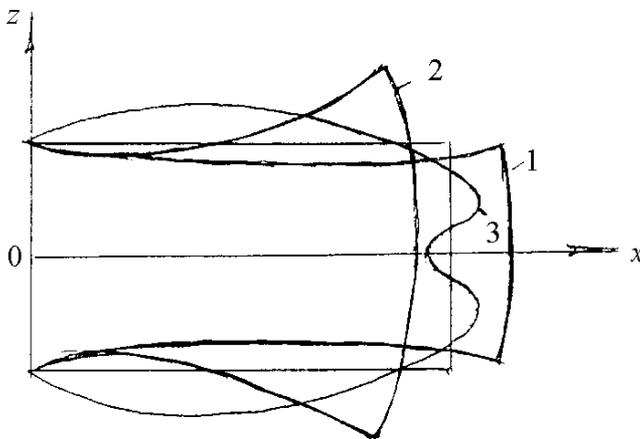
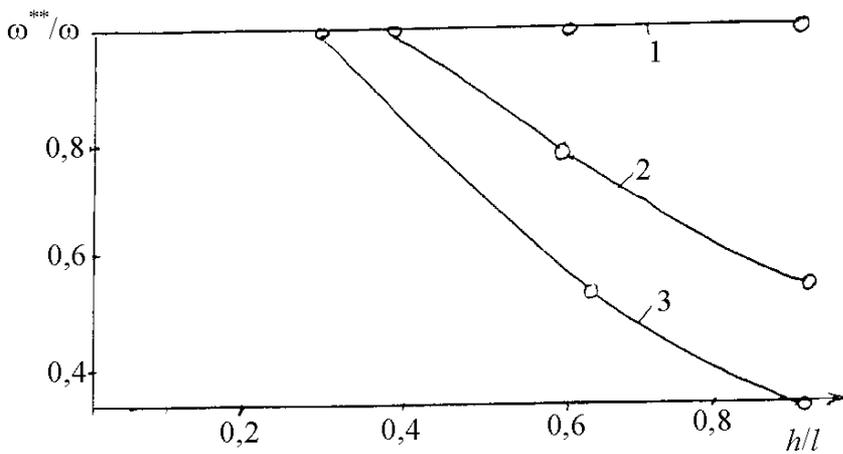


Рис. 5.18. Исследование продольных колебаний стержней:
 а) графики изменения $\omega^{**}/\omega = f(h/l)$;
 б) формы продольных колебаний коротких стержней (куба);
 1, 2, 3 – первая, вторая и третья формы колебаний

Анализ графиков рис. 5.18 показывает, что значения первой собственной частоты, вычисленной по технической теории, практически совпадает с соответствующими значениями частоты, полученной на основе трехмерной задачи теории упругости.

Для второй и третьей собственных частот хорошее совпадение ω и ω^{**} имеет место при $h/l < 0,4$. При $h/l > 0,4$ с увеличением h/l значения ω_2^{**} и ω_3^{**} резко уменьшаются по сравнению с ω_2 и ω_3 .

На рис. 5.18 изображены формы продольного сечения плоскостью XOZ стержня длиной 1 м при трех низших собственных частотах. Из рис. 5.18 видно, что для второй и третьей собственных форм имеют место значительные искажения плоских поперечных сечений, при этом амплитуды поперечных перемещений преобладают над амплитудами продольных перемещений. Поэтому на этих частотах величина кинетической энергии короткого стержня в основном определяется поперечными движениями, а не продольными, как предполагается в технической теории. Этим и объясняется резкое уменьшение ω_2^{**} и ω_3^{**} по сравнению с ω_2 и ω_3 при $h/l > 0,4$.

Таким образом, решение задач о собственных колебаниях стержней в постановке трехмерной теории упругости с использованием разложений в степенные ряды искомым перемещений позволяет учесть все факторы, которыми пренебрегает техническая теория (поперечные взаимодействия, инерция вращения, депланация сечений и др.) и которые в той или иной степени учитываются в уточненных теориях.

В рассмотренных примерах время расчета трех низших собственных частот на ЭВМ ЕС-1022 не превышало 5 мин. Результаты расчетов свидетельствуют об эффективности разработанной процедуры расчета собственных частот и форм свободных колебаний пространственных элементов конструкций.

В заключение приведем пример решения задачи о вынужденных колебаниях кубического образца.

5.11.2. Распространение упругих волн в кубическом образце при импульсивном нагружении

Большой практический интерес представляет исследование распространения упругих волн в телах, линейные размеры которых являются величинами одного порядка [61, 73–75]. Выполним численное исследование напряженно-деформированного состояния кубического образца при следующих граничных условиях: нижнее основание образца закреплено, т.е. при $x = 0$ $U(x, y, z, t) = \{u, v, w\} = 0$, где $U(x, y, z, t)$ – вектор перемещений куба; на боковых гранях

$y = 0,5$ и $z = 0,5$ вектор поверхностных нагрузок равен нулю, а на верхней грани имеем составляющие нагрузки

$$P(x, y, z, t) = \{-1000\delta(y, z)f(t), 0, 0\},$$

где $\delta(y, z)$ – дельта-функция Дирака;

$f(t)$ – закон изменения во времени (рис. 5.19), $U|_{t=0} = \dot{U}|_{t=0} = 0$.

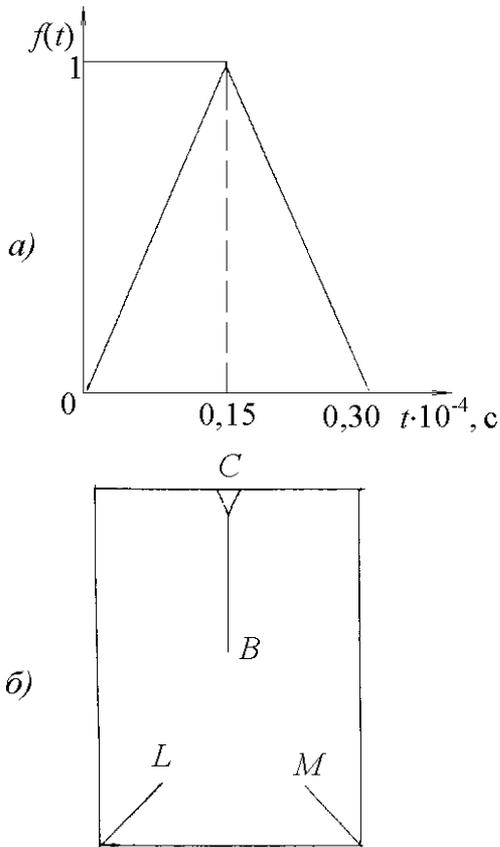


Рис. 5.19. Импульсивное нагружение кубического образца:
 а) закон изменения внешней нагрузки во времени;
 б) области разрушения образца (опыты Г.Кольского)

Схема решения задачи заключалась в следующем. Определялись собственные частоты и собственные формы колебаний куба. При этом полагалось:

$$\bar{P}(x, y, z, t) = 0,$$

$$\bar{U}(x, y, z, t) = \bar{U}_j(x, y, z) \sin \omega_j t,$$

$$\bar{U}_j(x, y, z) = \sum_{i=1}^N a_i \bar{\varphi}_i(x, y, z), \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

где $\bar{U}_j(x, y, z)$ – собственные формы колебаний куба;

ω_j – собственные частоты колебаний куба;

a_i – неопределенные коэффициенты;

$\bar{\varphi}_i(x, y, z)$ – векторные координатные функции.

Вектор перемещений образца затем представлялся в виде ряда по собственным формам колебаний

$$\bar{U}(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^k b_j(t) \bar{U}_j(x, y, z),$$

где $b_j(t)$ – функции времени.

Окончательное решение задачи выражалось через интеграл Дюгамеля в виде

$$\bar{U}(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^k \left\{ g_i \cos \omega_j t + \frac{h_i}{\omega_j} \sin \omega_j t + \frac{1}{\omega_j} \int_0^{\tau} \sin \omega_j (t - \tau) \frac{(\bar{P}(t), \bar{U}_j)_{S_2}}{(\rho \bar{U}_j, \bar{U}_j)_v} d\tau \right\} \bar{U}_j(x, y, z),$$

где g_i и h_i – константы, определяемые из начальных условий;

v – область, занимаемая телом;

s_2 – часть поверхности, на которой заданы динамические граничные условия;

ρ – плотность материала;
 $(\bar{P}(t), \bar{U}_j)_{S_2}$, $(\rho \bar{U}_j, \bar{U}_j)_V$ – поверхностные и объемные интегралы.

Путем использования степенных рядов для продольных колебаний консольного стержня по вышеуказанной схеме были определены три первые собственные частоты и три собственные формы продольных колебаний на основе полиномов пятой степени. При этом характеристики материала: модуль упругости $E = 2,04 \cdot 10^{11}$ Н/м², коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность $\rho = 7,85 \cdot 10^3$ кг/м³. Интегрирование по времени проводилось численно по методу Симпсона с шагом $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$ с.

На рис. 5.20 представлены результаты расчетов полей перемещений u и напряжений, возникающих в образце в различные моменты времени (показана 1/2 сечения образца плоскостью XOZ). На рис. 5.20 а, б, в, г, д, е, ж, з, и – распределение соответственно перемещений u и напряжений σ_x при $t = 0,58 \cdot 10^{-4}$; $0,88 \cdot 10^{-4}$; $1,18 \cdot 10^{-4}$; $1,48 \cdot 10^{-4}$; $1,78 \cdot 10^{-4}$; $2,08 \cdot 10^{-4}$; $2,38 \cdot 10^{-4}$; $2,68 \cdot 10^{-4}$; $2,98 \cdot 10^{-4}$ с; 1–7 – линии уровней перемещений $u = -0,1 \cdot 10^{-9}$; $-0,2 \cdot 10^{-9}$; $-0,3 \cdot 10^{-9}$; $-0,4 \cdot 10^{-9}$; $-0,5 \cdot 10^{-9}$; $-0,6 \cdot 10^{-9}$; $-0,7 \cdot 10^{-9}$; 1 – 4 линии уровней напряжений $\sigma_x = 50, 100, 150, 200$.

Анализ графиков рис. 5.20 показывает, что фронт волны перемещений в образце существенно неплоский и первоначально близок к сферическому. В первые моменты времени после прекращения действия силы область максимальных перемещений находится на расстоянии 0,14–0,16 длины ребра куба от его поверхности. В последующие моменты времени волна перемещений отражается от закрепленной грани (рис. 5.20, ж, з). При этом наиболее интенсивное отражение наблюдается в средней части образца (рис. 5.20, и). Траектории движения куба в плоскости XOZ представляют собой эллипсы, большие оси которых почти параллельны оси OX .

Сопоставим результаты расчета напряжений в образце с результатами экспериментальных исследований разрушений призматических образцов при взрыве точечного заряда из граней образца [83]. На рис. 5.19, б показаны полученные экспериментально характерные области разрушения, образующие в образце при взрыве за-

ряда в точке С. Основные разрушения следующие: 1) узкая область разрушения, развивающаяся по оси В образца. Интенсивность разрушения не уменьшается монотонно вдоль линии В, а проходит через максимум и затем быстро убывает; 2) разрушения, развивающиеся по плоскостям L и M . Тангенс угла, образуемого плоскостью разрушения с основанием образца равен отношению ширины основания к высоте образца.

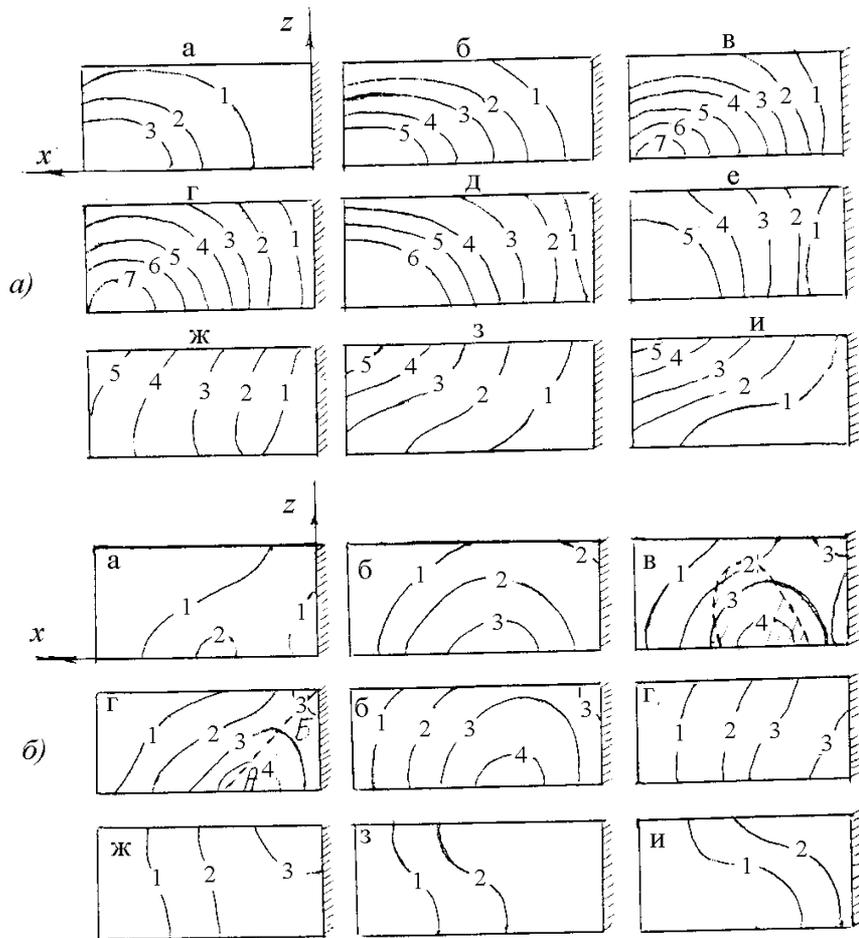


Рис. 5.20. Импульсивное нагружение кубического образца:
 I поле перемещений при импульсивном нагружении;
 II поле напряжений при импульсивном нагружении

Анализ расчетных графиков напряжений (см. рис. 5.20) показывает, что до отражения импульса от закрепленной грани максимальные напряжения сжатия σ_x возникают на оси OX . В центральной части образца (на рис. 5.20, в заштриховано) указанные напряжения сопровождаются максимальными растяжениями σ_y и σ_z . При этом на оси OX $\sigma_y = \sigma_z$, $|\max \sigma_z| = 0,25|\max \sigma_x|$. Наблюдаемые в эксперименте особенности разрушения образца по линии В объясняются значительной неравномерностью распределения напряжений по оси OX , а также неблагоприятным сочетанием максимальных сжимающих и растягивающих напряжений в средней части образца. В начальный период времени имеет место лишь количественное изменение напряжений в образце, положение зоны максимальных напряжений изменяется незначительно (рис. 5.20). При этом вторая по уровню область максимальной интенсивности напряжений непосредственно примыкает к ребру $x = 0,0; z = 0,5$, а наиболее быстрый рост всех компонентов напряжений наблюдается на плоскости, проходящей через центр образца и ребро. На рис. 5.20, г проекция этой плоскости на плоскость XOZ показана прерывистой линией АБ.

Таким образом, расчетные плоскости разрушения образуют угол 45° с основанием образца, что хорошо согласуется с данными опытов [83].

Следует отметить, что в течение всего рассматриваемого промежутка времени расчетные значения тех компонентов напряжений, которые на поверхности образца должны равняться нулю, имели величину на 1–2 порядка меньше максимальной величины напряжений. Это свидетельствует об удовлетворительном выполнении динамических граничных условий задачи, а также о достаточной степени достоверности предварительно найденных форм собственных колебаний образца.

Итак, рассмотренные примеры динамических расчетов позволяют сделать следующие выводы:

1. Разработанные на базе степенных рядов алгоритмы и программы на ЭВМ, решения вариационного уравнения Лагранжа равновесия полного объема дают возможность успешно проводить численное исследование динамики упругих тел при выполнении лишь кинематических условий.

2. Численное исследование динамики упругих тел в форме параллелепипеда на базе полиномов пятой степени уточнило результаты технической теории поперечных и продольных колебаний для длинных стержней, а для коротких стержней (тел кубообразной формы) позволило получить принципиально новые результаты, отличающиеся от технической теории как количественно, так и качественно.

3. Вычисленные на основе полиномов пятой степени собственные частоты поперечных и продольных колебаний упругих стержней оказались в основном меньше частот, вычисленных по технической теории, причем уменьшение тем значительнее, чем выше порядковый номер частоты и чем больше отношение h/l , где h – размер поперечного квадратного сечения, l – длина стержня. В частности, для стержней с $h/l = 0,5$ первая собственная частота поперечных колебаний на 15–35% меньше частоты, вычисленной по технической теории. Некоторое увеличение первой частоты для длинных стержней по сравнению с технической теорией можно объяснить более жесткими в рассмотренных примерах условиями закрепления, при которых все три компонента вектора перемещений в заделке равны нулю.

4. Исследование напряженно-деформированного состояния кубического образца под действием импульсивной нагрузки позволило изучить распространение фронта упругих перемещений и напряжений в образце и установить области возникновения наибольших напряжений. Эти области совпадают с областями разрушения, установленными в опытах [83].

5. Критерием достоверности полученных результатов динамики упругих тел являются числовые значения на свободной поверхности напряжений, которые на 1–2 порядка меньше соответствующих напряжений внутри.

5.12. Применение ортогональных рядов к решению задач теории упругости

Степенные ряды, как следует из вышесказанного, являются достаточно эффективным средством для решения краевых задач теории упругости, особенно в условиях применения ЭВМ на всех этапах составления расчетных уравнений и их решения. Мы это неоднократно подчеркивали и показали на многочисленных примерах. Однако для некоторых простых по форме тел могут быть успешно использованы

и другие классы рядов, среди которых наибольший интерес представляют ортогональные ряды, например, ряды Фурье, Бесселя и др. Рассмотрим примеры.

5.12.1. Сжатие (растяжение) упругого прямоугольника при заданных на контуре напряжениях

Эта задача как тестовая решалась нами и с помощью операторного метода, и с помощью модифицированного метода Треффца, а теперь решим ее на основе модифицированного метода Галеркина с привлечением идей аналитической механики.

Итак, решение строим в виде следующих рядов Фурье с дополнительными членами в форме полиномов Лежандра:

$$u = U_0(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{12y^2}{b^2} - 1 \right) U_2(x) + \sum_{k=1}^{\infty} U_c(x) \cos \frac{2\pi ky}{b},$$

$$v = \frac{2y}{b} V_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} V_s(x) \sin \frac{2\pi ky}{b}.$$

Применяя данные разложения к функциям $U_0(x)$, $U_c(x)$ и $V_s(x)$, зависящим от аргумента x , запишем следующие ряды с неизвестными постоянными коэффициентами:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \left[U_{S0} + \frac{1}{2} \left(\frac{12y^2}{b^2} - 1 \right) U_{S2} + \sum_{k=1}^{\infty} U_{SC}(x) \cos \frac{2\pi ky}{b} \right] \sin \frac{2\pi ix}{a} +$$

$$+ \frac{2x}{a} \left(U_{10} + \sum_{k=1}^{\infty} U_{1C}(x) \cos \frac{2\pi ky}{b} \right),$$

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \left[V_{0S} + \frac{1}{2} \left(\frac{12x^2}{a^2} - 1 \right) V_{2S} + \sum_{i=1}^{\infty} V_{CS}(x) \cos \frac{2\pi ix}{a} \right] \sin \frac{2\pi ky}{b} +$$

$$+ \frac{2y}{b} \left(V_{01} + \sum_{i=1}^{\infty} V_{C1} \cos \frac{2\pi ix}{a} \right).$$

Для определения 10-ти неизвестных постоянных коэффициентов U_{10} , U_{1C} , U_{S0} , U_{S2} , U_{SC} , V_{01} , V_{C1} , V_{0S} , V_{2S} , V_{CS} составляем четыре вариационных уравнения равновесия внутри тела на возможных перемещениях

$$\delta u_1 = \sin \frac{2\pi i x}{a}, \quad \delta u_2 = \sin \frac{2\pi i x}{a} \cos \frac{2\pi k y}{b},$$

$$\delta v_1 = \sin \frac{2\pi k y}{b}, \quad \delta v_2 = \cos \frac{2\pi i x}{a} \sin \frac{2\pi k y}{b}$$

и шесть уравнений равновесия на контуре прямоугольника:

при $x = \pm a/2$

$$\int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x \cos \frac{2\pi k y}{b} dy = 0, \quad \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{xy} \sin \frac{2\pi k y}{b} dy = 0;$$

при $y = \pm b/2$

$$\int_{-a/2}^{a/2} \tau_{xy} \sin \frac{2\pi i x}{a} dx = \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi i x}{a} dx,$$

$$\int_{-a/2}^{a/2} \sigma_y dx = \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} (Y^+ - Y^-) dx,$$

$$\int_{-a/2}^{a/2} \sigma_y \cos \frac{2\pi i x}{a} dx = \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} (Y^+ - Y^-) \cos \frac{2\pi i x}{a} dx.$$

В результате совместного решения этих уравнений получаем следующие формулы для упругих перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned}
u = & \frac{x}{8(\gamma-1)G} \int_{-a/2}^{a/2} \left[\frac{\gamma_2}{a} (Y^+ - Y^-) + \frac{\gamma}{b} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cos \pi i}{\pi i} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi i x}{a} \right] dx + \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{2\pi i x}{a} \operatorname{ch} \frac{2\pi i y}{a}}{4\pi i \operatorname{sh} \frac{\pi b i}{a}} \int_{-a/2}^{a/2} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi i x}{a} dx + \frac{\sin \frac{2\pi i x}{a}}{\gamma \operatorname{sh} \frac{\pi b i}{a}} \times \right. \\
& \times \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi i y}{a} + \frac{\pi i}{a} (\gamma-1) \left(2y \operatorname{sh} \frac{2\pi i y}{a} - b \operatorname{ch} \frac{2\pi i y}{a} \operatorname{cth} \frac{\pi b i}{a} \right) \right) \times \\
& \times \left(V_{C1} + \frac{1}{4\pi i G} \int_{-a/2}^{a/2} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi i x}{a} dx \right) - \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i \cos \pi i \cos \pi k \operatorname{sh} \frac{\pi a k}{b} \cos \frac{2\pi k y}{b}}{\gamma \pi \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi a k}{b} + \frac{2\pi a k}{b} \right) \left(\frac{b i^2}{a} + \frac{a k^2}{b} \right)^2} \times \\
& \times \left(\gamma \operatorname{sh} \frac{2\pi k x}{b} - (\gamma-1) \frac{\pi k}{b} \left(2x \operatorname{ch} \frac{2\pi k x}{b} - a \operatorname{sh} \frac{2\pi k x}{b} \operatorname{cth} \frac{\pi a k}{b} \right) \right) \times \\
& \times \left(8ikV_{C1} + \frac{\gamma b^2 i^2 + (3\gamma-2)a^2 k^2}{(\gamma-1)G\pi a^2 k} \int_{-a/2}^{a/2} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi i x}{a} dx \right) \Bigg];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v = & \frac{y}{8(\gamma-1)G} \int_{-a/2}^{a/2} \left[\frac{\gamma}{a} (Y^+ - Y^-) + \frac{\gamma_2}{b} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cos \pi i}{\pi i} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi i x}{a} \right] dx + \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \left[-\frac{\cos \frac{2\pi i x}{a} \operatorname{sh} \frac{2\pi i y}{a}}{4\pi i G \operatorname{sh} \frac{\pi b i}{a}} \int_{-a/2}^{a/2} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi i x}{a} dx + \frac{\cos \frac{2\pi i x}{a}}{\gamma \operatorname{sh} \frac{\pi b i}{a}} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\gamma ch \frac{2\pi iy}{a} - \frac{\pi i}{a} (\gamma - 1) \left(2ych \frac{2\pi iy}{a} - bsh \frac{2\pi iy}{a} cth \frac{\pi bi}{a} \right) \right) \times \\
& \times \left(V_{C1} + \frac{1}{4\pi i G} \int_{-a/2}^{a/2} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi ix}{a} dx \right) - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i \cos \pi i \cos \pi ksh \frac{\pi ak}{b} \sin \frac{2\pi ky}{b}}{\gamma \pi \left(sh \frac{2\pi ak}{b} + \frac{2\pi ak}{b} \right) \left(\frac{bi^2}{a} + \frac{ak^2}{b} \right)^2} \times \\
& \times \left(ch \frac{2\pi kx}{b} + (\gamma - 1) \frac{\pi k}{b} \left(2xsh \frac{2\pi kx}{b} - ach \frac{2\pi kx}{b} cth \frac{\pi ak}{b} \right) \right) \times \\
& \times \left[8ikV_{C1} + \frac{\gamma b^2 i^2 + (3\gamma - 2)a^2 k^2}{(\gamma - 1)G\pi a^2 k} \int_{-a/2}^{a/2} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi ix}{a} dx \right]; \\
\tau_{xy} = & \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{2\pi ix}{a} sh \frac{2\pi iy}{a}}{ash \frac{\pi bi}{a}} \int_{-a/2}^{a/2} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi ix}{a} dx + (V_{C1} + \right. \\
& + \frac{1}{4\pi i G} \int_{-a/2}^{a/2} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi ix}{a} dx) \left(2ych \frac{2\pi iy}{a} - bsh \frac{2\pi iy}{a} cth \frac{\pi bi}{a} \right) \times \\
& \times \frac{4(\gamma - 1)G\pi^2 i^2 \sin \frac{2\pi ix}{a}}{\gamma a^2 sh \frac{\pi bi}{a}} - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(\gamma - 1)G\pi i k^2 \cos \pi i \cos \pi ksh \frac{\pi ak}{b} \sin \frac{2\pi ky}{b}}{\gamma b^2 \left(sh \frac{2\pi ak}{b} + \frac{2\pi ak}{b} \right) \left(\frac{bi^2}{a} + \frac{ak^2}{b} \right)^2} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(2xch \frac{2\pi kx}{b} - ash \frac{2\pi kx}{b} cth \frac{\pi ak}{b} \right) \times \\
& \times \left[8ikV_{C1} + \frac{\gamma b^2 i^2 + (3\gamma - 2)a^2 k^2}{(\gamma - 1)G\pi a^2 k} \int_{-a/2}^{a/2} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi ix}{a} dx \right]; \\
\sigma_x = & \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{\cos \pi i}{b\pi i} + \frac{\cos \frac{2\pi ix}{a} ch \frac{2\pi iy}{a}}{ash \frac{\pi bi}{a}} \right) \int_{-a/2}^{a/2} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi ix}{a} dx + \right. \\
& + \frac{4(\gamma - 1)G\pi i \cos \frac{2\pi ix}{a}}{\gamma ash \frac{\pi bi}{a}} \left(ch \frac{2\pi iy}{a} + \frac{\pi i}{a} \left(2y sh \frac{2\pi iy}{a} - bch \frac{2\pi iy}{a} cth \frac{\pi bi}{a} \right) \right) \times \\
& \times \left(V_{C1} + \frac{1}{4\pi i G} \int_{-a/2}^{a/2} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi ix}{a} dx \right) - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(\gamma - 1)Gki \cos \pi i \cos \pi k sh \frac{\pi ak}{b} \cos \frac{2\pi ky}{b}}{\gamma b \left(sh \frac{2\pi ak}{b} + \frac{2\pi ak}{b} \right) \left(\frac{bi^2}{a} + \frac{ak^2}{b} \right)^2} \times \\
& \times \left(ch \frac{2\pi kx}{b} - \frac{\pi k}{b} \left(2x sh \frac{2\pi kx}{b} - ach \frac{2\pi kx}{b} cth \frac{\pi ak}{b} \right) \right) \times \\
& \times \left(8ikV_{C1} + \frac{\gamma b^2 i^2 + (3\gamma - 2)a^2 k^2}{(\gamma - 1)G\pi a^2 k} \int_{-a/2}^{a/2} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi ix}{a} dx \right) \Bigg]; \\
\sigma_y = & \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{2a} (Y^+ - Y^-) dx +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{\cos \frac{2\pi i x}{a} \operatorname{ch} \frac{2\pi i y}{a}}{\operatorname{ash} \frac{\pi b i}{a}} \int_{-a/2}^{a/2} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi i x}{a} dx + \right. \right. \\
& + \frac{4(\gamma-1)G\pi i \cos \frac{2\pi i x}{a}}{\gamma \operatorname{ash} \frac{\pi b i}{a}} \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi i y}{a} - \frac{\pi i}{a} \left(2y \operatorname{sh} \frac{2\pi i y}{a} - b \operatorname{ch} \frac{2\pi i y}{a} \operatorname{cth} \frac{\pi b i}{a} \right) \right) \times \\
& \times \left(V_{C1} + \frac{1}{4\pi i G} \int_{-a/2}^{a/2} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi i x}{a} dx \right) - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(\gamma-1)Gk i \cos \pi i \cos \pi k \operatorname{sh} \frac{\pi a k}{b} \cos \frac{2\pi k y}{b}}{\gamma b \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi a k}{b} + \frac{2\pi a k}{b} \right) \left(\frac{b i^2}{a} + \frac{a k^2}{b} \right)^2} \times \\
& \times \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi k x}{b} + \frac{\pi k}{b} \left(2x \operatorname{sh} \frac{2\pi k x}{b} - a \operatorname{ch} \frac{2\pi k x}{b} \operatorname{cth} \frac{\pi a k}{b} \right) \right) \times \\
& \times \left. \left(8ikV_{C1} + \frac{\gamma b^2 i^2 + (3\gamma-2)a^2 k^2}{(\gamma-1)G\pi a^2 k} \int_{-a/2}^{a/2} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi i x}{a} dx \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\sigma_x \Big|_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0, \quad \tau_{xy} \Big|_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0,$$

$$\sigma_y \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = Y^\pm, \quad \tau_{xy} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = Y_x^\pm,$$

где V_{C1} – обобщенное перемещение, которое определяется из функционального уравнения

$$\frac{2(\gamma-1)\pi i \left(sh \frac{2\pi bi}{a} + \frac{2\pi bi}{a} \right)}{\gamma \left(ch \frac{2\pi bi}{a} - 1 \right)} V_{C1}(i) - \frac{1}{2G} \int_{-a/2}^{a/2} (Y^+ - Y^-) \cos \frac{2\pi ix}{a} dx =$$

$$= \frac{32(\gamma-1)i^2 \cos \pi i}{\gamma \pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi j^2 k^3 \cos \pi j \left(ch \frac{2\pi ak}{b} - 1 \right) V_{C1}(j)}{\left(sh \frac{2\pi ak}{b} + \frac{2\pi ak}{b} \right) \left(\frac{bi^2}{a} + \frac{ak^2}{b} \right)^2 \left(\frac{bj^2}{a} + \frac{ak^2}{b} \right)^2}.$$

Проанализируем полученное решение. Во-первых, оно точно удовлетворяет уравнениям Ляме при отсутствии объемной нагрузки ($\text{div}T = 0$). Во-вторых, краевые условия выполняются следующим образом. Для каждого индекса i и k точно выполняется условие отсутствия касательных напряжений ($\tau = 0$ при $x = \pm a/2$). Условие отсутствия нормальных напряжений σ_x при $x = \pm a/2$ выполняется точно для каждого i при $k \rightarrow \infty$, т.е. за счет сходимости рядов по k . Условие нагружения касательной нагрузкой при $y = \pm b/2$ выполняется за счет сходимости ряда Фурье при любом k .

$$\tau_{xy} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi ix}{a} \int_{-a/2}^{a/2} (Y_x^+ + Y_x^-) \sin \frac{2\pi ix}{a} dx.$$

Условие нагружения нормальной нагрузкой при $y = \pm b/2$ выполняется за счет сходимости рядов по i и k , т.е. за счет решения функционального уравнения.

Исследуем более подробно полученное функциональное уравнение. Сделаем подстановки

$$D(i) = \frac{2(\gamma-1)\pi i \left(sh \frac{2\pi bi}{a} + \frac{2\pi bi}{a} \right) V_{C1}(i)}{\gamma \left(ch \frac{2\pi bi}{a} - 1 \right)},$$

$$r_{ij} = \frac{16ji^2 \cos \pi i \cos \pi j \left(ch \frac{2\pi bj}{a} - 1 \right)}{\pi^2 \left(sh \frac{2\pi bj}{a} + \frac{2\pi bj}{a} \right)} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 \left(ch \frac{2\pi ak}{b} - 1 \right)}{\left(sh \frac{2\pi ak}{b} + \frac{2\pi ak}{b} \right) \left(\frac{bi^2}{a} + \frac{ak^2}{b} \right)^2 \left(\frac{bj^2}{a} + \frac{ak^2}{b} \right)^2},$$

$$F(i) = \frac{1}{2G} \int_{-a/2}^{a/2} (Y^+ - Y^-) \cos \frac{2\pi ix}{a} dx.$$

В результате получаем функциональное уравнение в виде

$$D(i) - \sum_{j=1}^{\infty} r_{ij} D(j) = F(i).$$

Это уравнение имеет сходство с интегральным уравнением Фредгольма второго рода, только вместо оператора интегрирования имеем оператор суммирования. Решение полученного функционального уравнения можно строить аналогично тому, как строится резольвента интегрального уравнения, на основе метода последовательных приближений. Практически метод последовательных приближений осуществляется следующим образом. Строится квадратная матрица r_{ij} и матрица-столбец $F(i)$. Затем решение находим, перемножая квадратную матрицу на матрицу-столбец, результат перемножения умножаем снова на квадратную матрицу и складываем полученные результаты:

$$D(i) = \frac{F(i)}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} r_{ij}} = F(i) + \sum_{j=1}^{\infty} r_{ij} (F(j)) + \dots$$

Таблица 5.9

Результаты решений функционального уравнения
при $n = 10$ и $n = 20$

Резльтирующая матрица $D(i)$						
1,0558	0,9943	0,9919	1,0065	1,0088	0,9947	1,0007
0,9995	1,0003	0,9998				
Резльтирующая матрица $D(i)$						
0,8877	0,3742	0,1003	-0,0052	0,0403	0,0403	0,0173
-0,0005	0,0104	0,0159				
Резльтирующая матрица $D(i)$						
0,7192	0,0317	-0,1914	-0,0120	0,1341	-0,0041	-0,0902
-0,0005	0,0711	-0,0003				
Резльтирующая матрица $D(i)$						
1,0573	0,9938	0,9921	1,0064	1,0089	0,9946	1,0007
0,9995	1,0003	0,9998				
1,0002	0,9999	1,0001	0,9999	1,0001	0,9999	1,0001
1,0000	1,0000	1,0000				
Резльтирующая матрица $D(i)$						
0,8877	0,3742	0,1003	-0,0052	0,0403	0,0403	0,0173
-0,0005	0,0104	0,0159				
0,0069	-0,0002	0,0049	0,0082	0,0037	-0,0001	0,0029
0,0050	0,0023	-0,0000				
Резльтирующая матрица $D(i)$						
0,7190	-0,0317	-0,1914	-0,0120	0,1341	-0,0041	-0,0902
-0,0005	0,0711	-0,0003				
-0,0577	-0,0002	0,0491	-0,0001	-0,0424	-0,0001	0,0375
-0,0000	-0,0335	-0,0000				

Сходимость изложенного метода последовательных приближений обеспечивается, во-первых, невозрастающей функцией

$$F(i) = \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} (Y^+ - Y^-) \cos \frac{2\pi i x}{a} dx$$

и, во-вторых, тем обстоятельством, что модуль суммы $\sum_{j=1}^{\infty} r_{ij} < 1$.

Это означает, что имеем операторную бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем, меньше единицы. В качестве примера приведем результаты решения функционального уравнения при трех видах нагрузки для упругого квадрата: 1) сосредоточенной силы, 2) треугольной нагрузки, 3) ступенчатой нагрузки (рис. 5.21). Сначала строилась матрица 10×10 и вычислялись десять коэффициентов $D(i)$, затем строилась матрица 20×20 и снова вычислялись $D(i)$. Сравнение результатов обнаруживает хорошую сходимость, особенно для треугольной и ступенчатой нагрузки. Для сосредоточенной силы различие отмечается в третьем знаке (см. табл. 5.9).

По результатам решения функционального уравнения сделана проверка исходных данных, т.е. вычислены напряжения σ_y при $y = \pm a/2$. Сходимость результатов сильно зависит от "гладкости" нагрузки. Так, для треугольной нагрузки, при которой выполняется непрерывность функции и имеются лишь разрывы первого рода для производной в точках $x = 0$ и $x = 0,25$, получаем с помощью полуортogonalных в данном случае рядов следующую картину выполнения краевого условия (рис. 5.21). Как видим, сходимость при $N = 20$ во всех точках непрерывности функции и ее производной хорошая и только в точках разрыва первой производной наблюдаются всплески. Для улучшения сходимости на границе следует заранее выделить особенности нагружения, используя для этой цели полученное функциональное уравнение. Так, в данном примере о равновесии упругого квадрата формулу для напряжений σ_y можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_y = & 4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi j x}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi b j}{a}}{a \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi b j}{a} + \frac{2\pi b j}{a} \right)} \times \\
& \times \left[\operatorname{ch} \frac{2\pi j y}{a} - \frac{\pi j}{a} \left(2y \operatorname{sh} \frac{2\pi j y}{a} - b \operatorname{ch} \frac{2\pi j y}{a} \operatorname{cth} \frac{\pi b j}{a} \right) \right] [F(j) + \\
& \times \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16D(i) j^2 k^3 \cos \pi i \cos \pi j \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi b i}{a} - 1 \right) \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi a k}{b} - 1 \right)}{\pi^2 \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi b i}{a} + \frac{2\pi b i}{a} \right) \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi a k}{b} + \frac{2\pi a k}{b} \right) \left(\frac{b i^2}{a} + \frac{a k^2}{b} \right)^2 \left(\frac{b j^2}{a} + \frac{a k^2}{b} \right)^2} - \\
& - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16D(i) i k^2 \cos \pi i \cos \pi j \operatorname{sh} \frac{\pi a k}{b} \cos \frac{2\pi k y}{b} \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi b i}{a} - 1 \right)}{\pi b \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi b i}{a} + \frac{2\pi b i}{a} \right) \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi a k}{b} + \frac{2\pi a k}{b} \right) \left(\frac{b i^2}{a} + \frac{a k^2}{b} \right)^2} \times \\
& \times \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi x k}{b} + \frac{\pi k}{b} \left(2x \operatorname{sh} \frac{2\pi x k}{b} - a \operatorname{ch} \frac{2\pi x k}{b} \operatorname{cth} \frac{\pi k a}{b} \right) \right) + \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{2a} (Y^+ - Y^-) dx.
\end{aligned}$$

При $y = \pm b/2$ имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_y = & \frac{2}{a} \sum_{j=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi j x}{a} [F(j) + \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16D(i) j^2 k^3 \cos \pi i \cos \pi j \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi b i}{a} - 1 \right) \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi a k}{b} - 1 \right)}{\pi^2 \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi b i}{a} + \frac{2\pi b i}{a} \right) \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi a k}{b} + \frac{2\pi a k}{b} \right) \left(\frac{b i^2}{a} + \frac{a k^2}{b} \right)^2 \left(\frac{b j^2}{a} + \frac{a k^2}{b} \right)^2} - \\
& - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8D(i) i k^2 \cos \pi i \operatorname{sh} \frac{\pi a k}{b} \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi b i}{a} - 1 \right)}{\pi b \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi b i}{a} + \frac{2\pi b i}{a} \right) \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi a k}{b} + \frac{2\pi a k}{b} \right) \left(\frac{b i^2}{a} + \frac{a k^2}{b} \right)^2} \times
\end{aligned}$$

$$\times \left(ch \frac{2\pi kx}{b} + \frac{\pi k}{b} \left(2xsh \frac{2\pi kx}{b} - ach \frac{2\pi kx}{b} cth \frac{\pi ak}{b} \right) \right) +$$

$$+ \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{2a} (Y^+ - Y^-) dx.$$

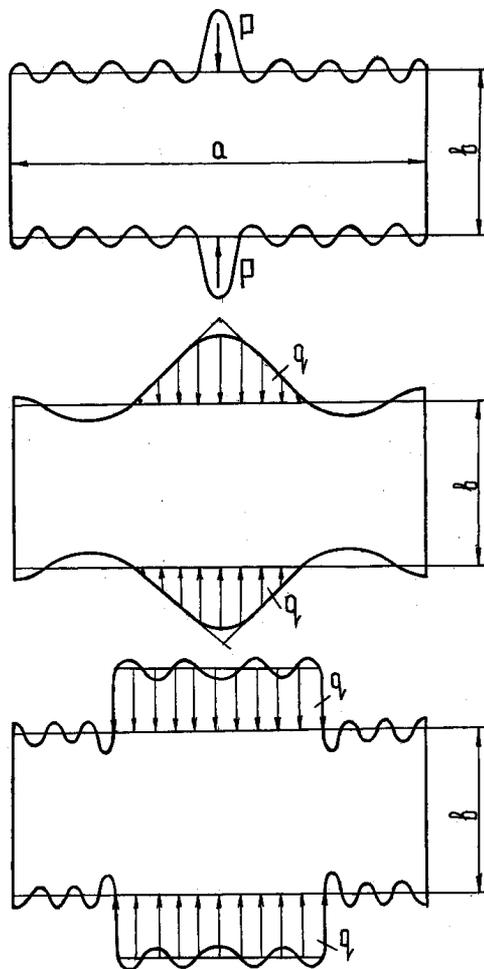


Рис. 5.21. Сжатие упругого прямоугольника сосредоточенной, треугольной и ступенчатой нагрузкой

Используя формулы суммирования

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos \pi j \cos \frac{2\pi j x}{a}}{\alpha^2 + j^2} = -\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\pi ch \frac{2\pi\alpha x}{a}}{2\alpha sh\pi\alpha},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos \pi j \cos \frac{2\pi j x}{a}}{(\alpha^2 + j^2)^2} = -\frac{1}{2\alpha^4} - \frac{\pi^2 x sh \frac{2\pi\alpha x}{a}}{2\alpha\alpha^2 sh\pi\alpha} + \frac{\pi ch \frac{2\pi\alpha x}{a}}{4\alpha^3 sh\pi\alpha} +$$

$$+ \frac{\pi^2 ch \frac{2\pi\alpha x}{a} ch\pi\alpha}{4\alpha^2 sh^2 \pi\alpha},$$

вычислим сумму, входящую в выражение для напряжения σ_y :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2 \cos \pi j \cos \frac{2\pi j x}{a}}{\left(\frac{bj^2}{a} + \frac{ak^2}{b}\right)^2} = \frac{a^2}{b^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\cos \pi j \cos \frac{2\pi j x}{a}}{\frac{a^2 k^2}{b^2} + j^2} - \frac{ak^2 \cos \pi j \cos \frac{2\pi j x}{a}}{b^2 \left(\frac{a^2 k^2}{b^2} + j^2\right)^2} \right] =$$

$$= \frac{a^2}{b^2} \left\{ -\frac{b^2}{2a^2 k^2} + \frac{\pi b ch \frac{2\pi k x}{b}}{2aksh \frac{\pi ak}{b}} - \frac{a^2 k^2}{b^2} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{b^4}{2a^4 k^4} - \frac{\pi^2 b^2 x sh \frac{2\pi k x}{b}}{2a^3 k^2 sh \frac{\pi ak}{b}} + \frac{\pi b^3 ch \frac{2\pi k x}{b}}{4a^3 k^3 sh \frac{\pi ak}{b}} + \frac{\pi^2 b^2 ch \frac{2\pi k x}{b} ch \frac{\pi ak}{b}}{4a^2 k^2 sh^2 \frac{\pi ak}{b}} \right] =$$

$$= \frac{\pi a}{4bksh \frac{\pi ak}{b}} \left[ch \frac{2\pi k x}{b} + \frac{\pi k}{b} \left(2xch \frac{2\pi k x}{b} - ach \frac{2\pi k x}{b} cth \frac{\pi ak}{b} \right) \right].$$

В результате последние два члена, представляющие собой двойные суммы ряда, взаимно уничтожаются, и мы приходим к заданной нагрузке, разложенной в ряд Фурье. Таким образом, характер сходимости полученного решения на контуре в данном случае непосредственно зависит от свойств ряда Фурье с неизбежными для него всплесками (явление Гиббса). Преобразование полученного решения на контуре с учетом функционального уравнения и последующее суммирование его членов доказывает выполнение краевых условий и дает возможность улучшить сходимость рядов во всех точках контура. Внутри области искомые перемещения и напряжения благодаря хорошей сходимости могут быть вычислены с помощью рядов без преобразований. Так, при растяжении (сжатии) упругого квадрата двумя сосредоточенными силами достаточно нескольких членов ряда, чтобы получить достоверные результаты в центре. В частности, напряжение σ_y в центре квадрата при учете одного слагаемого ряда ($n = 1$) $\sigma_y = 0,958 P/a$, при двух слагаемых ряда $\sigma_y = 0,920 P/a$, при трех слагаемых $\sigma_y = 0,967 P/a$, при четырех – $\sigma_y = 0,933 P/a$. При десяти $\sigma_y = 0,942 P/a$, дальнейшее увеличение числа слагаемых практически ничего не дает. Напомним, что результаты, полученные при решении этой задачи другими методами, таковы: $\sigma_y = 0,959 P/a$ (метод МКЭ, 1680 алгебраических уравнений [179]), $\sigma_y = 0,940 P/a$ (модифицированный вариационный метод Треффца, 50 алгебраических уравнений [98]).

5.12.2. Сжатие (растяжение) упругого конечного цилиндра

Задача равновесия упругого конечного цилиндра при несогласованных краевых условиях пока не получила замкнутого точного решения. Среди существующих методов решения наибольший интерес представляют метод однородных решений и метод суперпозиций [25, 63, 168].

Метод однородных решений заранее точно выполняет краевые условия на части поверхности цилиндра за счет нахождения корней характеристического уравнения. Выполнение краевых условий на остальной части поверхности приводит к бесконечной системе ал-

гебраических уравнений. Задача построения замкнутого решения методом однородных решений требует разложения функции в неортогональный ряд собственных функций, зависящих от комплексных корней трансцендентного характеристического уравнения [101].

Метод суперпозиции использует набор решений, соответствующих равновесию бесконечного слоя и бесконечного цилиндра, а краевые условия выполняются в интегральной форме на всей поверхности цилиндра. Вопрос о сходимости полученных рядов решается на основе исследования бесконечной системы алгебраических уравнений [63]. При этом, прежде всего, возникает вопрос о полноте метода суперпозиции, который отпадает, если строить решение задачи в виде полного стандартного ряда функций [124, 129].

Итак, как и в задаче о равновесии упругого прямоугольника, применим стандартные ортогональные ряды Фурье-Бесселя с дополнительными членами, устраняющими неполноту рядов на концах отрезка. Опуская выкладки, запишем окончательные формулы в виде рядов Фурье-Бесселя для упругих перемещений конечного цилиндра под действием нормальной сжимающей (растягивающей) нагрузки при условии отсутствия касательной нагрузки.

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{r}{2(3\gamma - 4)G} \left(\frac{\gamma}{h} \int_{-h/2}^{h/2} pdz - \frac{\gamma_2}{R^2} \int_{-h/2}^{h/2} qrdz \right) + \\
 + & \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left\{ ch \frac{\lambda_m z}{R} + \frac{(\gamma - 1)\lambda_m}{R} \left(zsh \frac{\lambda_m z}{R} - \frac{h}{2} ch \frac{\lambda_m z}{R} cth \frac{\lambda_m h}{2R} \right) \right\} \times \\
 & \times \frac{J_1 \left(\lambda_m \frac{r}{R} \right)}{sh \frac{\lambda_m h}{2R}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\gamma - 1)J_0(\lambda_m) \cos \pi n \cos \frac{2\pi n z}{h}}{\pi n \Delta_3 I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h} \right)^2} \times \\
 & \times \left[\frac{\gamma h I_1 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right)}{2(\gamma - 1)\pi n R} + \frac{I_0 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right) I_1 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right)}{I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{r}{R} I_0\left(\frac{2\pi nr}{h}\right) \Bigg] \Bigg\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma h}{2(\gamma-1)\pi n R} I_1\left(\frac{2\pi nr}{h}\right) + \frac{I_0\left(\frac{2\pi n R}{h}\right) I_1\left(\frac{2\pi nr}{h}\right)}{I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} - \right. \\
& \left. -\frac{r}{R} I_0\left(\frac{2\pi nr}{h}\right) \right] \frac{\cos \frac{2\pi n z}{h}}{\pi n \Delta_3 I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} \int_{-h/2}^{h/2} p \cos \frac{2\pi n z}{h} dz, \\
& w = \frac{z}{(3\gamma-4)G} \left(\frac{(\gamma-1)}{R^2} \int_{-h/2}^{h/2} q r dr - \frac{\gamma_2}{h} \int_{-h/2}^{h/2} p dz \right) + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left\{ \left[\gamma sh \frac{\lambda_m z}{R} - \frac{(\gamma-1)\lambda_m}{R} \left(zch \frac{\lambda_m z}{R} - \frac{h}{2} sh \frac{\lambda_m z}{R} cth \frac{\lambda_m h}{2R} \right) \right] \times \right. \\
& \times \frac{J_0\left(\lambda_m \frac{r}{R}\right)}{sh \frac{\lambda_m h}{2R}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\gamma-1)J_0(\lambda_m) \cos \pi n \sin \frac{2\pi n z}{h}}{\pi n \Delta_3 I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h} \right)^2} \times \\
& \times \left. \left[\frac{r}{R} I_1\left(\frac{2\pi nr}{h}\right) - \frac{I_0\left(\frac{2\pi n R}{h}\right) I_0\left(\frac{2\pi nr}{h}\right)}{I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} + \frac{\gamma h I_0\left(\frac{2\pi nr}{h}\right)}{2(\gamma-1)\pi n R} \right] \right\} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma h}{2(\gamma-1)\pi n R} I_0\left(\frac{2\pi nr}{h}\right) - \frac{I_0\left(\frac{2\pi n R}{h}\right) I_0\left(\frac{2\pi nr}{h}\right)}{I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} + \right. \\
& \left. + \frac{r}{R} I_1\left(\frac{2\pi nr}{h}\right) \right] \frac{\sin \frac{2\pi n z}{h}}{\pi n \Delta_3 I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} \int_{-h/2}^{h/2} p \cos \frac{2\pi n z}{h} dz.
\end{aligned}$$

В приведенных выше формулах $J_0\left(\lambda_m \frac{r}{R}\right)$, $J_1\left(\lambda_m \frac{r}{R}\right)$, $I_0\left(\frac{2\pi nr}{h}\right)$, $I_1\left(\frac{2\pi nr}{h}\right)$ – функции Бесселя, λ_m – корни уравнения $J_1(\lambda_m) = 0$, h , R – высота и радиус цилиндра, q , p – поверхностная нагрузка на торцах и боковой поверхности цилиндра.

$$\Delta_3 = \frac{I_0^2\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)}{I_1^2\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)} - \frac{\gamma h^2}{4(\gamma-1)\pi^2 n^2 R^2} - 1.$$

Постоянные неизвестные коэффициенты A_m определяются из функционального уравнения, представляющего собой условие равновесия на торцах цилиндра:

$$\int_0^R \sigma_z r J_0\left(\lambda_m \frac{r}{R}\right) dr = \int_0^R q r J_0\left(\lambda_m \frac{r}{R}\right) dr,$$

$$A_m = \frac{\left(ch \frac{\lambda_m h}{R} - 1\right) C_m}{(\gamma-1) G R \lambda_m J_0^2(\lambda_m) \left(sh \frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R}\right)},$$

$$C_m - \sum_{k=1}^{\infty} r_{km} C_k = f(m),$$

$$r_{km} = \frac{8h J_0(\lambda_m) \left(ch \frac{\lambda_m h}{R} - 1\right)}{R \lambda_k J_0(\lambda_k) \left(sh \frac{\lambda_k h}{R} + \frac{\lambda_k h}{R}\right)} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 \Delta_3 \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h} \right)^2 \left(\frac{\lambda_k h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_k h} \right)^2},$$

$$f(m) = \int_0^R q r J_0 \left(\lambda_m \frac{r}{R} \right) dr - h J_0(\lambda_m) \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{\pi^2 n^2 \Delta_3 \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h} \right)^2} \int_{-h/2}^{h/2} p \cos \frac{2\pi n z}{h} dz.$$

Анализ формул для напряжений, полученных на основе закона Гука, показывает, что касательные напряжения τ_{rz} равны нулю на всей поверхности цилиндра благодаря множителям $\sin 2\pi n z/h$ и $J_1\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right)$, нормальные напряжения σ_r при $r = R$ равны заданным p при $n \rightarrow \infty$, т.е. $\lim \sigma_r = p$. Условие нагружения на торцах, как уже было сказано ранее, выполняется за счет решения функционального уравнения, и $\lim \sigma_z = q$.

В качестве примера определим напряжение σ_z в центре цилиндра при сжатии его двумя сосредоточенными силами $Q/2$, приложенными к торцам цилиндра вдоль его оси:

$$\sigma_z|_{r=0, z=0} = \frac{Q}{2\pi R^2} + \frac{Q}{2\pi R^2} \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left\{ \frac{sh \frac{\lambda_m h}{2R} + \frac{\lambda_m h}{2R} ch \frac{\lambda_m h}{2R}}{\left(sh \frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R} \right) J_0^2(\lambda_m)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \cos \pi n sh^2 \frac{\lambda_m h}{2R} \left(h I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right) - \pi n R I_0 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right) \right)}{\pi n \Delta_3 \lambda_m h I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right) J_0(\lambda_m) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h} \right)^2 \left(sh \frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R} \right)} \right\},$$

где C_m определяются из функционального уравнения, которое в данном случае записывается в виде

$$C_m - \sum_{k=1}^{\infty} r_{km} C_k = 1.$$

Решение функционального уравнения осуществляем методом последовательных приближений. Для вычисления напряжения σ_z в центре цилиндра достаточно несколько коэффициентов C_m .

Исследование напряжений σ_z в центре цилиндра для различных отношений h/R показывает, что при $h/R = 1$ $\sigma_z = 2,64Q/\pi R^2$, при $h/R = 2$ $\sigma_z = 0,9464Q/\pi R^2$, при $h/R = 4$ $\sigma_z = 0,50264Q/\pi R^2$.

Таким образом, по сравнению с напряжениями, вычисляемыми по элементарной теории сопротивления материалов, эти напряжения больше приблизительно в 5 раз для цилиндра, у которого площадь торцев равна боковой поверхности ($h = R$); больше в 2 раза для кубообразного цилиндра ($h = 2R$) и почти не отличаются от напряжений для короткого цилиндра, высота которого равна двум диаметрам ($h = 4R$).

5.12.3. Равновесие цилиндра под действием боковой опоясывающей нагрузки

Эта задача (рис. 5.22) решалась методом однородных решений, причем точно выполнялись краевые условия на цилиндрической поверхности и приближенно на торцах [168], методом суперпозиции [25] и др. Замкнутого решения этой задачи, как и других задач для конечного упругого цилиндра, за исключением некоторых тривиальных случаев, не существует [145].

Для решения поставленной задачи можно воспользоваться формулами, полученными в задаче растяжения (сжатия) цилиндра осевой нагрузкой, полагая $q = 0$, а p равно заданному закону распределения нормальной нагрузки. Однако полученное при этом функциональное уравнение, выражающее собой условие равновесия на торцах цилиндра, содержит нормальную нагрузку на боковой цилиндрической поверхности под знаком бесконечной суммы, что вызывает дополнительные трудности при численной реализации. По-

этому целесообразно получить функциональное уравнение, выражающее собой равновесие на цилиндрической поверхности. Для этой цели изменим порядок выполнения краевых условий. В задаче сжатия (растяжения) цилиндра осевой нагрузкой мы сначала выполнили условие равновесия на боковой цилиндрической поверхности, а затем на торцах, теперь в задаче о равновесии цилиндра под действием боковой опоясывающей нагрузки сначала выполним условие отсутствия нагрузки на торцах, а затем условие нагружения на цилиндрической поверхности.

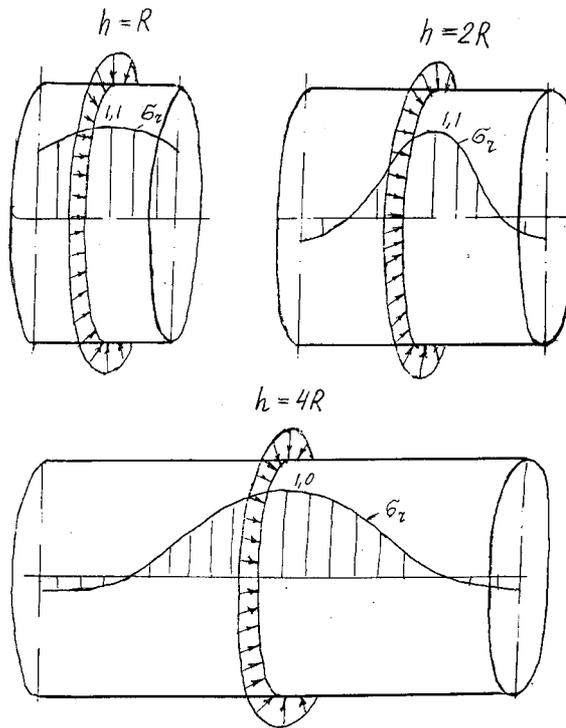


Рис. 5.22. Графики изменения радиальных напряжений для конечного цилиндра при действии опоясывающей нагрузки

Таким образом мы приходим к выводу, что для получения более простого функционального уравнения сначала следует выполнить однородные (нулевые) краевые условия, затем – неоднородные (ненулевые) условия.

В результате вышесказанного имеем следующие формулы для компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r = & \frac{2G}{h} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left\{ \frac{\cos \frac{2\pi n z}{h}}{\Delta_3 I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} \left[I_0 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) \frac{I_0 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)}{I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} - \right. \right. \\
 & - \frac{r}{R} I_1 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) + \frac{h}{2\pi n R} I_0 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) - \\
 & \left. \left. - \frac{h}{2\pi n r} I_1 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) \frac{I_0 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)}{I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} - \frac{\gamma h^2 I_1 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right)}{4(\gamma - 1)\pi^2 n^2 R r} \right] - \frac{2h^2 \cos \pi n}{\pi^2 n^2 R^2 \Delta_3} \times \right. \\
 & \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{sh \frac{\lambda_m h}{2R}}{J_0(\lambda_m) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h} \right)^2 \left(sh \frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R} \right)} \times \\
 & \times \left[\left(J_0 \left(\frac{\lambda_m r}{R} \right) - \frac{R J_1 \left(\frac{\lambda_m r}{R} \right)}{(\gamma - 1)\lambda_m r} \right) ch \frac{\lambda_m z}{R} + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\lambda_m}{R} J_0 \left(\frac{\lambda_m r}{R} \right) - \frac{1}{r} J_1 \left(\frac{\lambda_m r}{R} \right) \right) \left(z sh \frac{\lambda_m z}{R} - \frac{h}{2} ch \frac{\lambda_m z}{R} cth \frac{\lambda_m h}{2R} \right) \right] \left. \right\} + \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} p dz, \\
 \sigma_z = & \frac{2G}{R} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left\{ \frac{\cos \frac{2\pi n z}{h}}{\pi n \Delta_3 I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} \left[I_0 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) + \frac{\pi n r}{h} I_1 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi n R}{h} I_0\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) \frac{I_0\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)}{I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} \left] - \frac{2h \cos \pi n}{\pi^2 n^2 R \Delta_3} \times \right. \\
& \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{sh \frac{\lambda_m h}{2R} J_0\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right)}{J_0(\lambda_m) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h}\right)^2 \left(sh \frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R}\right)} \times \\
& \times \left(ch \frac{\lambda_m z}{R} + \frac{\lambda_m}{R} \left(\frac{h}{2} ch \frac{\lambda_m z}{R} cth \frac{\lambda_m h}{2R} - zsh \frac{\lambda_m z}{R} \right) \right) \left. \right\}, \\
\tau_{rz} = & \frac{2G}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\pi^2 n^2 \Delta_3} \left\{ \frac{\pi^2 n^2 \sin \frac{2\pi n z}{h}}{I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} \times \right. \\
& \times \left[\frac{r}{R} I_0\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) - I_1\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) \frac{I_0\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)}{I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} \right] - \frac{2h \cos \pi n}{R^2} \times \\
& \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m sh \frac{\lambda_m h}{2R} J_1\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right) \left(zch \frac{\lambda_m z}{R} - \frac{h}{2} sh \frac{\lambda_m z}{R} cth \frac{\lambda_m h}{2R} \right)}{J_0(\lambda_m) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h}\right)^2 \left(sh \frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R}\right)} \left. \right\}, \\
\sigma_{\theta} = & \frac{G}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\pi^2 n^2 \Delta_3} \left\{ \frac{\cos \frac{2\pi n z}{h}}{I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} \left[\frac{\gamma h}{2(\gamma-1)r} I_1\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi n}{\gamma-1} I_0\left(\frac{2\pi nr}{h}\right) + \frac{\pi n R}{h} I_1\left(\frac{2\pi nr}{h}\right) \frac{I_0\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)}{I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} - \frac{4h \cos \pi n}{R} \times \\
& \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{sh \frac{\lambda_m h}{R}}{\left(sh \frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R} \right) J_0(\lambda_m) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h} \right)^2} \times \\
& \times \left[\left(\frac{\gamma_2}{\gamma-1} J_0\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right) + \frac{R J_1\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right)}{(\gamma-1)\lambda_m r} \right) ch \frac{\lambda_m z}{R} + \frac{J_1\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right)}{r} \right] \times \\
& \times \left(z sh \frac{\lambda_m z}{R} - \frac{h}{2} ch \frac{\lambda_m z}{R} cth \frac{\lambda_m h}{2R} \right) \Bigg] + \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} p dz,
\end{aligned}$$

Коэффициенты D_n определяются из функционального уравнения

$$D_n - \frac{8h \cos \pi n}{R \Delta_3} \sum_{k=1}^{\infty} s_{kn} D_k = F(n),$$

где

$$s_{kn} = \frac{\cos \pi k}{\pi^2 k^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ch \frac{\lambda_m h}{R} - 1}{\lambda_m \left(sh \frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R} \right) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h} \right)^2 \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi k R} + \frac{2\pi k R}{\lambda_m h} \right)^2},$$

$$F(n) = \int_{-h/2}^{h/2} p \cos \frac{2\pi n z}{h} dz.$$

Для нахождения неизвестных постоянных D_n был использован метод последовательных приближений, для чего составлены соответствующие программы на ЭВМ, а в качестве примера определены радиальные напряжения на оси цилиндра (см. рис. 5.22).

Как видим, вид функционального уравнения зависит от того, в какой последовательности выполняются краевые условия. Отметим, что метод последовательных приближений, применяемый для решения полученных в данных примерах функциональных уравнений, сходится при любых соотношениях между размерами цилиндра или прямоугольника. При этом слагаемые, содержащие бесконечные суммы, обращаются в нуль при стремлении к бесконечности одного из размеров цилиндра или прямоугольника.

Таким образом, применение ортогональных рядов к задачам о равновесии упругого прямоугольника или цилиндра приводит к функциональным уравнениям, численная реализация которых не встречает трудностей. Решение получаем точное, так как строго выполняются уравнения Ламе и строго заданные краевые условия. Выполнение краевых условий легко проверяется непосредственно с помощью функционального уравнения и соответствующих формул суммирования. Важно отметить, что в результате преобразований исходных стандартных ортогональных рядов с дополнительными членами при решении краевых задач получаются ряды, которые содержат как ортогональные гармонические функции, так и неортогональные бигармонические функции, причем окончательные ряды подтверждают идею Ламе о суперпозиции решений. Например, решение задачи о равновесии прямоугольника складывается из решений о равновесии двух взаимно перпендикулярных бесконечных полос, а решение для конечного цилиндра складывается из решения для бесконечного слоя и бесконечного цилиндра. Однако применение стандартных полных ортогональных рядов с дополнительными членами решает одновременно задачу о полноте решений, в то время как метод суперпозиции требует обоснования полноты.

В заключение с помощью полученных формул для напряжений в цилиндре исследуем напряженное состояние упругого конечного цилиндра, вращающегося вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью.

5.12.4. Исследование напряженного состояния упругого конечного цилиндра, вращающегося вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью

Первая попытка решения данной задачи предпринималась еще в 1889 г. математиком К. Кри (по имени которого она и получила название "задача Кри" [194]). Решение было получено при условии равенства нулю лишь главного вектора напряжений σ_z на торцах

цилиндра, т.е. при $z = \pm h/2$ $\int_0^R r\sigma_z dr = 0$. Условия отсутствия касательных τ_{rz} и нормальных напряжений σ_r на поверхности цилиндра были выполнены точно. Поиск более строгого решения задачи приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений [63]. Построение замкнутого решения на основе операторного метода разложения функции в неортогональный ряд встречает трудности при выяснении характера сходимости неортогональных рядов на границе. В этом отношении приведение задачи к функциональным уравнениям является предпочтительным, т.к. легко проверяется характер выполнения краевых условий.

Итак, для решения задачи Кри нам понадобится только определить частные решения уравнений Ламе при наличии инерционной нагрузки. Эти частные решения Ламе при условии отсутствия напряжений σ_z и τ_{rz} записываются в виде

$$\tau_{rz}^* = \sigma_z^* = 0, \quad \sigma_\theta^* = \sigma_r^* + \frac{\gamma\rho\omega^2 r^2}{8(\gamma-1)},$$

$$\sigma_r^* = \frac{\rho\omega^2}{48\gamma(\gamma-1)} \left[\gamma_2(3\gamma-4)(h^2 - 12z^2) + 3\gamma(7\gamma-8)(R^2 - r^2) \right],$$

где ρ – плотность материала;

ω – угловая скорость.

Ввиду отсутствия напряжений на торцах $z = \pm h/2$ $\tau_{zr}^* = \sigma_z^* = 0$, запишем функциональное уравнение из условия равновесия на цилиндрической поверхности

$$D_n - \frac{8h \cos \pi n}{R \Delta_3} \sum_{k=1}^{\infty} S_{kn} D_k = F(n),$$

где

$$F(n) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r^* \cos \frac{2\pi n z}{h} dz = \frac{\gamma_2 (3\gamma - 4) h^3 \rho \omega^2 \cos \pi n}{8\gamma (\gamma - 1) G \pi^2 n^2}.$$

Решение функционального уравнения осуществлено по методу последовательных приближений, для чего использованы 20 корней уравнения $J_1(\lambda) = 0$, вычислены 20 коэффициентов D_n с помощью матрицы S_{kn} 20 x 20 для цилиндра с соотношениями $h/R = 1$, $h/R = 2$, $h/R = 4$.

Расчет напряжений выполнялся для цилиндра $h = R$, у которого площадь торцов равна площади боковой поверхности цилиндра. Если при вычислении напряжений в центре цилиндра достаточно нескольких коэффициентов D_n , то на поверхности обнаруживается медленная сходимость рядов. Вычисленные значения напряжений σ_z при $z = 0$ позволили построить график σ_z в зависимости от координаты r (рис. 5.23).

$$\sigma_z|_{z=0} = \frac{2G}{R} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left\{ \frac{1}{\pi n \Delta_3 I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} \left[I_0\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) + \frac{\pi n r}{h} I_1\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\pi n R}{h} I_0\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) \frac{I_0\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)}{I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} - \frac{h \cos \pi n}{\pi^2 n^2 \Delta_3 R} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{sh \frac{\lambda_m h}{R} J_0\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right) \left(2 + \frac{\lambda_m h}{R} \operatorname{cth} \frac{\lambda_m h}{2R}\right)}{\left(sh \frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R}\right) J_0(\lambda_m) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h}\right)^2} \right] \right\}.$$

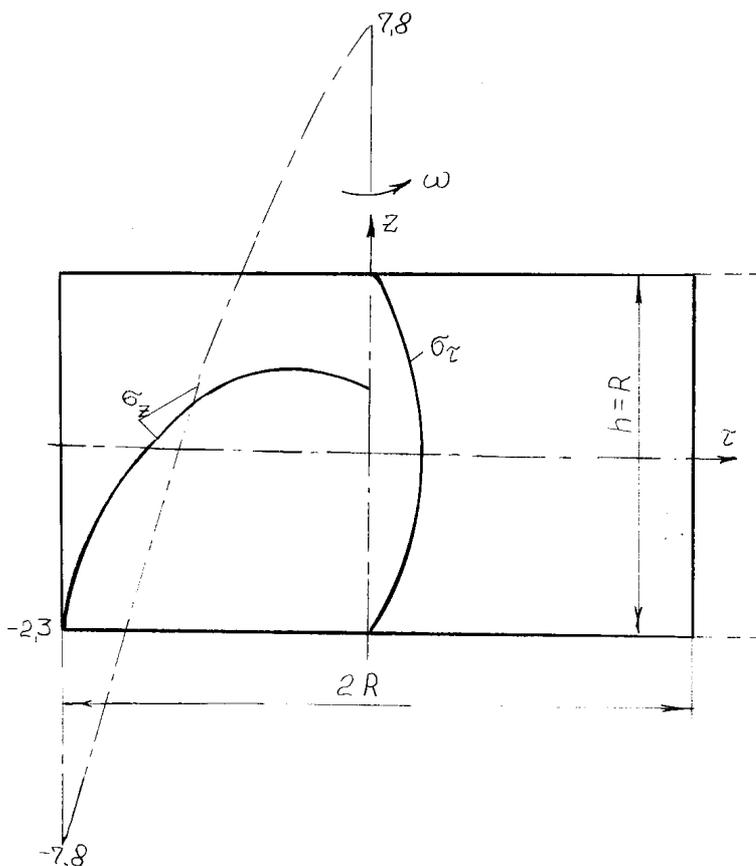


Рис. 5.23. Графики изменения напряжения σ_z в цилиндре, вращающемся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω , сплошные линии – по результатам точного решения, пунктирные – по результатам приближенного решения Кри

Сравнение графика (см. рис. 5.23) с графиком σ_z по результатам решения Кри показывает несостоятельность принципа Сен-Венана для коротких цилиндров. Отличие существенное. Чем больше высота цилиндра, тем меньше отличие. Покажем, что только лишь при $h \rightarrow \infty$ из полученного точного решения получается решение Кри. Для этой цели модифицированные функции Бесселя представляем для больших h в виде

$$I_0\left(\frac{2\pi nR}{h}\right) = 1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2}, \quad I_1\left(\frac{2\pi nR}{h}\right) = \frac{\pi nR}{h} \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{2h^2}\right).$$

Коэффициенты D_n для больших h равны

$$D_n = \frac{\gamma_2(3\gamma - 4)h^3 \rho \omega^2 \cos \pi n}{8\gamma(\gamma - 1)G\pi^2 n^2}.$$

Вычисляем предел

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} \sigma_z = & \frac{2G}{R} \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left\{ \frac{\cos \frac{2\pi n z}{h}}{\pi n \Delta_3 I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} \left[I_0\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) + \frac{\pi n r}{h} I_1\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\pi n R}{h} I_0\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) \frac{I_0\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)}{I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} - \frac{2h \cos \pi n}{\pi^2 n^2 \Delta_3 R} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{sh \frac{\lambda_m h}{R} J_0\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right) \left(ch \frac{\lambda_m z}{R} + \frac{\lambda_m}{R} \left(\frac{h}{2} ch \frac{\lambda_m z}{R} cth \frac{\lambda_m h}{2R} - z sh \frac{\lambda_m z}{R} \right) \right)}{\left(sh \frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R} \right) J_0(\lambda_m) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h} \right)^2} \right\} = \\ & = \frac{\gamma_2(3\gamma - 4)\rho \omega^2}{4\gamma(\gamma - 1)\pi^3} \times \\ & \quad h^2 \pi n \cos \frac{2\pi n z}{h} \cos \pi n \\ & \quad \times \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \left[\left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2} \right)^2 - \left(\frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2} + \frac{\gamma}{4(\gamma - 1)} \right) \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{2h^2} \right)^2 \right]} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(1 + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{h^2} \right) \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{2h^2} \right) - \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{h^2} \right) \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2} \right) + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{h^2} \times \right. \\
& \quad \left. \times \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{2h^2} \right) \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{2h^2} \right) \right] = \frac{\gamma_2 (3\gamma - 4) \rho \omega^2}{4\gamma(\gamma - 1)} \times \\
& \times \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4h^2 \cos \frac{2\pi n z}{h} \cos \pi n (\gamma - 1)}{\pi^2 n^2 (3\gamma - 4) \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2} \right)} \left[1 + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{h^2} + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{2h^2} - \frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{h^2} - 1 - \frac{\pi^2 n^2 r^2}{h^2} \right] = \frac{\gamma_2 \rho \omega^2}{4\gamma} \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cos \frac{2\pi n z}{h} \times \\
& \quad \times \cos \pi n (2r^2 - R^2) = -\frac{\gamma_2 \rho \omega^2}{4\gamma} (2r^2 - R^2) = -\frac{\nu \rho \omega^2 (2r^2 - R^2)}{4(1 - \nu)},
\end{aligned}$$

что совпадает с решением Кри.

При суммировании использована формула $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n z}{h} \cos \pi n = -\frac{1}{2}$,

которая получается из формулы $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} \cos \frac{2\pi n z}{h} \cos \pi n = \frac{1}{12} \left(\frac{12z^2}{h^2} - 1 \right)$

формальным дифференцированием.

Напряжение σ_z при $z = \pm h/2$ равно

$$\begin{aligned}
\sigma_z = \frac{2Gh}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n \cos \pi n}{\pi^2 n^2 \Delta_3} & \left\{ \frac{\pi^2 n^2 R}{h I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} \left[\frac{1}{\pi n} I_0 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) + \frac{r}{h} I_1 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{R}{h} \frac{I_0 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)}{I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} I_0 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) \right] - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\frac{\lambda_m r}{R} \right)}{J_0(\lambda_m) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h} \right)^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Если попытаться вычислить напряжение σ_z с помощью этой формулы, то для достижения нуля нужно взять очень большое число членов ряда. Дело в том, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right)}{J_0(\lambda_m) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h}\right)^2} = \frac{\pi^2 n^2 R}{h I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} \times$$

$$\times \left[\frac{I_0\left(\frac{2\pi n r}{h}\right)}{\pi n} - \frac{R}{h} \frac{I_0\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)}{I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} I_0\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) + \frac{\pi n r}{h} I_1\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) \right].$$

представляющий собой разложение функции, стоящей справа, в ряд Бесселя по функциям $J_0\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right)$ при условии $J_1(\lambda_m) = 0$, сходится очень медленно. Так, при $n = 1$, $R/h = 1$, $r = 0$ эта сумма равна $-0,09582524$, а двадцать слагаемых дают лишь $-0,05147177$, причем первые два слагаемых дают положительный всплеск, равный $0,3323744$, а все остальные пары дают отрицательные значения. В результате через двадцать слагаемых имеем $-0,05147177$.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{J_0(\lambda_m) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h}\right)^2} = -0,49060802 + 0,82298246 -$$

$$- 0,80046349 + 0,68158448 - 0,56446042 + 0,46869707 - 0,39358068 +$$

$$+ 0,33273129 - 0,28850360 + 0,25143847 - 0,22140529 + 0,19671534 -$$

$$- 0,17618779 + 0,15892223 - 0,14425428 + 0,13166770 - 0,12078203 +$$

$$+ 0,11131266 - 0,10292753 + 0,09564966 = 0,33237444 - 0,11887901 -$$

$$- 0,09576335 - 0,06084939 - 0,03706513 - 0,02468995 - 0,01726556 -$$

$$- 0,01258658 - 0,00946937 - 0,00727787 = -0,05147177.$$

Поэтому при вычислении напряжений σ_z на торцах $z = \pm h/2$ цилиндра не имеет смысла использовать полученный ряд, а следует его просуммировать, применив условие равновесия на торцах

$$\int_0^R \sigma_z r J_0\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right) dr = 0,$$

из которого и следует вышеуказанная формула суммирования.

Используя эту формулу суммирования при вычислении напряжений σ_r и σ_θ на торцах цилиндра, можно значительно улучшить сходимость рядов за счет выделения медленно сходящейся части ряда.

Аналогично улучшается сходимость рядов при вычислении напряжений на цилиндрической поверхности за счет применения функционального уравнения, т.е. условия равновесия на цилиндрической поверхности. Покажем с помощью функционального уравнения строгое выполнение условия отсутствия напряжений на цилиндрической поверхности.

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{r=R} = & \frac{2G}{h} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left\{ \cos \frac{2\pi n z}{h} - \frac{2h^2 \cos \pi n}{\pi^2 n^2 R^2 \Delta_3} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ch \frac{\lambda_m z}{R} + \frac{\lambda_m}{R} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(zsh \frac{\lambda_m z}{R} - \frac{h}{2} ch \frac{\lambda_m z}{R} - cth \frac{\lambda_m h}{2R} \right) \right] \frac{sh \frac{\lambda_m h}{2R}}{\left(sh \frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R} \right) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi k R} + \frac{2\pi k R}{\lambda_m h} \right)^2} \right\} + \\ & + \frac{\gamma_2 (3\gamma - 4) (h^2 - 12z^2) \rho \omega^2}{48\gamma (\gamma - 1)}. \end{aligned}$$

Вычисление напряжений $\sigma_r|_{r=R}$ по приведенной формуле обнаруживает очень медленную сходимость рядов. Произведем преобразование выражения для $\sigma_r|_{r=R}$ следующим образом:

$$\sigma_r|_{r=R} = \frac{2G}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(ch \frac{\lambda_m h}{R} - 1 \right) \cos \pi k D_k}{\pi^2 k^2 \Delta_3 \left(sh \frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R} \right) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi k R} + \frac{2\pi k R}{\lambda_m h} \right)^2} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8h \cos \pi n \cos \frac{2\pi n z}{h}}{\lambda_m R \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h} \right)^2} - \frac{h^2}{R^2 sh \frac{\lambda_m h}{2R}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[ch \frac{\lambda_m z}{R} + \frac{\lambda_m}{R} \left(z sh \frac{\lambda_m z}{R} - \frac{h}{2} ch \frac{\lambda_m z}{R} cth \frac{\lambda_m h}{2R} \right) \right] \right\}.$$

Теперь видим, что суммирование по "n" обращает $\sigma_r|_{r=R}$ в нуль при любом z , т.к. фигурная скобка представляет собой разложение функции $ch \frac{\lambda_m z}{R} + \frac{\lambda_m}{R} \left(z sh \frac{\lambda_m z}{R} - \frac{h}{2} ch \frac{\lambda_m z}{R} cth \frac{\lambda_m h}{2R} \right)$ в ряд Фурье.

При вычислении напряжений σ_r и σ_θ на цилиндрической поверхности $r = R$ необходимо также использовать функциональное уравнение в целях улучшения сходимости рядов. Практически это осуществляется в результате вычитания ряда для напряжений σ_θ и σ_z и ряда для напряжений σ_r . Так, при вычислении напряжений σ_z на цилиндрической поверхности $r = R$ достаточно использовать ряд $\sigma_z|_{r=R} = |\sigma_z - \sigma_r|_{r=R}$, который быстро сходится и при четырех коэффициентах D_n дает удовлетворительные результаты.

При вычислении напряжений σ_θ удобно использовать ряд $\sigma_\theta|_{r=R} = |\sigma_\theta - \sigma_r/2|_{r=R}$, который быстро сходится и уже при шести коэффициентах D_n дает достоверные результаты. Улучшение сходимости достигается за счет уменьшения влияния медленно сходящихся слагаемых ряда при вычитании рядов.

Наибольший интерес представляет вычисление напряжений в точке $r = R, z = \pm h/2$, т.е. в точке резкого изменения геометрической формы тела. Как видим, напряжения $\sigma_z, \sigma_r, \tau_{rz}$ в этой точке равны нулю, а напряжение σ_θ достигает конечного значения

$$\sigma_\theta \Big|_{z=\frac{h}{2}, r=R} = 17,17 \frac{\gamma(3\gamma-4)h^3 \rho \omega^2}{8\gamma(\gamma-1)\pi^2}.$$

Поэтому при вычислении напряжений в точках резкого изменения геометрической формы в обязательном порядке необходимо выделять медленно сходящиеся ряды и суммировать их, прежде чем делать окончательные выводы. Итак, в точке изменения геометрической формы в данном случае никакой особенности не существует. Это удалось выяснить благодаря преобразованию рядов на основе функционального уравнения и формул суммирования. Непосредственное вычисление напряжений в точке изменения геометрической формы по полученным формулам вследствие неизбежных явлений типа явления Гиббса и неполноты рядов на концах отрезка без улучшения сходимости рядов часто приводит к неверному выводу о наличии особенности.

Для длинных цилиндров ($h \gg R$) оказываются вполне пригодными для вычисления напряжений $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta$ формулы Кри. Ранее это было показано при вычислении напряжений σ_z . Теперь докажем это утверждение и для напряжений σ_r и σ_θ .

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sigma_r = 2G \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left\{ \frac{\cos \frac{2\pi n z}{h}}{h \Delta_3 I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} \left[I_0 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) \frac{I_0 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)}{I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{r}{R} I_1 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) + \frac{h}{2\pi n R} I_0 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. - \frac{\gamma h^2 I_1\left(\frac{2\pi nr}{h}\right) - h I_1\left(\frac{2\pi nr}{h}\right) I_0\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)}{4(\gamma-1)\pi^2 n^2 R r} - \frac{2\pi nr I_1\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)}{2\pi nr I_1\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)} \right] - \frac{2h^2}{\pi^2 n^2 R^2 \Delta_3} \times \\
& \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{sh \frac{\lambda_m h}{2R}}{J_0(\lambda_m) \left(sh \frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R} \right) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi nR} + \frac{2\pi nR}{\lambda_m h} \right)^2} \times \\
& \times \left\{ \left[J_0\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right) - \frac{R}{\lambda_m r} J_1\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right) \right] ch \frac{\lambda_m z}{R} + \left(\frac{\lambda_m}{R} J_0\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{r} J_1\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right) \right) \left(zsh \frac{\lambda_m z}{R} - \frac{h}{2} ch \frac{\lambda_m z}{R} cth \frac{\lambda_m h}{2R} \right) \right\} + \frac{\rho\omega^2}{48\gamma(\gamma-1)} \times \\
& \times \lim_{h \rightarrow \infty} \left[\gamma_2(3\gamma-4)(h^2 - 12z^2) + 3\gamma(7\gamma-8)(R^2 - r^2) \right] = \frac{\gamma_2(3\gamma-4)\rho\omega^2}{4\gamma(\gamma-1)} \times \\
& \times \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^2 \cos \frac{2\pi nz}{h} \cos \pi n}{\pi^2 n^2 \left[\left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2} \right)^2 - \left(\frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2} + \frac{\gamma}{4\gamma-4} \right) \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{2h^2} \right)^2 \right]} \times \\
& \times \left\{ \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2} \right) \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{h^2} \right) - \frac{\pi^2 n^2 r^2}{h^2} \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{2h^2} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{2h^2} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2} \right) \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{h^2} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2} \right) \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{2h^2} \right) - \frac{\gamma}{4\gamma-4} \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{2h^2} \right) \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{2h^2} \right) \right\} + \\
& + \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\rho\omega^2}{48\gamma(\gamma-1)} \left[\gamma_2(3\gamma-4)(h^2 - 12z^2) + 3\gamma(7\gamma-8)(R^2 - r^2) \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma_2(3\gamma-4)\rho\omega^2}{4\gamma(\gamma-1)} \lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\gamma-1)h^2 \cos \frac{2\pi n z}{h} \cos \pi n}{(3\gamma-4)\pi^2 n^2 \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2}\right)} \times \right. \\
&\times \left[1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2} + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{h^2} - \frac{\gamma}{4\gamma-4} \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{2h^2} + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{2h^2} \right) \right] + \\
&\quad \left. + \frac{1}{12} \left[h^2 - 12z^2 + \frac{3\gamma(7\gamma-8)(R^2 - r^2)}{\gamma_2(3\gamma-4)} \right] \right\} = \\
&= \frac{\gamma_2\rho\omega^2}{\gamma} \left\{ \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^2 \cos \frac{2\pi n z}{h} \cos \pi n}{\pi^2 n^2 \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2}\right)} \left[\frac{3\gamma-4}{4\gamma-4} \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\pi^2 n^2}{h^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{8\gamma-8} \right) (r^2 - R^2) \right] + \frac{1}{48(\gamma-1)} \left[(3\gamma-4)(h^2 - 12z^2) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3\gamma}{\gamma_2} (7\gamma-8)(R^2 - r^2) \right] \right\} = \frac{\gamma_2\rho\omega^2}{4\gamma(\gamma-1)} \times \\
&\times \left[(3\gamma-4) \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^2 \cos \frac{2\pi n z}{h} \cos \pi n}{\pi^2 n^2} + \frac{\gamma_2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n z}{h} \times \right. \\
&\times \left. \cos \pi n (r^2 - R^2) + \frac{(3\gamma-4)}{12} \lim_{h \rightarrow \infty} (h^2 - 12z^2) + \frac{\gamma}{4\gamma_2} (7\gamma-8)(R^2 - r^2) \right] = \\
&= \frac{\gamma_2\rho\omega^2(3\gamma-4)}{48\gamma(\gamma-1)} \lim_{n \rightarrow \infty} (12z^2 - h^2) - \frac{\gamma_2^2\rho\omega^2}{16\gamma(\gamma-1)} (r^2 - R^2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma_2 \rho \omega^2 (3\gamma - 4)}{48\gamma(\gamma - 1)} \lim_{h \rightarrow \infty} (h^2 - 12z^2) + (7\gamma - 8) \frac{\rho (R^2 - r^2) \omega^2}{16(\gamma - 1)} = \\
& = \frac{(2\gamma^2 - 3\gamma + 1) \rho \omega^2 (R^2 - r^2)}{4\gamma(\gamma - 1)} = \frac{(3 - 2\nu)(R^2 - r^2) \rho \omega^2}{8(1 - \nu)},
\end{aligned}$$

что совпадает с решением Кри.

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow \infty} \sigma_\theta &= \frac{G}{R} \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\pi^2 n^2 \Delta_3} \left\{ \frac{\cos \frac{2\pi n z}{h}}{I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} \left[\frac{\gamma h I_1 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right)}{2(\gamma - 1)r} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\pi n R}{r} \frac{I_0 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right) I_1 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right)}{I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} - \frac{\pi n}{\gamma - 1} I_0 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) \right] - \right. \\
& - \frac{2h \cos \pi n}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ch \frac{\lambda_m h}{R} - 1}{J_0(\lambda_m) \left(sh \frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R} \right) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h} \right)^2 sh \frac{\lambda_m h}{2R}} \times \\
& \left[\left(\frac{\gamma_2}{\gamma - 1} J_0 \left(\frac{\lambda_m r}{R} \right) + \frac{R}{(\gamma - 1) \lambda_m r} J_1 \left(\frac{\lambda_m r}{R} \right) \right) ch \frac{\lambda_m z}{R} + \frac{J_1 \left(\frac{\lambda_m r}{R} \right)}{r} \times \right. \\
& \left. \times \left(z sh \frac{\lambda_m z}{R} - \frac{h}{2} ch \frac{\lambda_m z}{R} cth \frac{\lambda_m h}{2R} \right) \right] \Bigg\} + \\
& + \frac{\rho \omega^2}{48\gamma(\gamma - 1)} \lim_{h \rightarrow \infty} \left[\gamma_2 (3\gamma - 4) (h^2 - 12z^2) + 3\gamma (7\gamma - 8) (R^2 - r^2) + 6\gamma^2 r^2 \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma_2(3\gamma-4)\rho\omega^2}{8\gamma(\gamma-1)R} \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 R h^3 (\gamma-1) \cos \frac{2\pi n z}{h} \cos \pi n}{(3\gamma-4)\pi^4 n^4 h \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2}\right)} \times \\
&\quad \times \left[\frac{\gamma}{2\gamma-2} \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{h^2}\right) \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{2h^2}\right) + \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{2h^2}\right) \times \right. \\
&\quad \times \left. \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2}\right) - \frac{1}{\gamma-1} \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{h^2}\right) \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{2h^2}\right) \right] + \frac{\rho\omega^2}{48\gamma(\gamma-1)} \times \\
&\quad \times \lim_{h \rightarrow \infty} \left[\gamma_2(3\gamma-4)(h^2 - 12z^2) + 3\gamma(7\gamma-8)(R^2 - r^2) + 6\gamma^2 r^2 \right] = \\
&= \frac{\gamma_2 \rho \omega^2}{2\gamma} \lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^2 \cos \frac{2\pi n z}{h} \cos \pi n}{\pi^2 n^2 \left(1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2}\right)} \left[\frac{\gamma-2}{2\gamma-2} + 1 + \frac{\pi^2 n^2 R^2}{h^2} \times \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left(1 + \frac{\gamma-2}{2\gamma-2} - \frac{\gamma-2}{2\gamma-2} - 1 + \frac{\gamma-2}{4\gamma-4} + 1\right) + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{h^2} \left(\frac{\gamma-4}{4\gamma-4} + \frac{1}{2} \right) \right] + \\
&\quad \left. + \frac{1}{24(\gamma-1)} \left[(3\gamma-4)(h^2 - 12z^2) + \frac{3\gamma}{\gamma_2} (7\gamma-8)(R^2 - r^2) + \frac{6\gamma^2 r^2}{\gamma_2} \right] \right\} = \\
&= \frac{\gamma_2 \rho \omega^2}{2\gamma} \lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^2 \cos \frac{2\pi n z}{h} \cos \pi n}{\pi^2 n^2} \left[\frac{3\gamma-4}{2\gamma-2} - \frac{\gamma_2 \pi^2 n^2 R^2}{4(\gamma-1)h^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3\gamma_2 \pi^2 n^2 r^2}{4(\gamma-1)h^2} \right] + \frac{1}{24(\gamma-1)} \left[(3\gamma-4)(h^2 - 12z^2) + \frac{3\gamma}{\gamma_2} (7\gamma-8)(R^2 - r^2) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{6\gamma^2 r^2}{\gamma_2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\left. + \frac{6\gamma^2 r^2}{\gamma_2} \right\} = \frac{\rho\omega^2}{16\gamma(\gamma-1)} \left[\gamma_2^2 + \gamma(7\gamma-8) \right] (R^2 - r^2) + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2\gamma} =$$

$$= \frac{\rho\omega^2}{8(1-\nu)} \left[(3-2\nu)R^2 + (1+2\nu)r^2 \right]$$

что совпадает с решением Кри.

Касательные напряжения τ_{rz} , как нетрудно выяснить, при $h \rightarrow \infty$ тождественно обращаются в нуль.

Представляет интерес и случай, когда $h \rightarrow 0$, т.е. вращение диска вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска. Другими словами, при $h \rightarrow 0$ получим решение плоской задачи, носящей название того же автора Кри.

Заметим, что при $h \rightarrow 0$ ряды исчезают и решение определяется лишь неоднородными слагаемыми. Полагая в них $h = z = 0$, получим

$$\sigma_r = \frac{(7\gamma-8)}{16(\gamma-1)} (R^2 - r^2) = \frac{(3+\nu)}{8} \rho\omega^2 (R^2 - r^2), \quad \sigma_z = \tau_{rz} = 0,$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho\omega^2}{16(\gamma-1)} \left[(7\gamma-8)(R^2 - r^2) + 2\gamma r^2 \right] = \frac{\rho\omega^2}{8} \left[(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2 \right],$$

что совпадает с решением Кри для плоского диска.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. А б о в с к и й Н. П., А н д р е е в Н. П., Д е р у г а А. П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М.: Наука, 1978. – 228 с.
2. А б р а м я н Б. Л. К задаче асимметричной деформации круглого цилиндра // Докл. АН Арм. ССР. – 1954. – Т. 19, № 1. – С. 3-12.
3. А б р а м я н Б. Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника // Прикладная математика и механика. – 1954. – Т. 21. – Вып. 1. – С. 89-101.
4. А б р а м я н Б. Л., А л е к с а н д р о в А. Я. Осесимметричные задачи теории упругости // Труды Второго Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. – М., 1966. – Вып. 3. – С. 7-37.
5. А к и м о в В. А. Операторный метод решения задач теории упругости: Дис... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Мн., 1992. – 136 с.
6. А к с е н т я н О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 178-186.
7. А л е к с а н д р о в А. В., П о т а п о в В. Д. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. школа, 1990. – 400 с.
8. А л е к с а н д р о в А. Я., С о л о в ъ е в Ю. И. Пространственные задачи теории упругости. – М., 1978. – 462 с.
9. А л е к с а н д р о в В. М., К о в а л е н к о Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. – М.: Наука, 1986. – 335 с.
10. А л е к с и д з е М. А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
11. А м б а р ц у м я н С. А. Теория анизотропных пластин. – М.: Физматгиз, 1967. – 266 с.
12. А м б р а з е в и ч В. Л., К р у ш е в с к и й А. Е. Построение уточненной теории трансверсально-изотропных пластин на основе методов аналитической механики // Материалы 25-й науч.-техн. конф. / БПИ. – Мн., 1969. – С. 39-49.
13. Аналитический расчет напряженно-деформированного состояния горячештамповочного пресса К-8544 при статическом действии рабочих нагрузок: Отчет о НИР (заключит.) / БПИ, Рук. работы А.Е.Крушевский; № ГР 10005065. – Мн., 1972. – 36 с.

14. А н д р е А н г о. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1965. – 779 с.
15. А п а н о в и ч В. Н. Использование полной системы полиномиальных решений уравнений теории упругости для расчета напряженно-деформированного состояния объемных деталей методом наименьших квадратов // Вопросы транспортного машиностроения. – Тула: ТПИ, 1978. – С. 37-45.
16. А п а н о в и ч В. Н. Исследование устойчивости и сходимости методов Ритца и Треффца применительно к некоторым пространственным задачам теории упругости // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Вып. 8. – Мн., 1981. – С. 16-20.
17. А п а н о в и ч В. Н. Применение принципа Лагранжа для решения некоторых пространственных статических и динамических прикладных задач теории упругости: Дис... канд. техн. наук: 01.02.04. – Мн., 1982. – 184 с.
18. А п а н о в и ч В. Н. Метод внешних конечно-элементных аппроксимаций. – Мн.: Выш. школа, 1991. – 172 с.
19. А р ж а н ы х И. С. Интегральные уравнения основных задач теории поля и теории упругости. – Ташкент, 1954. – 108 с.
20. А р у т ю н я н Н. Х., А б р а м я н Б. Л. Кручение упругих тел. – М.: Физматгиз, 1963. – 686 с.
21. А х и е з е р Н. И. Лекции по вариационному исчислению. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 248 с.
22. Б а б л о я н А. А., М е л к о н я н А. П. Об одной осесимметричной контактной задаче для цилиндра конечной длины // Изв. АН Арм. ССР. Механика. – 1973. – Т. 26, № 5. – С. 3-19.
23. Б а й д а Э. Н. Общие решения теории упругости и задачи о параллелепипеде и цилиндре. – Л.: Госстройиздат, 1961. – 64 с.
24. Б а й д а Э. Н. К решению граничных задач методом суперпозиции решений Ламе // Труды Ленингр. инж.-строит. ин-та. – 1970. – Вып. 63. – С. 129-144.
25. Б а й д а Э. Н. Некоторые пространственные задачи теории упругости. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. – 231 с.
26. Б е л а н о в В. Я. Исследование деформаций и совершенствование метода расчета на жесткость основных корпусных деталей угледобывающих комбайнов (на примере комбайна 2К-52М): Дис... канд. техн. наук: 05.05.06. – Донецк, 1980. – 156 с.

27. Беланов В. Я., Крушевский А. Е. Вывод расчетных уравнений для определения напряженно-деформированного состояния корпусных деталей типа коробок // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Вып. 3. – Мн., 1976. – С. 81-87.

28. Беланов В. Я., Крушевский А. Е. Определение деформаций изгиба корпуса главного редуктора режущей части угольного комбайна 2К-52 // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Вып. 5. – Мн., 1978. – С. 10-18.

29. Беляев Н. М. Соппротивление материалов. – М.: ГИТЛ, 1976. – 618 с.

30. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 448 с.

31. Бидерман В. П. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высш. школа, 1972. – 416 с.

32. Блох В. И. Теория упругости. – Харьков: ХГУ, 1964. – 484 с.

33. Бойко Н. Я., Крушевский А. Е. К задаче изгиба упругого цилиндра при заданных на торцах нормальных напряжениях и касательных перемещениях // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1973. – С. 94-107.

34. Бойко Н. Я. Сжатие упругого параллелепипеда при действии на него полного и усеченного жесткого клинообразного штампа // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1978. – Вып. 5. – С. 18-28.

35. Бойко Н. Я. Применение вариационного принципа Лагранжа для решения задач статики упругого параллелепипеда и цилиндра при согласованных краевых условиях на некоторых гранях: Дис... канд. техн. наук: 01.02.04. – Мн., 1992. – 137 с.

36. Бондаренко П. А. Полигармонические полиномы. – Ташкент: ФАН, 1968. – 172 с.

37. Брусиловская Г. А., Ершов Л. В. О напряженно-деформированном состоянии конечного цилиндра, находящегося под действием динамических нагрузок // Прикладная математика и механика. – 1973. – № 4. – С. 724-730.

38. Бухарин Г. Н. Исследование по задаче П.Ф.Папковича в случае осесимметричной деформации цилиндра // Проблемы механики тв. деформ. тела. – Л.: Судостроение, 1970. – С.89-98.

39. Валов Г. М. Задача о равновесии прямоугольного параллелепипеда, на основаниях которого заданы нормальные напряже-

ния и касательные перемещения, а на боковой поверхности напряжения // Научные докл. высшей школы; Физ.-мат. науки. – 1958. – № 4. – С. 87-92.

40. В а л о в Г. М. Задача о сжатии прямоугольного параллелепипеда, на основаниях которого заданы нормальные перемещения и касательные напряжения, а на боковой поверхности напряжения // Научные докл. высшей школы; Физ.-мат. науки. – 1959. – № 2. – С. 107-112.

41. В а л о в Г. М. Осесимметричная задача о сжатии упругого круглого цилиндра, покоящегося на гладком жестком основании // Механика и машиностроение. – 1961. – № 6. – С. 151-154.

42. Метод конечных элементов / П.М.Варвак, И.М.Бузун, А.С. Городецкий и др. – Киев: Вища школа, 1981. – 176 с.

43. В а р г а Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации при численном анализе. – М.: Мир, 1974. – 126 с.

44. Вариационные методы решения задач теории упругости: Отчет о НИР (заключит.) / БПИ; Рук. работы А.Е. Крушевский; № ГР 81028446. – Мн., 1986. – 82 с.

45. В а с и д з у К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

46. В а т с о н Г. Н. Теория бесселевых функций. – Изд-во иностранная литература. – 1949. – Т. 1. – 798 с.

47. В е к у а И. Н. Об одном обобщении классической теории упругих оболочек // Третий Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике: Аннотации докл. – М., 1968. – С. 65-66.

48. В е л и ч к о Л. С., К р у ш е в с к и й А. Е., С о с н и н Г. П. Решение задачи о равновесии периодонта при действии на зуб внешних сил // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1976. – Вып. 3. – С. 63-80.

49. В и ш н я к о в В. В., Б е р е с н е в А. Н. Решение первой и второй основных задач теории упругости для прямоугольной призмы // Докл. 3-й сибирской конф. по математике и механике: Сб. – Томск, 1964. – С. 300-301.

50. В л а с о в В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. – М.: Стройиздат, 1975. – 224 с.

51. В л а с о в В. З. Общая теория оболочек. – М.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.

52. В л а с о в В. З. Тонкостенные пространственные системы. – М.: Госстройиздат, 1958. – 502 с.

53. В л а с о в Б. Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты // Вестник Моск. ун-та; Сер. математики, механики, астрономии, физики, химии. – 1957. – № 2. – С. 25-34.

54. В л а с о в Б. Ф. Построение методом прямых двусторонних приближений по энергии в статике упругих элементов сооружений: Автореферат дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.03. – М., 1974. – 42 с.

55. В о р о в и ч И. И., С а л м а н о в В. С. Основные уравнения и граничные условия одной приближенной теории изгиба пластин // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1937. – № 46-53.

56. В о р о в и ч И. И., А л е к с а н д р о в В. М., Б а б е ш к о В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. – 455с.

57. В о р о в и ч И. И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // Материалы I Всесоюзной школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. – Тбилиси, 1975. – С. 51-149.

58. В о р о в и ч И. И., К о в а л ь ч у к В. Е. О базисных свойствах одной системы однородных решений // Прикладная математика и механика. – 1976. – Т. 31. – Вып. 5. – С. 861-869.

59. Г а л е р к и н В. Г. Упругие прямоугольные и треугольные свободно опертые толстые плиты, подверженные изгибу // Собр. соч. – М., 1952. – Т. 1. – С. 322-327.

60. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – 5-е изд., стереотип. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

61. Г р и г о л ю к Э. И., С е л е з о в И. Т. Механика твердых деформируемых тел, неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. – Т. 5. – 273 с.

62. Г р и н б е р г Г. Л. О разложении функции в ряды $f(x) = \sum A_k F(\alpha_k x)$. – Изд-во ЛПИ, 1931. – Т. 33. – С. 22-44.

63. Г р и н ч е н к о В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.

64. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
65. Груздев Ю. А., Прокопов В. К. Полимоментная теория толстых плит // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 32, № 2. – С. 344-352.
66. Гузь А. Н. О современных направлениях механики твердого деформируемого тела // Прикладная механика. – 1985. – Т. 21, № 9. – С. 3-11.
67. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. – М., 1953. – 415 с.
68. Добрушкин В. А. Краевые задачи динамической теории упругости для клиновидных областей. – Мн.: Наука и техника, 1988. – 416 с.
69. Журавков М. А., Скляр О. Н. Один способ решения трехмерных задач теории упругости в напряжениях для параллелепипедной и цилиндрической форм // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1989. – Вып. 16. – С. 19-21.
70. Зенкевич С. Метод конечных элементов в механике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
71. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с. – Т. 2. – 537 с.
72. Ионов В. Н. Об одном методе решения пространственных задач // Изв. вузов. Машиностроение. – 1960. – № 1. – С. 3-9.
73. Ионов В. Н., Огибалов П. М. Прочность пространственных элементов конструкций. В 3 ч. Ч. 1. Основы механики сплошной среды. – М.: Высш. школа, 1979. – 384 с.
74. Ионов В. Н., Огибалов П. М. Прочность пространственных элементов конструкций. В 3 ч. Ч. 2. Статика и колебания. – М.: Высш. школа, 1979. – 534 с.
75. Ионов В. Н., Огибалов П. М. Прочность пространственных элементов конструкций. В 3 ч. Ч. 3. Динамика и волны напряжений. – М.: Высш. школа, 1980. – 440 с.
76. Ильюшин А. А., Ленский В. С. Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1959. – 366 с.
77. Кабулов В. К. Алгоритмизация в механике сплошных сред. – Ташкент: ФАН, 1979. – 304 с.

78. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – 4-е изд., исправл. – М.: Наука, 1979. – 576 с.
79. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1972. – 708 с.
80. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. – М.: Иностранная литература, 1948. – 290 с.
81. Клемм Дж. Л., Литтл Р. В. Полубесконечный упругий цилиндр под действием самоуравновешенной торцевой нагрузки // Механика. – 1972. – № 1. – С. 12-15.
82. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. – М.: Высш. школа, 1975. – 526 с.
83. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах. – М.: Иностранная литература, 1956. – 192 с.
84. Кондратюк В. Ф., Крушевский А. Е. Определение упругих деформаций конструкций с круговой осью на основе методов аналитической механики // Сб. матер. секции теор. и прикл. мех. 26-й науч.-техн. конф. / БПИ. – Мн., 1970. – С. 58-63.
85. Кондратюк В. Ф., Крушевский А. Е. Расчет упругих элементов тензозвеньев на основе теории упругости // Технология торфяного производства и торфяные машины: Сб. – Мн., 1973. – Вып. 2. – С. 103-107.
86. Кондратюк В. Ф., Крушевский А. Е. К вопросу расчета станины пресса К-8544 на прочность // Технология торфяного производства и торфяные машины: Сб. – Мн., 1973. – Вып. 2. – С. 108-111.
87. Кондратюк В. Ф., Крушевский А. Е. Некоторые вопросы расчета корпусных деталей машины на основе методов аналитической механики с применением ЭВМ // Теоретическая и прикладная механика: Тематический сб. – Мн., 1973. – С. 111-120.
88. Кондратюк В. Ф. Определение напряженно-деформированного состояния некоторых корпусных (базовых) деталей пресов на основе вариационного принципа Лагранжа с применением ЭЦВМ: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.02. – Мн., 1974. – 300 с.
89. Кононенко Е. С. Задача о сжатии параллелепипеда между жесткими плитами без скольжения // Исследования по теории сооружений. – М., 1954. – Вып. 6. – С. 455-648.

90. Напряженное состояние пластинок с отверстиями в трехмерной постановке: Учебное пособие / А.С.Космодамианский, В.Н.Ложкин, Ю.В.Мысовский, В.А.Шалдырван. – Донецк: Изд-во Донецк. ун-та, 1970. – 250 с.

91. Крушевский А. Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. – Мн.: Наука и техника, 1967. – 228 с.

92. Крушевский А. Е. Общее решение задачи равновесия упругого цилиндрического тела // Материалы 25-й науч.-техн. конф. / БПИ. – Мн., 1969. – С.3-12.

93. Крушевский А. Е. Некоторые вопросы обоснования вариационных уравнений равновесия элементарного столбика и слоя упругого тела // Материалы 25-й науч.-техн. конф. / БПИ. – Мн., 1969. – С.12-18.

94. Крушевский А. Е. Осесимметричное растяжение (сжатие) упругого цилиндра при заданных на торцах касательных напряжениях и нормальных перемещениях // Материалы 26-й науч.-техн. конф. / БПИ. – Мн., 1970. – С.43-51.

95. Крушевский А. Е. Решение задачи о равновесии плиты в точной постановке // Материалы 26-й науч.-техн. конф. / БПИ. – Мн., 1970. – С.51-57.

96. Крушевский А. Е. Точное решение некоторых задач пространственной теории упругости // Тезисы доклада на 3-й респ. конф. математиков Белоруссии. – Мн., 1971. – С. 167.

97. Крушевский А. Е., Сеньюта Ю. А. Операторное решение осесимметричной теории упругости в цилиндрических координатах // Теоретическая и прикладная механика: Тематический сб. – Мн., 1973. – С. 89-93.

98. Крушевский А. Е., Кондратюк В. Ф. Об одном способе построения Лагранжа первого рода в теории упругости // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1974. – Вып. 1. – С. 34-38.

99. Крушевский А. Е. К вопросу о расчете сооружений на устойчивость // Строительные конструкции и теория сооружений: Сб. – Мн., 1974. – Вып. 2. – С. 45-58.

100. Крушевский А. Е. Построение уточненной теории пластин на основе методов аналитической механики // Строительные конструкции и теория сооружений: Сб. – Мн., 1974. – Вып. 2. – С. 32-45.

101. Крушевский А. Е., Чураков В. М. Примеры решения некоторых задач математической теории упругости в неортогональных рядах // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1975. – Вып. 2. – С. 91-102.

102. Применение методов аналитической механики к задаче определения напряженно-деформированного состояния корпусных деталей прессов / А.Е.Крушевский, В.Ф.Кондратюк, Н.Я.Бойко, В.М.Шиповский // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1975. – Вып. 2. – С. 102-113.

103. Крушевский А. Е., Чураков В. М. Решение некоторых задач математической теории упругости в неортогональных рядах // Тезисы доклада на 4 респ. конф. математиков Белоруссии. – Мн., 1975. – С. 69.

104. Крушевский А. Е., Беланов В. Я. Определение деформации растяжения (сжатия) главного корпуса редуктора режущей части угольного комбайна 2К-52. – Деп. ЦНИЭИ угольной промышленности. – № 448 // Рж: Горное дело. – 1975. – С. 10.

105. Крушевский А. Е., Севенюк А. З. Приближенное определение спектра частот продольных колебаний упругого параллелепипеда при точном выполнении краевых условий на его четырех гранях // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1975. – Вып. 5. – С. 3-10.

106. Крушевский А. Е., Севенюк А. З. Определение спектра собственных частот продольных колебаний упругих стержней с прямоугольным сечением при точном выполнении краевых условий отсутствия нагрузки на боковой поверхности // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1979. – Вып. 6. – С. 3-8.

107. Крушевский А. Е., Скляр О. Н. Изгиб упругого параллелепипеда при точном выполнении условий отсутствия нагрузки на четырех боковых гранях // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1979. – Вып. 6. – С. 15-22.

108. Крушевский А. Е., Севенюк А. З. Применение степенных рядов для построения структуры решения задачи сжатия упругого параллелепипеда при отсутствии нагрузки на четырех гранях // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1980. – Вып. 7. – С. 36-39.

109. Крушевский А. Е., Апанович В. Н. Сравнительное исследование методов Ритца и Треффца применительно к ре-

шению некоторых пространственных задач теории упругости // Тезисы докл. 5-й респ. конф. математиков Белоруссии. – Гродно, 1980. – С. 162.

110. Крушевский А. Е., Севенюк А. З. Построение структуры решения некоторых задач теории упругости // Тезисы докл. 5-й респ. конф. математиков Белоруссии. – Гродно, 1980. – С. 163.

111. Крушевский А. Е., Скляр О. Н. Построение структуры решения задачи изгиба упругого параллелепипеда при отсутствии нагрузки на четырех гранях // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1981. – Вып. 8. – С. 6-11.

112. Крушевский А. Е., Апанович В. Н. К вопросу расчета базовых деталей транспортных машин как континуальных динамических систем // Вопросы транспортного машиностроения. – Тула: ТПИ, 1981. – С. 76-79.

113. Крушевский А. Е., Апанович В. Н. Решение задачи о свободных колебаниях массивных конструкций методом последовательных приближений // Изв. вузов. Машиностроение. – 1981. – № 9. – С. 17-20.

114. Крушевский А. Е., Акимов В. А. Исследование рядов перемещений в задаче о равновесии плиты в точной постановке // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1982. – Вып. 9. – С. 26-31.

115. Крушевский А. Е., Апанович В. Н. Решение некоторых задач о собственных колебаниях стержней в постановке трехмерной динамической теории упругости // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1982. – Вып. 9. – С. 32-38.

116. Крушевский А. Е. Решение задачи о равновесии периодонта как оболочки, ограниченной двумя эллиптическими двуполостными гиперboloидами // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1983. – Вып. 10. – С. 11-21.

117. Крушевский А. Е., Апанович В. Н. Распространение упругих волн в кубическом образце при импульсивном нагружении // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1983. – Вып. 10. – С. 27-31.

118. Крушевский А. Е., Апанович В. Н. О сходимости вариационного метода при точечном выполнении граничных условий // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1984. – Вып. 11. – С. 13-17.

119. Крушевский А. Е., Акимов В. А. К вопросу об определении коэффициентов неортогональных рядов на примере равновесия жестко заземленной плиты // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1984. – Вып. 11. – С. 21-27.

120. Крушевский А. Е., Апанович В. Н. Программная реализация аналитического вариационного метода решения трехмерных задач теории упругости // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1985. – Вып. 12. – С. 14-17.

121. Крушевский А. Е., Федута А. А. Решение задачи о совместном кручении и изгибе из плоскости кривизны бруса с круговой осью прямоугольного поперечного сечения // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1985. – Вып. 12. – С. 21-29.

122. Крушевский А. Е. Аналитическое исследование напряженного состояния области соединения зерна шлифовальника со связкой // Машиностроение: Сб. – Мн., 1985. – Вып. 10. – С. 32-36.

123. Крушевский А. Е., Федута А. А. Определение напряженного состояния в криволинейных элементах рам полуприцепов // Машиностроение: Сб. – Мн., 1986. – Вып. 11. – С. 112-115.

124. Крушевский А. Е. Сжатие (растяжение) упругого прямоугольника при заданных на контуре напряжениях // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1986. – Вып. 13. – С. 13-18.

125. Крушевский А. Е., Луцко Н. Я. Построение алгоритма и пакета программ для решения осесимметричных статических задач теории упругости на ЭВМ // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1986. – Вып. 13. – С. 36-41.

126. Крушевский А. Е., Акимов В. А. Операторный метод определения коэффициентов неортогональных рядов // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1987. – Вып. 14. – С. 54-58.

127. Крушевский А. Е., Луцко Н. Я. Применение метода обратной итерации к решению задач о собственных колебаниях цилиндрического тела // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1987. Вып. 14. – С. 58-61.

128. Крушевский А. Е., Горецкий И. А. Вывод обыкновенных дифференциальных уравнений для расчета криволинейных элементов рам полуприцепов // Тезисы докл. науч.-техн. конф., посвященной 70-летию Октября / МАЗ. – Мн., 1987. – С. 70-74.

129. К р у ш е в с к и й А. Е. Осесимметричное растяжение (сжатие) упругого конечного цилиндра при заданных на его поверхности напряжениях // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1988. – Вып. 15. – С. 59-63.

130. К р у ш е в с к и й А. Е., Ф е д у т а А. А., Г о р е ц к и й И. А. Определение напряжений в упругих элементах конструкций с круговой осью на основе модифицированного метода Канторовича-Власова // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1988. – Вып. 15. – С. 143-149.

131. К р у ш е в с к и й А. Е. Исследование напряженного состояния упругого конечного цилиндра, вращающегося с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1989. – Вып. 16. – С. 65-70.

132. К р у ш е в с к и й А. Е. Применение вариационного принципа Лагранжа к определению частот собственных колебаний упругих тел // Колебания и волны в экологии, технологических процессах и диагностике: Тез. докл. международной конф. – Мн., 1993. – С. 81.

133. К р у ш е в с к и й А. Е., С е в е н ю к А. З. Построение дифференциальной структуры решения задачи о равновесии упругого цилиндра // Сб. научн. статей кафедры сопротивления материалов и теоретической механики Брестского политехн. ин-та. – Брест, 1994. – С. 94-97.

134. К р у ш е в с к и й А. Е. Приведение краевых задач теории упругости для конечных тел к функциональным уравнениям // Белорусский конгресс по теоретической и прикладной механике: Тезисы докл. – Мн., 1995. – С. 337-338

135. К р у ш е в с к и й А. Е., Н а у м о в и ч С. А. Математическое моделирование равновесия периодонта зуба // Докл. АН Беларуси. – 1997. – Т. 41, № 1. – С. 38-43.

136. К р у ш е в с к и й А. Е., Н а у м о в и ч С. А. Исследование напряженного состояния области соединения периодонта с корнем зуба // Радиоэлектроника. Биомедицинская радиоэлектроника. – 1997. – № 4. – С. 90-93.

137. К р у ш е в с к и й А. Е., Б о й к о Н. Я. Метод построения решений задач упругого цилиндрического тела с согласованными условиями на торцах на базе вариационного принципа Лагранжа // Весці АН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 1997. – № 1. – С. 19-23.

138. Крушевский А. Е., Бойко Н. Я. Сжатие упругого свободного прямоугольного параллелепипеда при действии на торцы нормальных перемещений клинообразной эпюры // Весці АН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 1997. – № 2. – С. 58-60.

139. Курманбаев Б. В. Сжатие упругих призматических тел // Вопросы вычислительной и прикладной математики: Сб. – Ташкент, 1973. – Вып. 18. – С. 57-66.

140. Ланцош К. Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965.

141. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. – М., 1953. – 379 с.

142. Лейбензон Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1943. – 364 с.

143. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1943. – 464 с.

144. Лисицын Б. М. Приложение метода определяющих состояний к решению пространственной задачи теории упругости // Сопротивление материалов и теория сооружений: Сб. – Киев, 1968. – Вып. 8. – С. 9-18.

145. Лурье А. И. Пространственные задачи. Теория упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. – 491 с.

146. Луцко Н. Я. Анализ способов построения связей в модифицированном вариационном методе Треффца // Теоретическая и прикладная механика: Сб. – Мн., 1987. – Вып. 14. – С. 61-65.

147. Мальцев Л. Е. Сжатие изотропной призмы // Труды Тюменского индустр. ин-та. – 1961. – Вып. 8. – С. 34-42.

148. Мальцев Л. Е. Сходимость методов Филоненко-Бородича и Папковича // Вестник Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. – 1970. – № 3. – С. 99-106.

149. Мартыненко М. Д. Некоторые пространственные задачи теории упругости: Автореферат дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.041. – Мн., 1971. – 18 с.

150. Мартыненко М. Д., Журавков М. А. Метод квазифункций Грина в механике деформируемого твердого тела. – Мн.: Университетское, 1993. – 183 с.

151. Метод граничных интегральных уравнений, вычислительные аспекты и приложения; Под ред. Т.Круз, Ф.Риццо // Механика. – 1978. – Вып. 15. – 226 с.

152. М и л е й к о в с к и й И. Е. Расчет массивных конструкций методами строительной механики пространственных систем. – М.: Гос. изд-во по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1958. – 183 с.
153. М и х л и н С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. – М., Л., 1952. – 252 с.
154. М и х л и н С. Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
155. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966. – 707 с.
156. Н о в а ц к и й В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
157. Н у л л е р Б. М. О соотношении обобщенной ортогональности. П.А. Шиффа // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33, № 2. – С. 376-382.
158. О б р а з ц о в И. Ф. Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных конструкций. – М.: Машиностроение, 1966.
159. Определение погрешности измерения в зависимости от упругих деформаций деталей контрольно-измерительного прибора: Отчет о НИР (заключит.) / БПИ; Рук. работы А.Е.Крушевский, № ГР 69028606. – Мн., 1972. – 73 с.
160. П а п к о в и ч П. Ф. Теория упругости. – М.: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
161. П а р т о н В. З., П е р л и н П. И. Интегральные уравнения теории упругости. – М.: Наука, 1977. – 312 с.
162. П о б е д р я Б. Е., Ш е ш е н и н С. В. Некоторые задачи о равновесии упругого параллелепипеда // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. – № 1. – С. 74-86.
163. П о д и л ь ч у к Ю. Н. Теория упругости. – Киев: Наук. думка, 1979. – 240 с.
164. Расчеты на прочность в машиностроении. В 3 т. / С.Д. Пономарев, Б.Д. Бидерман, К.К. Лихарев и др. – М.: Машгиз, 1958. – 1959. – Т. 1. – 1958. – 884 с. – Т. 2. – 1959. – 974 с. – Т. 3. – 1959. – 1118 с.
165. Построение уточненной методики расчета криволинейных элементов полуприцепов и ее внедрение: Отчет о НИР (заключит.) / БПИ; Рук. работы А.Е.Крушевский; № ГР 81050677. – Мн., 1981. – 40 с.
166. П р а т у с е в и ч Я. А. Вариационные методы в строительной механике. – М.: Госстройиздат, 1948. – 400 с.

167. Приложение вариационных методов к расчету напряженно-деформированного состояния станины однокривошипных прессов простого действия на примере расчета пресса К-2535А усилием 315 т.с.: Отчет о НИР (заключит.) / БПИ; Рук. работы А.Е. Крушевский; № ГР 690286066. – Мн., 1973. – 86 с.

168. П р о к о п о в В.К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям // Труды Ленинград.политехн. ин-та. – 1967. – № 279. – С. 31-46.

169. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник. В 3 т. – М., 1968. – Т. 1. – 821 с.

170. Разработка метода расчета и расчет напряжений и деформаций станины горяче-штамповочного пресса К-8544: Отчет о НИР (заключит.) / БПИ; Рук. работы А.Е.Крушевский; Инв. № Н-1487. – Мн., 1971. – 66 с.

171. Разработка инструкции и программ расчетов напряженно-деформированного состояния базовых деталей кривошипных прессов на основе методов аналитической механики: Отчет о НИР (заключит.) / БПИ; Рук. работы А.Е.Крушевский; № ГР 74051233. – Мн., 1975. – 68 с.

172. Разработка инженерной методики расчета рам большегрузных транспортных средств и ее внедрение: Отчет о НИР (заключит.) / БПИ; Рук. А.Е.Крушевский; № ГР 79050109. – Мн., 1980. – 47 с.

173. Разработка и внедрение методики определения упругих напряжений и деформаций криволинейных элементов рам полуприцепов МАЗ 9988 и МАЗ 9944: Отчет о НИР (заключит.) / БПИ; Рук. работы А.Е.Крушевский; № ГР 0182.2040541. – Мн., 1982. – 56 с.

174. Разработка метода и пакета программ для определения напряженно-деформированного состояния деталей штамповой оснастки: Отчет о НИР (заключит.) / БПИ; Рук. работы А.Е.Крушевский; № ГР 01.830079317. – Мн., 1985. – Т. 1. – С. 93. – Т. 2. – С. 50.

175. Разработка методов и пакета программ для расчета корпуса на жесткость и прочность по теме 1152.К: Отчет о НИР (заключит.) / БПИ; Рук. работы Н.И.Горбач; № ГР 01.86.0124787. – Мн., 1989. – 132 с.

176. Р в а ч е в В. Л. Методы алгебры логики в математической физике. – Киев: Наук. думка, 1974. – 259 с.

177. Р е к а ч В. П. Руководство к решению задач по теории упругости. – М.: Высш. школа, 1966. – 328 с.

178. Р е й с с н е р Э. О некоторых вариационных теоремах теории упругости // В кн. Проблемы механики сплошной среды (К 70-летию акад. Н.И.Мухелишвили). – М.: АН СССР, 1961.
179. Р о з и н Л. А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ (метод конечных элементов). – Л.: Энергия, 1971. – 208 с.
180. С к л я р О. Н. Задачи расчета напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов с прямолинейными образующими: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Мн., 1993. – 131 с.
181. С м и р н о в В. И. Курс высшей математики. В 5 т. – М.: Гостехиздат, 1953 – 1954. – Т. 1. – 1954. – 472 с. – Т. 2. – 1954. – 627 с. – Т. 3. – 1933. – 736 с. – Т. 4. – 1953. – 804 с.
182. С о с н и н Г. П. Распределение напряжений в периодонте при действии на зуб вертикального и горизонтального давлений: Материалы первой респ. конф. стоматологов Армении. – Ереван, 1966. – С. 13-15.
183. С т р е н г Ф и к с. Дж. Теория метода конечных элементов. – М., 1947. – 348 с.
184. С т у п а к С. Ф. К решению интегральных уравнений пространственных задач теории упругости // Механика деформируемого твердого тела и родственные проблемы анализа. – М.: МИХМ, 1978. – С. 8-15.
185. С у с л о в а Н. Н. Методы решения пространственной задачи теории упругости для тела в форме параллелепипеда. – М., 1976. – Деп. В ВИНТИ. – № 3267-76. – 1079. – 249 с.
186. Т и м о ш е н к о С. П. Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 501 с.
187. Трехмерные задачи математической теории упругости / Под ред. В.Д.Купрадзе. – М.: Наука, 1976. – 627 с.
188. У с т и н о в Ю. А. О полноте системы однородных решений теории плит // Прикладная математика и механика. – Вып. 3. – Т. 40. – 1976. – С. 902-919.
189. У ф л я н д Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
190. Ф е д у т а А. А. Применение вариационного принципа Лагранжа к расчету элементов конструкций с круговой осью на статическую прочность: Дис... канд. техн. наук: 01.02.04. – Мн., 1992. – 200 с.
191. Ф и л о н е н к о – Б о р о д и ч М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях // ПММ. – Вып. 2. – Т. 15. – 1951. – С. 37-48.

192. Х з а р д ж я н С. М. Напряженное состояние упругого призматического тела со свободной или жестко закрепленной боковой поверхностью // *Механика твердого тела.* – 1978. – № 3. – С. 161-172.

193. Ш е р м а н Д. И. Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах аналитической теории упругости // *Труды аналитической теории упругости. Труды Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механике.* – АН СССР, 1962. – С. 405-467.

194. Chree C., *Quart J. Pure and Appl. // Math.* – 1889. – V. 23, no 335.

195. Deyev V.M. A contribution to the expression of the three-dimensional problem of the biharmonic and harmonic functions // *Theory plates and shells.* – Bratislava, 1966. – P. 175-182.

196. Fredholm I. Solution d'un probleme fondamental de la theory de l'elasticite. – 1906. – V. 2, no 28. – P. 3-8.

197. Kaliski S. The dinamical problem the rectangular parallelepiped. *Archiwum mechaniki stosowanej.* – T.10. Warsawa., 1958. – P. 330-369.

198. Lauricella G. Suel integrazione dell equazioni dell equilibriodli corpi elastici isotropi. *Pend. R. Accd Lincei. Ser. 5.* – 1906. – V. 15. – P. 426-432.

199. Lee E.N. Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. Topics in plasticity. Anniversary Volume in Honor of Professor E.H.Lee. AM Press P.O.Box 15744, Ann Arbor Michigan 48106-5744. – P. 15-30.

200. Ritz. W. *Journ. F. Math. (crelle).* – 1908. – V. 135.

201. Schiff P.A. Sur l'equilible d un cylindre elastique. *J.Math. pures. et appliquels. Ser. 3.* – 1883. – No 9. – P. 407-421.

202. Sneddon J.N. and Berry D.S. The classical theory of elasticity. Springer -Verlag. Berlin, -Gottingen-Heidelberg, 1958. – 219 p.

203. Sobiesiak K. *Metody Wariacyjne w mechanice konstrukcji i teorii Sprezystosci,* Lublin, 1982. *Prace instytutu Technologii i Eksploatacji Maszyn, Seria Anr. 9.* – P. 153.

204. Sokolnikoff I.s. *Mathematical theory of elasticity.* – 2-ed. – New York, 1956. – 476 p.

205. Szelagowski F. Solution of thee-dimensional problem of the theory of elasticity in functions of complex variables. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn.,* 1962. – V. 10. – № 7. – P. 253-260.

206. Prager W. The General Variational principle of the Theory of Structural stability // *Quart. Appl. Math.* – 1947. – No 4. – P. 378-384.

Научное издание

КРУШЕВСКИЙ Александр Евгеньевич

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ МЕХАНИКУ
УПРУГИХ ТЕЛ

Редактор Т.Н.Микулик

Компьютерная верстка Н.А.Школьниковой

Подписано в печать 19.02.2004.

Формат 60x84 1/16. Бумага типографская № 2.

Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 19,5. Уч.-изд. л. 15,2. Тираж 200. Заказ 303.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский национальный технический университет.

Лицензия ЛВ №155 от 30.01.2003. 220013, Минск, проспект Ф.Скорины, 65.